Ma.
o
198^a
2

ELEMENTE

DER

VERMESSUNGSKUNDE

EIN

LEHRBUCH DER TECHNISCHEN GEOMETRIE

VON

Dr CARL MAX v. BAUERNFEIND

Director und Professor am Königl. Polytechnikum in München.

SECHSTE SEHR VERMEHRTE AUFLAGE.

ZWEITER BAND.

STUTTGART.

VERLAG DER J. G. COTTA'SCHEN BUCHHANDLUNG.

1879.

BIBLIOTHECA BAMBERGENSIS

Druck von Gebrüder Kröner in Stuttgart.

Vorrede zur sechsten Auflage.

Es sind jetzt zwanzig Jahre verflossen seit dieses Buch vollständig erschienen ist und angefangen hat sich über alle Culturländer der Erde zu verbreiten. Seine Geschichte ist in den Vorreden zu den fünf ersten Auflagen enthalten welche, weil sie zugleich einen Einblick in die Geschichte der Vermessungskunde der letzten Jahrzehnte gewähren, im Auszuge auch der sechsten Auflage vorgedruckt sind.

Die praktische Geometrie ist seit dreissig Jahren eine andere geworden, und indem das vorliegende Buch von Anfang an bezweckte ihren Inhalt systematisch zu ordnen, im Einzelnen zu erweitern oder besser zu begründen, nach allen Richtungen aber klar und wissenschaftlich darzustellen und auf etwa noch vorhandene Lücken aufmerksam zu machen, stellte es sich zu den Fortschritten der Vermessungskunde in enge Beziehung, und es haben beide günstig auf einander eingewirkt.

Die Anregung zur Erweiterung und Vertiefung der geodätischen Literatur, in deren höheren Gebieten seit dem Erscheinen der Werke von Delambre, Struve, Gauss, Bessel u. A. Stillstand eingetreten war, während in den niederen noch immer die Lehrbücher der praktischen Geometrie von J. T. Mayer und C. J. Ulrich massgebend blieben, ging in der letztgenannten Richtung von dem mit dem Jahre 1840 beginnenden Staatseisenbahnbaue und in der ersteren von den Gelehrten der zu Anfang der sechziger Jahre durch Baeyer ins Leben gerufenen Europäischen Gradmessung aus. Diese grossen technischen und wissenschaftlichen Unternehmungen riefen eine rege praktische Thätigkeit und zu deren Förderung mannichfaltige Erfindungen und Verbesserungen von Messapparaten nebst einer beträchtlichen Zahl von Büchern

und Abhandlungen über Geodäsie, Markscheidekunde und Hydrometrie, sowie auch einige Zeitschriften für das Vermessungswesen hervor.

Unter die durch das Bedürfniss der Ingenieure hervorgerufenen Lehrbücher gehört das vorliegende, und es hat seinen ursprünglichen Zweck durchaus nicht verändert, wenn es mehr und mehr bemüht war auch dem Geometer, dem Markscheider und dem Geographen in gleicher Weise wie dem Ingenieur zu dienen und für das Studium der höheren Geodäsie und der Astronomie eine feste Grundlage zu bereiten auf der man sicher bis zu den höchsten Höhen weiter bauen kann. Denn an den Ingenieur gelangen nicht selten Vermessungsarbeiten welche eigentlich den eben genannten Kategorien von Technikern zuständen, und er würde die an ihn gestellten Anforderungen nur ungenügend befriedigen können, wäre er nicht auch mit denjenigen Theilen der markscheiderischen und astronomischen Beobachtungen und Berechnungen vertraut welche die unterirdischen und die geographischen Ortsbestimmungen zur Aufgabe haben. Von diesem Standpunkte des Ingenieurs aus sind die zahlreichen Zusätze und Verbesserungen dieser neuen Auflage zu beurtheilen.

Zu den Verbesserungen der gegenwärtigen Auflage trug wesentlich bei die eben so gründliche als wohlwollende Besprechung der fünften Auflage im 23 Bande des Civilingenieurs durch Herrn Regierungsrath Professor Nagel in Dresden, und ich halte mich desshalb für verpflichtet diesem Freunde und Collegen für seine auf reicher Erfahrung beruhende eingehende Beurtheilung meines Buchs hiemit öffentlich zu danken. Sehr viel hat auch zur Erhöhung des Werths dieser Auflage mein früherer ausgezeichneter Schüler und Assistent, der gegenwärtige Professor der Geodäsie und Markscheidekunde Herr Dr Max Schmidt zu Freiberg dadurch beigetragen dass er mich auf die vortrefflichen Messinstrumente des mechanischen Instituts von Lingke & Co dortselbst aufmerksam machte, die Lehre vom Markscheiden in praktischer Hinsicht einer genauen Durchsicht unterzog und die Zahl der am Schlusse des vierten Abschnitts befindlichen Markscheideaufgaben um einige vermehrte. Für diese freundliche Beihilfe, die mir um so erwünschter war als ich seit langer Zeit meine praktische Thätigkeit nur mehr der Geodäsie und Hydrometrie zuwenden konnte, sei hier ebenfalls meine dankbare Anerkennung ausgesprochen.

Eine ausführlichere Darstellung der Lehre von den in Spiegel-

und Winkelprismen zerfallenden Reflexionsprismen verdankt diese Auflage sozusagen dem passiven Widerstande der Verfasser von Lehrbüchern und der Verfertiger von Instrumenten der Geodäsie gegen die Anerkennung eines Unterschieds zwischen den Spiegelprismen mit veränderlichen und den Winkelprismen mit unveränderlichen Ablenkungswinkeln der einfallenden Lichtstrahlen. Weil nämlich einige dieser Prismen einander gleichen, wie z. B. das gleichschenkelige rechtwinkelige Spiegel- und Winkelprisma, und in dieser Form schon vor meiner Erfindung der Winkelprismen als Spiegel benützt wurden, so hielt man ihre weitere von mir erst entdeckte und praktisch verwerthete Eigenschaft auch constante Ablenkungswinkel zu geben und hiedurch selbständige Messinstrumente zu werden, nicht für genügend diese Winkelprismen auch nach mir zu benennen, wie es bereitwillig mit dem Prismenkreuze geschah das ich im Jahre 1851 doch erst erfand als ich schon die Entdeckung gemacht hatte dass ein dreiseitiges Glasprisma von bestimmtem Querschnitte in Folge doppelter innerer Reflexion einen constanten Ablenkungswinkel von beliebiger Grösse zu liefern im Stande ist. Es war also nöthig hier klar und deutlich auszusprechen dass die von mir erfundenen Winkelprismen etwas anderes sind als die schon vorher als Spiegel gekannten Glasprismen von gleicher Form; aber nicht blos aus dieser persönlichen Veranlassung habe ich die Lehre von den Reflexionsprismen ausführlicher als ehemals behandelt, sondern auch aus dem rein sachlichen Grunde um die Theorie der Winkelprismen allgemeiner darzustellen, indem ich sie auf die der Spiegelprismen gründete.

Wenn der freundliche Leser bei der Durchsicht des zweiten Bands bemerkt dass der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf geodätische Ausgleichungsrechnungen mehr Beispiele gewidmet sind als in der vierten und fünften Auflage, so braucht er desshalb noch nicht zu schliessen als hätte ich meine wiederholt und deutlich ausgesprochene Ansicht über den richtigen und den falschen Gebrauch jener Methode geändert. Diese Ansicht besteht fort, da ich aber bei der Leitung von praktischen Uebungen im Berechnen geodätischer Aufgaben gefunden habe dass nur wenige Studirende ohne besondere Anleitung wirkliche Ausgleichungsrechnungen richtig durchzuführen vermögen, und da ich ausserdem den für diesen Gegenstand eingenommenen Lesern Gelegenheit geben wollte durch Vergleichung der

Ergebnisse strenger und genäherter Ausgleichungen den Werth der letzteren für die Beurtheilung der Genauigkeit grösserer Messungen selbständig zu beurtheilen und hiebei zu sehen wie vortheilhaft die Näherungsrechnungen in geeigneten Fällen sind, so war es angezeigt die Zahl jener Beispiele zu vergrössern.

Den Umfang der Lehre von den geographischen Ortsbestimmungen habe ich mit Rücksicht darauf dass in neuerer Zeit nicht selten junge Ingenieure für den geodätisch-astronomischen Theil der Forschungsaufgaben reisender Geographen gewonnen werden, in der gegenwärtigen Auflage ebenfalls etwas erweitert; es geschah dieses jedoch nur dem wissenschaftlichen Charakter dieses Buchs gemäss und ohne jedes Zugeständniss an jene oberflächliche Art des Unterrichts im Beobachten welche öfter von jungen Gelehrten die Entdeckungsreisende werden wollen, für ausreichend erachtet und begehrt, von mir aber stets abgelehnt wird, weil ich nicht mittelbar dazu beitragen will die unrichtigen Angaben über die räumlichen Verhältnisse der von ihnen bereisten Länder zu vermehren.

Feldafing am Würmsee, August 1878.

Carl Bauernfeind.

Inhaltsverzeichniss des zweiten Bands.

Zweite Abtheilung.

Die Lehre von den Messungen.

I. Methode der kleinsten Quadrate.

A. Ausgleichung directer Beobachtungen.

Seite

Beobachtungen von gleicher Genauigkeit: Arithmetisches Mittel, Fehler einer Beobachtung, Fehler des arithmetischen Mittels, wahrscheinlicher Fehler, Genauigkeit 5–15

Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit: Gewicht einer Beobachtung, die mittleren Fehler; Functionen direct beobachteter Grössen 15–19

B. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen.

Beobachtungen von gleicher Genauigkeit: Berechnung der Unbekannten, Constante von nicht lineären Functionen. Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit 19—23

C. Ausgleichung bedingter Beobachtungen.

Beobachtungen von gleicher Genauigkeit: Erläuterung der Aufgaben dieses Abschnitts, Berechnung der Verbesserungen. Correlaten. Normalgleichungen. Beispiele 23—26

Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit: Verbesserungen und mittlerer Fehler. Gewichte von Winkelmessungen. Auflösung von Normalgleichungen . 26—30

II. Horizontalmessungen.

A. Messung der Linien.

Begriff und Methode. Das Abstecken gerader, senkrechter, paralleler und krummer Linien. Das Aufnehmen und Ausmessen gerader und krummer Linien . 31—99

B. Messung der Winkel und Dreiecke.

Seite

Mittelbare Winkelmessungen. Einfluss der regelmässigen Beobachtungsfehler auf Winkelmessungen. Aufnahme der Dreiecke mit dem Messtische und dem Theodolithen. Einfluss der unvermeidlichen Beobachtungsfehler auf Dreiecksberechnungen 99—140

C. Messung von Vielecken.

Allgemeines Verfahren. Methoden der Aufnahme mit dem Messtische und dem Theodolithen: Polarmethode, Einschneidmethode, Umfangsmethode, Coordinatenmethode, Ausgleichung und Schluss der Vielecke . 140—165

D. Messung kleiner Dreiecksnetze.

Erklärungen. Die Pothenot'sche und Hansen'sche Aufgabe. Deren mechanische Lösung mit dem Einschneidezirkel. Beschreibung dieses Zirkels. Geometrische und analytische Lösungen dieser Aufgaben. Ausgleichungs-Beispiele . 165—211

E. Aufnahme eines Verbands von Grundstücken.

Allgemeines. Messtischaufnahmen. Theodolithaufnahmen. Stückmessungen. Prüfung der Aufnahmen 211—220

F. Flächenbestimmung der Grundstücke.

Methoden der Flächenbestimmung. Der Hermann-Wetli'sche Linearplanimeter. Der Amsler'sche Polarplanimeter 220—238

G. Flächentheilungen und Grenzberichtigungen.

Erklärungen und verschiedene Aufgaben 238—243

H. Messung ganzer Länder (Landesvermessungen).

Zweck und technische Arbeiten einer Landesvermessung. Bestimmung der Basis des Dreiecksnetzes. Wahl und Bezeichnung der Netzpunkte. Messung und Ausgleichung der Winkel. Berechnung der Dreieckseiten. Ausgleichung des Dreiecksnetzes. Coordinatenberechnung der Netzpunkte. Bestimmung der geographischen Lage der Netzpunkte und Seiten. Verbindung der Planblätter mit dem Dreiecksnetze. Stückmessung, Punkt- und Netzeinschaltung 244—295

III. Verticalmessungen.

A. Messung der Verticalwinkel.

Die atmosphärische Strahlenbrechung und deren Einfluss. Bestimmung der Grösse der terrestrischen Strahlenbrechung nach dem älteren und dem neueren (Bauernfeind'schen) Verfahren. Vergleichung des älteren und des neueren Ausdrucks der terrestrischen Strahlenbrechung. Reductionen der Verticalwinkel. Die Depression des Meereshorizonts . . 295—308

B. Geographische Ortsbestimmungen.

Seite

Astronomische Begriffe. Coordinatensysteme. Die verschiedenen Zeitarten. Zeitverwandlungen. Die Parallaxe. Bestimmungen der Mittagslinie, der geographischen Breite und Länge eines Orts, sowie der Azimuthe von Richtungen . 308—328

C. Trigonometrische Höhenmessungen.

Begriff und Eintheilung. Die Sehne eines grössten Kreisbogens der Erde im Verhältniss zu dessen Länge. Lösung verschiedener Aufgaben über trigonometrische Höhenmessungen nach alter Art und nach der Bauernfeind'schen Theorie der Strahlenbrechung 329—340

D. Höhenmessen durch Nivelliren.

Begriffe und Erklärungen. Die Methoden des Nivellirens. Das Nivelliren der Linien (Profile). Die Ausführung, Ausgleichung und Genauigkeit der Präcisionsnivellements. Das Nivelliren der Flächen (Horizontalcurven). Aufnahme der Horizontalcurven mit Hülfe von Tachymetern. Bemerkungen und Aufgaben über das Nivelliren . . 340—391

E. Barometrisches Höhenmessen.

Vorbemerkungen. Ableitung der Barometerformel. Hypsometrische Tafeln. Deren Gebrauch. Regeln für barometrische Höhenmessungen. Die Genauigkeit dieser Messungen. Die Methoden der Höhenmessung mit Federbarometern (Aneroiden). 391—413

IV. Grubenmessungen.

A. Ausdrücke der Bergleute und Markscheider.

Allgemeine Bemerkungen über das Markscheiden. Geometrische, geognostiche, bergmännische Ausdrücke 414—422

B. Grundoperationen in der Grube.

Erklärungen. Fixpunkte zu bezeichnen. Gerade, geneigte und lothrechte Linien abzustecken und zu messen. Verschiedene Aufgaben über Winkelmessungen. Das Streichen und Fallen von Linien und Lagerstätten zu bestimmen . 422—435

C. Von den Markscheidezügen.

Begriff derselben. Einen Markscheidezug mit Schnur und Compass zu verrichten und einzutragen. Einen Markscheidezug mittels des Theodolithen zu verrichten. Beispiele für beide Fälle. Ein Nivellement in der Grube zu machen. Anschluss- und Orientirungsmessungen. Einen Markscheidezug mit abgelenkter Magnetnadel auszuführen . . 436—459

D. Markscheide-Aufgaben.

Seite

Das Streichen, Fallen, Verflächen, Ausbeissen, Durchsetzen und Verwerfen von Lagerstätten betreffend. Projectionen von Punkten und Linien. Uebertragen der Markscheiden vom Feld in die Grube. Absteckung eines Stollens . 459—477

V. Wassermessungen.

A. Geschwindigkeitsmessungen.

Einleitung. Mittelbare und unmittelbare Geschwindigkeitsmessungen. Eytelwein'sche Formel. Aufnahme der Quer- und Längenprofile . . 478—486

B. Bestimmung der Wassermenge eines Flusses.

Begriff der Wassermenge. Ihre Berechnung aus Profil- und Geschwindigkeitsmessungen. Mittlere Geschwindigkeit und mittleres Profil 486—487

C. Bestimmung der Wasserkraft eines Flusses.

Begriff der Wasserkraft. Masseinheit. Mechanische Arbeit eines gestauten und eines ungestauten Flusses. Zahlenbeispiele 487—491

Dritte Abtheilung.

Die Lehre vom Plan- und Kartenzeichnen.

I. Kartenzeichnung.

A. Perspectivische Kartenprojectionen.

Stereographische Polar-, Aequatorial-, Horizontal- und Centralprojection. Orthographische Polar-, Aequatorial- und Horizontalprojection 497—512

B. Abwickelbare Kartenprojectionen.

Conische Projectionen: von Bonne, Flamsteed und De l'Isle. Cylindrische Projectionen: Plattkarten, reducirte Karten, Projectionen von Mercator und Cassini . 512—523

C. Geographische und topographische Karten.

Unterschied zwischen geographischen und topographischen Karten. Graphische Bezeichnungen (Kartenzeichen) von Bergen, Gewässern, Kulturen, Orten, Gebäuden, Wegen etc. Schriftliche Benennungen (Kartenschrift) . 523—531

II. Planzeichnung.

A. Horizontal- oder Situationspläne.

Bezeichnung der darzustellenden natürlichen und künstlichen Gebilde. Ausfertigung der Messtischaufnahmen. Auftragen der Pläne nach Coordinatenmessungen . 532—543

B. Vertical- oder Nivellementspläne.

Seite

Darstellung der Längenprofile von festem Lande und von Flüssen. Auftragen der Querprofile. Zeichnung und Gebrauch der Horizontalcurven 543—550

C. Berg- oder Grubenpläne.

Die Grund- und Seigerrisse der Markscheider entsprechen den Horizontal- und Verticalplänen der Ingenieure und werden ähnlich wie diese Pläne dargestellt. Besondere Zeichen 550—553

III. Abzeichnen der Karten und Pläne.

A. Das Durchzeichnen.

Das Durchzeichnen mittels Strohpapiers oder Bausleinwand, ferner mittels des Copirpultes und der Pikirnadel 554—555

B. Das Abzeichnen durch Quadratnetze.

Beschaffenheit der Netze auf dem Originale und der Copie. Anwendung des Proportionalzirkels und des Reductionsdreiecks 555—556

C. Das Abzeichnen mit dem Pantographen.

Theorie, Einrichtung und Gebrauch des Pantographen (Storchschnabels). Beschreibung der Storchschnäbel von Ertel & Sohn in München und von Ott & Coradi in Kempten 556—562

Anhang.

Tafeln zur Vermessungskunde.

1. Längen der Erdmeridiane und Parallelkreise 576—577
2. Längen- und Breitegrade nebst Gradabtheilungen 578—579
3. Länge der in Winkel und Zeit gegebenen Parallelkreisbögen a und b 580
4. Krümmungshalbmesser des Erdellipsoids, zwei Abtheilungen . . 581—582
5. Functionen des mittleren Erdkrümmungshalbmessers 583
6. Correspondirende geographische Breiten 584—586
7. Soldner's Additamententafel für die bayerische Triangulation . . 587—588
8. Bessel's Tafel für die mittlere astronomische Refraction 589—590
9. Reduction gegebener Barometerstände (Millimeter und Centigrade) 591
10. Reduction gegebener Barometerstände (Linien und 80theilige Grade) 592
11. Capillardepressionen der Quecksilberbarometer 593
12. Erste hypsometrische Tafel: Werthe von A und A' 593—594
13. Zweite hypsometrische Tafel: Werthe von log $(1 + 0{,}0026 \cos 2\varphi)$ 594
14. Dritte hypsometrische Tafel: Werthe von log $(1 + (2z + h) : r)$. 594
15. Vierte hypsometrische Tafel: Spannung des Wasserdampfs . . . 595
16. Fünfte hypsometrische Tafel: Werthe von μ (t — t') b 595—596
17. Sechste hypsometrische Tafel: Werthe von log $(1 + \frac{3}{8}\varphi)$ 596
18. Höhenunterschied in Meter für 1 mm Barometerdifferenz 597—598

		Seite
19.	Reductionen zu Reichenbach's Distanzmesser mit schiefer Latte .	599—600
20.	Reductionen zu Ertel's Distanzmesser mit schiefer Latte	601
21.	Reductionen zu Reichenbach's Distanzmesser mit lothrechter Latte	602
22.	Erste Tafel zu Stampfer's Distanzmesser: Werthe von 324 : (o — u)	603—609
23.	Zweite Tafel zu Stampfer's Distanzmesser, enthaltend Werthe von 0,0356 (o + u — 2 m) : (o — u)	610—611
24.	Dritte Tafel zu Stampfer's Distanzmesser, enthaltend Werthe von 0,0031 $(h - u)^2 : (o - u)$	612
25.	Werthe von $\sqrt{tg\,\alpha}$ für den Stromquadranten	613—614
26.	Werthe von $\sqrt{h'}$ für den Reichenbach'schen Strommesser . . .	615
27.	Coordinaten für Kreisbögen, bezogen auf die Tangente	616—617
28.	Coordinaten für Kreisbögen, bezogen auf die Sehne	618—619
29.	Peripheriewinkel für eine Sehne und verschiedene Halbmesser . .	620
30.	Tafel zur Berechnung der Quadrate und Quadratwurzeln	621—622

Zweite Abtheilung.

Die Lehre von den Messungen.

§. 1. Die Aufgaben welche mit den in der ersten Abtheilung dieses Buchs betrachteten Messinstrumenten gelöst werden können, sind ebenso zahlreich und mannichfaltig als die Anforderungen welche von Seite der Staatsverwaltung, des Verkehrs, der Technik und der Wissenschaft an die Messkunst gestellt werden. Aus dieser Mannichfaltigkeit das Gleichartige herauszufinden und zusammenzustellen, und dieses selbst wieder so zu ordnen dass eine klare Uebersicht aller Abtheilungen des Gebiets der Vermessungskunde gewonnen wird, ist die nächstgelegene Aufgabe der Lehre von den Messungen; ihre Hauptbestimmung aber ist den geordneten Inhalt der Messkunst wissenschaftlich darzustellen.

Durch die Operationen der Messkunst können zwei verschiedene Zwecke erreicht werden: der eine besteht darin die gegenseitige Lage von Punkten auf und unter der Erdoberfläche und die Geschwindigkeiten der Flüsse so zu bestimmen dass sich danach Land- und Stromkarten, Situations- und Nivellementspläne, Terraindurchschnitte und Grubenrisse herstellen lassen; der andere zielt dahin ab eine auf Karten und Plänen oder sonstwie vorgezeichnete Lage von Punkten so auf oder in das Terrain überzutragen dass die natürlichen Projectionen der Terrainpunkte unter sich und gegen ihre Umgebung dieselbe relative Lage haben wie die gleichnamigen Projectionen der im Bilde gegebenen Punkte. Jene Operationen bezeichnet man kurz mit dem Worte Aufnehmen, diese aber mit dem Ausdrucke Abstecken. Das Aufnehmen und Abstecken macht hier den Inhalt der zweiten Abtheilung der Vermessungskunde aus, (abweichend von den meisten Lehrbüchern der Messkunde welche nur das Aufnehmen in den Kreis ihrer Betrachtungen ziehen), und in der Lehre von der geometrischen Aufnahme und Absteckung besteht die Theorie der Messungen.

Zergliedert man die Lösungen aller Aufgaben der Messkunde, so zeigt sich dass selbst die zusammengesetztesten nur aus der verschiedenartigen Verknüpfung einer mässigen Anzahl von Elementaraufgaben bestehen, und dass sich diese Aufgaben wiederum in vier Gruppen abtheilen lassen, nämlich

1) in Horizontalmessungen welche bloss die Aufnahme und Absteckung von natürlichen Horizontalprojectionen bezwecken;

2) in Verticalmessungen deren Zweck im Aufnehmen und Abstecken von Höhen besteht;

3) in Grubenmessungen welche eine Verbindung von Horizontal- und Verticalmessungen für bergmännische Zwecke sind; und

4) in Wassermessungen welche sich aus Horizontal- oder Verticalmessungen und Zeitbeobachtungen zusammensetzen und hydrotechnischen oder industriellen Zwecken dienen.

Diese vier Gruppen von Messoperationen mit entsprechenden, das Aufnehmen und Abstecken gehörig sondernden Unterabtheilungen bilden den Inhalt der Lehre von den Messungen, und es wird diese hier in der angegebenen Reihenfolge dargestellt, nachdem vorher die allen Gruppen gemeinsame Theorie von der Ausgleichung der Beobachtungsfehler oder die Methode der kleinsten Quadrate in ihren Grundzügen für die praktische Anwendung entwickelt worden ist.

Die Theorie der Beobachtungsfehler welche zunächst für die Berechnung astronomischer Messungen erfunden und ausgebildet wurde, hat sehr bald Eingang in die Geodäsie gefunden, und es ist deren Anwendung auf die Ausgleichung von Hauptdreiecksnetzen für Landes- und Gradmessungen, sowie auf eine Reihe anderer geodätischer Aufgaben wobei es sich um Herstellung der besten Resultate aus einer grossen Anzahl guter Messungen handelt, unzweifelhaft berechtigt und nothwendig; dagegen erscheint es als eine Uebertreibung und zugleich als eine irrige Auffassung des Wesens der Ausgleichungsrechnungen wenn man dieselbe auf alle Feldmessungen, selbst die mit der Kette, anwenden will. Für dergleichen Messungen werden immer die Ausgleichungen genügen welche sich auf das arithmetische Mittel und die Lehre von den Proportionen stützen. Wer demnach nicht in der Lage ist von der hier vorgetragenen Theorie Anwendung machen zu müssen, oder wer sie nicht aus wissenschaftlichem Interesse oder als Vorbereitung auf das Studium grösserer Werke über diesen Gegenstand kennen lernen will, kann sie zwar ohne Nachtheil für das Verständniss der folgenden Abschnitte überschlagen; gleichwohl aber empfehlen wir dieses Ueberschlagen auch in den angezeigten Fällen nicht, weil erst die Kenntniss der Methode der kleinsten Quadrate die Begriffe über das Wesen der Beobachtungsfehler vervollständigt und verschärft, sowie sie auch den Sinn für die Beurtheilung der Genauigkeit der Messungen erst recht weckt und richtige Anschauungen über die Genauigkeit der einzelnen Messoperationen und ganzer aus diesen sich zusammensetzenden Aufnahmen gibt.

Erster Abschnitt.

Die Methode der kleinsten Quadrate.

§. 2. Beobachtungsfehler. Alle Messungen sind mit kleinen Fehlern behaftet welche theils von der Unvollkommenheit der dazu verwendeten Instrumente und Sinne der Beobachter, theils von äusseren oft ganz unbekannten, immer aber unberechenbaren Einflüssen herrühren. Diese Fehler welche wir zwar durch Benützung der besten Instrumente und Aufwendung aller Sorgfalt beim Messen ausserordentlich klein machen aber nicht vermeiden können, heissen zufällige Fehler, und man kann sich jeden solchen Fehler aus einer unbestimmt grossen Anzahl von unendlich kleinen, unter sich unabhängigen Elementarfehlern zusammengesetzt denken welche gleich leicht im positiven wie im negativen Sinne auf das Ergebniss der Beobachtung einwirken. Von diesen Fehlern wohl zu unterscheiden sind jene regelmässigen oder constanten Fehler welche unter gleichen Umständen in gleicher Weise auftreten, deren Ursachen und Gesetze wir kennen, und deren Einwirkung auf die Beobachtung wir oft zu vermeiden, in jedem Falle aber nach Grösse und Richtung zu berechnen vermögen.

Die Methode der kleinsten Quadrate beschäftigt sich nur mit zufälligen, nicht mit constanten Beobachtungsfehlern: diese letzteren (wie z. B. Indexfehler, Centrirungen, Refractionen etc.) müssen vielmehr von den Beobachtungen ferne gehalten, oder durch geeignete Messungsmethoden weggeschafft oder regelrecht berechnet und an den Beobachtungsresultaten als Verbesserungen angebracht werden. Wir setzen hier fortan Beobachtungen voraus welche mit keinen constanten Fehlern mehr behaftet sind und stellen uns die Aufgabe: die diesen Beobachtungen zukommenden wahrscheinlichsten Fehler zu finden, hienach die Beobachtungsergebnisse selbst zu verbessern und deren Sicherheits- oder Genauigkeitsgrad anzugeben. Die Lösung dieser Aufgabe ist Gegenstand der Ausgleichungsrechnung oder der Methode der kleinsten Quadrate, wie diese Rechnungsweise nach dem ihr zu Grunde liegenden (von Gauss 1795 entdeckten aber erst 1809 publicirten und von Legendre 1806 unabhängig von Gauss gefundenen und veröffentlichten) Princip genannt wird.

§. 3. Princip der Ausgleichung. Durch einmaliges Messen einer Grösse haben wir noch keine Vorstellung von den hiebei begangenen Fehlern; erst wenn wir die Messung wiederholen, also mehr Beobachtungen machen als zur Bestimmung der Grösse unumgänglich nothwendig sind, werden wir uns des Daseins von Fehlern im Allgemeinen und von zufälligen im Besonderen bewusst. Wenn wir in einem ebenen Dreiecke bloss zwei Winkel messen und den dritten durch Rechnung bestimmen, so bleiben wir im

Unklaren über die Grösse der begangenen Fehler; sobald wir aber auch den dritten Winkel messen, so gibt uns der Unterschied zwischen der Winkelsumme und 180° Aufschluss über die Güte unserer Arbeit, und dieser Aufschluss wird um so klarer und richtiger sein je öfter und sorgfältiger wir die einzelnen Winkel gemessen haben. Wir entnehmen hieraus dass es für unseren vorliegenden Zweck nicht genügt bloss so viele Beobachtungen zu machen als Unbekannte zu bestimmen sind, sondern dass jederzeit mehr Beobachtungen als Unbekannte zur Verfügung stehen müssen um daraus die besten Werthe der Unbekannten und den Genauigkeitsgrad der Beobachtungen abzuleiten.

Die überschüssigen Beobachtungen machen uns auf das Dasein von unvermeidlichen Fehlern dadurch aufmerksam dass sie nicht übereinstimmen und diese Widersprüche auch auf die Folgerungen übertragen welche aus ihnen gezogen werden; und da der Aussage jeder Beobachtung, wenn nicht das gleiche, doch ein bestimmtes Gewicht beigelegt werden muss, so ist von vorne herein klar dass wir aus den überschüssigen mit den zufälligen Fehlern behafteten Beobachtungen nicht die absolut richtigen Werthe der Unbekannten, sondern nur solche Werthe der letzteren finden werden welche sich der Wahrheit möglichst nähern oder die grösste Wahrscheinlichkeit für sich haben dass sie die richtigen sind.

Wenn nun keine der Beobachtungen als absolut richtig angenommen werden kann, so müssen wir, um zu den eben besprochenen Näherungswerthen der Unbekannten zu gelangen, offenbar jede Beobachtung um einen kleinen Betrag ihrer eigenen Grösse ändern oder verbessern, so zwar dass alle Widersprüche zwischen den Beobachtungen aufgehoben werden. Diese Verbesserungen verlangt schon der gesunde Menschenverstand welcher nichts als wahr anzuerkennen vermag was Widersprüche enthält oder auf Widersprüche führt; und damit an den Aussagen der Beobachtungen so wenig als möglich geändert wird, so entspricht es demselben logischen Bedürfnisse unseres Geistes und den Lehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung wenn als Princip der Ausgleichsrechnung der Satz aufgestellt wird: die Summe der Quadrate der Verbesserungen soll ein Minimum sein.

Wenn demnach $l_1\ l_2\ l_3 \ldots l_n$ die Ergebnisse von n gleich sorgfältigen Messungen einer Grösse (z. B. einer Linie oder eines Winkels) sind und man bezeichnet mit l den wahrscheinlichsten, d. i. der Wahrheit am nächsten kommenden Werth dieser Grösse, so sind $v_1 = l - l_1$, $v_2 = l - l_2$, $v_3 = l - l_3$ u. s. w. die gesuchten Verbesserungen, und es soll nach unserem Princip die Summe $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots\ldots + v_n^2$ oder $(l - l_1)^2 + (l - l_2)^2 + (l - l_3)^2 + \ldots + (l - l_n)^2$ ein Minimum werden. Setzt man die erste Ableitung dieser Function von l der Null gleich, wie dieses die Lehre vom Grössten und Kleinsten verlangt, so ergibt sich als derjenige Werth von l welcher die Summe der Fehlerquadrate zu einem Kleinsten macht, das arithmetische Mittel aus sämmtlichen n Beobachtungen, ein Resultat das genau mit unserem praktischen Gefühle übereinstimmt und

dem unser Verstand unmittelbare Evidenz beizulegen gewohnt ist. Erscheint hier der Satz vom arithmetischen Mittel als eine Folgerung aus dem vorhin aufgestellten Princip, so liegt es umgekehrt sehr nahe diesen Satz als Axiom zu betrachten und daraus das Princip der Ausgleichungsrechnung abzuleiten. In der That wurde ursprünglich die Methode der kleinsten Quadrate in dieser Weise begründet, und es gibt noch Mathematiker genug welche diese Begründung für ausreichend erachten und dem complicirten Beweise ihrer Richtigkeit durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung vorziehen.

§ 4. Erläuterungen des Princips. Da es für das Fortschreiten in jeder wissenschaftlichen Erkenntniss von grösster Wichtigkeit ist, über die Grundbegriffe derselben ganz im Klaren zu sein, so folgen hier noch einige Erläuterungen des Grundprincips der Methode der kleinsten Quadrate.

Bezeichnen wir mit [a] die Summe $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots.$, mit [a b] die Summe $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots.$, überhaupt mit einem von eckigen Klammern eingeschlossenen Ausdrucke eine Summe von gleichartigen und nur in den Ordnungszahlen verschiedenen Ausdrücken, und nennen wir ferner die an den beobachteten Werthen einer Grösse l anzubringenden Verbesserungen $v_1, v_2, v_3 \ldots.$, so verlangt unser Princip dass

$$[v\,v] = v_1{}^2 + v_2{}^2 + v_3{}^2 + \ldots$$

ein Minimum werde und alle Widersprüche zwischen den Beobachtungen unter sich und allen daraus gezogenen Folgerungen verschwinden. Die Veränderliche in der vorstehenden Function [v v] ist offenbar der gesuchte Werth l, während die beobachteten Grössen $l_1, l_2, l_3 \ldots$ constante Werthe sind. Drückt man also die Fehler $v_1, v_2, v_3 \ldots$ durch $l - l_1$, $l - l_2$, $l - l_3 \ldots$ aus, wie es oben schon einmal geschehen ist, und setzt die erste Ableitung von [v v] nach $l = 0$, so ergibt sich hieraus der Werth von l welcher [v v] zu einem Minimum macht, und es bedarf hier nicht erst des Werths der zweiten Ableitung der Function, um zu entscheiden ob der Werth von l wirklich ein Minimum gebe, weil es in der Natur der vorliegenden Sache liegt dass er kein Maximum geben kann.

Ist die Function [v v] von drei Veränderlichen x, y, z abhängig, so müssen die Werthe von x, y, z welche die Summe der Fehlerquadrate zu einem Minimum machen, aus drei Gleichungen gesucht werden welche sich dadurch ergeben dass man die partiellen Differentialquotienten von [v v] nach x, y, z einzeln $= 0$ setzt, denn es handelt sich hier um ein absolutes, nicht um ein relatives Minimum der Function [v v].

Ist beispielsweise ein Punkt im Raume zu bestimmen dessen rechtwinkelige Coordinaten x, y, z je 3mal gleich sorgfältig gemessen und gleich $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3$ gefunden worden sind, so hat man die Beobachtungsfehler $x - x_1 = v_1$, $y - y_1 = v_2$, $z - z_1 = v_3$, $x - x_2 = v_4$, $y - y_2 = v_5$, $z - z_2 = v_6$, $x - x_3 = v_7$, $y - y_3 = v_8$, $z - z_3 = v_9$, und als Function welche ein Minimum werden soll:

$$[v\,v] = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + \\ + (z - z_2)^2 + (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2$$

Werden die ersten Ableitungen dieser Function oder deren partielle Differentialquotienten nach x, y, z, beziehungsweise mit $[v\,v]^1_x$, $[v\,v]^1_y$, $[v\,v]^1_z$ bezeichnet, so ergeben sich folgende drei Bestimmungsgleichungen:

$$[v\,v]^1_x = 2(x - x_1) + 2(x - x_2) + 2(x - x_3) = 0$$
$$[v\,v]^1_y = 2(y - y_1) + 2(y - y_2) + 2(y - y_3) = 0$$
$$[v\,v]^1_z = 2(z - z_1) + 2(z - z_2) + 2(z - z_3) = 0$$

aus denen die Werthe folgen:

$$x = \tfrac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$$
$$y = \tfrac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$$
$$z = \tfrac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$$

In dem Ausdrucke für $[v\,v]$ stellen die drei ersten Glieder desselben das Quadrat des Abstands des gesuchten Punkts $x\,y\,z$ von $x_1\,y_1\,z_1$, die nächstfolgenden drei Glieder das Quadrat des Abstands des Punkts $x\,y\,z$ von $x_2\,y_2\,z_2$, und die drei letzten Glieder das Quadrat des Abstands des Punkts $x\,y\,z$ von $x_3\,y_3\,z_3$ vor: es ist also der gesuchte Punkt $x\,y\,z$ derjenige dessen Abstände von den beobachteten die kleinste Quadratsumme geben.

Denkt man sich ferner die durch die beobachteten Coordinatenwerthe dargestellten Punkte mit gleichen Gewichten belastet, so findet man bekanntlich die Coordinaten des Schwerpunkts dieses Systems von gleich schweren Punkten gerade so, wie wir eben die Coordinaten des Punkts $x\,y\,z$ gefunden haben: Diese Analogie mit einem Satze der Statik sagt uns dass jede einzelne vollständige Beobachtung des gesuchten Punkts $x\,y\,z$ (d. i. die Messung seiner 3 Coordinaten) dem dadurch gefundenen Punkte $(x_1\,y_1\,z_1\ldots)$ ein bestimmtes gleiches Gewicht beilegt, und dass der gefundene Punkt $x\,y\,z$ mit dem Gewichte aller einzelnen Punkte belastet zu denken ist, sowie man im Schwerpunkte eines Körpers dessen ganzes Gewicht vereinigt annehmen kann. Daher schreibt sich der Ausdruck Beobachtungen ins Gleichgewicht setzen welcher nichts anderes als Ausgleichen von Beobachtungen bedeutet.

§. 5. Erweiterung des Princips. Es ist bereits bemerkt worden dass die durch die Ausgleichungsrechnung zu suchenden Verbesserungen mit den beobachteten Grössen gleichartig und demnach wie diese benannte Zahlen (Millimeter, Secunden etc.) sein müssen. Nun kann man aber nur mit unbenannten Zahlen rechnen, es sind daher die concreten Grössen $v_1, v_2, v_3 \ldots$ mit anderen concreten Grössen $m_1, m_2, m_3 \ldots$ derselben Art die ihnen als Einheiten zu Grunde liegen, zu dividiren. In dieser vollständigeren Auffassung heisst das Princip der Ausgleichungsrechnung:

$$\left[\frac{v\,v}{m\,m}\right] = \text{Minimum.}$$

Unter den concreten Grössen m hat man die mittleren zu befürchtenden Fehler der einzelnen Beobachtungen zu verstehen, bei Winkelmessungen also denjenigen kleinen Winkel, um den eine einzige Messung von dem von uns als richtig angesehenen Winkelwerthe abweicht, bei Längenmessungen die Zahl von Millimetern bis zu welcher durch Anlegen des Mass-

stabs das Mass einer Linie richtig erhalten wird. Diese kleinen Winkel und Längen muss man aus Erfahrung kennen, und darum ist es gut bei jeder passenden Gelegenheit sich anzumerken wie gross der mittlere Fehler des Instruments für eine einzige Beobachtung ist, damit man allen späteren Messungen und Ausgleichungen einen möglichst richtigen Werth von m zu Grunde legen kann. (Wie dieser mittlere Fehler in verschiedenen Fällen aus Beobachtungen zu berechnen ist, wird in den folgenden §§ entwickelt.)

Sind alle auszugleichenden Beobachtungen mit einem und demselben Instrumente und unter gleich günstigen Umständen gemacht, so ist der Werth von m für alle v derselbe, wesshalb der gemeinsame Nenner m m vor das Summenzeichen [] gesetzt werden kann und bloss [v v], das man sich als eine Summe von unbenannten Zahlen zu denken hat, zu einem Minimum gemacht zu werden braucht. Sobald aber die mittleren Fehler der auszugleichenden Beobachtungen verschieden sind, kann m m nicht mehr als constanter Factor betrachtet und vor die Klammer gesetzt, sondern muss in der ihm zukommenden Grösse als Divisor unter die betreffenden v gesetzt werden. Wäre z. B. ein und derselbe Winkel je 2mal mit 3 verschiedenen Theodolithen welchen die mittleren Fehler 5″, 10″, 15″ zukommen, gemessen worden, so verlangt das Princip dass

$$\left[\frac{v\,v}{m\,m}\right] = \frac{v_1\,v_1}{25} + \frac{v_2\,v_2}{25} + \frac{v_3\,v_3}{100} + \frac{v_4\,v_4}{100} + \frac{v_5\,v_5}{225} + \frac{v_6\,v_6}{225} = \text{min.}$$

oder auch dass

$$900\left[\frac{v\,v}{m\,m}\right] = 36\,v_1{}^2 + 36\,v_2{}^2 + 9\,v_3{}^2 + 9\,v_4{}^2 + 4\,v_5{}^2 + 4\,v_6{}^2 = \text{min.}$$

Da es zu den Aufgaben der Ausgleichungsrechnung gehört die mittleren Fehler m erst zu bestimmen, so kann es auffallen dass sie hier schon als bekannt vorausgesetzt werden. Es ist jedoch diese Voraussetzung nur für ungleichartige Beobachtungsgrössen und für die erste Berechnung der Verbesserungen und mittleren Fehler nothwendig; für diese Berechnung genügen selbst grobe Näherungswerthe von m, wie sie in den Angaben der Nonien, Mikrometerschrauben, Libellenscalen etc. vorliegen. Die mit den so erhaltenen Werthen von m durchgeführte zweite Berechnung der einzelnen Verbesserungen und mittleren Fehler gibt in der Regel schon hinreichend genaue Resultate, wäre es aber nicht der Fall, so führt die dritte Berechnung sicher zum Ziele.

§. 6. Ausgleichungsaufgaben. Die Anwendung des an und für sich einfachen Princips der Methode der kleinsten Quadrate erfordert in den verschiedenen Fällen der Praxis besondere Regeln, wesshalb man die hier zu behandelnden Aufgaben in drei Abtheilungen bringt, nämlich:

I. Die gesuchten Grössen sind unabhängig von einander und werden unmittelbar beobachtet, wie dieses in dem bereits vorgeführten Beispiele der Fall war. Hier hat man es mit der Ausgleichung directer Beobachtungen zu thun, und man kann jede unbekannte Grösse so behandeln als ob sie nur allein vorhanden wäre.

II. Die gesuchten Grössen sind zwar auch unabhängig von einander, können aber nicht unmittelbar sondern nur im Zusammenhange mit anderen Grössen beobachtet werden: in diesem Falle liegt die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen vor. Um hievon eine Anschauung zu erhalten, erinnere man sich dass zwischen der Entfernung e und dem Lattenabschnitte l des Reichenbach'schen Distanzmessers die Relation $e = c\,l + c'$ besteht, worin c und c' zwei von einander unabhängige Constante bezeichnen. Will man nun diese Grösse nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmen, so liefern die Beobachtungen nur zusammengehörige Werthe $e_1, l_1; e_2, l_2; e_3, l_3$ u. s. w. welche alle der eben angegebenen Bedingung genügen müssen, und es sind diese e und l die vermittelnden Beobachtungen deren Ausgleichung zu den unbekannten Constanten c und c' führt. (Vergl. Bd I, §. 250 dieses Werks.)

III. Die gesuchten Grössen werden unmittelbar beobachtet, sind aber nicht unabhängig von einander, sondern müssen gewisse Bedingungen erfüllen. Hier handelt es sich um die Ausgleichung bedingter Beobachtungen. Der einfachste hieher gehörige Fall ist die Ausgleichung der Winkel eines Dreiecks. Man sucht dessen drei gemessene Winkel, von denen jeder von den beiden anderen dadurch abhängig ist dass er mit diesen eine bestimmte Winkelsumme geben muss.

Die bezeichneten drei Abschnitte zerfallen in Unterabtheilungen, in denen die Beobachtungen gleicher Genauigkeit getrennt von den Beobachtungen ungleicher Genauigkeit behandelt werden.

Ausgleichung directer Beobachtungen.

A. Beobachtungen von gleicher Genauigkeit.

§. 7. Arithmetisches Mittel. Es ist bereits gezeigt worden dass die Ausgleichung directer Beobachtungen von gleicher Genauigkeit auf das arithmetische Mittel aus diesen Beobachtungen führt, so dass die unbekannte Grösse (unter [x] die Summe aller beobachteten Werthe verstanden)

$$x = \frac{[x]}{n} \tag{1}$$

wird und die einzelnen Verbesserungen ausgedrückt sind durch

$$v_1 = x - x_1,\ v_2 = x - x_2,\ v_3 = x - x_3, \ldots\ldots v_n = x - x_n$$

Addirt man alle diese Verbesserungen, so ergibt sich

$$[v] = n\,x - [x] = 0 \tag{2}$$

und in dieser Formel liegt eine Controle der Rechnung, insofern die Summen der positiven und negativen Verbesserungen gleich sein müssen.

Aus den Werthen von $v_1, v_2, v_3 \ldots$ kann man $[v\,v]$ berechnen. Denkt man sich statt der wirklichen n Beobachtungen welche die Werthe $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ liefern, n andere welche lauter gleiche Werthe und von

einer solchen Grösse zur Folge haben dass die Summe der Quadrate ihrer n gleichen Fehler a oder [a a] jener der wirklichen Beobachtungen [v v] gleich wird, so ergibt sich aus dieser Gleichheit der Werth von

$$a = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n}} \tag{3}$$

Diese Grösse heisst die mittlere Abweichung vom arithmetischen Mittel und ist, wie man sieht, der Quadratwurzel aus der Zahl der Beobachtungen umgekehrt proportional. Da diese Abweichung bei 1 Beobachtung $= 1$ ist, so wird sie bei 4, 9, 16 . . . Beobachtungen beziehlich $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots$ sein. Die Reciproke von a oder

$$g = \sqrt{\frac{n}{[v\,v]}} \tag{4}$$

heisst die Genauigkeit des arithmetischen Mittels, und diese ist folglich der Quadratwurzel aus der Beobachtungszahl n direct proportional: wenn somit die Genauigkeit bei 1 Beobachtung 1 ist, so ist sie bei 4, 9, 16... Beobachtungen beziehlich 2, 3, 4 u. s. w.

§. 8. Die Fehler einer Beobachtung. Die mittlere Abweichung einer Beobachtung vom arithmetischen Mittel welche in dem Ausdrucke für a enthalten ist, genügt für die Beurtheilung der Genauigkeit geodätischer Arbeiten nicht, man will die mittlere Abweichung der Beobachtungen von der Wahrheit oder die Grösse kennen lernen welche man den mittleren Fehler einer Beobachtung nennt. Da man nun den wahren Werth einer beobachteten Grösse nicht erkennen und folglich auch den mittleren Fehler m nicht genau berechnen kann, so begnügt man sich mit einem Näherungsausdrucke den die Wahrscheinlichkeitsrechnung an die Hand gibt. Nach diesem ist nämlich

$$[w\,w] = [v\,v] + m\,m$$

wenn $w_1, w_2, w_3 \ldots$ die Verbesserungen bezeichnen welche an den beobachteten Grössen $x_1, x_2, x_3 \ldots$ in dem Falle anzubringen wären dass man diese dem wahren x das $= X$ sein soll, gleich machen wollte. Setzt man für [w w] seinen Werth n . m m in vorstehende Gleichung ein, so wird

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-1}} \tag{5}$$

Zu diesem Ausdrucke kann man auch durch folgende Betrachtung gelangen. Erfahrungsgemäss befindet sich unter einer grossen Zahl beobachteter Werthe $x_1, x_2, x_3 \ldots$ das Mittel x selbst ein oder mehrere Male, und wir schreiben in diesem Falle dem beobachteten x denselben mittleren Fehler m zu wie den $x_1, x_2, x_3 \ldots$. Umgekehrt dürfen wir einer zu den vorliegenden $x_1, x_2, x_3 \ldots$ hinzugedachten fehlerfreien Beobachtung eine Abweichung vom Mittel $= m$ beilegen. Dadurch vermehrt sich [v v] um ein m m, ohne dass dadurch etwas an den vorhandenen n Beobachtungen geändert wird: die Summe $[v\,v] + m\,m$ muss also auf letztere allein vertheilt werden, und hiedurch gelangt man zur Gleichung $n \,.\, m\,m = [v\,v] + m\,m$,

aus der m wie oben angegeben folgt. Der mittlere zu befürchtende Fehler m ist somit stets etwas grösser als die mittlere Abweichung a vom arithmetischen Mittel, beide Werthe nähern sich aber einander um so mehr, je grösser n ist, und in diesem Falle weicht das arithmetische Mittel nur sehr wenig vom wahren Werthe X ab.

Praktiker der alten Schule nennen häufig auch den Quotienten welcher sich ergibt wenn man den absoluten Werth aller v oder [v] durch n dividirt, mittleren Fehler; diese Bezeichnung ist jedoch unrichtig: man kann diesen Quotienten höchstens den durchschnittlichen Fehler nennen, wenn n so gross ist dass $\sqrt{n(n-1)} = n$ gesetzt werden darf; denn eigentlich ist der Durchschnittsfehler einer Beobachtung

$$d = \frac{[v]}{\sqrt{n(n-1)}} \tag{6}$$

und es ist derselbe, wie der mittlere Fehler, auf den wahren Werth X bezogen; bezieht man ihn jedoch nur auf das arithmetische Mittel x, so wird in der That der Factor $(n-1)$ unter dem Wurzelzeichen $= n$ und

$$d = d' = \frac{[v]}{n} \tag{7}$$

während der auf dasselbe Mittel bezogene mittlere Fehler gleich ist

$$m = a = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n}} \tag{8}$$

§. 9. Fehler des arithmetischen Mittels. Das arithmetische Mittel x kann sich zwar dem wahren Werthe X sehr nähern, vollständig stimmt es aber mit diesem nie überein, es bleibt also noch ein Fehler $X - x = \mu$ übrig welcher der Fehler des arithmetischen Mittels mehrerer Beobachtungen heisst. Bezieht man die an den beobachteten Werthen $x_1, x_2, x_3 \ldots$ anzubringenden Verbesserungen $v_1, v_2, v_3 \ldots$ auf den wahren Werth X, so müssen dieselben noch um $\pm \mu$ corrigirt werden, so dass die Verbesserungen $w_1 = v_1 \pm \mu \ldots\ldots$ entstehen und wieder $n\,m^2 = [w^2]$, also auch

$$n \,.\, m\,m = [(v \pm \mu)^2] = [v\,v] \pm 2\,\mu\,[v] + [\mu\,\mu]$$

wird. Nun ist aber nach Gl (2) die Summe $[v] = 0$ und $[\mu\,\mu] = n \,.\, \mu\,\mu$, daher $n \,.\, m\,m = [v\,v] + n \,.\, \mu\,\mu$, und wenn man Gl (5) beizieht,

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n(n-1)}} \tag{9}$$

Der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels ist also m direct und $\sqrt{n}$ umgekehrt proportional: will man nun bei gleichbleibendem mittleren Fehler einer Beobachtung (m) den Fehler des arithmetischen Mittels auf $\frac{1}{2}\mu, \frac{1}{3}\mu, \frac{1}{4}\mu \ldots$ herabdrücken, so müssen die Beobachtungszahlen im quadratischen Verhältnisse der Nenner von μ vermehrt werden, d. h. 4 n, 9 n, 16 n ... sein.

§. 10. Wahrscheinliche Fehler. Statt des mittleren Fehlers einer

Beobachtung oder des arithmetischen Mittels einer Reihe von Beobachtungen gibt man häufig den wahrscheinlichen Fehler w oder denjenigen besonderen Werth von v an für welchen die Wahrscheinlichkeit dass er bei den einzelnen Beobachtungen nicht überschritten werde, $\frac{1}{2}$ beträgt. Mit anderen Worten lässt sich der wahrscheinliche Fehler als diejenige Fehlergrenze bezeichnen von der es eben so wahrscheinlich ist dass sie überschritten als nicht erreicht wird, d. h. die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens eines Fehlers v innerhalb der Grenzen $\pm$ r ist eben so gross als die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens ausserhalb dieser Grenzen. Der wahrscheinliche Fehler steht zum mittleren Fehler einer Beobachtung in einem constanten Verhältnisse, indem jederzeit

$$w = 0{,}674486 \,.\, m = \tfrac{2}{3}\, m \tag{10}$$

ist. Der wahrscheinliche Fehler des arithmetischen Mittels ω steht zum wahrscheinlichen Fehler w einer Beobachtung in demselben Verhältnisse wie der mittlere Fehler μ des Mittels zum mittleren Fehler m einer Beobachtung, und es ist daher

$$\omega = 0{,}674486 \,.\, \mu = \tfrac{2}{3}\, \mu \tag{11}$$

Ausser diesen Beziehungen liefert uns die Wahrscheinlichkeitsrechnung noch ein wichtiges Resultat dass nämlich die wahrscheinlichen Grenzen für die wahren Werthe von m, μ, w, ω zwischen den beiden Werthen liegen welche man erhält wenn man m, μ, w, ω einmal mit $(1 + q)$ und dann mit $(1 - q)$ multiplicirt, wobei

$$q = \frac{0{,}476936}{\sqrt{n}}$$

§. 11. Genauigkeit der Messungen. Die Methode der kleinsten Quadrate soll uns unter Anderem Aufschluss über die Genauigkeit ausgeführter Messungen geben. Wir können aber diese Genauigkeit nur nach dem mittleren oder dem wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtung (m, w) oder des arithmetischen Mittels (μ, ω) beurtheilen, indem wir dieselbe diesen Fehlern umgekehrt proportional setzen: je kleiner diese Fehler sind, desto grösser ist die Genauigkeit der Arbeit. Gewöhnlich bezieht man diese Genauigkeit auf den mittleren Fehler μ des arithmetischen Mittels, und es wächst daher diese Genauigkeit nach §. 7 mit der Quadratwurzel aus der Beobachtungszahl. Die in diesem Abschnitte behandelten Beobachtungen von gleicher Genauigkeit lassen sich nunmehr als solche bezeichnen welchen durchaus der gleiche mittlere Fehler m zukommt; und wenn im §. 5 die den Messinstrumenten zukommenden mittleren Fehler in gewissen Fällen als bekannt vorausgesetzt sind, so ist jetzt der Weg gezeigt auf dem sie durch entsprechende Beobachtungsreihen gefunden werden können.

Hätte man z. B. den Abstand zweier festen Punkte mit Messstangen 10mal gleich sorgfältig gemessen und folgende Angaben erhalten (denen sofort die Verbesserungen v gegen das arithmetische Mittel und die v v beigefügt sind):

125,4352 m	v = + 0,0002 m	v v = 0,00000004
67	— 13	169
38	+ 16	256
49	+ 05	025
63	— 09	081
55	— 01	001
46	+ 08	064
69	— 15	225
57	— 03	009
44	+ 10	100
x = 125,4354	[v] = 0,0000	[v v] = 0,00000934

so ergäbe sich der wahrscheinlichste Werth für den Abstand x = 125,4354 m mit einem mittleren Fehler der einzelnen Beobachtung von

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{9}} = 0{,}0010187 \text{ Meter}$$

und einem mittleren Fehler des arithmetischen Mittels von

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{10}} = 0{,}00032215 \text{ Meter}$$

Während nun die einzelne Messung um $\pm$ 1,019 Millimeter unsicher wäre, betrüge die Unsicherheit des arithmetischen Mittels nur $\pm$ 0,322 Millimeter, was in der Angabe des Resultats wie folgt bemerkt würde:

$$x = 125{,}4354 \pm 0{,}00032$$

und andeutete dass die gesuchte Länge eben so gut 125,43572 als 125,43508 Meter betragen könne.

Zur Beurtheilung der Genauigkeit von Messungen ist es nothwendig zu wissen wie sich die mittleren Fehler der Einzelbeobachtungen auf ganze Aufnahmen fortpflanzen. Sind u_1 und u_2 zwei unabhängig von einander gemessene Grössen mit den Beobachtungsfehlern $\delta_1' \; \delta_1'' \; \delta_1''' \ldots$ und $\delta_2' \; \delta_2'' \; \delta_2''' \ldots.$ und den mittleren Fehlern m_1 und m_2, so will man hier den mittleren Fehler M in der Summe oder Differenz $U = u_1 \pm u_2$ kennen lernen. Setzt man $\delta_1' + \delta_2' = \delta_1$; $\delta_1'' + \delta_2'' = \delta_2$; $\delta_1''' + \delta_2''' = \delta_3 \ldots.$ so ist

$$(\delta_1)^2 = (\delta_1' + \delta_2')^2 = (\delta_1')^2 + (\delta_2')^2 + 2\,(\delta_1'\,\delta_2')$$
$$(\delta_2)^2 = (\delta_1'' + \delta_2'')^2 = (\delta_1'')^2 + (\delta_2'')^2 + 2\,(\delta_1''\,\delta_2'')$$
$$(\delta_3)^2 = (\delta_1''' + \delta_2''')^2 = (\delta_1''')^2 + (\delta_2''')^2 + 2\,(\delta_1'''\,\delta_2''') \text{ u. s. w.}$$

und wenn man alle n Gleichungen addirt und die Summe durch n dividirt, gelangt man zu dem Ausdrucke:

$$M^2 = \frac{[\delta\,\delta]}{n} = \frac{[\delta_1\,\delta_1]}{n} + \frac{[\delta_2\,\delta_2]}{n} + 2\,\frac{[\delta_1\,\delta_2)}{n}$$

in welchem die quadratischen Glieder die mittleren Fehlerquadrate M^2, m_1^2, m_2^2 vorstellen und das letzte Glied, weil es ein aus gleich wahrscheinlich positiven und negativen Factoren gebildetes mittleres Produkt

bezeichnet, Null ist. Das wichtige Gesetz der Fehlerfortpflanzung

$$M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2} \qquad (11a)$$

sagt somit dass der mittlere Fehler einer algebraischen Summe unabhängig gemessener Grössen der Quadratwurzel aus der Quadratsumme der mittleren Fehler dieser Grössen gleich ist.

B. Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit.

§. 12. Gewicht einer Beobachtung. In §. 5 war bereits davon die Rede dass im Grunde nur die unbenannten durch [v v : m m] vorgestellten Zahlen-Summen deren einzelne Posten Quotienten aus den Quadraten der Beobachtungsfehler v und der mittleren Fehler m sind, zu einem Minimum gemacht werden können. Denkt man sich nun die Quadratsumme [v v : m m] mit einer constanten Zahl $m_0 m_0$ multiplicirt welche ein Vielfaches aller in dieser Summe enthaltenen Nenner sein mag, so wird offenbar an dem Werthe welcher diese Summe zu einem Minimum macht, nichts geändert; und bezeichnet man die Quotienten

$$\frac{m_0 m_0}{m_1 m_1}, \frac{m_0 m_0}{m_2 m_2}, \frac{m_0 m_0}{m_3 m_3} \ldots \text{ beziehlich mit } p_1, p_2, p_3 \ldots$$

so sind dieselben den Quadraten der mittleren Fehler umgekehrt und den Quadraten der Genauigkeiten der Beobachtungen direct proportional. Diese Zahlen $p_1, p_2, p_3 \ldots$ heissen die Gewichte der Beobachtungen.

Um diesen Begriff anschaulich zu machen, denke man sich zu den vorhandenen ungleich genauen Beobachtungen eine grosse Reihe anderer gleich genauer Beobachtungen, und betrachte jede vorhandene Beobachtung als das arithmetische Mittel aus einer gewissen Anzahl bloss gedachter Beobachtungen, so kann man die Anzahl der fingirten Beobachtungen deren arithmetisches Mittel dieselbe Genauigkeit hat wie eine vorgegebene wirklich angestellte Beobachtung, das Gewicht der letzteren nennen, während jede der fingirten Beobachtungen die Gewichtseinheit vorstellt.

Um hierüber vollständig klar zu werden denke man sich weiter, eine und dieselbe Grösse, etwa eine Länge, sei ursprünglich 6mal mit gleicher Genauigkeit gemessen worden und es hätten diese Messungen die Längen $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$ ergeben: so ist nach Abtheilung **A** die ausgeglichene Länge $x = \frac{1}{6}[l]$, der mittlere Fehler einer Beobachtung $m = \sqrt{\frac{1}{5}[v\,v]}$ und der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels $\mu = m \,.\, 6^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{30}[v\,v]}$, also $m^2 = 6\,\mu^2$. Vereinigen wir jetzt die zweite und dritte Messung zu einem Mittel $\frac{1}{2}(l_2 + l_3) = l_2'$ und die vierte, fünfte und sechste Messung ebenfalls zu einem Mittel $\frac{1}{3}(l_4 + l_5 + l_6) = l_3'$; nennen wir ferner die Verbesserung welche zu l'_2 gehört und aus v_2 und v_3 sich zusammensetzt, v_2' und die zu l_3' gehörende aus v_4, v_5, v_6 sich zusammensetzende Verbesserung v_3', so ist ohne Zweifel $v_2' = \frac{1}{2}(v_2 + v_3)$, $v_3' = \frac{1}{3}(v_4 + v_5 + v_6)$ und das neue System von Fehlergleichungen folgendes:

$$v_1' = x - l_1' = x - l_1$$
$$v_2' = x - l_2' = x - \tfrac{1}{2}(l_2 + l_3)$$
$$v_3' = x - l_3' = x - \tfrac{1}{3}(l_4 + l_5 + l_6)$$

Damit nun die Ausgleichung dieser Fehler dasselbe Resultat wie die der 6 gleichgenauen Messungen ergibt, kann man

$$x = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6}{6} = \frac{1 \,.\, l_1 + 2 \,.\, l_2' + 3 \,.\, l_3'}{1 + 2 + 3}$$

schreiben, was andeutet dass l_2' zwei und l_3' drei ursprüngliche Messungen ersetzt: Ist also 1 das Gewicht jeder dieser Messungen, so wird 2 das Gewicht von l_2' und 3 das Gewicht von l_3' und wäre $p_1 = (m_0^2 : m_1^2)$ das Gewicht von l_1, so wäre $p_2 = 2\,(m_0^2 : m_1^2)$ das Gewicht von l_2' und $p_3 = 3\,(m_0^2 : m_1^2)$ das Gewicht von l_3' entsprechend der Gleichung (7) wonach die Quadrate der mittleren Fehler sich umgekehrt und die der Genauigkeiten direct wie die Beobachtungszahlen 1, 2, 3 verhalten.

§. 13. Aufgabe. Es seien n directe Beobachtungen $l_1, l_2, l_3 \ldots l_n$ denen die Gewichte $p_1, p_2, p_3 \ldots p_n$ zukommen, auszugleichen und die mittleren Fehler dieser Beobachtungen zu bestimmen. (Diese Aufgabe ist eine Erweiterung der Aufgabe im Schlusssatze des §. 3 worin $p_1 = p_2 = = p_3 = p_n = 1$ war.)

Die Forderung dass hier $[v\,v : m\,m]$ oder $m_0\,m_0\,[v\,v : m\,m]$ ein Minimum werde, nimmt nunmehr, nach Einführung des Begriffs und der Bezeichnung des Gewichts einer Beobachtung die selbstverständliche Form an

$$[p\,v\,v] = p_1\,v_1^2 + p_2\,v_2^2 + p_3\,v_3^2 + \ldots + p_n\,v_n^2 = \text{min.} \tag{12}$$

Setzt man für $v_1, v_2, v_3 \ldots$ die entsprechenden Werthe, indem man x als den besten Werth von l ansieht, demnach $v_1 = x - l_1$, $v_2 = x - l_2$, $v_3 = x - l_3 \ldots\ldots$ und verfährt nach den Regeln der Differentialrechnung, so hat man für x die Bestimmungsgleichung

$$[p\,v\,v]'_x = 2\,p_1\,(x - l_1) + 2\,p_2\,(x - l_2) + \ldots + 2\,p_n\,(z - l_n) = 0$$

und daraus durch einfache Auflösung

$$x = \frac{p_1\,l_1 + p_2\,l_2 + p_3\,l_3 + \ldots\ldots + p_n\,l_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n} = \frac{[p\,l]}{[p]} \tag{13}$$

Dieser Werth von x wird in einem allgemeineren Sinne ebenfalls das arithmetische Mittel genannt, und es ist diese Bezeichnung insofern gerechtfertigt als man im ganzen [p] Beobachtungen von gleicher Genauigkeit zu machen hätte, um denselben Werth x zu erhalten wie ihn der vorstehende Ausdruck liefert, von dem kaum bemerkt zu werden braucht dass er im Grunde nur das vorausgegangene Beispiel verallgemeinert.

Will man in den vorstehenden Werth von x statt der Gewichte $p_1, p_2, p_3 \ldots$ die mittleren Fehler der Beobachtungswerthe $l_1, l_2, l_3 \ldots$ einführen, so braucht man nur, indem man für die fingirten gleichgenauen Beobachtungen den mittleren Fehler m annimmt,

$$p_1 = \frac{m^2}{m_1^2},\quad p_2 = \frac{m^2}{m_2^2},\quad p_3 = \frac{m^2}{m_3^2} \tag{14}$$

zu setzen, wodurch sich sofort x ohne Berechnung der Gewichte p ergibt. (Hiebei kann von den in §. 5 erwähnten Näherungswerthen für m_1, m_2, $m_3 \ldots$ Gebrauch gemacht werden.) Da die mittleren Fehler $m_1, m_2, m_3 \ldots$ nie mit grosser Sicherheit bestimmt werden können, so ist es durch Vornahme kleiner Aenderungen an denselben leicht möglich die Gewichte in ganzen Zahlen darzustellen; übrigens ist es nur eine Forderung der Bequemlichkeit, nicht der Nothwendigkeit, die Gewichte in ganzen Zahlen auszudrücken, indem es bloss darauf ankommt das Verhältniss der Gewichte richtig auszudrücken.

Schliesslich sei noch darauf aufmerksam gemacht dass in der aus (12) folgenden Bestimmungsgleichung für x der Satz enthalten ist:

$$[p\,v] = p_1 v_1 + p_2 v_2 + p_3 v_3 + \ldots + p_n v_n = 0 \tag{15}$$

welcher eben so wie Gl (2) eine Rechnungscontrole liefert.

§. 14. Die mittleren Fehler. Man begreift leicht dass da wo es sich um Ausgleichung von Beobachtungen verschiedenen Gewichts handelt, von einem allen Beobachtungen gemeinsamen Fehler keine Rede sein kann, wohl aber von einem mittleren Fehler der Gewichtseinheit jeder einzelnen Beobachtung und des aus dem allgemeinen arithmetischen Mittel gefundenen wahrscheinlichsten Werthes x.

Legen wir der Gewichtseinheit einen mittleren Fehler m bei und fassen diesen als Abweichung von der Wahrheit auf, so ist nach (15)

$$m^2 = p_1 m_1^2 = p_2 m_2^2 = p_3 m_3^2 = \ldots = p_n m_n^2 \text{ und}$$

$$m_n = \frac{m}{\sqrt{p_n}} \tag{16}$$

Hat der in Nr 13 berechnete Mittelwerth x einen mittleren Fehler μ, so ist dieser Fehler zu berechnen aus der Gleichung

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{[p]}} \tag{17}$$

Will man das Gewicht P des arithmetischen Mittels x kennen, so findet sich dasselbe aus der nach Nr 9 gebildeten Gleichung $m^2 = P\,\mu^2$ welche in Verbindung mit (17)

$$P = \frac{m^2}{\mu^2} = [p] \tag{18}$$

liefert: es ist somit das Gewicht des Mittelwerths x gleich der Summe der Gewichte der einzelnen Beobachtungen. Der mittlere Fehler m der Gewichtseinheit welcher in den letzten drei Ausdrücken vorkommt und niemals genau zu berechnen sondern nur zu schätzen ist, wird auf ähnliche Weise wie der mittlere Fehler einer Beobachtung aus n gleich genauen Werthen gefunden: man hat nämlich in jenem Ausdrucke für m nur [p v v] für [v v] und [p] für n zu setzen, wodurch

$$m = \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{P - 1}} \tag{19}$$

wird. Führt man diesen und den vorhergehenden Werth in den Ausdruck

für μ ein, so wird der mittlere Fehler des allgemeineren arithmetischen Mittels

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{(P-1)\,P}} \qquad (20)$$

Ist z. B. ein Winkel mit demselben Theodolithen von demselben Beobachter und unter Umständen zweimal gemessen worden für welche der mittlere Fehler einer Beobachtung $\pm 5''$ beträgt, und war das Ergebniss der ersten aus 9 Wiederholungen sich zusammensetzenden Messung $w_1 = 63^0\,25'\,39,''50$ und das der zweiten 16 Beobachtungen umfassenden $w_2 = 63^0\,25'\,43'',75$ so hat man zunächst nach Formel (9) die mittleren Fehler der arithmetischen Mittel w_1 und w_2

$$\mu_1 = \frac{5''}{\sqrt{9}} = \pm\frac{5''}{3} \text{ und } \mu_2 = \frac{5''}{\sqrt{16}} = \pm\frac{5''}{4}$$

Es verhalten sich demnach die zu w_1 und w_2 gehörigen Gewichte

$$p_1 : p_2 = \frac{9}{25} : \frac{16}{25} = 9 : 16$$

und es wird folglich der beste Werth des Winkels (hier der Secunden)

$$w = \frac{p_1\,w_1 + p_2\,w_2}{p_1 + p_2} = \frac{9\,.\,39,5 + 16\,.\,43,75}{9+16} = 42,''22$$

wobei der mittlere Fehler der Gewichtseinheit

$$m = \sqrt{\frac{9\,.\,(2,72)^2 + 16\,.\,(1,53)^2}{24}} = \pm 2,''082$$

und jener des arithmetischen Mittels w gleich ist

$$\mu = \tfrac{1}{5}\,m = \pm 0,''416$$

Das Ergebniss unserer Ausgleichungsrechnung ist somit

$$w = 63^0\,25'\,42,''22 \pm 0,''416.$$

Zu demselben Resultate kommt man wenn die angestellten 25 gleich genauen Beobachtungen als solche für sich behandelt werden.

C. Functionen direct beobachteter Grössen.

§. 15. Mittlerer Fehler der Function. Aus direct beobachteten und ausgeglichenen Grössen lassen sich die mannichfaltigsten Functionen zusammensetzen, und es entsteht dann die Frage nach dem mittleren Fehler einer solchen Function. Diese Frage lässt sich wie folgt beantworten.

Hat man die von einander unabhängigen Grössen $t_1, t_2, t_3 \ldots$ denen die mittleren Fehler $m_1, m_2, m_3 \ldots$ anhaften, direct beobachtet und ist

$$u = F\,(t_1, t_2, t_3 \ldots)$$

so wird die Aenderung m von u welche aus der Aenderung von t_1 in $t_1 \pm m_1$, von t_2 in $t_2 \pm m_2$, von t_3 in $t_3 \pm m_3$ u. s. w. hervorgeht, nach dem Taylor'schen Satze gefunden. Bezeichnet man die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{d\,u}{d\,t_1},\ \frac{d\,u}{d\,t_2},\ \frac{d\,u}{d\,t_3} \ldots\ldots \text{ mit } q_1, q_2, q_3 \ldots$$

und vernachlässigt die höheren Potenzen der Fehler $m_1, m_2, m_3 \ldots\ldots$, so erhält man zunächst $m = q_1\,m_1 + q_2\,m_2 + q_3\,m_3 + \ldots\ldots$, wobei alle m

eben so wohl positiv als negativ sein können, und dann durch Quadrirung (mit Rücksicht auf beide gleich mögliche Zeichen):

$$m_2 = q_1^2 m_1^2 + q_2^2 m_2^2 + q_3^2 m_3^2 + \ldots\ldots$$

Hieraus folgt der mittlere Fehler der Function, ausgedrückt durch die mittleren Fehler der direct beobachteten Grössen:

$$m = \sqrt{[q^2 m^2]} \qquad (21)$$

Wäre $u = F(t_1 t_2 t_3 \ldots) = a_1 t_1 + a_2 t_2 + a_3 t_3 + \ldots + a_n t_n$, wobei $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ bestimmte Zahlencoefficienten sind, so hätte man einfach

$$q_1 = a_1,\ q_2 = a_2,\ q_3 = a_3, \ldots\ldots q_n = a_n \text{ und daher}$$

$$m^2 = a_1^2 m_1^2 + a_2^2 m_2^2 + \ldots\ldots + a_n^2 m_n^2 \text{ oder}$$

$$m = \sqrt{[a^2 m^2]} \qquad (22)$$

zu setzen. Besässen alle Werthe von t gleiche Genauigkeit, so würden auch alle Fehler derselben einander und $= m_1$ sein; in diesem Falle wäre

$$m = m_1 \sqrt{[a^2]} \qquad (23)$$

Käme hiezu noch die Gleichheit aller Coefficienten $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$, so ginge der Fehler m über in

$$m = m_1 a_1 \sqrt{n} \qquad (24)$$

und wenn die Function u lediglich eine Zusammensetzung der Grössen $t_1, t_2, t_3 \ldots$ und demnach jeder Coefficient $a_1, a_2, a_3 \ldots = 1$ wäre, in

$$m = m_1 \sqrt{n} \qquad (25)$$

d. h. der Fehler in der Zusammensetzung (z. B. einer Linie aus den Massstablängen) ist der Quadratwurzel aus der Zahl der Theile proportional: damit ist also gesagt dass man die Zahl der Theile möglichst gering, deren Ausdehnung aber möglichst gross machen soll (z. B. Messstangen, Messlatten etc. für Grundlinien).

Wäre u bloss von einer beobachteten Grösse t_1 abhängig, demnach $u = a_1 t_1$ und $m = a_1 m_1$, so betrüge der zu befürchtende mittlere Fehler in u das a_1fache von m_1: desshalb soll man in einem solchen Falle wiederum t_1 möglichst gross nehmen, damit a_1 und hiemit auch m klein wird. Hätte man eine gerade Linie von bedeutender Länge auf irgend eine Weise in 9 gleiche Theile getheilt und wollte diese Länge bloss aus der Messung eines solchen Theils erschliessen, so wäre $u = 9\,t_1$ und der mittlere Fehler $m' = 9\,m_1$. Misst man dagegen alle 9 Theile, so ist $u = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_9$ und der mittlere Fehler $m'' = m_1 \sqrt{9} = 3\,m_1$; in dem zweiten Falle betrüge somit der mittlere Fehler in u nur den dritten Theil von dem des ersten Falls, was in der Praxis zu berücksichtigen ist.

Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen.

A. Beobachtungen von gleicher Genauigkeit.

§. 16. Berechnung der Unbekannten. Nach der in §. 6 gegebenen Definition handelt es sich hier darum die in der linearen Function

$$u = a\,x + b\,y + c\,z + \ldots\ldots$$

auftretenden constanten Coefficienten a, b, c ... auszumitteln wenn für besondere Werthe der abhängigen Veränderlichen x, y, z ... also für $x_1\,y_1\,z_1$, $x_2\,y_2\,z_2$, $x_3\,y_3\,z_3$ die Werthe o_1, o_2, o_3 der abhängigen Veränderlichen u beobachtet sind, und die Zahl n dieser Beobachtungen grösser als die Zahl k der Constanten ist.

Würden die beobachteten Werthe o_1, o_2, o_3 ... fehlerfrei sein, so könnte man aus folgenden k Gleichungen

$$\begin{aligned} o_1 &= a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1 + \dots \\ o_2 &= a\,x_2 + b\,y_2 + c\,z_2 + \dots \\ &\;\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ o_k &= a\,x_k + b\,y_k + c\,z_k + \dots \end{aligned}$$

die k Constanten a, b, c ... bestimmen und dieselben würden alle übrigen (n — k) Gleichungen befriedigen, d. i. zu identischen Gleichungen machen. Da nun aber die Grössen o_1, o_2, o_3 ... nicht fehlerfrei sind, vielmehr zwischen diesen beobachteten und den berechneten Werthen von u, nämlich

$$\begin{aligned} u_1 &= a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1 + \dots \\ u_2 &= a\,x_2 + b\,y_2 + c\,z_2 + \dots \\ u_3 &= a\,x_3 + b\,y_3 + c\,z_3 + \dots \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

kleine Unterschiede $u_1 - o_1 = v_1$, $u_2 - o_2 = v_2$, $u_3 - o_3 = v_3$ bestehen, so muss man, um allen Beobachtungen möglichst gerecht zu werden, die Constanten a, b, c ... so bestimmen dass durch sie die Summe der Fehlerquadrate [v v] ein Minimum wird. Wenn nun

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 - o_1 = a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1 + \dots - o_1 \\ v_2 &= u_2 - o_2 = a\,x_2 + b\,y_2 + c\,z_2 + \dots - o_2 \\ v_3 &= u_3 - o_3 = a\,x_3 + b\,y_3 + c\,z_3 + \dots - o_3 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

so soll die Summe

$$[v\,v] = [(a\,x + b\,y + c\,z + \dots - o)^2]$$

ein Minimium werden. Die Werthe von a, b, c ... welche dieses bewirken können, ergeben sich nach den Regeln der Differentialrechnung aus folgenden k Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} v_1\,x_1 + v_2\,x_2 + v_3\,x_3 + \dots + v_n\,x_n &= 0 \\ v_1\,y_1 + v_2\,y_2 + v_3\,y_3 + \dots + v_n\,y_n &= 0 \\ v_1\,z_1 + v_2\,z_2 + v_3\,z_3 + \dots + v_n\,z_n &= 0 \text{ u. s. w.} \end{aligned} \tag{26}$$

in welche die oben stehenden Werthe von $v_1, v_2, v_3 \dots v_n$ einzusetzen sind. Thut man dieses, so erhält man nach den erforderlichen Reductionen folgendes andere System von k Gleichungen welche zur Auffindung der Constanten a, b, c ... dienen und Normalgleichungen heissen, nämlich:

$$\begin{aligned} [x\,x]\,a + [x\,y]\,b + [x\,z]\,c + \dots &= [x\,o] \\ [y\,x]\,a + [y\,y]\,b + [y\,z]\,c + \dots &= [y\,o] \\ [z\,x]\,a + [z\,y]\,b + [z\,z]\,c + \dots &= [z\,o] \text{ u. s. w.} \end{aligned} \tag{27}$$

Hat man hieraus a, b, c ... gefunden und in die Function u eingesetzt, so ist diese vollkommen bestimmt, und es lassen sich nunmehr die den Beobachtungen o_1, o_2, o_3 ... entsprechenden u_1, u_2, u_3 ..., demnach auch die v_1, v_2, v_3 ... berechnen. (So lange man es nur mit 2 oder 3 Unbe-

kannten und Gleichungen zu thun hat, reichen die aus der Algebra bekannten Auflösungsmethoden der Normalgleichungen vollkommen aus; auf eine grössere Zahl von Unbekannten wendet man mit Vortheil besondere Eliminationsverfahren an. Vergl. §. 26.)

Aus dem System von Gleichungen (26) das sich auch

$$[v\,x] = 0 \quad [v\,y] = 0 \quad [v\,z] = 0, \text{ u. s. w.} \tag{28}$$

schreiben lässt, geht hervor dass nach dem Princip der Methode der kleinsten Quadrate die algebraische Summe der Beobachtungsfehler nicht nothwendig null sein muss. Dieses ist vielmehr nur dann der Fall wenn die Function u ein constantes Glied hat, also

$$u = a + b\,y + c\,z + \ldots \text{ und } x = 1$$

ist; denn nur unter dieser Voraussetzung reducirt sich die erste der drei Gleichungen (26) oder (28) auf

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n = [v] = 0 \tag{29}$$

Was den mittleren Fehler m der beobachteten Werthe $o_1, o_2, o_3 \ldots$ betrifft, so findet man für denselben durch eine ähnliche Betrachtung, wie sie auf Seite 11 behufs Auffindung des mittleren Fehlers gleich genauer directer Beobachtungen angestellt wurde:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n - k}} \tag{30}$$

Dieser Ausdruck für m geht in den Nr 5 über wenn $k = 1$ gesetzt wird, und in der That lassen sich directe Beobachtungen wie vermittelnde mit einem einzigen Elemente betrachten.

Würde die hier vorgelegene Aufgabe, aus Einer Function die Constanten zu bestimmen, dahin erweitert dass aus mehreren Functionen derselben unabhängigen Veränderlichen und derselben Constanten diese letzteren zu bestimmen wären, so wird an dem hier erörterten Gange der Entwicklung nichts weiter geändert, als dass die Functionswerthe $u_1, u_2, u_3 \ldots$ aus mehreren Functionen statt aus einer einzigen zu berechnen sind.

§. 17. Beispiel. Behufs einer grossen und wichtigen Centrirung auf der Amöneburg mass Gerling eine nahe bei der Mitte in zwei Theile A B und B C getheilte kleine Basis A C mit eisernen Messstangen (Toisen) in der Art dass von jedem der drei Punkte der Abstand der beiden anderen Punkte bestimmt wurde. Auf diese Weise fand er

$$\begin{aligned} A\,B &= 9{,}378976\ T = o_1 \\ A\,C &= 18{,}125097 = o_2 \\ B\,A &= 9{,}379902 = o_3 \\ B\,C &= 8{,}746738 = o_4 \\ C\,B &= 8{,}746164 = o_5 \\ C\,A &= 18{,}125676 = o_6 \end{aligned}$$

Diese Beobachtungen sind von zwei Elementen a und b abhängig deren Zusammensetzung die Basis liefert. Die Längen a und b (die Constanten der Function u) sind hier zwar unmittelbar gemessen worden, es soll aber

dieser die Ausgleichung wesentlich erleichternde Umstand des Beispiels halber übersehen werden. Die 6 berechneten Werthe der gemessenen Längen sind nun folgende:

$$
\begin{array}{llll}
u_1 = 1 \,.\, a + 0 \,.\, b & \text{mit } x_1 = 1 & \text{und } y_1 = 0 \\
u_2 = 1 \,.\, a + 1 \,.\, b & \text{,,} \quad x_2 = 1 & \text{,,} \quad y_2 = 1 \\
u_3 = 1 \,.\, a + 0 \,.\, b & \text{,,} \quad x_3 = 1 & \text{,,} \quad y_3 = 0 \\
u_4 = 0 \,.\, a + 1 \,.\, b & \text{,,} \quad x_4 = 0 & \text{,,} \quad y_4 = 1 \\
u_5 = 0 \,.\, a + 1 \,.\, b & \text{,,} \quad x_5 = 0 & \text{,,} \quad y_5 = 1 \\
u_6 = 1 \,.\, a + 1 \,.\, b & \text{,,} \quad x_6 = 1 & \text{,,} \quad y_6 = 1
\end{array}
$$

Da hier $z = 0$, so reduciren sich die Normalgleichungen (27) auf zwei:

$$[x\,x]\, a + [x\,y]\, b = [x\,o] \quad \text{und} \quad [y\,x]\, a + [y\,y]\, b = [y\,o]$$

In dem vorliegenden Falle ist $[x\,x] = 4$, $[x\,y] = [y\,x] = 2$, $[y\,y] = 4$

$$[x\,o] = o_1 + o_2 + o_3 + o_6 = 55{,}009651$$
$$[y\,o] = o_2 + o_4 + o_5 + o_6 = 53{,}743675$$

daher die beiden Normalgleichungen:

$$4\,a + 2\,b = 55{,}009651$$
$$2\,a + 4\,b = 53{,}743675$$

welche sofort die gesuchten Constanten $a = 9{,}379271$ T, $b = 8{,}746283$ T und $a + b = 18{,}125554$ T liefern. Die an den gemessenen Werthen o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6 anzubringenden Verbesserungen sind in Einheiten der sechsten Decimale (Milliontel Toisen): $v_1 = +295$, $v_2 = +457$, $v_3 = -631$, $v_4 = -455$, $v_5 = +119$, $v_6 = -122$. Hiemit berechnet sich $[v\,v] = 930105$, und da $n - k = 6 - 2 = 4$, so findet sich der mittlere Fehler der beobachteten Werthe nach Formel (30) $m = \frac{1}{2}\sqrt{[v\,v]} = \pm 482$ Milliontel Toisen oder $= \pm 0{,}42$ Pariser Linien.

§. 18. Constante aus nicht linearen Functionen. Wäre

$$u = F\,(a,\, b,\, c \ldots x,\, y,\, z \ldots)$$

in Bezug auf die unbekannten Constanten a, b, c ... nicht linear, so könnte man vorerst aus den vorliegenden n Beobachtungen eine kleinere Zahl k auswählen und mit diesen Näherungswerthe von a, b, c ... nämlich A, B, C ... berechnen, und hierauf Verbesserungen zu A, B, C ... gleich $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ suchen welche in Verbindung mit A, B, C ... die Constanten a, b, c ... möglichst richtig darstellen.

Setzt man in der gegebenen Function u für a, b, c ... die Näherungswerthe A, B, C ... ein, so geht dieselbe in

$$U = F\,(A,\, B,\, C \ldots x,\, y,\, z \ldots)$$

über, und wenn man $A + \alpha$ für A, $B + \beta$ für B, $C + \gamma$ für C u. s. w. schreibt, so wird der Functionswerth wieder u, und eine Entwickelung desselben nach dem Taylor'schen Satze liefert

$$u = U + \frac{d\,U}{d\,A}\,\alpha + \frac{d\,U}{d\,B}\,\beta + \frac{d\,U}{d\,C}\,\gamma + \ldots \tag{31}$$

Diese Function u ist in Bezug auf die zu bestimmenden sehr kleinen

Grössen α, β, γ ... linear, und folglich ist durch dieses Verfahren der vorliegende Fall auf den vorausgehenden zurückgeführt. Denn wird

$$\frac{d\,U}{d\,A} = x, \frac{d\,U}{d\,B} = y, \frac{d\,U}{d\,C} = z$$

$$\alpha = a,\ \beta = b,\ \gamma = c,\ u - U = u'$$

gesetzt, so erhält man die im vorhergehenden Paragraphen behandelte Function $u' = a\,x + b\,y + c\,z$ wieder.

Würde man in dem vorhergehenden Beispiel, wie es Gerling that,

$$a = A + \alpha = 9{,}379000 + \alpha$$
$$b = B + \beta = 8{,}746000 + \beta$$

demnach die Näherungswerthe $A = 9{,}379$ T und $B = 8{,}746$ T angenommen haben, so hätten sich die beiden Normalgleichungen auf Seite 22 in der Form

$$4\,\alpha + 2\,\beta = 55{,}009651 - (4\,A + 2\,B) = 0{,}001651$$
$$2\,\alpha + 4\,\beta = 53{,}743675 - (2\,A + 4\,B) = 0{,}001675$$

hieraus die an A und B anzubringenden Verbesserungen in der Grösse

$$\alpha = +\,0{,}000271,\ \beta = +\,0{,}000283$$

und folglich die Unbekannten

$$a = A + \alpha = 9{,}379271$$
$$b = B + \beta = 8{,}746283$$

Toisen ergeben, übereinstimmend mit dem Ergebnisse in §. 17.

B. Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit.

§. 19. Berechnung der Unbekannten. Es bedarf nach den Erörterungen über die Behandlung ungleich genauer directer Beobachtungen keiner besonderen Auseinandersetzung mehr dass in dem nunmehr vorliegenden Falle nicht $[v\,v] = [(a\,x + b\,y + c\,z + \ldots - o)^2]$, wie es bei gleich genauen mittelbaren Beobachtungen zu geschehen hat, sondern

$$[p\,v\,v] = [p\,(a\,x + b\,y + c\,z + \ldots - o)^2]$$

zu einem Minimum zu machen ist, wobei p_1, p_2, p_3 ... die Gewichte der Beobachtungen bezeichnen. Hiedurch wird auch jedes in dem Gleichungssystem (26) enthaltene v mit dem Factor p multiplicirt, und es gehen in Folge dessen die Normalgleichungen (27) in folgende über:

$$[p\,x\,x]\,a + [p\,x\,y]\,b + [p\,x\,z]\,c + \ldots = [p\,x\,o]$$
$$[p\,y\,x]\,a + [p\,y\,y]\,b + [p\,y\,z]\,c + \ldots = [p\,y\,o]$$
$$[p\,z\,x]\,a + [p\,z\,y]\,b + [p\,z\,z]\,c + \ldots = [p\,z\,o] \text{ u. s. w.} \quad (32)$$

aus denen die Unbekannten a, b, c ... nach §. 26 gefunden werden. Auf den mittleren Fehler äussert die Verschiedenheit der Genauigkeit der Beobachtungen keinen anderen Einfluss, als dass P — k oder [p] — k für P — 1 zu setzen ist, so dass man nach Nr 19 erhält

$$m = \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{P - k}} \quad (33)$$

Ausgleichung bedingter Beobachtungen.

A. Beobachtungen von gleicher Genauigkeit.

§. 20. Erläuterung der Aufgaben. Nach der in §. 6 Seite 10 gegebenen Definition werden die auszugleichenden Grössen unmittelbar beobachtet, sind aber nicht unabhängig von einander, sondern müssen gewisse Bedingungen erfüllen, wie z. B.: die Summe der drei Winkel eines Dreiecks = 180^0. Um daher vorliegende Aufgaben allgemeiner aufzufassen nehmen wir an, es seien die wahren Beobachtungsgrössen $u_1, u_2, u_3 \ldots$ durch die Natur der Sache so mit einander verknüpft dass wir aus ihnen eine oder mehrere berechnen können wenn die übrigen bekannt sind.

Hätten wir die richtigen Werthe $u_1, u_2, u_3 \ldots$ bis auf einen zur Verfügung, so müsste sich dieser im Allgemeinen aus einer der folgenden Gleichungen finden lassen:

$$F_1(u_1, u_2, u_3 \ldots) = 0,\ F_2(u_1, u_2, u_3 \ldots) = 0,\ F_3(u_1, u_2, u_3 \ldots) = 0 \quad \text{u. s. w.} \tag{34}$$

Diese Gleichungen enthalten somit die Bedingungen welche die Grössen $u_1, u_2, u_3 \ldots$ zu erfüllen haben, und darum heissen die Beobachtungen, aus denen die mit den zufälligen Fehlern behafteten Werthe $o_1, o_2, o_3 \ldots$ hervorgegangen sind, bedingte Beobachtungen. Es versteht sich von selbst dass wenn die Anzahl der beobachteten Grössen k und die der Bedingungen b ist, die Zahl b kleiner sein muss als k.

Da nun die beobachteten Werthe $o_1, o_2, o_3 \ldots$ von den zu berechnenden $u_1, u_2, u_3 \ldots$ um die unvermeidlichen Fehler abweichen, so werden, wenn man statt der u die o in obige Gleichungen setzt, die rechten Seiten dieser Gleichungen nicht null werden sondern gewisse Werthe $w_1, w_2, w_3 \ldots$ annehmen, so dass

$$F_1(o_1, o_2, o_3 \ldots) = w_1,\ F_2(o_1, o_2, o_3 \ldots) = w_2,\ F_3(o_1, o_2, o_3 \ldots) = w_3 \quad \text{u. s. w.} \tag{35}$$

wird. Diese w können wir berechnen; thun wir dieses und setzen dann an die Stelle von $u_1, u_2, u_3 \ldots$ solche Werthe $o_1 + v_1,\ o_2 + v_2,\ o_3 + v_3 \ldots$ dass den Bedingungen (34) genügt wird, während gleichzeitig $[v\,v]$ seinen kleinsten Werth erhält, so ist unsere gegenwärtige Aufgabe gelöst.

§. 21. Berechnung der Verbesserungen. Bezeichnen wir die Functionen $F_1, F_2, F_3 \ldots$ beziehlich mit $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots$, differentiiren dieselben successive nach $u_1, u_2, u_3 \ldots$ und heissen die partiellen Differential-Quotienten von φ_1 nach $u_1, u_2, u_3 \ldots\ a_1, a_2, a_3 \ldots$, von φ_2 nach $u_1, u_2, u_3 \ldots\ldots\ b_1, b_2, b_3 \ldots$ und von φ_3 nach $u_1, u_2, u_3 \ldots\ c_1, c_2, c_3 \ldots$, so erhalten wir diejenigen unendlich kleinen Grössen um welche sich die Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots$ ändern wenn die Veränderlichen $u_1, u_2, u_3 \ldots$ um $d\,u_1, d\,u_2, d\,u_3 \ldots$ sich ändern. Es wird somit

$$d\varphi_1 = a_1\, d u_1 + a_2\, d u_2 + a_3\, d u_3 + \ldots.$$
$$d\varphi_2 = b_1\, d u_1 + b_2\, d u_2 + b_3\, d u_3 + \ldots.$$
$$d\varphi_3 = c_1\, d u_1 + c_2\, d u_2 + c_3\, d u_3 + \ldots. \quad (36)$$

Da wir nun die $u_1, u_2, u_3 \ldots$ nicht kennen, folglich die Coefficienten $a_1, a_2, a_3 \ldots b_1, b_2, b_3 \ldots c_1, c_2, c_3 \ldots$ nicht zu berechnen vermögen, so bleibt uns nichts übrig als die Werthe $o_1, o_2, o_3 \ldots$ für $u_1, u_2, u_3 \ldots$, die $w_1, w_2, w_3 \ldots$ in dem vorhergehenden Gleichungssystem für die $d\varphi_1$, $d\varphi_2$, $d\varphi_3 \ldots$ im System (36) und $-v_1, -v_2, -v_3 \ldots$ für $d u_1, d u_2, d u_3 \ldots$ zu setzen, um zu den b Bedingungsgleichungen zu gelangen:

$$0 = w_1 + a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \ldots.$$
$$0 = w_2 + b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + \ldots.$$
$$0 = w_3 + c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \ldots. \text{ u. s. w.} \quad (37)$$

wovon jede nach Beschaffenheit der Sache n Glieder haben soll, und worin ein Coefficient a, b, c . . . der Null gleich zu setzen ist wenn das zugehörige v fehlt.

Ausser diesen Bedingungsgleichungen muss auch noch der Forderung

$$[v\, v] = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots. = \text{minimum}$$

genügt werden, es muss also, da $[v\, v]$ ein durch die Gleichungen (37) bedingtes Minimum werden soll, $v_1\, d v_1 + v_2\, d v_2 + v_3\, d v_3 + \ldots. 0$ und zugleich auch nach dem Gleichungssystem (37)

$$0 = a_1\, dv_1 + a_2\, dv_2 + a_3\, dv_3 + \ldots.$$
$$0 = b_1\, dv_1 + b_2\, dv_2 + b_3\, dv_3 + \ldots.$$
$$0 = c_1\, dv_1 + c_2\, dv_2 + c_3\, dv_3 + \ldots. \text{ u. s. w.} \quad (38)$$

sein. Um die $dv_1, dv_2, dv_3 \ldots.$ zu eliminiren, multiplicirt man die letzteren Gleichungen beziehlich mit b unbestimmten Coefficienten $k_1, k_2, k_3 \ldots$, Correlaten der Bedingungsgleichungen genannt, und addirt sie, so dass eine mit der vorletzten übereinstimmende Gleichung, nämlich

$$0 = (a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + \ldots)\, dv_1 + (a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 + \ldots)\, dv_2$$
$$+ (a_3 k_1 + b_3 k_2 + c_3 k_3 + \ldots)\, dv_3 \ldots \quad (39)$$

entsteht in der die Coefficienten der dv dieselben sein müssen wie dort, da diese dv ganz unbestimmt bleiben sollen. Es ist demnach

$$v_1 = a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + \ldots.$$
$$v_2 = a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 + \ldots.$$
$$v_3 = a_3 k_1 + b_3 k_2 + c_3 k_3 + \ldots. \text{ u. s. w.} \quad (40)$$

und diese Gleichungen heissen Correlatengleichungen.

Setzt man die Werthe von v in die Bedingungsgleichungen (37) ein, so ergeben sich b Normalgleichungen, jede mit b Gliedern, aus welchen die bisher unbestimmten Correlaten gefunden werden können, nämlich:

$$[a\, a]\, k_1 + [a\, b]\, k_2 + [a\, c]\, k_3 + \ldots. + w_1 = 0$$
$$[b\, a]\, k_1 + [b\, b]\, k_2 + [b\, c]\, k_3 + \ldots. + w_2 = 0$$
$$[c\, a]\, k_1 + [c\, b]\, k_2 + [c\, c]\, k_3 + \ldots. + w_3 = 0 \text{ u. s. w.} \quad (41)$$

Hat man hieraus die $k_1, k_2, k_3 \ldots$ nach §. 26 gefunden und in die Correlatengleichungen eingesetzt, so sind die v und hiemit die $o + v$ oder

die ausgeglichenen Beobachtungswerthe u leicht zu berechnen, und die vorgelegene Aufgabe ist gelöst.

Fassen wir die vorstehenden Entwickelungen zusammen, so sind folgende Arbeiten bei Ausgleichung bedingter Beobachtungen zu verrichten:

1) Aufsuchen der Bedingungen, d. i. der Gleichungen (34);
2) Herstellung der Differentialausdrücke für die Bedingungen (36);
3) Berechnung der Widersprüche w nach den Gleichungen (35);
4) Numerischer Ansatz der Bedingungsgleichungen (37);
5) Aufstellung der Correlatengleichungen (40);
6) Herstellung und Auflösung der Normalgleichungen (41); endlich
7) Berechnung der Verbesserungen durch Substitution in (40).

Anbelangend den mittleren Fehler m der einzelnen Beobachtungen welcher hier für alle gleich gross ist, so ergibt sich derselbe aus dem Ausdrucke für den mittleren Fehler gleich genauer vermittelnder Beobachtungen Nr 30 wenn man nur in dem dortigen Nenner $k = n - b$ setzt, nämlich

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{b}} \tag{42}$$

§. 22. Beispiel. In einem ebenen Dreiecke seien die drei Winkel gemessen und zwar

$$\begin{aligned} A = o_1 &= 62^0\,37'\,24'' \\ B = o_2 &= 48\;\;47\;\;46 \\ C = o_3 &= 68\;\;34\;\;35 \\ \hline [o] &= 179^0\,59'\,45'' \end{aligned}$$

Hier entspricht dem Geschäfte (1) die Gleichung $\varphi = A + B + C - - 180^0$, $u_1 + u_2 + u_3 - 180^0 = 0$, dem Geschäfte (2) die Gleichung $d\,\varphi = d\,u_1 + d\,u_2 + d\,u_3$, dem Geschäfte (3) die Berechnung von $w = = 180^0 - (o_1 + o_2 + o_3) = 15''$, dem Geschäfte (4) die Aufstellung der Bedingungsgleichung $15'' = v_1 + v_2 + v_3$, dem Geschäfte (5) die Aufstellung der Correlatengleichungen $v_1 = k_1$, $v_2 = k_1$, $v_3 = k_1$, dem Geschäfte (6) die Aufstellung der Normalgleichung $3\,k_1 = 15''$ und die Bestimmung von $k_1 = 5''$, endlich dem Geschäfte (7) die Berechnung der Verbesserungen $v_1 = v_2 = v_3 = 5''$ und des mittleren Fehlers der einzelnen Beobachtung $m = \sqrt{125} = \pm 11'',18$.

B. Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit.

§. 23. Verbesserungen und mittlerer Fehler. Wir haben es jetzt mit Beobachtungen $o_1, o_2, o_3 \ldots$ zu thun denen die Gewichte p_1, p_2, $p_3 \ldots$ zukommen. Dieser Umstand bringt selbstverständlich in den Gleichungen (34), (35), (36) keine Veränderung hervor, und es sind demnach auch die Bedingungsgleichungen (37) genau so wie in dem ersten Falle (Seite 25) anzusetzen: die vier ersten Geschäfte der Ausgleichung bedingter Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit fallen also mit den gleichbenannten gleicher Genauigkeit zusammen, und die erste Abweichung von

diesen Geschäften ergibt sich, indem nicht [v v] sondern [p v v] zu einem Minimum zu machen ist, woraus folgt

$$p_1 v_1 dv_1 + p_2 v_2 dv_2 + p_3 v_3 dv_3 + \ldots . = 0 \tag{43}$$

Da an den Bedingungsgleichungen 37 nichts geändert wird, so bleiben auch deren Differentiale (38) dieselben wie früher (Seite 25), und man kommt desshalb durch analoge Schlussfolge zu den Correlatengleichungen:

$$v_1 = \frac{a_1 k_1}{p_1} + \frac{b_1 k_2}{p_1} + \frac{c_1 k_3}{p_1} + \ldots .$$

$$v_2 = \frac{a_2 k_1}{p_2} + \frac{b_2 k_2}{p_2} + \frac{c_2 k_3}{p_2} + \ldots .$$

$$v_3 = \frac{a_3 k_1}{p_3} + \frac{b_3 k_2}{p_3} + \frac{c_3 k_3}{p_3} + \ldots . \text{ u. s. w.} \tag{44}$$

Setzt man die Werthe von $v_1, v_2, v_3 \ldots$ in die Bedingungsgleichungen (37), so erhält man sofort die Normalgleichungen:

$$\left[\frac{a\,a}{p}\right] k_1 + \left[\frac{a\,b}{p}\right] k_2 + \left[\frac{a\,c}{p}\right] k_3 + \ldots . + w_1 = 0$$

$$\left[\frac{b\,a}{p}\right] k_1 + \left[\frac{b\,b}{p}\right] k_2 + \left[\frac{b\,c}{p}\right] k_3 + \ldots . + w_2 = 0$$

$$\left[\frac{c\,a}{p}\right] k_1 + \left[\frac{c\,b}{p}\right] k_2 + \left[\frac{c\,c}{p}\right] k_3 + \ldots . + w_3 = 0$$

$$\text{u. s. w.} \tag{45}$$

aus denen durch Elimination nach §. 26 die Correlaten $k_1, k_2, k_3 \ldots .$ und durch Substitution die Verbesserungen $v_1, v_2, v_3 \ldots$ und damit die ausgeglichenen Beobachtungen $o_1 + v_1$, $o_2 + v_2$, $o_3 + v_3$, ... gefunden werden. Es ändert sich also auch an den übrigen drei in §. 21 aufgezählten Ausgleichungsgeschäften (5), (6), (7) nichts als dass man in den Correlaten- und Normalgleichungen die Coefficienten der Correlaten mit den Gewichten p zu multipliciren hat.

In Bezug auf die mittleren Fehler $m_1\ m_2 \ldots .$ der einzelnen Beobachtungen gilt auch hier dass wenn m der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ist,

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{p_1}},\ m_2 = \frac{m}{\sqrt{p_2}},\ m_3 = \frac{m}{\sqrt{p_3}} \text{ u. s. w.} \tag{46}$$

wird, während der Fehler der Gewichtseinheit selbst ausgedrückt ist durch

$$m = \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{b}} \tag{47}$$

übereinstimmend bis auf den Factor p mit dem Ausdrucke Nr 42.

§. 24. Beispiel. Berechnen wir jetzt die Verbesserungen der in §. 22 aufgeführten Beobachtungen o_1, o_2, o_3 unter der Annahme dass $p_1 = 16$, $p_2 = 25$, $p_3 = 36$, so ist die Bedingungsgleichung

$$15'' = v_1 + v_2 + v_3$$

die Correlatengleichungen sind

$$v_1 = \frac{1}{16} k_1 \quad v_2 = \frac{1}{25} k_1 \quad v_3 = \frac{1}{36} k_1$$

und die Normalgleichung ist

$$15'' = \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36}\right) k_1 = 0{,}13\ k_1$$

Hieraus folgt $k_1 = 1500 : 13$ und damit die Verbesserung

$$v_1 = \frac{1500}{13\ .\ 16} = +\ 7{,}''2$$

$$v_2 = \frac{1500}{13\ .\ 25} = +\ 4{,}''6$$

$$v_3 = \frac{1500}{13\ .\ 36} = +\ 3{,}''2$$

Aus den Verbesserungen ergibt sich

$$[p\ v\ v] = 16\ .\ 51{,}84 + 25\ .\ 21{,}16 + 36\ .\ 10{,}24 = 1727$$

und da hier $b = 1$ ist, $m = \sqrt{1727} = \pm\ 41{,}''5$ und hiemit nach (46)

$$m_1 = \pm\ 10{,}''37;\ m_2 = \pm\ 8{,}''30;\ m_3 = \pm\ 6{,}''92$$

§. 25. Gewichte von Winkelmessungen. Ueber die Ableitung der Werthe von p_1, p_2, p_3 aus den Winkelmessungen sind die Ansichten noch getheilt: viele Geodäten setzen die Gewichte von Winkelmessungen c. p. den Repetitionszahlen direct proportional (also müssten die Winkel A, B, C des hier vorliegenden Dreiecks beziehlich 16, 25, 36mal repetirt worden sein), während andere und vielleicht die meisten Beobachter diese Gewichte c. p. den Quadraten der Repetitionszahlen proportional annehmen (also wären hier die Winkel A, B, C nur 4, 5, 6mal zu repetiren gewesen, um die Gewichte 16, 25, 36 zu erhalten). In Wirklichkeit ist keine dieser extremen Annahmen unbedingt richtig oder falsch, die Wahrheit liegt vielmehr innerhalb der durch sie bezeichneten Grenzen. Denn nimmt man die Einstellungsfehler auf die Signale in den Winkelschenkeln gleich Null an, so zeigt sich dass die Gewichte nahezu den Quadraten der Repetitionszahlen proportional anzunehmen sind; darf aber der Fehler des Ablesens mit Einschluss der Theilungsfehler als Null angesehen werden, so stellen die Repetitionszahlen selbst annähernd die Gewichte der Winkelbeobachtungen vor. Bedenkt man nun dass diese letztere Voraussetzung bei grossen für Haupttriangulationen zu gebrauchenden Theodolithen, und die ersteren bei kleinen für untergeordnete Winkelmessungen bestimmten Theodolithen nahehin zutrifft, so kann man sagen: bei grossen Instrumenten und Repetitionszahlen kann man die Gewichte diesen Zahlen selbst, bei kleinen Instrumenten und Repetitionszahlen den Quadraten der Repetitionszahlen proportional setzen, in allen übrigen Fällen hat man nach den obwaltenden Umständen zu entscheiden, ob sich dieselben mehr dem einen oder dem anderen Extrem nähern und hienach seine Wahl der Gewichte der Beobachtungen zu treffen wenn man nicht vorzieht eine Formel zu construiren welche den Einstellungs-, Ablesungs- und Theilungsfehlern zugleich Rechnung trägt. (Vergl. Helmert, Ausgleichungsrechnungen, S. 312 bis 323.)

§. 26. Auflösung von Normalgleichungen. Diese Gleichungen lassen sich nach den bisher behandelten Aufgaben stets auf die Form bringen:

$$\begin{aligned}
\text{(I)}\qquad & [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,d]\,u + [a\,n] = 0 \\
& [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,c]\,z + [b\,d]\,u + [b\,n] = 0 \\
& [a\,c]\,x + [b\,c]\,y + [c\,c]\,z + [c\,d]\,u + [c\,n] = 0 \\
& [a\,d]\,x + [b\,d]\,y + [c\,d]\,z + [d\,d]\,u + [d\,n] = 0 \qquad (48)
\end{aligned}$$

welche zeigt dass ausser den absoluten Gliedern $[a\,n]$, $[b\,n]$... und den quadratischen Coefficienten $[a\,a]$, $[b\,b]$... alle übrigen Coefficienten doppelt vorkommen, was bei anderen Gleichungen nicht der Fall ist. Auf dieser Eigenthümlichkeit der Normalgleichungen beruht das folgende von Gauss angegebene abgekürzte Eliminationsverfahren.

Multiplicirt man nämlich die erste Gleichung des vorstehenden Systems zuerst mit $\frac{[a\,b]}{[a\,a]}$, dann mit $\frac{[a\,c]}{[a\,a]}$ und endlich mit $\frac{[a\,d]}{[a\,a]}$, so erhält man folgende drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
& [a\,b]\,x + [a\,b]\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,y + [a\,c]\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,z + [a\,d]\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,u + [a\,n]\frac{[a\,b]}{[a\,a]} = 0 \\
& [a\,c]\,x + [a\,b]\frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,y + [a\,c]\frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,z + [a\,d]\frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,u + [a\,n]\frac{[a\,c]}{[a\,a]} = 0 \\
& [a\,d]\,x + [a\,b]\frac{[a\,d]}{[a\,a]}\,y + [a\,c]\frac{[a\,d]}{[a\,a]}\,z + [a\,d]\frac{[a\,d]}{[a\,a]}\,u + [a\,n]\frac{[a\,d]}{[a\,a]} = 0
\end{aligned}$$

Zieht man diese Gleichungen nach einander von der zweiten, dritten und vierten des ersten Systems ab, so verschwinden die Glieder welche x enthalten, und es entsteht das folgende zweite Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
\text{(II)}\qquad & [b\,b\,.\,1]\,y + [b\,c\,.\,1]\,z + [b\,d\,.\,1]\,u + [b\,n\,.\,1] = 0 \\
& [b\,c\,.\,1]\,y + [c\,c\,.\,1]\,z + [c\,d\,.\,1]\,u + [c\,n\,.\,1] = 0 \\
& [b\,d\,.\,1]\,y + [c\,d\,.\,1]\,z + [d\,d\,.\,1]\,u + [d\,n\,.\,1] = 0 \qquad (49)
\end{aligned}$$

worin die Coefficienten der drei Unbekannten und die absoluten Glieder folgende Bedeutungen haben; es ist nämlich

$$\begin{aligned}
& [b\,b\,.\,1] = [b\,b] - [a\,b]\,.\,\frac{[a\,b]}{[a\,a]}, \qquad [b\,c\,.\,1] = [b\,c] - [a\,c]\,.\,\frac{[a\,b]}{[a\,a]} \\
& [b\,d\,.\,1] = [b\,d] - [a\,d]\,.\,\frac{[a\,b]}{[a\,a]}, \qquad [b\,n\,.\,1] = [b\,n] - [a\,n]\,.\,\frac{[a\,b]}{[a\,a]} \qquad (50)
\end{aligned}$$

Ueber das Bildungsgesetz dieser Hilfsgrössen ist zu bemerken dass dem betreffenden Product b b, b c, b n die Zahl 1 beigefügt wird wenn der Nenner des Subtrahenden a a ist; dass ferner die Werthe für $[b\,b\,.\,1]$, $[b\,c\,.\,1]$ null werden wenn man deren symbolische Zeichen algebraisch auffasst (z. B. $[b\,b\,.\,1] = b\,b - b\,b = 0$, $[b\,n\,.\,1] = b\,n - b\,n = 0$), und dass endlich der erste Factor des Subtrahenden $= [a\,b]$, $[a\,c]$, $[a\,d]$... ist wenn der Minuend beziehlich $[b\,b]$, $[b\,c]$, $[b\,d]$... heisst. Wird nunmehr die erste Gleichung des zweiten Systems zuerst mit $[b\,c\,.\,1] : [b\,b\,.\,1]$, dann mit $[b\,d\,.\,1] : [b\,b\,.\,1]$ multiplicirt, und hierauf die erste der so entstandenen Gleichungen von der zweiten des Systems II, und die zweite neue von der

dritten des Systems II abgezogen, so entsteht folgendes dritte Gleichungssystem:

$$\text{(III)}\qquad \begin{aligned}[cc.2]\,z + [cd.2]\,u + [cn.2] &= 0\\ [cd.2]\,z + [dd.2]\,u + [dn.2] &= 0\end{aligned} \qquad (51)$$

in welchem die Hilfsgrössen Folgendes bedeuten:

$$\begin{aligned}[cc.2] &= [cc.1] - [bc.1]\,.\,\frac{[bc.1]}{[bb.1]}\\ [cd.2] &= [cd.1] - [bd.1]\,.\,\frac{[bc.1]}{[bb.1]}\end{aligned} \qquad (52)$$

Auch hier wird jeder Coefficient [cc.2], [cd.2].... null wenn man seine symbolischen Zeichen algebraisch auffasst; es ist ferner den Producten cc, cd ... die Zahl 2 beizufügen wenn der Nenner des Subtrahenden [bb.1] ist, und es folgen schliesslich den Producten cc, cd ... des Minuenden die Producte bc, bd ... des ersten Factors im Subtrahenden.

Wird endlich die erste Gleichung des Systems III mit [cd.2]:[cc.2] multiplicirt und von der zweiten abgezogen, so entsteht

$$\text{(IV)}\qquad [dd.3]\,u + [dn.3] = 0 \qquad (53)$$

wobei der Coefficient von u und das absolute Glied folgende Werthe haben:

$$\begin{aligned}[dd.3] &= [dd.2] - [cd.2]\,.\,\frac{[cd.2]}{[cc.2]}\\ [dn.3] &= [dn.2] - [cn.2]\,.\,\frac{[cd.2]}{[cc.2]}\end{aligned} \qquad (54)$$

Aus den Gleichungen IV, III, II, I erhält man durch successive Division mit [dd.3], [cc.2], [bb.1], [aa] die gesuchten Grössen u, z, y, x wie folgt:

$$\text{(V)}\qquad \begin{aligned}&u + \frac{[dn.3]}{[dd.3]} = 0\\ &z + \frac{[cd.2]}{[dd.2]}\,u + \frac{[cn.2]}{[dd.2]} = 0\\ &y + \frac{[bc.1]}{[bb.1]}\,z + \frac{[bd.1]}{[bb.1]}\,u + \frac{[bn.1]}{[bb.1]} = 0\\ &x + \frac{[ab]}{[aa]}\cdot y + \frac{[ac]}{[aa]}\cdot z + \frac{[ad]}{[aa]}\cdot u + \frac{[an]}{[aa]} = 0\end{aligned} \qquad (55)$$

Ein von Bessel in den Astr. Nachrichten, Bd. 17, S. 305 mitgetheiltes und auch in Helmert's Ausgleichungsrechnungen S. 133 enthaltenes indirectes Verfahren von Jacobi, die Unbekannten aus Normalgleichungen zu finden, ist insofern merkwürdig als sich diese Unbekannten und die Gewichte ihrer Bestimmung auf ganz symmetrische Weise ergeben, gewährt aber im Vergleich mit der oben dargestellten Auflösungsmethode von Gauss keine Zeitersparniss, wesshalb wir dessen Mittheilung hier unterlassen.

Zweiter Abschnitt.

Die Horizontalmessungen.

A. Messung der Linien.

§. 27. Mit dem Ausdrucke Messung der Linien bezeichnen wir alle Verrichtungen durch welche gerade und krumme Linien auf dem Felde abgesteckt und aufgenommen werden. Diese Verrichtungen bestehen in mittel- oder unmittelbaren Messungen und den damit verbundenen Rechnungen oder geometrischen Constructionen, und sind theils nach der Form der Linien, theils nach ihrer Ausdehnung, theils nach den Hindernissen welche die Beschaffenheit des Bodens mit sich bringt, theils nach den Hilfsmitteln welche zur Messung verwendet werden können, theils nach der Einsicht und Geschicklichkeit des Geometers verschieden von einander. Ihre Theorie wird desshalb am zweckmässigsten in der Form von Aufgaben welche für gegebene Voraussetzungen bestimmte Forderungen stellen, abgehandelt. Wenn man diese Aufgaben mit Rücksicht auf die im Leben und in der Natur bestehenden Verhältnisse zweckmässig wählt und ihre Lösungen vervielfältigt und so einrichtet dass daraus hervorgeht wie in einzelnen Fällen mit den dargebotenen Hilfsmitteln der beabsichtigte Zweck auf eine einfache und zuverlässige Art erreicht werden kann: so lassen sich in einer verhältnissmässig geringen Zahl von Aufgaben so viele Verfahrungsweisen, Regeln und Winke geben dass sich jeder denkende Geometer in allen möglichen Fällen leicht selbst zu helfen weiss.

Das Abstecken gerader Linien.

Das Abstecken einer geraden Linie besteht in der Aufstellung einer entsprechenden Anzahl von Fluchtstäben oder Signalen deren lothrechte Axen in einer Verticalebene liegen, und es wurde bei Beschreibung der Fluchtstäbe gezeigt, wie man in den einfachsten Fällen eine gerade Linie mit Stäben absteckt. Wir setzen daher hier als bekannt voraus dass man zwischen zwei gegebenen Punkten von geringer Entfernung einen dritten Punkt angeben könne der mit jenen in einer Geraden liegt, und dass man eine durch zwei Punkte bestimmte Gerade nach beiden Seiten hin zu verlängern wisse wenn das Terrain keine Schwierigkeiten in den Weg legt. Das früher beschriebene Verfahren zur Absteckung gerader Linien lässt sich aber nicht mehr anwenden wenn die gegebenen zwei Punkte so liegen dass man von einem zum anderen nicht mehr sehen kann, und es ist nun zu zeigen wie man diese Schwierigkeit überwindet.

§. 28. Aufgabe. Zwischen zwei gegebenen Punkten von mässiger Entfernung welche sich gegenseitig nicht anvisiren lassen, einen dritten Punkt in gerader Linie abzustecken.

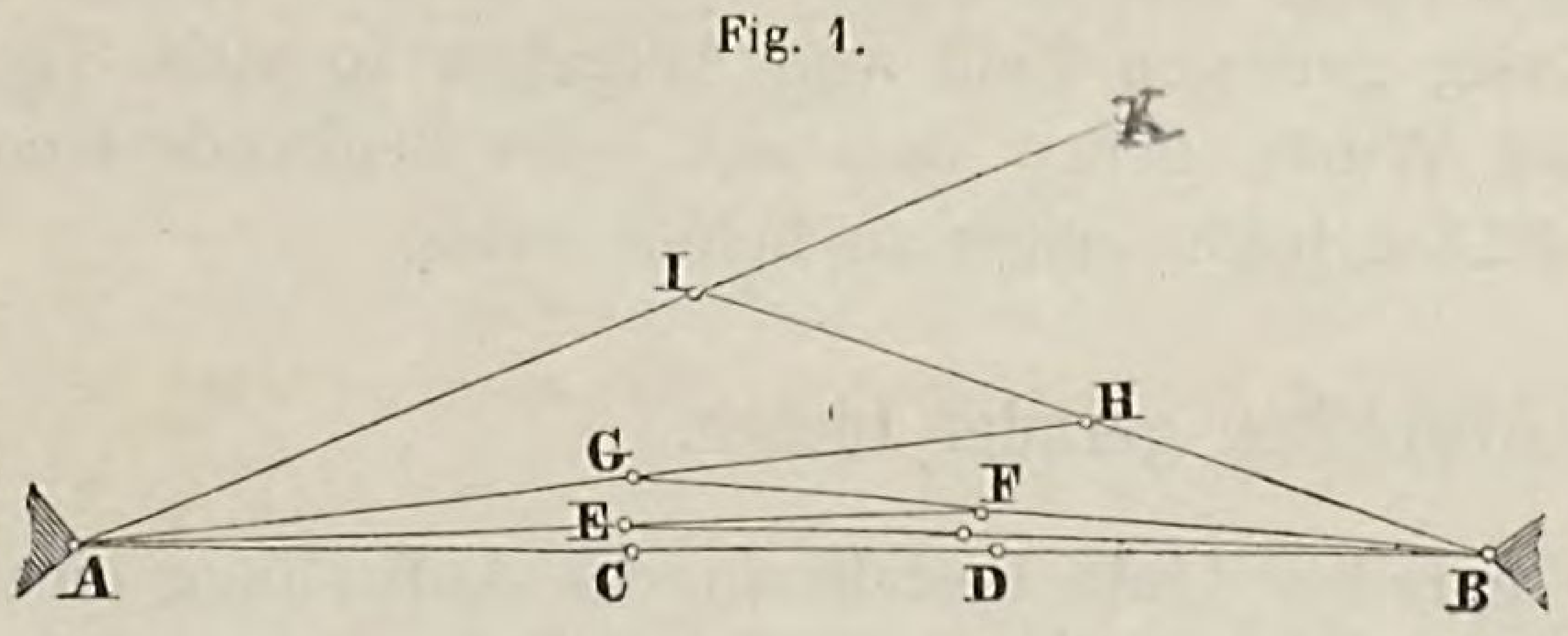
Der Grund warum man von einem gegebenen Punkte A nach einem anderen B und von diesem nach jenem keine Absehlinie herstellen kann, liegt entweder darin dass sich zwischen beiden Punkten ein Bergvorsprung oder ein Hügel befindet, oder darin dass man sich hinter A und B nicht aufstellen kann, weil diese Punkte durch lothrechte Mauerkanten, durch Thurmspitzen oder andere ähnliche natürliche Signale bezeichnet sind. Welches dieser Hindernisse stattfindet, ist für die Lösung der vorliegenden Aufgabe gleich; das Verfahren ändert sich nur mit den dazu gestatteten Hilfsmitteln welche entweder bloss Absteckstäbe, oder ein Prismenkreuz mit Absteckstäben, oder endlich ein Spiegelkreis und Stäbe sind.

1) Lösung der Aufgabe ohne andere Hilfsmittel als Absteckstäbe.

In diesem Falle erfordert die Lösung der vorliegenden Aufgabe mindestens einen Gehilfen. Mit diesem steckt man mehrere theils durch A theils durch B gehende gerade Hilfslinien ab, bis man endlich zwei solche erhält welche ein Stück gemeinschaftlich haben. Ist dieses der Fall, so liegen die beiden Punkte welche den gemeinsamen Theil der beiden Hilfsgeraden bezeichnen, in der geraden Linie A B.

Zu diesem Behufe stelle man sich (nach Fig. 1) in einem beliebigen Punkte K auf von dem aus man A erblickt, und richte durch blosses Absehen den Gehilfen I in die Gerade A K ein. Hiebei muss der Gehilfe den Punkt I so wählen dass man von ihm aus nach B sehen kann. Es wird nun von I aus der Stab H in die Linie B I, von H aus der Stab G in die Linie A H, von G aus der Stab F in die Linie B G, von F aus E in A F u. s. f. eingerichtet, bis man endlich zwei Punkte C und D erhält welche

Fig. 1.



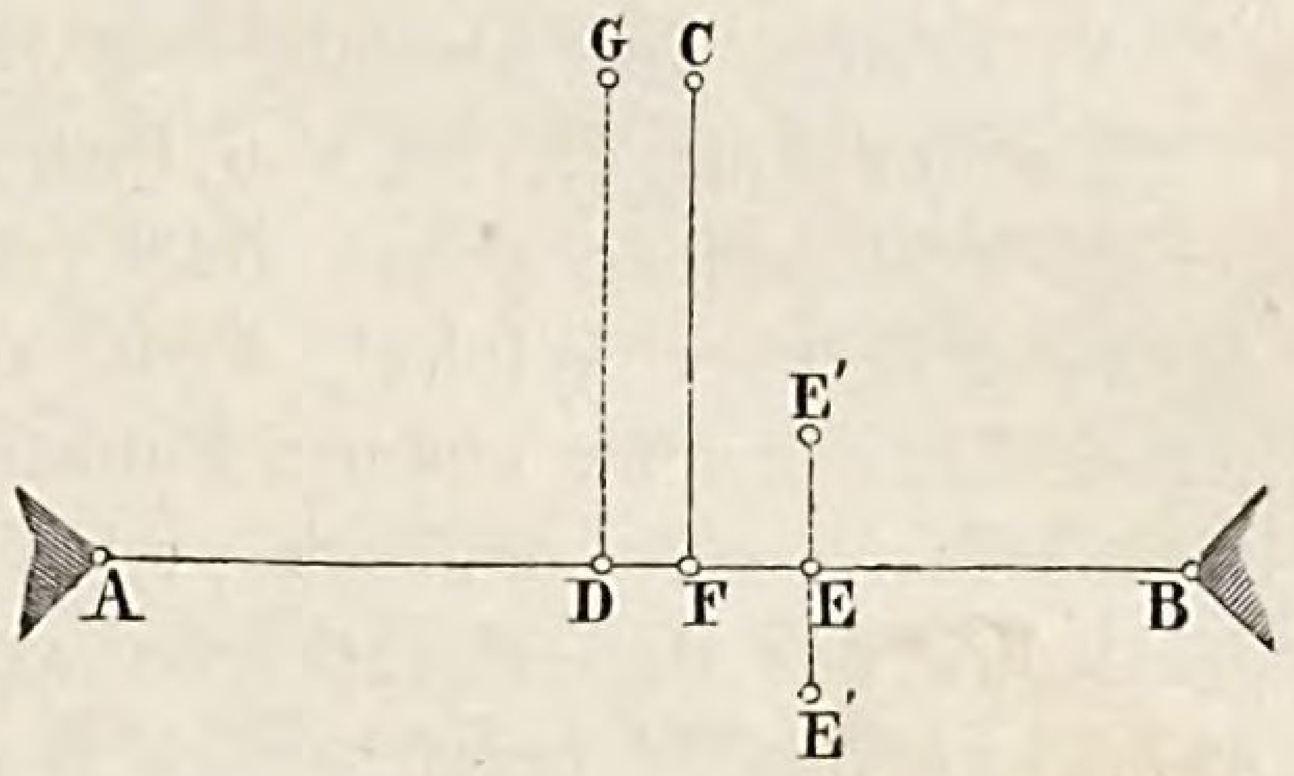
sowohl in der Geraden A D als in der Geraden B C liegen. Da diese zwei Linien das gerade Stück C D gemein haben, so liegen sie selbst und mit ihnen C und D in einer einzigen geraden Richtung, und zwar in der welche durch A und B geht.

Man begreift leicht dass diese Lösung jederzeit umständlich, oft unsicher und manchmal unausführbar ist. Sie wird unsicher wenn der Raum zwischen den Linien C E G I und D F H K im Verhältniss zur Länge A B nur schmal ist, und unausführbar wenn der bezeichnete Raum in einen nach A und B hin rasch abfallenden Bergrücken übergeht. Diese Schwierigkeiten verschwinden bei Anwendung des Prismenkreuzes.

2) Die Lösung der Aufgabe mit dem Prismenkreuze besteht nach der

früher gegebenen Anleitung zum Gebrauche des Prismenkreuzes darin dass man, um nach Fig. 2 den Punkt E zwischen A und B einzuschalten, von einem beliebigen Punkte E′ ausgehend und die beiden Objectivebenen des Instruments gegen A und B, die Ocularebenen aber gegen das Auge wendend, so lange fortschreitet bis man an eine Stelle gelangt in welcher sich die Bilder von A und B in den beiden Prismen decken. Diese Stelle bezeichnet den gesuchten Punkt E. (In gleicher Weise verfährt man bei Anwendung des in Bd I, Seite 200 beschriebenen und abgebildeten fünfseitigen Winkelprismas.)

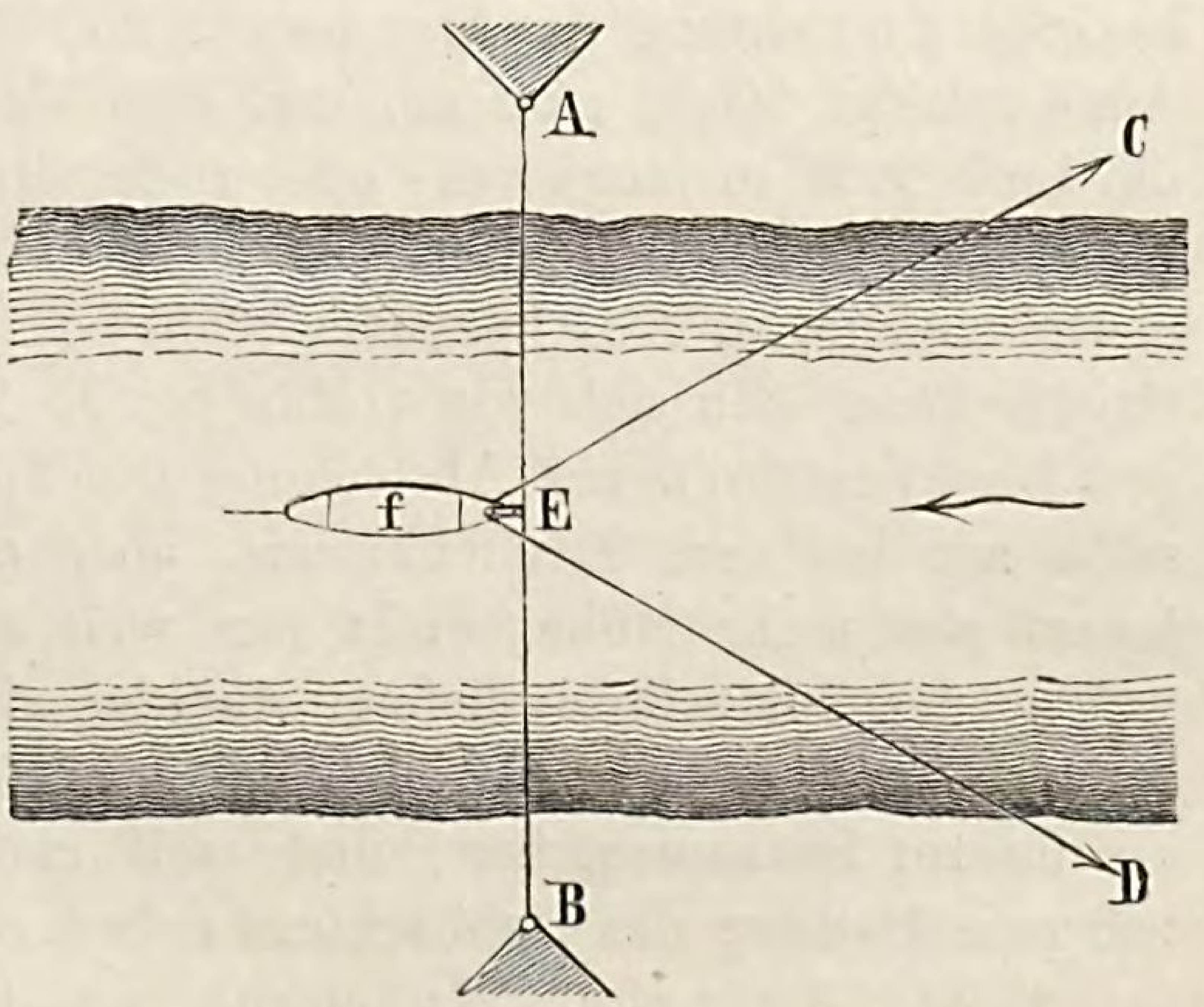
Fig. 2.



Will man sich von der richtigen Lage dieses Punkts überzeugen, so braucht man nur das eben beschriebene und für eine Seite von A B ausgeführte Verfahren von der anderen Seite von A B her zu wiederholen und zuzusehen ob das Instrument auch in dieser entgegengesetzten Lage den Punkt E angibt oder nicht. Erhält man denselben zum zweiten Male, so ist diess ein Beweis nicht bloss für die richtige Operation sondern auch für die gehörige Berichtigung des Prismenkreuzes; ergibt sich aber durch die zweite Messung ein anderer Punkt, so deutet dieser lediglich auf eine unvollständige Berichtigung des Instruments hin welche desshalb zu ergänzen ist. Jedenfalls liegt dann der gesuchte Punkt E in der Mitte zwischen den zwei Punkten welche die beiden Absteckungen ergeben haben.

Gewährt das Terrain hinreichenden Raum, so kann man zur Prüfung der Lage des Punkts E einen Stab D in die Linie E B einstecken und von E aus untersuchen, ob dieser Stab auch in der Linie E A steht: ist dieses wirklich der Fall, so muss nothwendig auch E ein Punkt der Geraden A B sein, weil das gerade Stück D E den beiden durch A und B gehenden Geraden A E und B D gemein ist.

Fig. 3.



Da man zur Ausführung der Absteckung des Punkts E nur so viel Raum bedarf als nöthig ist, um in einer Querrichtung zu A B darauf vor- oder rückwärts zu gehen, so ist klar dass die Einschränkung dieses Raums auf einen schmalen Streifen kein Hinderniss ist wenn man mit dem Prismen-

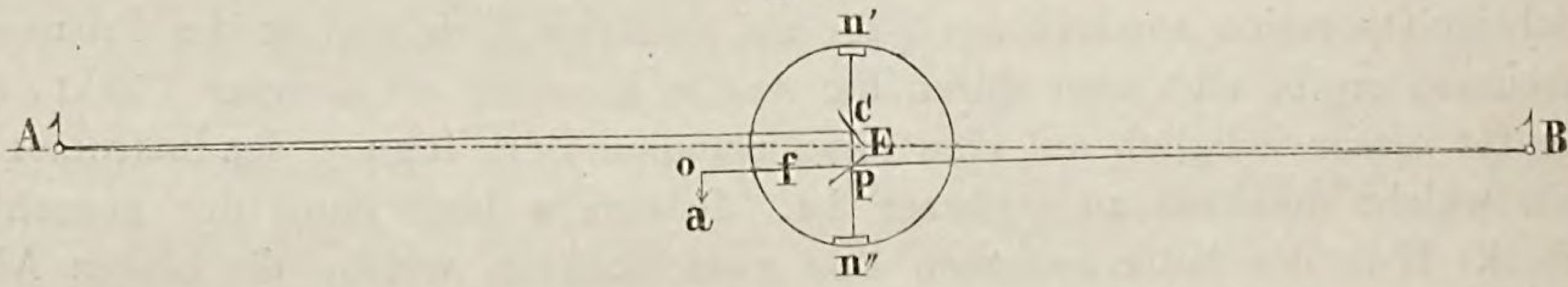
kreuze arbeitet, während dieselbe die in Nr 1 beschriebene Absteckung unmöglich macht. Ebenso ist klar dass auf einem Strome die Aufsuchung eines Punkts E in der geraden Linie A B mit Hilfe eines Fahrzeugs f welches von sich oder von den Ufern aus bewegt und geleitet wird, leicht ausgeführt werden kann, was nicht der Fall wäre wenn man die Absteckung bloss mit Stäben bewirken wollte.

3) Lösung der Aufgabe mit Hilfe des Spiegelkreises.

Da der Spiegelkreis von Pistor und Martins zur Messung von Winkeln geeignet ist welche genau 180⁰ betragen, so muss derselbe auch zur Aussteckung solcher Winkel, d. h. zur Einschaltung eines Punkts E in die gerade Linie zweier anderer Punkte A und B dienen. Für diese Absteckung ist das Instrument dadurch erst vorzubereiten dass man dem Ocular des Fernrohrs das Reflexionsprisma vorschraubt und den in der betreffenden Abbildung mit N′ bezeichneten Nonius auf den Theilstrich 180⁰ des Limbus genau einstellt.

Nach dieser Vorbereitung fasst man den Spiegelkreis an seinem Griffe, hält ihn wagrecht vor den Kopf und richtet das Fernrohr f, wie Fig. 4 zeigt, mit dem bei a befindlichen Auge nach dem Punkte B wodurch der

Fig. 4.



drehbare Spiegel c von dem Punkte A Licht erhält das in Folge der bekannten Einrichtung des Instruments den Weg A c p o a macht, bis es ins Auge gelangt. Geht man nun mit dem also gehaltenen Spiegelkreise gegen die Linie A B so lange vor- oder rückwärts bis sich die bei a gesehenen Bilder von A und B decken, so bezeichnet die Axe des Instruments den gesuchten und in A B liegenden Punkt E. Von der richtigen Lage dieses Punkts kann man sich wie vorhin bei Nr 2 überzeugen.

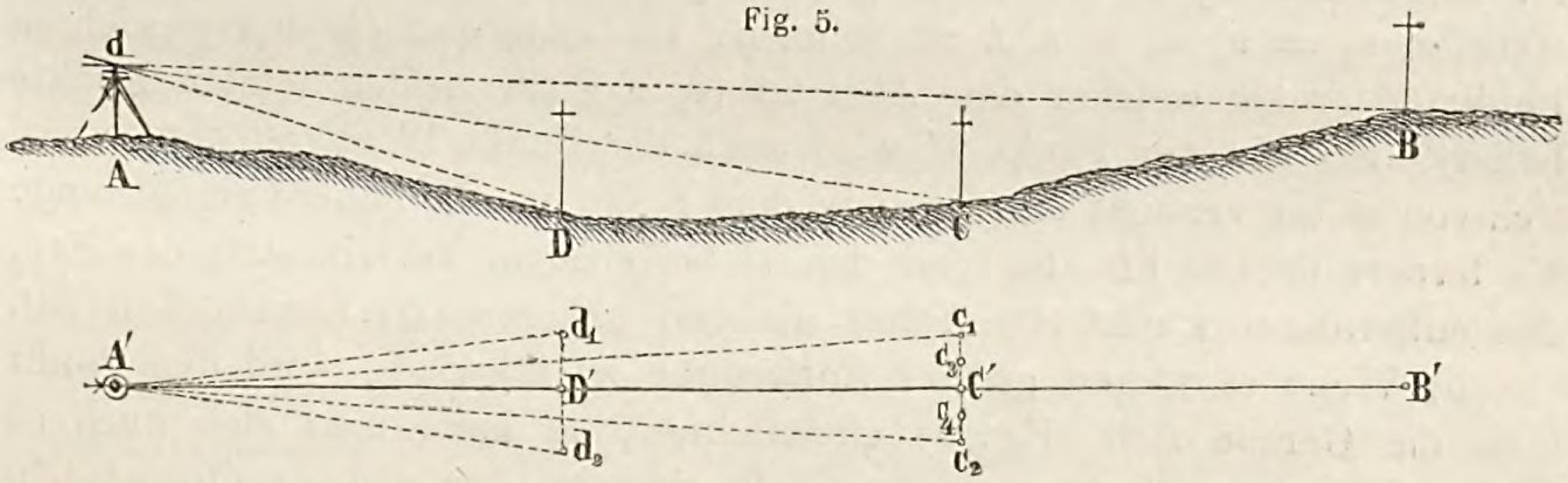
Das Verfahren zur Absteckung des Punkts E ist hier im Grunde dasselbe wie bei dem Prismenkreuze, aber es verursacht im Vergleiche mit jenem viel mehr Mühe, nicht nur weil die beiden Bilder von A und B welche der Spiegelkreis liefert, dunkler sind als jene des Prismenkreuzes, sondern auch weil das Gesichtsfeld jenes Kreises ungleich kleiner ist als das an unserm Instrumentchen, und weil endlich der Spiegelkreis eine viel ruhigere Haltung des Beobachters erfordert als dieses.

§. 29. Aufgabe. Zwischen zwei gegebenen Punkten von grosser Entfernung welche so liegen dass sie von einem ihrer Verbindungslinie angehörigen Standpunkte aus mit Fernrohren gesehen werden können, sollen zwei oder mehrere Punkte in gerader Linie abgesteckt werden.

Die Lösung dieser Aufgabe erfordert ein Instrument das mit einem Messfernrohre versehen ist und so aufgestellt werden kann dass sich die Absehlinie beim Auf- und Niederkippen des Rohrs in einer Verticalebene bewegt: also einen Theodolithen oder ein theodolithenartig eingerichtetes Nivellirinstrument, wie dergleichen im ersten Theile mehrere abgebildet und beschrieben sind. Ferner fordert die Lösung dieser Aufgabe Gehilfen welche Signalstangen lothrecht aufzustellen wissen und die Zeichen verstehen welche ihnen der Geometer gibt. Ist dieser von seinen Gehilfen zu weit entfernt, so dass sie dessen Zeichen mit blossen Augen nicht erkennen können, so muss einer derselben mit einem Handfernrohre (einem sogenannten Feldstecher) versehen werden, damit er die Winke welche der Geometer mit einer Messfahne gibt, deutlich erkennen und den übrigen zur Danachachtung mittheilen kann. Da das Abstecken langer gerader Linien in neuerer Zeit häufig vorkommt und für die Ausführung grosser Erdwerke von bedeutender Wichtigkeit ist, so wollen wir die vorliegende Aufgabe für mehrere bestimmte Fälle lösen.

1) Die gegebenen Punkte A und B liegen so dass man auf einem von ihnen (A) den Theodolithen aufstellen und nach dem anderen (B) ungehin-

Fig. 5.



dert visiren kann. In diesem Falle stelle man das Instrument centrisch über A und so auf dass die Alhidadenaxe lothrecht ist und folglich die Drehaxe des Fernrohrs sich stets in einer Horizontalebene bewegt. Durch diese Aufstellung wird bewirkt dass in jeder Lage des Fernrohrs dessen Absehlinie in einer durch den Punkt A gehenden Verticalebene liegt. Stellt man nun das Fernrohr genau auf B ein und schliesst die Bewegung der Alhidade ab, so kann sich die Absehlinie nur mehr in der abzusteckenden Verticalebene bewegen. Wir unterscheiden nunmehr zwei Fälle der Absteckung, nämlich a) die Einweisung der Punkte C, D . . . geschieht nur von A aus und b) die Einrichtung der Punkte D, C . . . geschieht von den vorausgehenden Punkten A, D aus.

a) In Fig. 5 soll die Linie A D C B den Schnitt der Ebene A B mit dem Terrain und die Gerade A′ D′ C′ B′ die gesuchte Horizontalspur derselben Ebene vorstellen.

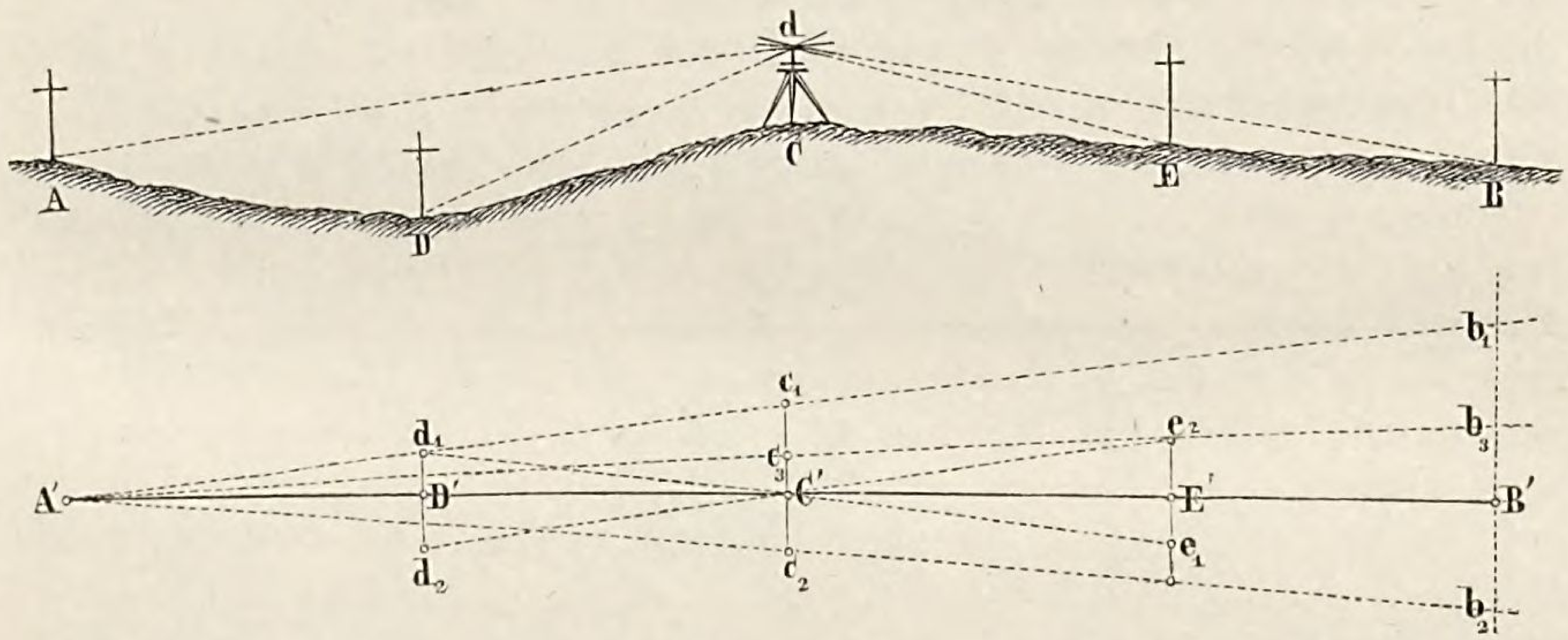
Will man nun den Punkt C′ finden, so lasse man die Gehilfen an einer Stelle welche nach vorläufiger Schätzung diesem Punkte entspricht, eine

Signalstange aufstellen und sehe zu, ob dieselbe in der Verticalebene A′ B′ steht oder nicht. Wird nämlich bei hinreichend gesenktem Fernrohre die Mitte des unteren Stangenendes von dem Fadenkreuze gedeckt, so befindet sich die Stange an der rechten Stelle und braucht dieselbe dann nur noch genau lothrecht gestellt zu werden; erscheint aber das Fadenkreuz rechts oder links von der Stange, so liegt, da das Fernrohr ein astronomisches ist, der gewählte Punkt beziehungsweise links oder rechts von der Geraden A′ B′ und muss desshalb die Stange auf ein gegebenes Zeichen des Geometers in dem ersten Falle nach der rechten, in dem zweiten aber nach der linken Seite hin versetzt und ihre Stellung abermals geprüft werden. Dieses Versetzen und Prüfen nimmt man so lange vor, bis die rechte Stelle gefunden ist, d. h. bis das Fadenkreuz die Stange von oben bis unten nach der Mittellinie deckt. Es ist vielleicht nicht überflüssig zu bemerken dass die Versetzung der Signalstange, bis die richtige Stelle gefunden ist, nach einem gewissen Systeme geschehen muss wenn man möglichst bald zum Ziele gelangen will. Dieses System besteht darin dass jeder neue Standpunkt in der Mitte der beiden nächst vorhergegangenen Standpunkte zu nehmen ist. War c_1 der erste und c_2 der zweite Standpunkt des Signals, so ist für den dritten c_3 der Abstand $c_3\, c_2 = c_3\, c_1$, für den vierten c_4 der Abstand $c_4\, c_3 = c_4\, c_2$ u. s. f. zu nehmen, bis man endlich den gesuchten Punkt C′ erhält welcher den Abstand $(c_4\, c_3)$ der beiden letzten Punkte halbirt. So wie der Punkt C′ wird auch der Punkt D′ abgesteckt, wobei sich von selbst versteht dass man in dem Falle, wo die nähere Signalstange die fernere decken könnte, und das ist bei ebenem Terrain stets der Fall, den entfernteren Punkt (C) früher als den näheren (D) abzustecken hat.

b) Wenn es wegen grosser Entfernung zu schwierig wird den Punkt C in die Gerade A B (Fig. 5) einzurichten, so kann man sich auch so helfen dass man zuerst einen Punkt D einweist der nicht weiter absteht als das Sehvermögen des Gehilfen reicht: dieser muss nämlich das vom Ingenieur in A mit einer Fahne gegebene Zeichen, ob er seine Stange links oder rechts von dem zuerst angenommenen Standpunkte versetzen soll, noch deutlich erkennen. Ist in solcher Weise der Punkt D bestimmt, so kann man über denselben den vorher in A gestandenen Theodolithen centrisch und horizontal aufstellen, auf A einrichten, ablesen und die Alhidade genau um 180^0 drehen und so den Punkt C abstecken. Auf diese Weise lassen sich auch mehrere Punkte in die Gerade A B einschalten, und es wird diese Linie um so richtiger abgesteckt werden, je genauer die Theilung des Kreises und der Nonien ist und je sorgfältiger gearbeitet wird. Das Drehen der Alhidade um 180^0 ist dem Durchschlagen des Fernrohrs desshalb vorzuziehen, weil sich bei der letzteren Operation der doppelte (horizontale) Collimationsfehler des Fernrohrs geltend macht, während bei der ersteren nur der einfache Theilungsfehler in Betracht kommt. (Dabei ist selbstverständlich ein guter Theodolith vorausgesetzt; denn bei einem minder fein getheilten kann der Theilungsfehler mehr als der doppelte Collimationsfehler

betragen.) Man sieht dass durch das eben beschriebene Verfahren zwischen A und B eigentlich ein Polygonzug mit Winkeln von nahezu 180° abgesteckt wird. Um nun die Endpunkte D, C . . . so nahe als möglich in die Gerade A B zu bringen, kann man statt der ersteren folgende genauere Methode der Absteckung anwenden. Ist nämlich der Punkt D wie vorhin bestimmt, so nehme man ihn nicht sofort als richtig an sondern verbessere seine Lage auf Grund genauester Messung des Winkels B A D welcher gleich Null sein soll. Ergibt z. B. diese in zwei Lagen des Fernrohrs wiederholt vorgenommene Messung den Winkel $BAD = DAB = \delta =$ 103 Secunden und ist die Entfernung $AD = e = 1000$ Meter, so muss die Signalstange in D um $x = e \operatorname{tg} \delta = e . \delta \sin 1'' = 0{,}048$ Meter seitwärts versetzt werden, und zwar (von A aus gesehen) rechts. In gleicher Weise wie mit D verfährt man mit dem Punkte C, nachdem er vorläufig von D aus eingerichtet ist, und so weiter mit allen folgenden Punkten. Es bedarf wohl kaum der Erwähnung dass hier die Entfernungen A D,

Fig. 6.



D C . . . mit der Kette oder mit Distanzmessern bestimmt werden dürfen und dass, wenn man schliesslich nicht genau im Punkte B ankommt, der dort sich ergebende Fehler auf die Zwischenpunkte im Verhältniss ihrer Entfernungen von A vertheilt werden darf.

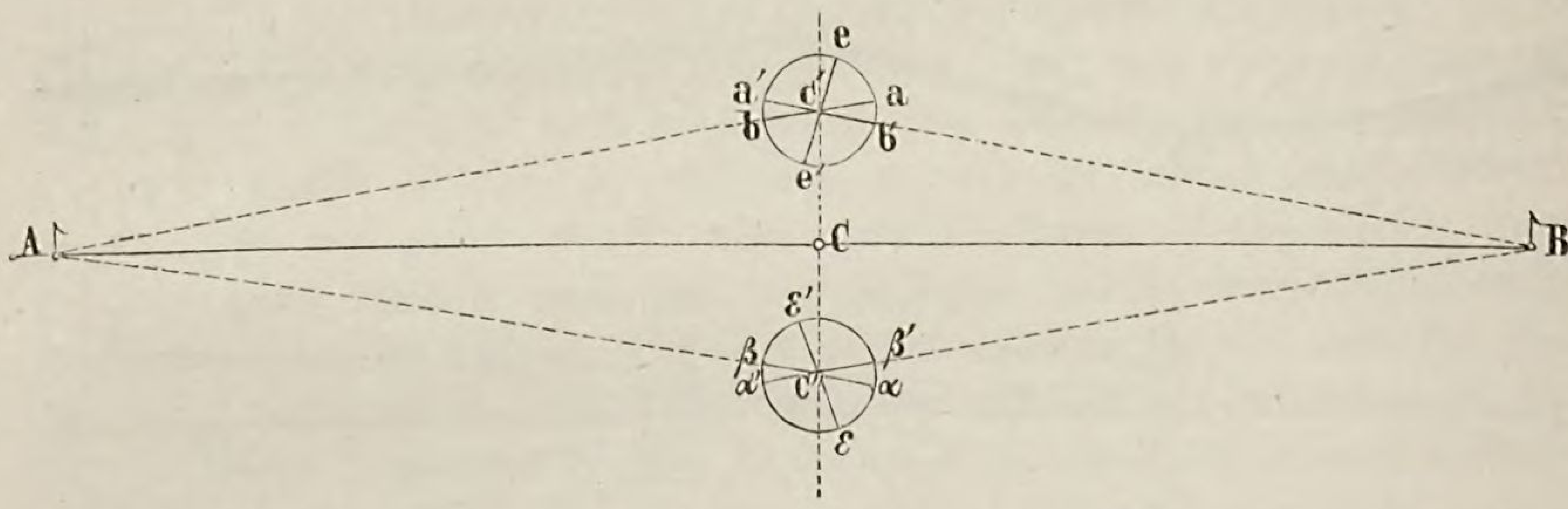
2) Die gegebenen Punkte A und B liegen so dass man von einem zum anderen nicht sehen, wohl aber zwischen beiden eine Stelle finden kann welche nach jedem von ihnen zu visiren gestattet. Diesem Falle entspricht auch der in welchem auf keinem der gegebenen Punkte der Theodolith aufgestellt, aber von einem Zwischenpunkte aus nach beiden visirt werden kann.

Unter den gegebenen Verhältnissen kommt es vor Allem darauf an, auf dem Terrainbezirke welcher zwischen A und B so liegt dass man von ihm aus beide Punkte sehen kann, einen Punkt C so zu bestimmen dass er in der Verticalebene A B liegt. Hat man diesen Punkt, so lassen sich in den Abtheilungen A C und B C der Geraden A B leicht noch andere Punkte durch das Verfahren zu Nr 1 abstecken.

Ist zur Absteckung des Punkts C ein guter Theodolith mit centrisch angebrachtem Fernrohre gegeben, so stelle man ihn vorläufig in einem Punkte c_1 auf den man nach dem Augenmasse für einen Punkt der Linie A′ B′ hält. Steht der Kreis horizontal, so richte man das Fernrohr genau auf einen der gegebenen Punkte, etwa auf A′ und schlage hierauf, ohne an dem Stande des Instruments das Geringste zu ändern, das Fernrohr durch. Zeigt sich hiebei dass die Visirlinie links von B′ bei b_1 vorbeigeht, so muss der Standpunkt des Theodolithen in der Richtung c_1 c_2 nach rechts versetzt werden. Angenommen, man hätte jetzt den Punkt c_2 gewählt, so wiederholt man daselbst das gleiche Verfahren, und wenn nun die Visirlinie des durchgeschlagenen Fernrohrs rechts von B′ bei b_2 vorbeigeht, so stellt man den Theodolithen auf den Punkt c_3 welcher in der Mitte von c_1 c_2 liegt, und fährt mit diesen Versuchen so lange fort, bis man endlich einen Punkt C′ erhält welcher so liegt dass von ihm aus das Fernrohr in seiner ersten und zweiten Lage genau auf A′ und B′ zeigt.

Dieses Verfahren setzt voraus dass die Absehlinie des Fernrohrs zur

Fig. 7.



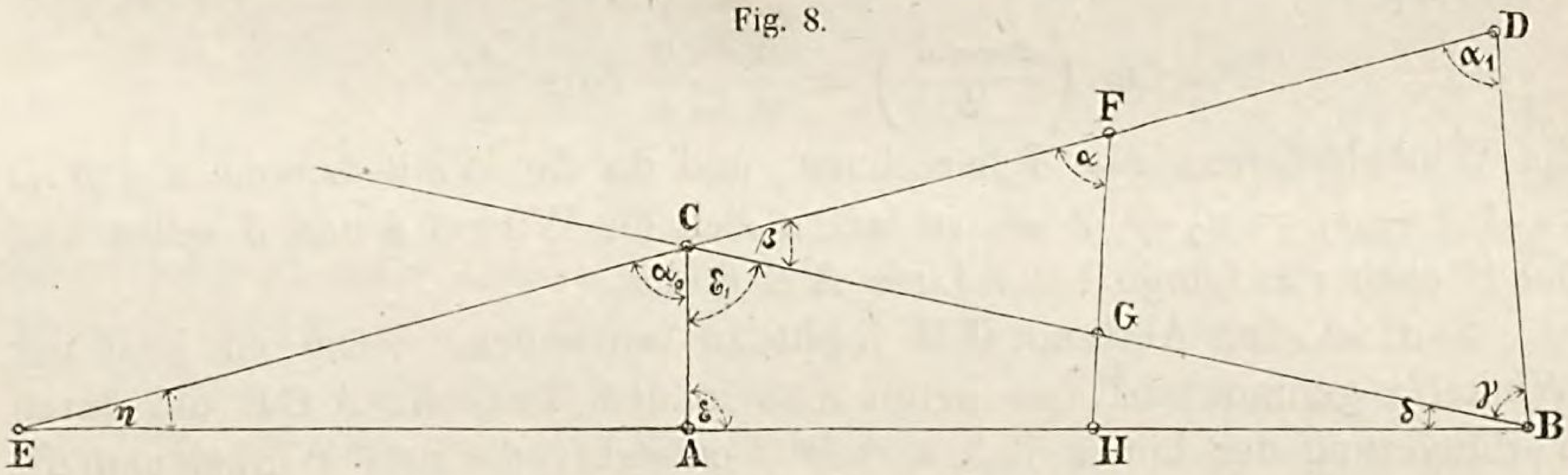
Drehaxe desselben ganz genau senkrecht stehe: man muss also von dieser Beschaffenheit des Fernrohrs schon überzeugt sein oder eine Absteckungsmethode wählen welche zugleich als Prüfung der rechtwinkeligen Lage der Visirlinie und der Drehaxe des Theodolithen-Fernrohrs dient. Ein solches zweites Verfahren beruht auf folgender Betrachtung. Stellt in Fig. 7 der Punkt C′ einen Punkt vor der die Bedingung erfüllt dass das Fernrohr in der ersten Lage den Punkt A und in der zweiten den Punkt B deckt, so ist jener Punkt so lange ausserhalb der Geraden A B, als die Visirlinie a b mit der Drehaxe e e′ einen spitzen oder stumpfen Winkel b C′ e′ $= \varphi$ bildet. Ist die Drehaxe e e′ unter dem Winkel e′ C′ C $= \delta$ gegen die Senkrechte C′ C geneigt, so ist $C' C = A C . \cot(\varphi + \delta) = B C . \cot(\varphi - \delta)$; dreht man nun die Alhidade des Theodolithen um 180^0 und schlägt das Fernrohr durch, so wird der Punkt C″ in welchem das Fernrohr auf A und B einsteht, von C ebenfalls um $C'' C = C' C = A C . \cot(\varphi + \delta) =$ $= B C . \cot(\varphi - \delta)$ entfernt sein. Der gesuchte Punkt ist also die Mitte von C′ C″ für welche $C C' = C C'' = 0$ ist. Damit aber dieser Fall ein-

treten kann, muss sowohl cot $(\varphi + \delta)$ als auch cot $(\varphi - \delta)$ null, d. h $\varphi + \delta = \varphi - \delta = 90^0$ sein, was nur bei $\varphi = 90^0$ und $\delta = 0$ möglich ist. Bringt man den Theodolithen nach C und corrigirt an der Fernrohraxe so lange, bis diese in der ersten und zweiten Lage auf A und B trifft, so ist nicht nur ein Punkt C zwischen A und B gefunden, sondern zugleich auch die Axenlage des Fernrohrs berichtigt.

Auf Grund dieser Betrachtung wird man also, nachdem die erste Messung mit der Lage e e' der Drehaxe des Fernrohrs gemacht wurde, eine neue Bestimmung des Punkts C vornehmen, bei welcher diese Drehaxe die entgegengesetzte Lage $\varepsilon\, \varepsilon'$ hat. Zeigt sich hiebei dass wieder der frühere Punkt C erhalten wird, so sind die erste und dritte Messung richtig; weicht aber der neue Punkt C'' von dem ersten C' ab, so liegt der gesuchte Punkt C in der Mitte von C' C'', womit auch die zweite Messung übereinstimmen wird wenn man sie für diesen Punkt wiederholt. Hat man den Punkt C gefunden, so kann man von ihm aus die Punkte D und E nach Nr 1 abstecken.

§. 30. Aufgabe. Zwischen zwei gegebenen Punkten von sehr grosser Entfernung welche durch verschiedene Hindernisse so getrennt sind dass man längs ihrer Verbindungslinie nicht visiren kann, soll ein Punkt in gerader Linie abgesteckt werden.

Fig. 8.



Die Lösung dieser Aufgabe ist im Allgemeinen schwierig und umständlich, kann aber oft durch kluge Benützung der Localverhältnisse sehr vereinfacht werden. Wir setzen zunächst einige günstige Umstände voraus.

1) Es sei möglich, neben der gesuchten Geraden A H B eine andere Gerade C F D abzustecken deren Endpunkte C, D mit den gegebenen Punkten A, B quer verbunden werden können, und von der ein Zwischenpunkt F Visur und Messung in der Richtung F H bis über A B hinaus gestattet.

Dieser Fall kommt sehr oft und manchmal so vor dass die Hilfslinie sogleich durch einen der Endpunkte A oder B selbst gelegt werden kann. Die Linie C D welche wir hier als Hilfslinie benützen, kann man durch Rückwärtsverlängern eines angenommenen geraden Stücks (C F oder D F), oder durch Einschalten eines Punkts F zwischen C und D nach §. 29 abstecken. (Von dem Punkte F wird vorausgesetzt dass er nicht nur eine freie Aussicht sondern auch eine Lattenmessung bis zur Linie A B gestatte.)

Hierauf wird die Linie C D mit ihrem Zwischenpunkte F der Länge nach zweimal abgemessen und alle Entfernungen C D, C F, F D werden auf den Horizont reducirt: die wagrechte Gerade C F sei = a und C D = b. In gleicher Weise werden A C = c und B D = e gemessen und auf den Horizont reducirt. Schliesslich misst man noch die in der Fig. 8 angezeigten Horizontalwinkel α_0, α und α_1. Mit den nunmehr bekannten Grössen kann man die Entfernung F H des Punkts H welcher in der Geraden A B liegen soll, berechnen, und ist diese Rechnung gemacht, so braucht man nur die gefundene Horizontalentfernung von F aus genau abzumessen, um den gesuchten Punkt H der Geraden A B zu erhalten.

Die für diese Absteckung nöthige Rechnung ist in folgender Weise zu führen. Aus C D = b, B D = e, C D B = α_1 und b > e erhält man nach bekannten Formeln der ebenen Trigonometrie

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma - \beta}{2}\right) = \frac{b - e}{b + e} \cot \frac{\alpha_1}{2}$$

Verbindet man den Werth von $\gamma - \beta$ welcher sich hieraus ergibt, mit dem von $\gamma + \beta = 180^0 - \alpha_1$, so erhält man die Winkel β und γ welche zur weiteren Berechnung nöthig sind. Mit diesen Winkeln ist die Länge d der Seite B C zu finden, und hiemit sind in dem Dreiecke A B C wieder zwei Seiten A C = c, C B = d und der eingeschlossene Winkel A C B = $180^0 - (\alpha_0 + \beta) = \varepsilon_1$ bekannt, folglich kann man mit Hilfe der Gleichung

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\varepsilon - \delta}{2}\right) = \frac{d - c}{d + c} \operatorname{cotg} \frac{\varepsilon_1}{2}$$

die Winkeldifferenz $\varepsilon - \delta$ berechnen, und da die Winkelsumme $\varepsilon + \delta = 180^0 - \varepsilon_1 = \alpha_0 + \beta$ ist, so lassen sich die Winkel ε und δ selbst und damit auch die Länge l der Linie A B finden.

Nun ist der Abstand F H leicht zu berechnen. Denn da jetzt der Winkel ε gefunden ist, so kennt man in dem Dreiecke A C E das durch Verlängerung der Linien B A und D C entsteht, die drei Winkel und die Seite A C, und da der Winkel $\eta = \varepsilon - \alpha_0$ ist, so erhält man zunächst

$$C E = \frac{c \sin \varepsilon}{\sin \eta} = f$$

und da ferner in dem Dreiecke E F H die Seite E F = a + f, der Winkel E F H = α und der Winkel F E H = η ist, so wird

$$F H = \frac{(a + f) \sin \eta}{\sin (\alpha + \eta)} = x$$

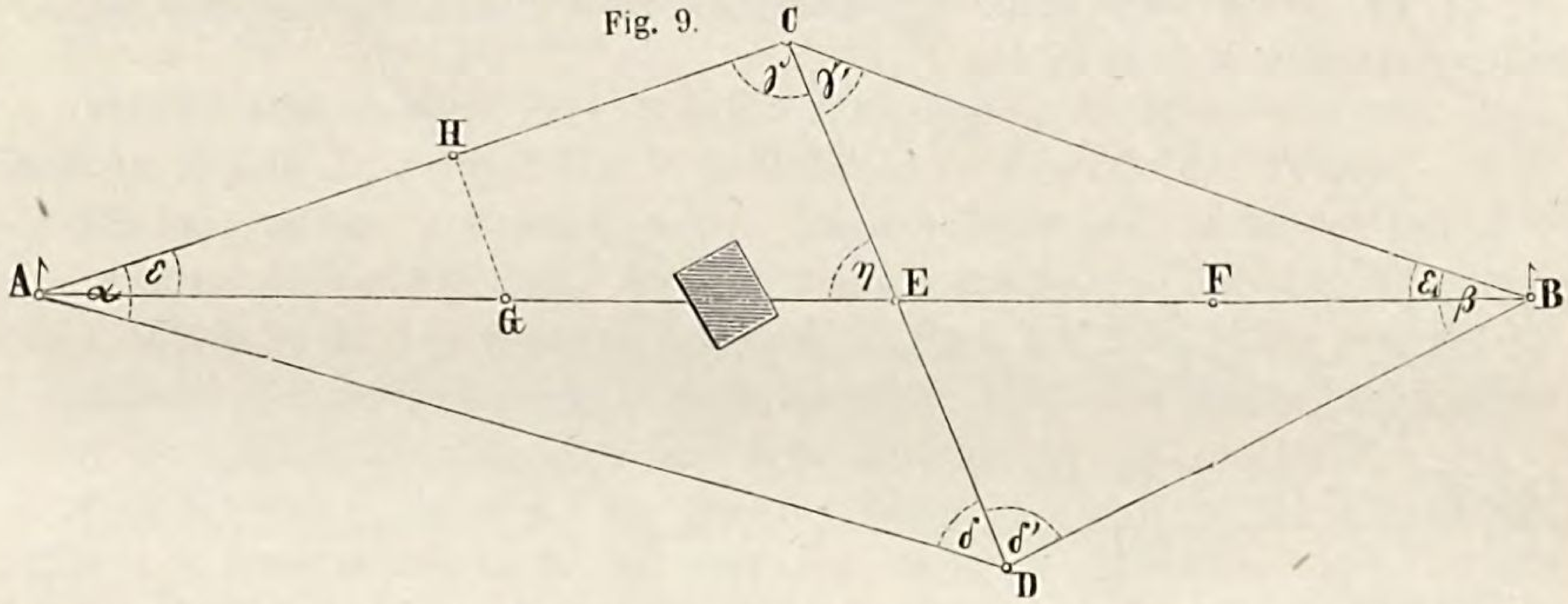
womit die Rechnung vollendet ist. In gleicher Weise könnte man eine zweite Richtung F′ H′ = x′ berechnen und abstecken wenn man zwei Punkte zwischen A und B einschalten wollte und das Terrain das Sehen und Messen von F′ bis H′ gestattete. Auch erkennt man leicht wie zu verfahren wäre wenn sich gleich anfangs eine Hilfslinie B C durch den gegebenen Punkt B legen liesse, oder wenn E B die abzusteckende Gerade und E D die Hilfslinie wäre.

2) Es sei möglich, die abzusteckende Gerade A B in der Weise mit einer Querlinie C D zu einem Viereck A B C D zu verbinden, wie dieses Fig. 9 zeigt.

Wenn man die drei Geraden A C, C D, D B und die beiden Winkel C und D sehr genau messen würde, so liessen sich aus diesen Grössen allein die Entfernung des Punkts E welcher der Geraden A B angehört, von den Punkten C oder D berechnen. Würde man diese Entfernung genau abmessen, so wäre E bestimmt und dadurch die vorliegende Aufgabe auf den in Nr 1 betrachteten einfacheren Fall zurückgeführt, insofern neben A E die durch A gehende Hilfslinie A C und neben E B die Hilfslinie D B läge. Da es aber immer eine umständliche und mühevolle Arbeit ist lange Linien sehr genau zu messen, so wollen wir nur annehmen, man könne von C und D aus nach A und B hin visiren und die Länge C D messen.

In diesem Falle messe man die an ihren Endpunkten mit starken Pfählen bezeichnete Hilfslinie C D mit Messlatten sehr genau ab und be-

Fig. 9.



merke hiebei grössere Abschnitte von etwa 100 Meter durch kleinere Pfähle, um diese später wenn die Entfernung C E abgemessen werden soll, in der Art benützen zu können dass nur noch ein kleiner Theil anzusetzen oder abzuziehen ist. Hat man die Horizontalprojection von C D = b gefunden, so messe man in C die Winkel γ und γ', in D die Winkel δ und δ', und in A und B die Winkel α und β. (Die α und β werden nur wegen der Verbesserung der übrigen Winkel gemessen.)

Mit Hilfe der in den Dreiecken A C D und B C D auf je 180° durch Addition oder Subtraction gleicher Beträge ausgeglichenen Winkel und der Grundlinie b findet man leicht die Dreieckseiten A D, B D gleich c, c', oder A C, B C gleich d, d', und hierdurch aus den Dreiecken A B C oder A B D die Winkel welche diese Seiten mit der Geraden A B einschliessen. Es genügt hier nur zwei von ihnen, C A B = ε und C B A = ε_1 zu bestimmen, da die übrigen (ausser zur Rechnungsprobe) unnöthig sind. In dem Dreiecke A B C sind die Seiten d, d' und der von ihnen eingeschlossene Winkel A C B = $\gamma + \gamma'$ bekannt, folglich ist wenn d > d'

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{2}\right) = \frac{d - d'}{d + d'} \operatorname{cotg} \frac{\gamma + \gamma'}{2}$$

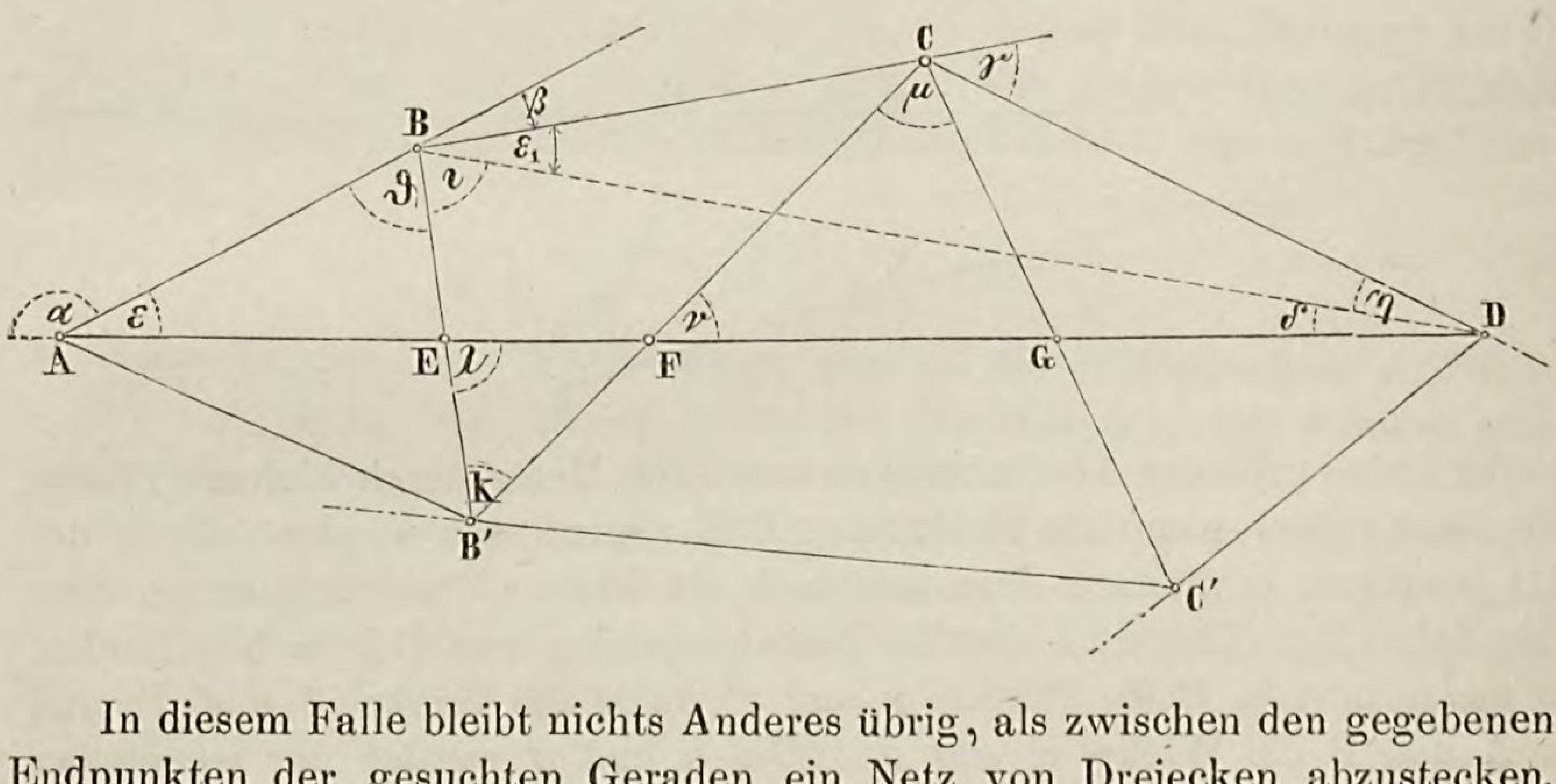
Verbindet man die Winkeldifferenz $\varepsilon_1 - \varepsilon$ welche sich hieraus ergibt, mit der bekannten Winkelsumme $\varepsilon_1 + \varepsilon = 180^0 - (\gamma + \gamma')$, so erhält man sowohl ε als ε_1. Mit diesen Winkeln liefern die beiden Dreiecke A C E und B C E die gesuchte Entfernung

$$C\,E = \frac{d \sin \varepsilon}{\sin(\gamma + \varepsilon)} = \frac{d' \sin \varepsilon_1}{\sin(\gamma' + \varepsilon_1)}$$

Wird diese Länge genau berechnet und abgemessen, so ist der Punkt E bestimmt. Weitere Punkte der Linie A B sind entweder dadurch zu ermitteln dass man aus den Dreiecken A C E oder B C E die Neigung η der Seite C D gegen die Gerade A B berechnet und den Winkel η oder seinen Nebenwinkel $180^0 - \eta$ mit Hilfe eines in E aufgestellten Theodolithen an C E anträgt, wodurch sich z. B. der Punkt F ergibt; oder man findet einen Punkt G dadurch dass man auf A C eine Abscisse A H = l abmisst und von H aus senkrecht zu A C die Ordinate H G = l tg ε abträgt.

3) Es lassen sich keine so einfachen Hilfsfiguren wie in den beiden vorhergehenden Fällen bilden.

Fig. 10.



In diesem Falle bleibt nichts Anderes übrig, als zwischen den gegebenen Endpunkten der gesuchten Geraden ein Netz von Dreiecken abzustecken, dasselbe genau zu messen und aus den gemessenen Grössen zu berechnen an welchen Stellen die Dreieckseiten von der auszusteckenden geraden Linie geschnitten werden, endlich diese Schnittpunkte auf den zugehörigen Dreieckseiten abzutragen und dauerhaft zu bezeichnen.

Es seien in Fig. 10 A, D die gegebenen Punkte, und es sollen einige andere Punkte E, F, G der Geraden A D bestimmt werden.

Zu dem Ende suche man auf dem Terrain zunächst die Dreieckspunkte B, C, B', C' so aus dass sie nicht nur gute Standorte für den Theodolithen und Aussicht nach je drei oder vier anderen Punkten des Dreiecksnetzes gewähren, sondern dass auch die einzelnen dadurch bestimmten Dreiecke keine zu spitzen oder zu stumpfen Winkel erhalten und auf denjenigen Seiten derselben welche die Gerade A D schneiden, bequem und sicher die

erforderlichen Längen abgemessen werden können. Eine der letzteren Seiten, z. B. B' C, wähle man als Grundlinie des Netzes, messe sie mit Messlatten zweimal sehr genau ab, und bezeichne wieder, der späteren Bestimmung des in ihr liegenden Schnittpunkts (F) wegen, grössere Abtheilungen von etwa 100 Meter durch kleinere Pfähle. Es sei die auf den Horizont reducirte Länge von B' C = g.

Nun messe man mit einem guten Theodolithen in den Netzpunkten A, B, C, D, C', B' alle Winkel welche daselbst gemessen werden können, so genau als möglich, und gleiche je drei zu einem Dreiecke gehörige auf die in der vorigen Nummer angegebene Weise auf 180^0 aus.

Mit Hilfe dieser Winkel und der Seite g lassen sich alle Dreieckseiten berechnen; denn aus dem Dreiecke B' C B findet man B C = b und B B' = e; mit e aber aus dem Dreiecke B B' A die Seiten A B = a und A B' = a'; mit g erhält man aus dem Dreiecke C C' B' die Seite B' C' = b' und C C' = f; mit f aber aus dem Dreiecke C C' D die Seite C D = c und C' D = c'.

Würde man den Winkel B A E = ε kennen, so liesse sich aus dem Dreiecke A B E die Seite B E = x berechnen, da ausser ε der Winkel A B E und die Seite A B = a bekannt wäre; folglich liesse sich auch der Punkt E der Geraden A D abstecken. Alsdann könnte man auch aus dem Dreiecke E B' F die Seite B' F = y berechnen und folglich auf dem Felde den Punkt F erhalten. Schliesslich erhielte man die Seite C G = z aus dem Dreiecke F C G und damit den Punkt G auf dem Felde.

Der Winkel ε ist leicht zu finden. Denn da man in dem Dreiecke B C D die zwei Seiten b, c und den von ihnen eingeschlossenen Winkel B C D = $180^0 - \gamma$ kennt, so findet man zunächst $\eta - \varepsilon_1$ aus der Gleichung

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\eta - \varepsilon_1}{2}\right) = \frac{b - c}{b + c} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (180^0 - \gamma)$$

und da ferner die Winkelsumme $\eta + \varepsilon_1 = \gamma$ ist, so sind η und ε_1 als bekannt anzusehen. Man kennt somit auch den Winkel A B D = $180^0 - (\beta + \varepsilon_1) = \vartheta + \iota$, und da aus dem Dreiecke B C D die Seite

$$B\,D = \frac{b \sin \gamma}{\sin \eta} = i$$

folgt, so sind in dem Dreiecke A B D wiederum zwei Seiten A B = a, D B = i und der von ihnen eingeschlossene Winkel A B D = $180^0 - (\beta + \varepsilon_1) = \vartheta + \iota$ bekannt; desshalb ist auch

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\varepsilon - \delta}{2}\right) = \frac{i - a}{i + a} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\vartheta + \iota)$$

Weil aber die Winkelsumme $\varepsilon + \delta = \beta + \varepsilon_1$ ist, so findet man aus den beiden letzten Gleichungen die Winkel δ und ε selbst und damit auch die Seite

$$A\,D = \frac{i \sin (\beta + \varepsilon_1)}{\sin \varepsilon} = \frac{b \sin \gamma \sin (\beta + \varepsilon_1)}{\sin \varepsilon \sin \eta}$$

Die Länge B E = x ergibt sich aus dem Dreiecke A B E in welchem die drei Winkel und eine Seite A B = a bekannt sind; es ist nämlich

$$x = \frac{a \sin \varepsilon}{\sin (\varepsilon + \vartheta)}$$

Zieht man x von e ab, so kennt man in dem Dreiecke E B′ F eine Seite B′ E = e — x und alle Winkel, folglich findet man die Seite B′ F oder

$$y = \frac{(e - x) \sin \lambda}{\sin (\varkappa + \lambda)}$$

Endlich ergibt sich aus dem Dreiecke F C G in welchem abermals alle Winkel und eine Seite F C = g — y bekannt sind, die Entfernung des Punkts G von C oder

$$z = \frac{(g - y) \sin \nu}{\sin (\mu + \nu)}$$

Sind die Werthe von x, y, z genau berechnet, so messe man sie auf den Dreieckseiten B B′, B′ C, C C′ von den Punkten B, B′, C aus ganz genau ab, und hiemit hat man die drei Punkte E, F, G der abzusteckenden Geraden A D gefunden.

4) Aussteckung einer sehr langen geraden Linie durch besondere Hilfsmittel, namentlich Lichtsignale.

Wenn man es scheut das eben beschriebene Verfahren zur Aussteckung einer langen geraden Linie welches stets sicher zum Ziele führt, anzuwenden, so kann man wohl auch, falls das Terrain nicht stark durchschnitten ist, von dem nachfolgenden Verfahren Gebrauch machen welches der Ingenieur Fr. Andriessen beim Baue der rheinischen Eisenbahn ausgeführt und in dem ersten Bande der Zeitschrift des hannover'schen Architekten- und Ingenieurvereins wie folgt beschrieben hat:

„Meine Baustrecke von Köln bis Düren war $5\frac{1}{2}$ preussische Meilen lang und bestand nur aus drei geraden Linien welche durch Uebergangscurven verbunden waren. Die erste Gerade, von Köln bis zum Königsdorfer Tunnel, war 1 Meile lang; die zweite, von dem genannten Stollen bis zur Merzenicher Haide, hatte $2\frac{1}{2}$ Meilen Länge, und die dritte vor Düren war ungefähr $\frac{1}{2}$ Meile lang.

Wegen der vielen Dünste war es nicht möglich, bei Tage die beiden ersten Geraden mit Sicherheit auszustecken; nachdem ich aber die erste eine Meile lange Gerade bei Nacht ganz genau ausgesteckt hatte, ging ich zu der weit schwierigeren Bestimmung der zweiten geraden Linie von $2\frac{1}{2}$ Meilen Länge deren Endpunkte festlagen, über.

Der östliche Endpunkt dieser Linie war auf einem 20′ hohen Hügel am Königsdorfer Tunnel. Die Aussicht nach der Merzenicher Haide war jedoch auf dieser langen Entfernung durch drei hohe Eichenwaldungen so sehr verdeckt dass nur zwei Stellen mittels Fernrohr gesehen werden konnten die eine 4000 Fuss und die andere $1\frac{1}{2}$ Meilen von dem östlichen Endpunkte entfernt.

Das westliche Ende der Geraden, auf der Merzenicher Haide gelegen, war hinter der letzten Waldung ganz und gar versteckt und alle Auszüge aus Katasterplänen dienten nur dazu, die Stellung der Zwischenpunkte annähernd zu ermitteln. Eine Linie nach diesen Ermittelungen durch die Eichenwaldungen zu schlagen, war aber zu gefährlich, da jede Eiche 100 Thaler kostete. Ich sah mich also genöthigt, die Nacht zu Hilfe zu nehmen und folgendermassen zu verfahren.

Am westlichen Endpunkte auf der Merzenicher Haide liess ich Tags vorher eine grosse Theertonne aufrichten die der daselbst befindliche Aufseher um 9 Uhr Abends anzuzünden hatte. Einen zweiten Aufseher stellte ich mit einer hohen Stange woran eine grosse Laterne hing, auf die $1\frac{1}{2}$ Meilen vom östlichen Standpunkte entfernte Stelle, und zwar so viel als möglich in die Richtung der durch das Fernrohr sichtbaren beiden Endpunkte. Dieser Aufseher wurde angewiesen alle zwischen 9 und $9\frac{1}{2}$ Uhr sichtbaren Signale, als für ihn giltig, genau zu befolgen. Ebenso ausgerüstet wurde ein dritter Aufseher auf die 4000 Fuss vom östlichen Endpunkte entfernte Stelle welche nahezu in der gegebenen Richtung lag, gestellt und beauftragt, die zwischen $9\frac{1}{2}$ und 10 Uhr erfolgenden Signale zu beachten.

Da bei Nacht alles Winken mit Laternen nichts hilft, in so ferne die Vergleichungsgegenstände unsichtbar sind, und da auch zwei Laternen wovon die eine feststeht und die andere verrückt wird, desshalb Nichts nützen, weil man von Weitem nicht entscheiden kann welche Laterne verrückt wurde: so liess ich neben und hinter mir eine Anzahl Raketen so aufpflanzen dass sie, angezündet, in schräger Richtung nach Norden oder Süden fliegen oder senkrecht in die Höhe steigen mussten.

Mit diesen Raketen dirigirte ich in den bestimmten Zeiträumen die beiden Einrichtungslaternen, nachdem ich vorher das Fadenkreuz des Theodolithen der auf dem östlichen Endpunkte aufgestellt war, nach der Mitte des rothen am Horizonte sichtbaren Scheins der brennenden Theertonne gerichtet hatte. Beim ersten Einrücken der $1\frac{1}{2}$ Meilen entfernten Laterne musste ich drei Raketen links steigen lassen, ehe dieselbe in die Linie kam, dann eine rechts, weil sie ein wenig durch die Linie gerückt war, und darauf noch eine links. Hierauf liess ich das Signal mit den senkrecht steigenden grossen Leuchtkugeln geben, womit der erste Punkt bestimmt war. Die zweite Einrichtungslaterne stand der abzusteckenden Richtung näher, so dass ihre Stellung mit drei entgegengesetzt fliegenden Raketen und einer Leuchtkugel bestimmt werden konnte. Mit gutem Vertrauen liess ich am folgenden Tage die 4000 Fuss lange Linie rückwärts verlängern und die Waldungen durchschlagen. Diese Linie traf genau auf den $1\frac{1}{2}$ Meilen entfernten Punkt und wich von dem westlichen $2\frac{1}{2}$ Meilen entfernten Endpunkte nur $2\frac{1}{2}$ Fuss ab; ein geringer Fehler welcher leicht zu verbessern war."

5) Die Absteckung der Horizontalprojection einer sehr langen Tunnelaxe zerfällt in zwei wesentlich verschiedene Theile: der erste umfasst die

Bestimmung des Grundrisses der Axe über Tage mit Hilfe einer zwischen den gegebenen Endpunkten ausgeführten Triangulation und der hieraus abgeleiteten Azimuthe der Strecken an den Endpunkten, während sich der zweite Theil mit der Uebertragung der auf der Erdoberfläche festgelegten Linie in den Berg oder mit der Bestimmung von Punkten der Tunnelaxe unter Tage beschäftigt. Es würde jedoch hier zu weit führen die hiezu erforderlichen Messungen und Rechnungen eingehend zu erörtern, wesshalb wir unseren für diesen Gegenstand sich interessirenden Lesern zwei hieher gehörige Abhandlungen zum Studium empfehlen, nämlich erstens C. Koppe, Bestimmung der Axe des Gotthardtunnels in den Jahren 1874 und 1875, in der „Zeitschrift für Vermessungswesen,“ Bd IV, S. 369 u. ff. und Bd V, S. 86 u. ff. und zweitens S. Pestalozzi, Vortrag über die Absteckung der Axe des Gotthardtunnels, in der Zeitschrift „Die Eisenbahn,“ Bd VI, 1877, S. 89 und 97.

2. Das Abstecken senkrechter und paralleler Linien.

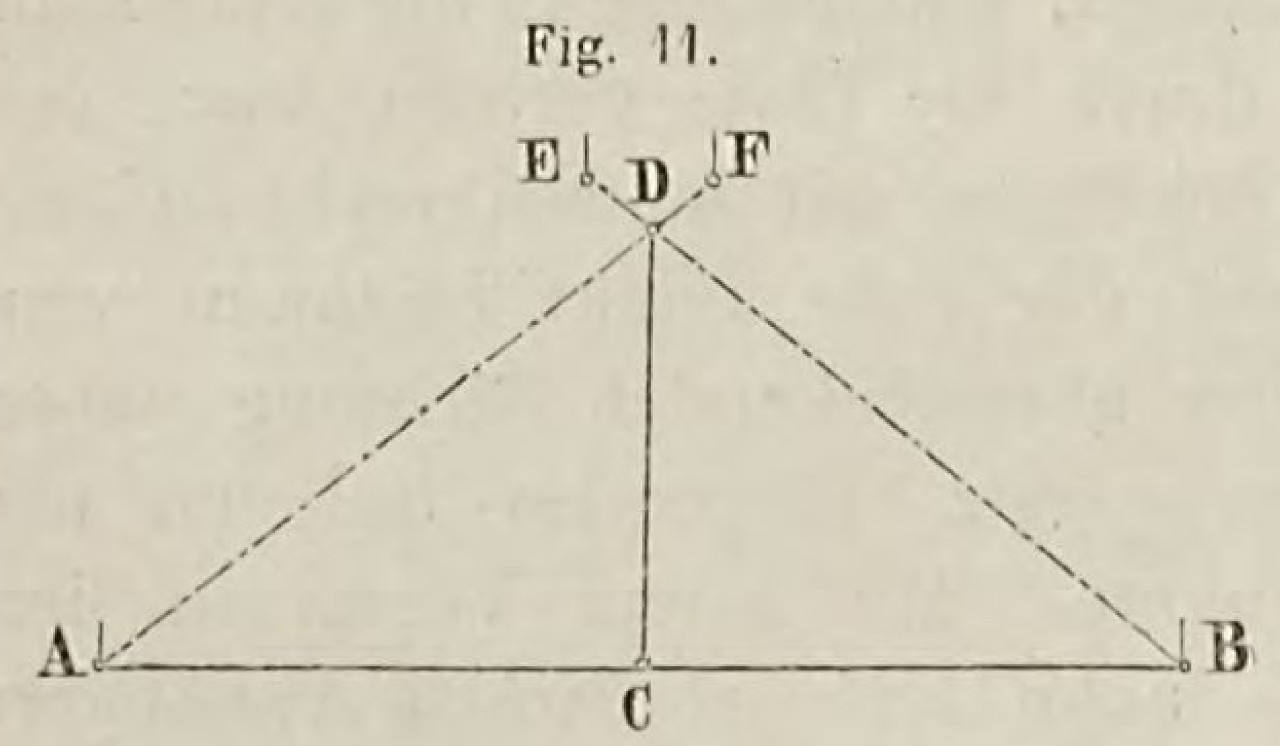
Aus der Instrumentenlehre ist bekannt wie man auf freiem ebenen Boden mit Hilfe der in Bd I, Seite 171 bis 360 betrachteten Winkelmessinstrumente eine Linie abstecken kann welche, auf einer anderen gegebenen Linie in einem gegebenen Punkte derselben senkrecht steht. Von diesen Absteckungen ist hier nicht mehr die Rede, sondern nur von jenen welche unter ungünstigen Verhältnissen vorzunehmen sind.

§. 31. Aufgabe. Eine Gerade A B und ein Punkt C in ihr sind gegeben: in diesem Punkte eine Senkrechte zu errichten.

1) Man besitze zur Lösung dieser Aufgabe nur eine oder zwei Messketten und mehrere Fluchtstäbe.

Hat man zwei Messketten bei der Hand, so kann man auf dem Felde das Verfahren nachahmen, dessen man sich auf dem Reissbrette bedient um eine Senkrechte zu errichten: man misst nämlich nach Fig. 11 von C aus zwei gleiche Stücke C A und C B, wovon jedes kleiner ist als die Kette, ab, befestigt in A und B je eine Kette und spannt dieselben gegen F und E hin so aus dass sie sich in gleichen Abständen (D F, D E) von ihren Enden begegnen. Der Schnittpunkt D beider Ketten ist ein Punkt der gesuchten Senkrechten C D. Die Abstände D F und D E können nach Belieben 2, 3 oder mehr Meter lang gemacht werden.

Fig. 11.



Hat man nur eine Kette, so muss jeder der Abstände C A und C B bedeutend kleiner sein als die halbe Kettenlänge, und es sind alsdann die beiden Kettenstäbe in A und B festzuhalten, während der Geometer die Kette in der Mitte fasst und sich damit so lange bewegt, bis deren beide

Hälften (D A und D B) gleich stark angespannt sind, wodurch sich der Punkt D der abzusteckenden Senkrechten C D ergibt.

Noch einfacher ist das in Fig. 12 dargestellte Verfahren. Man lasse nämlich die beiden Kettenstäbe in dem gegebenen Punkte C und einem anderen Punkte E der Geraden A B welcher etwa 10 Meter von C entfernt ist, festhalten und bestimme den Punkt M welcher der Kettenmitte entspricht, durch Anspannen beider Kettenhälften. Lässt man hierauf den Gehilfen von C sich gegen D hin bewegen, seinen Stab in die Richtung E M einstellen und die Kette anspannen, so bezeichnet dessen Kettenstab einen zweiten Punkt D der Senkrechten welche durch C geht. Denn da nach der Construction M E = M C = M D, so geht durch die drei Punkte E, C, D ein Kreis dessen Durchmesser E D ist, der Winkel E C D liegt im Halbkreise und ist folglich ein rechter.

2) Der gegebene Punkt C der Geraden A B sei unzugänglich, man besitze aber ein Prismenkreuz (Winkelprisma) oder einen Winkelspiegel.

Fig. 12.

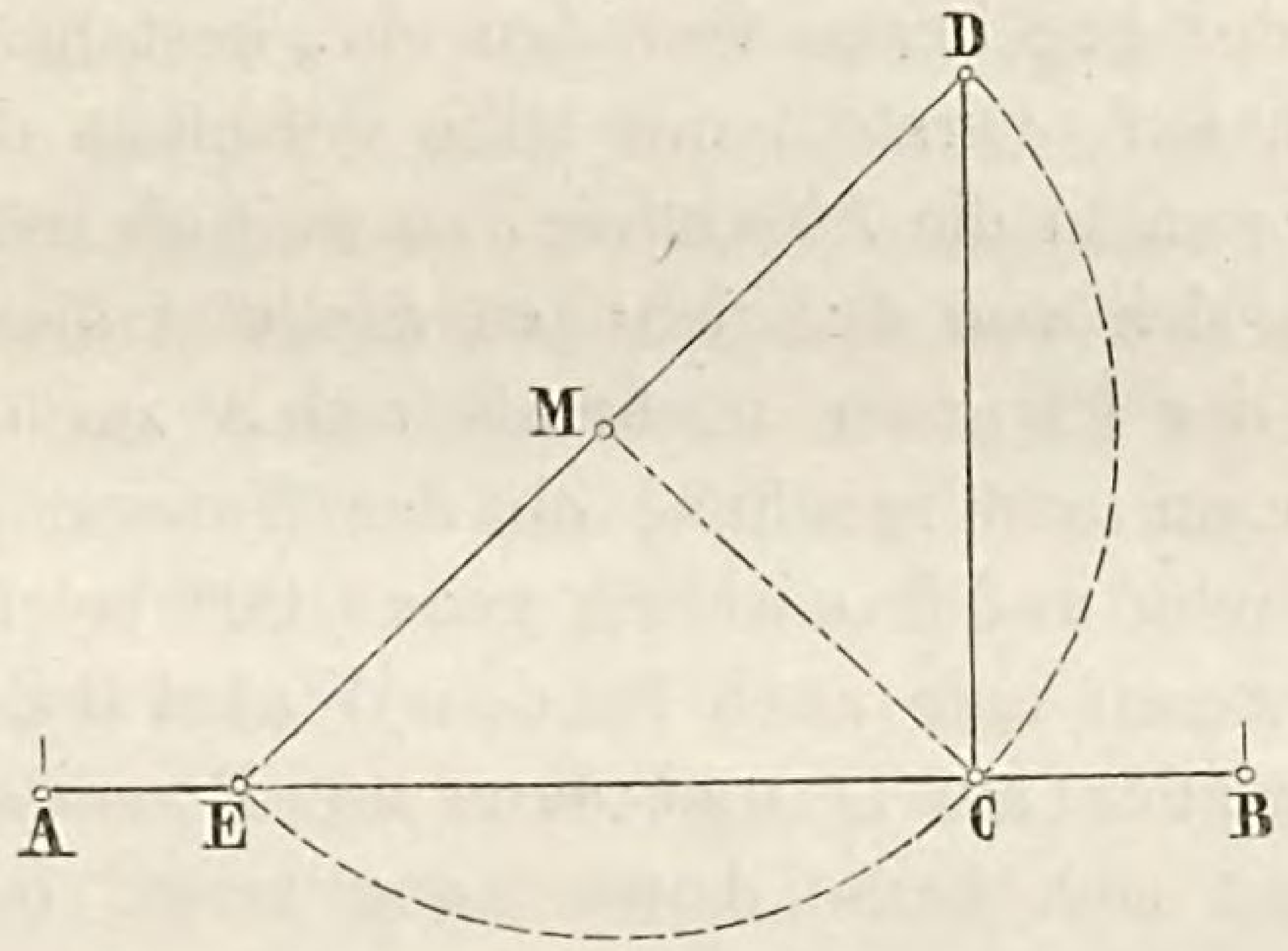
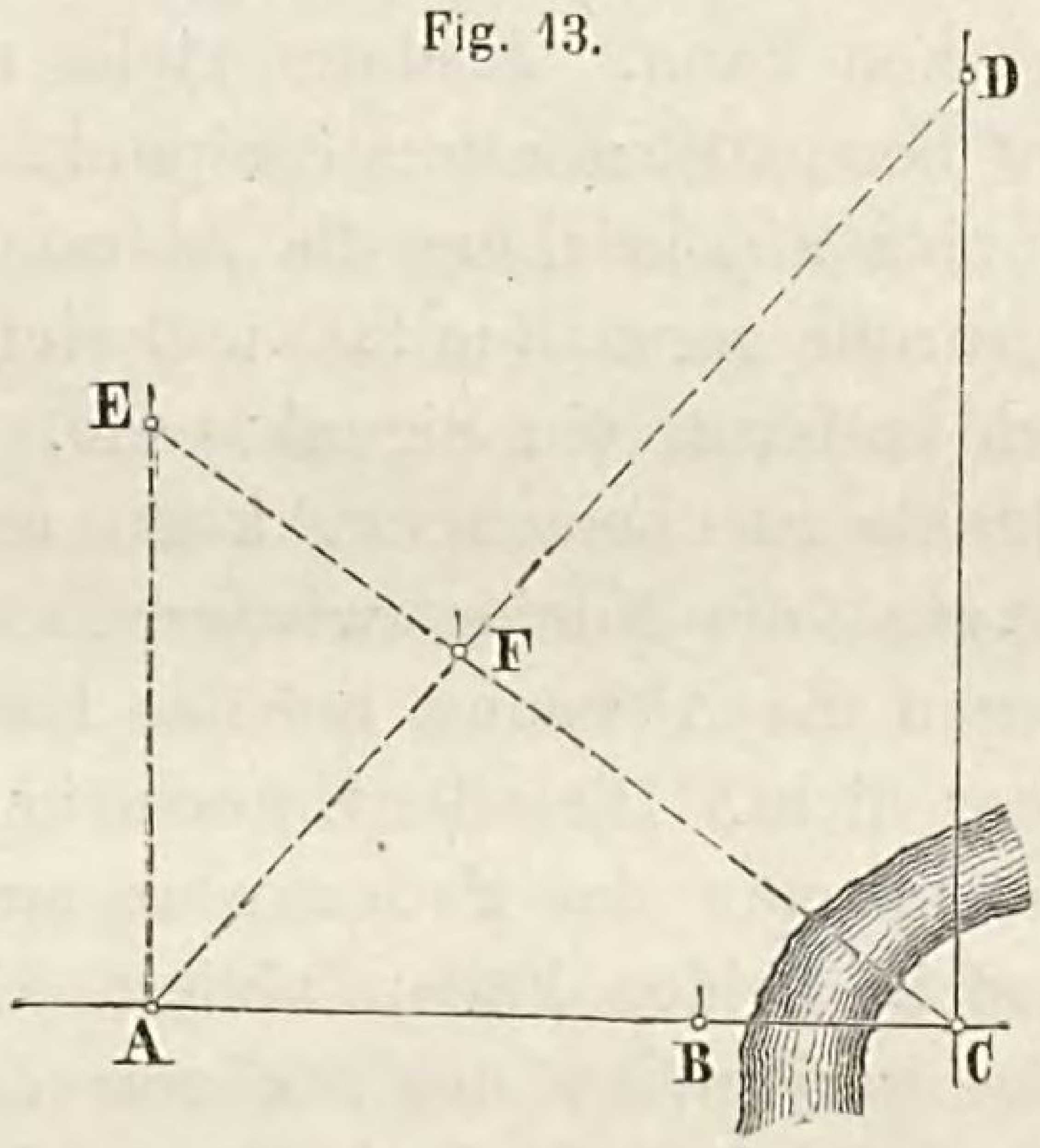


Fig. 13.



Man errichte nach Fig. 13 in A oder irgend einem anderen Punkte der Geraden A B eine Senkrechte zu dieser. Ist E ein Punkt derselben, so ist dadurch auf dem Felde die Linie C E gegeben. In dieser kann man mit dem Prismenkreuze oder dem Winkelspiegel leicht den Punkt F suchen welcher einer Geraden A F angehört die durch den Punkt A geht und auf C E senkrecht steht. (Vergl. bezüglich des Errichtens einer Senkrechten mit dem Prismenkreuze §. 134, Seite 207, und mit dem dreiseitigen symmetrischen Winkelprisma oder dem Winkelspiegel §. 118, Seite 175 des I Bands dieses Werks.) Denkt man sich vorläufig die Senkrechte C D gezogen und A F bis D verlängert, so entstehen mehrere ähnliche und rechtwinkelige Dreiecke welche dazu dienen, die Länge F D zu berechnen wenn zwei andere Längen gemessen sind. Es ist nämlich, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke D F C und A F E

$$D F = \frac{A F \cdot C F}{E F}$$

und wegen der Aehnlichkeit der rechtwinkeligen Dreiecke A C F und A E F:

$$C F = \frac{A F \cdot A F}{E F}$$

Stellt man diesen Werth von C F in die erste Gleichung ein und setzt die gemessenen Linien A F = a und E F = b, so folgt

$$D F = \frac{a^3}{b^2} = c$$

Wird die hieraus berechnete Länge c von F aus in der Richtung A F abgemessen, so erhält man den Punkt D welcher der gesuchten Senkrechten C D angehört und deren Fusspunkt C unzugänglich ist.

3) Die gegebene Gerade A B und die abzusteckende Senkrechte C D sind sehr lang und der rechte Winkel soll sehr genau sein.

In diesem Falle bleibt nichts Anderes übrig als die Absteckung mit Hilfe eines Theodolithen vorzunehmen. Dieser wird erst centrisch über dem gegebenen Punkte C aufgestellt und dazu benützt sich zu überzeugen ob dieser Punkt genau genug in der Geraden A B liegt, was nach §. 29 geschehen kann. Alsdann stellt man das Fadenkreuz des Fernrohrs genau auf den entferntesten Endpunkt A der gegebenen Geraden ein, liest beide Nonien ab, zeichnet die Ablesungen auf, verstellt mit Hilfe derselben das Fernrohr genau um 90^0 und richtet nun in die Absehlinie, so weit als möglich entfernt, ein Signal D ein. Um sich von der richtigen Stellung dieses Signals zu überzeugen, kann man das Fernrohr nochmals auf A zurückführen, die Nonien wiederholt ablesen und zusehen, ob der Unterschied gegen die Ablesung bei der Einstellung auf D wirklich genau 90^0 beträgt oder nicht. Dieselbe Untersuchung macht man auch für den Winkel B C D, indem man das Fadenkreuz erst wieder auf D und dann auf B einstellt und in beiden Fällen abliest. Wenn sich keine Abweichung zeigt, oder eine geringe an der Stellung des Signals D verbessert ist, so kann man in die Linie C D nach Bedürfniss noch eine oder mehrere andere Signalstangen nach §. 29 einrichten.

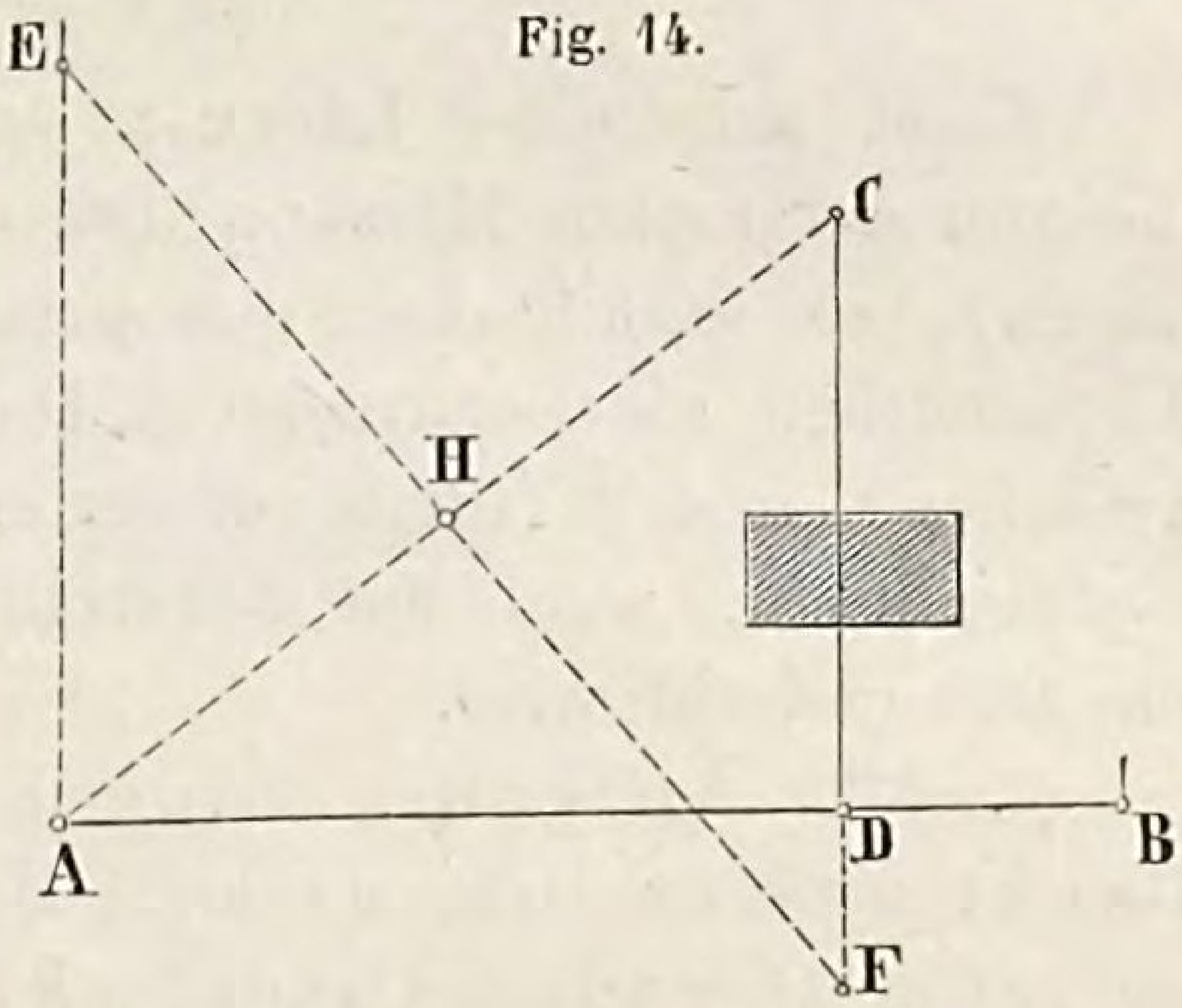
§. 32. Aufgabe. Eine gerade Linie und ein Punkt ausser ihr sind gegeben; man soll von diesem Punkte eine Senkrechte auf die Gerade fällen.

1) Die Lösung dieser Aufgabe mit dem Prismenkreuze, dem Winkelprisma und dem Winkelspiegel ist bereits bekannt und braucht in Bezug auf den Winkelspiegel nur noch durch die Bemerkung vervollständigt zu werden dass dieser stets eine Bezeichnung der gegebenen Geraden durch mindestens zwei Stäbe welche beide auf der rechten oder beide auf der linken Seite des Geometers stehen, fordert, damit sich der letztere überzeugen kann, ob er sich beim Suchen des Fusspunkts der Senkrechten in der gegebenen Geraden bewegt oder nicht. Diese manchmal schwer zu erfüllende Forderung ist bekanntlich für das Prismenkreuz oder das fünfseitige Winkelprisma nicht nöthig, wesshalb beide auch für die Lösung der vorstehenden Aufgabe dem Winkelspiegel weit vorzuziehen sind.

2) Es befinde sich in der Richtung der abzusteckenden Senkrechten C D ein Hinderniss welches das Visiren erschwert. (Fig. 14.)

Eine unmittelbare Lösung durch das fünfseitige Winkelprisma, das Prismenkreuz oder den Winkelspiegel ist hier nicht möglich, während eine mittelbare Lösung keine Schwierigkeiten macht. Man errichte nämlich in A eine Senkrechte A E zur gegebenen Geraden A B, halbire die Linie A C in H und lege durch einen beliebigen Punkt E der Senkrechten A E die Gerade E H und verlängere dieselbe, bis $HF = HE$ wird. Dadurch erhält man den Punkt F welcher in der gesuchten Senkrechten liegt; will man nun deren Fusspunkt D haben, so braucht man nur mit Hilfe des Prismenkreuzes von F aus eine Senkrechte auf A B zu fällen, womit alsdann die Aufgabe gelöst ist.

Fig. 14.

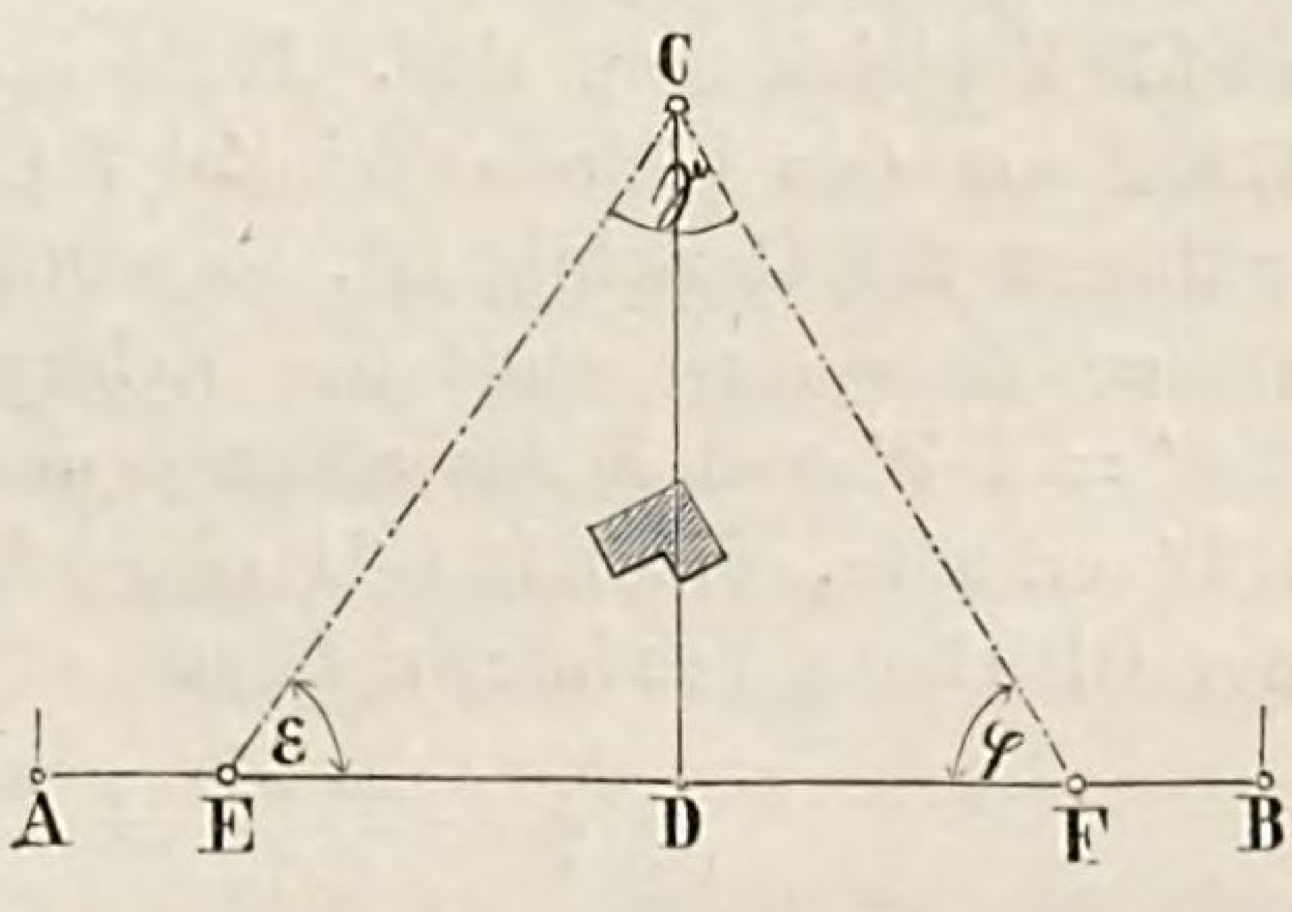


Dass der vorhin bestimmte Punkt F wirklich in der Senkrechten C D liegt, geht aus der folgenden Betrachtung hervor. Nimmt man erst an dass C D F senkrecht steht zu A B, so ist, weil auch A E senkrecht zu A B, das Dreieck C H F dem Dreiecke A E H ähnlich, und es findet desshalb die Gleichung statt: $AH \cdot HF = CH \cdot EH$. Macht man nun, wie hier geschehen, $AH = CH$, so muss nach der vorstehenden Gleichung nothwendig $HF = EH$ werden. Umgekehrt ist also zu schliessen dass wenn man bei der hier befolgten Operation $HF = EH$ macht, der Punkt F in der gesuchten Senkrechten C D liegen muss.

3) Der Punkt C ist sehr weit von der gegebenen Geraden A B entfernt und es wird der Fusspunkt D der Senkrechten mit grosser Genauigkeit verlangt. (Fig. 15.)

Wenn diese Bedingungen stattfinden, so wird man in der Linie A B ein gerades Stück E F welches erstens so liegt dass man von E und F nach C visiren kann, und das zweitens wo möglich eben so gross als C D, ausserdem aber nicht viel kleiner als C D ist, so genau als möglich abstecken und mit Messlatten ausmessen. Die auf den Horizont reducirte Länge der Linie E F heisse c. Ausser dieser Länge misst man in den Punkten E, F, C auch noch die drei Winkel des Dreiecks E F C mit einem Theodolithen und gleicht dieselben auf die Summe von 180⁰ aus. Sollte der Punkt C unzugänglich sein, so genügt es die Winkel bei E und F allein zu messen. Nennt man die in

Fig. 15.



den Punkten E, F, C gemessenen Horizontalwinkel ε, φ, γ und x den Abstand D E, so ist D F = c — x und

$$x \operatorname{tg} \varepsilon = (c - x) \operatorname{tg} \varphi$$

woraus nach einer einfachen Umformung folgt

$$x = \frac{c \sin \varphi \cos \varepsilon}{\sin (\varepsilon + \varphi)} = \frac{c \sin \varphi \cos \varepsilon}{\sin \gamma}$$

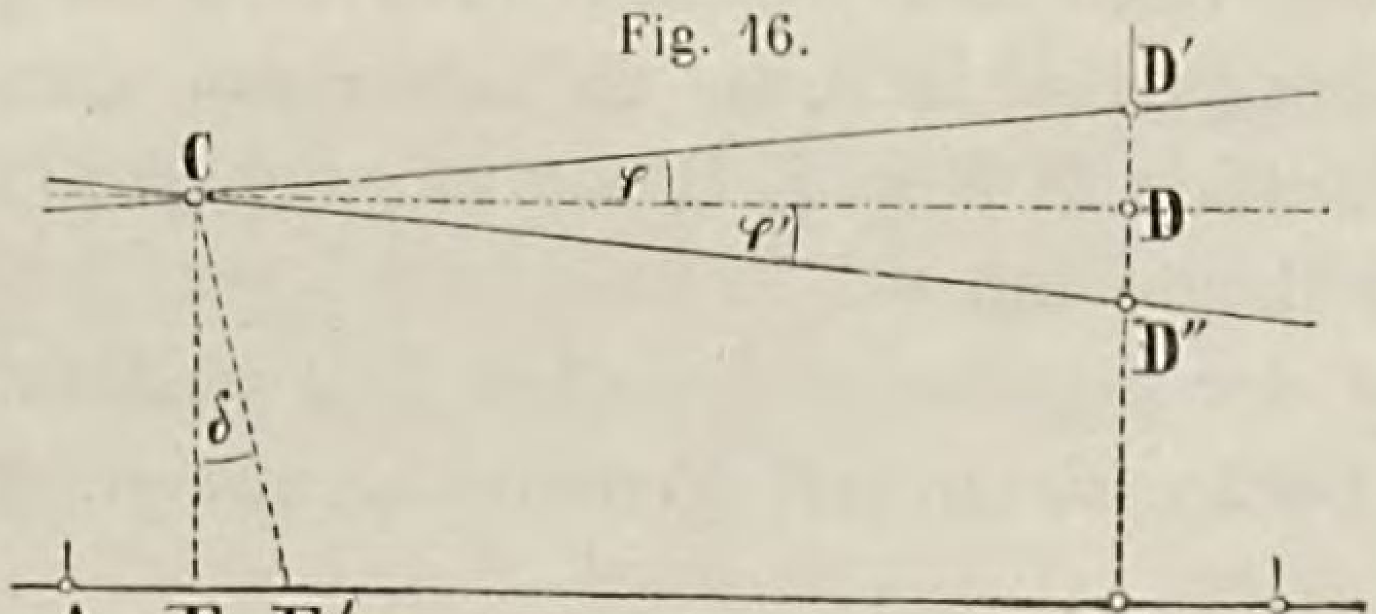
Misst man diese Länge x von E gegen F hin genau ab (wobei sich die von der ersten Messung dieser Linie bekannten Ergebnisse mitbenützen lassen), so erhält man den gesuchten Punkt D von dem aus mit dem Theodolithen die Senkrechte C D theils nach C hin bis an das Hinderniss zwischen C und D, theils auf der entgegengesetzten Seite von A B abgesteckt werden kann, wenn das Fernrohr erst auf A oder B eingestellt und dann um 90° gedreht wird.

§. 33. Aufgabe. Eine gerade Linie ist gegeben und ein Punkt ausser ihr; es soll durch diesen Punkt eine Parallele zu jener Geraden abgesteckt werden.

1) Absteckung paralleler Linien mit Hilfe von Senkrechten.

Ist A B die gegebene Gerade und C der gegebene Punkt, so hat man zunächst die Senkrechte C E herzustellen und zu messen, dann in irgend einem Punkte der Geraden A B, etwa in F oder in B selbst, eine Senkrechte F D zu errichten und diese der C E gleich zu machen. Das Prismenkreuz leistet hier wieder die besten Dienste, namentlich dann, wenn die Punkte A und B unzugänglich oder gegenseitig unsichtbar sind.

Fig. 16.



Bei dieser Absteckung kommt es weniger auf scharfe Bestimmung der rechten Winkel bei E und F als vielmehr darauf an dass die Punkte E und F genau in der Geraden A B liegen, und dass die Senkrechten C E und D F gleich lang sind. Denn nimmt man an dass in Fig. 16 der Winkel C E F um den kleinen Winkel E C E' = δ falsch bestimmt worden wäre, während B F D richtig ist, so würde die Wirkung dieses Fehlers darin bestehen dass man statt des richtigen Abstands C E = a den unrichtigen C E' = F D' von F aus abtrüge und statt der Parallelen C D die Richtung C D' erhielte, die mit C D einen Winkel φ bildet dessen Grösse sich aus der Gleichung bestimmen lässt

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{D D'}{C D} = \frac{a (1 - \cos \delta)}{b \cos \delta} = \frac{a \operatorname{tg}^2 \delta}{2 b}$$

in welcher C D = E F = b und näherungsweise $\sec \delta = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \delta$ gesetzt ist. Mit Rücksicht darauf dass δ und φ sehr kleine

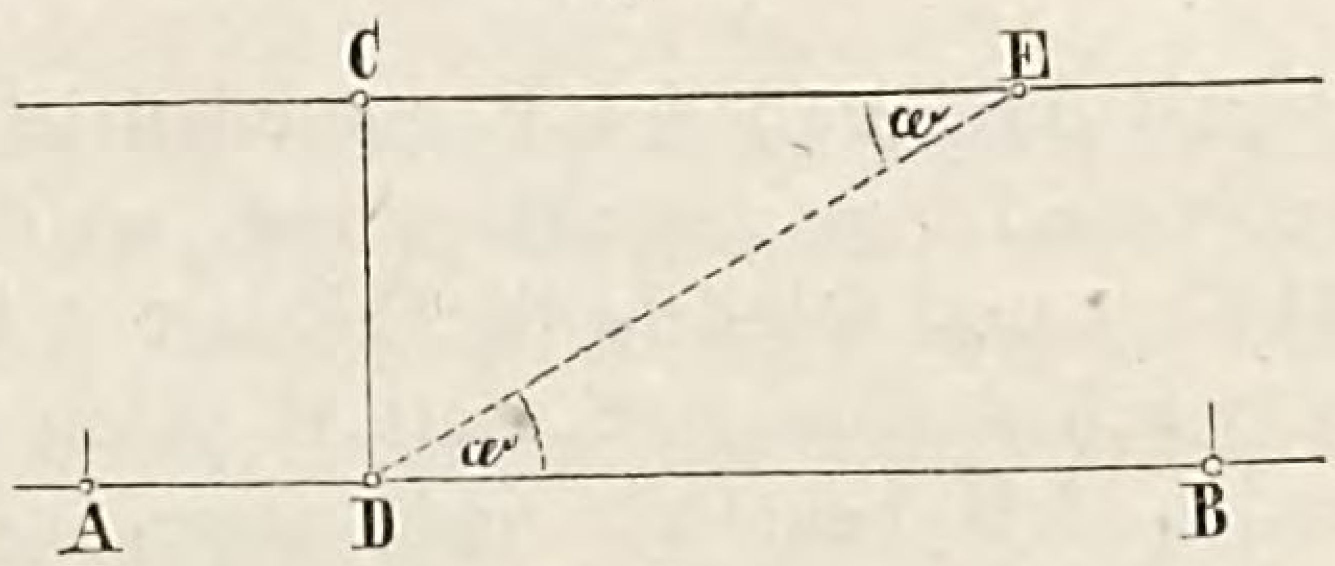
Winkel sind, kann man tg $\varphi = \varphi$ sin 1′ und tg $\delta = \delta$ sin 1′· setzen wodurch erhalten wird

$$\varphi = \frac{a\,\delta^2}{6875\,b} \text{ Minuten.}$$

2) Absteckung von Parallellinien mittels der Wechselwinkel.

Diese Winkel können eine beliebige Grösse haben, also auch rechte sein. Hätte man daher nur ein Prismenkreuz oder einen Winkelspiegel statt eines Theodolithen oder Spiegelkreises zur Verfügung, so müsste man, um die vorliegende Aufgabe zu lösen, von dem gegebenen Punkte C auf die gegebene Gerade A B eine Senkrechte C D fällen und an diese bei C den rechten Winkel E C D = A D C antragen. Wäre E der gegebene Punkt durch den eine Parallele zu A B gelegt werden sollte, ohne dass man zu ihm gelangen könnte, so würde man, um ausser dem gegebenen noch einen Punkt C der Parallelen zu erhalten, in einem beliebigen Punkte D der Geraden A B eine Senkrechte C D errichten und auf dieser mit dem Prismenkreuze oder dem Winkelspiegel den Punkt C bestimmen in welchem sie von einer durch E gehenden und zu ihr senkrechten Geraden E C geschnitten wird.

Fig. 17.

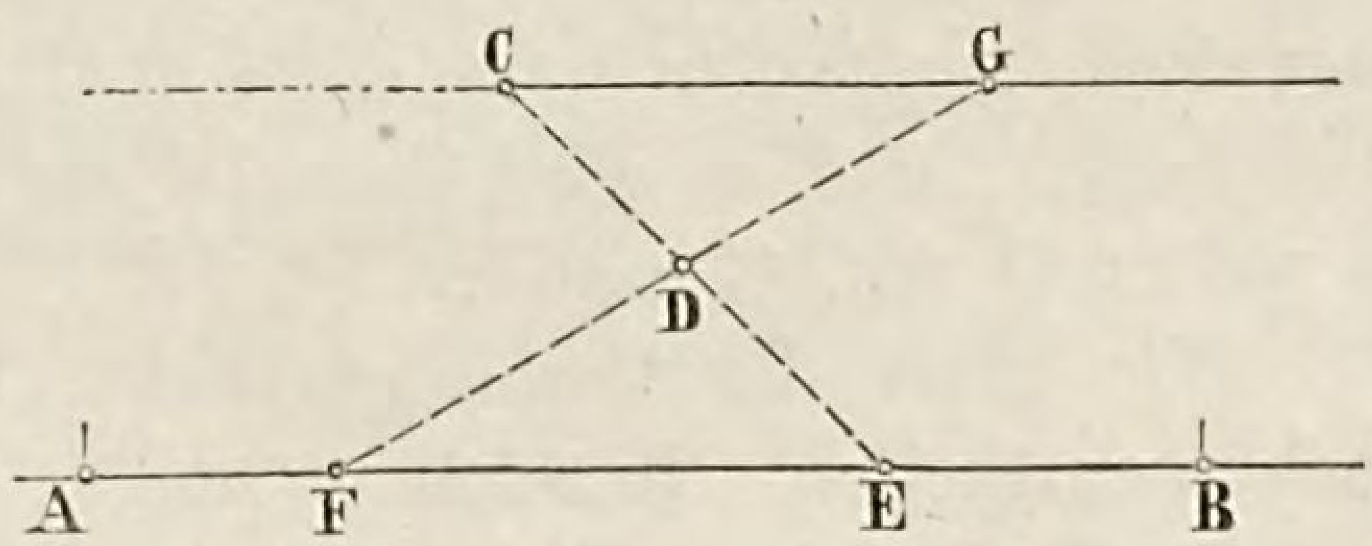


Kann man in dem gegebenen Punkte E und in irgend einem Punkte D der Geraden A B ein winkelmessendes Instrument, z. B. einen Theodolithen aufstellen, so messe man in D den Winkel B D E = ω, stelle hierauf den Theodolithen in E auf, richte das Fernrohr nach D, lese die beiden Nonien ab, drehe mit Hilfe dieser Ablesungen die Alhidade genau um den Winkel ω in der Richtung von D nach C hin und stecke in der neuen Absehlinie das Signal C aus, so ist offenbar E C parallel zu A B. Eine einfache Ueberlegung zeigt, wie man zu verfahren hat um den Winkel ω auch mit dem Spiegelsextanten, dem Spiegelkreise, der Bussole oder dem Messtische in D aufzunehmen und an E D anzutragen.

3) Absteckung von Parallellinien mit Hilfe von Dreiecken.

Soll durch C eine Parallele zu A B gelegt werden, so kann man nach Fig. 18 zwei sich schneidende Gerade C E und F D wovon eine durch C geht und welche beide in der Geraden A B endigen, abstecken, die Stücke C D = a, D E = b, D F = c messen und hierauf den Punkt G der gesuchten Parallelen C G dadurch bestimmen dass man F D verlängert und

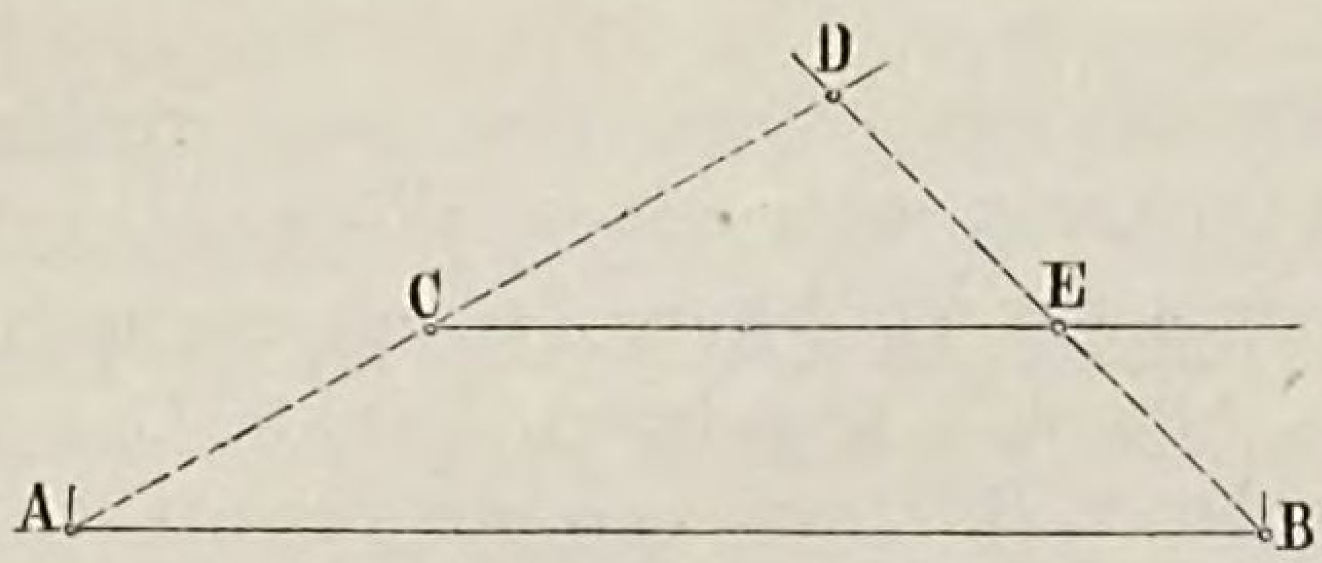
Fig. 18.



$$D\,G = x = \frac{a \,.\, c}{b}$$

macht. Die Richtigkeit dieses Verfahrens bedarf keines Beweises, und es ist klar dass man statt der Punkte E und F auch die Punkte B und A oder doch einen von ihnen zur Absteckung benützen kann.

Fig. 19.



Kann oder will man das vorstehende Verfahren nicht anwenden, so lege man wie in Fig. 19 durch C die Gerade C A und verlängere dieselbe bis zu einem Punkte D der so liegt dass man von ihm nach dem Punkte B der Geraden A B sehen und messen kann. Ist A C = m, C D = n, D B = r gemessen, so mache man

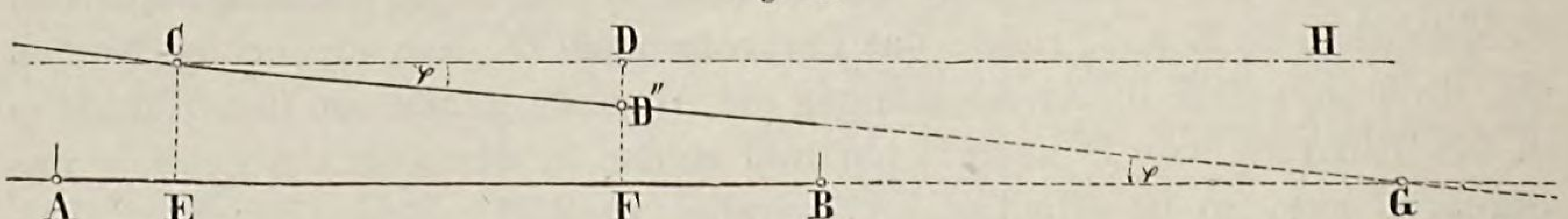
$$D E = z = \frac{n r}{m + n}$$

womit die Parallele C E gefunden ist; denn dadurch dass D E die eben berechnete Länge z erhalten hat, ist das Dreieck D C E dem Dreiecke D A B ähnlich und folglich die C E der A B parallel geworden. Es versteht sich von selbst dass man statt B jeden anderen gut gelegenen Punkt der Geraden A B benützen und, wenn das Terrain nicht hindert, $n = m$ und folglich $z = \frac{1}{2} r$ machen kann.

4) Absteckung der Parallellinien durch Benützung ausserordentlich weit entfernter Gegenstände.

Da zwei gerade Linien einen um so kleineren Winkel mit einander

Fig. 20.



bilden, in je grösserer Entfernung sie sich schneiden, so lassen sich durch Benützung eines sehr entfernten Schnittpunkts Linien abstecken welche nahezu parallel sind. Hat man demnach durch C eine Parallele zu der Geraden A B in deren Verlängerung ein sehr weit entfernter Gegenstand G, z. B. ein Kirchthurm, ein Haus, ein Baum, ein Signal etc. sichtbar ist, abzustecken, so braucht man nur von C aus den Stab D'' in die Richtung C G einzustellen, und es wird dadurch die Aufgabe um so genauer gelöst sein, je weiter G von C entfernt ist.

Wie gross die Genauigkeit ist, kann man in jedem einzelnen Falle leicht beurtheilen. Bezeichnet nämlich

a die Entfernung C E des Punkts C von der Geraden A B,

b den Abstand C D der Senkrechten C E und D'' F von einander,

c die Entfernung E G des Gegenstands G vom Punkte E,

d die Abweichung D D'' der wahren Richtung C D von der genäherten C G,

φ den Neigungswinkel dieser beiden Linien (C D, C G) und
q das Verhältniss in welchem d zu a steht:
so ist nach der Figur

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{d}{b} = \frac{a}{c}$$

oder, wenn man berücksichtigt dass φ immer nur ein kleiner Winkel ist,

$$\varphi = 3438' \frac{a}{c}$$

Will man den Fehler der Absteckung durch den Unterschied d ausdrücken welcher zwischen den Abständen C E und D″ F stattfindet, so ist

$$d = b \frac{a}{c} \text{ und } \frac{d}{a} = \frac{b}{c} = q$$

Wenn also der Abstand D″ F nur um den tausendsten Theil seiner Länge falsch werden dürfte, so müsste der Punkt G tausendmal so weit von E entfernt sein als F; wäre demnach a = b = 10 Meter, so müsste C G schon gleich 10000 Meter sein, eine Forderung die sich nur selten erfüllen liesse. Unter der Voraussetzung aber dass c wirklich = 10 Kilometer wäre, betrüge der Neigungswinkel φ doch immer noch 3,438 Minuten, woraus sich zur Genüge ergibt dass von dem eben besprochenen Näherungsverfahren nur ein sehr beschränkter Gebrauch zu machen ist.

3. Das Abstecken krummer Linien (Curven).

Eine der wichtigsten Vermessungsarbeiten der Bau-Ingenieure bildet das Ausstecken derjenigen Curven durch welche je zwei sich schneidende gerade Richtungen von Strassen, Eisenbahnen oder Canälen mit einander verbunden werden müssen, um hiernach Verkehrswege herzustellen deren horizontal projicirte Axen stetige Linien sind. Die Curven welche zur Verbindung der als Tangenten erscheinenden Geraden dienen, sind fast ausschliesslich Kreisbögen oder Zusammensetzungen solcher Bögen und nur in wenigen Fällen Parabeln. Die Bedingungen unter denen diese Curven auszustecken sind, können sehr verschieden sein, und es werden sich theils hienach, theils nach dem von der Arbeit geforderten Grade der Genauigkeit die Methoden der Absteckung richten. Alle diese Methoden setzen voraus dass man die Berührungspunkte der abzusteckenden Curven vorher bestimmt habe, wesshalb zuvörderst die folgende Aufgabe zu lösen ist.

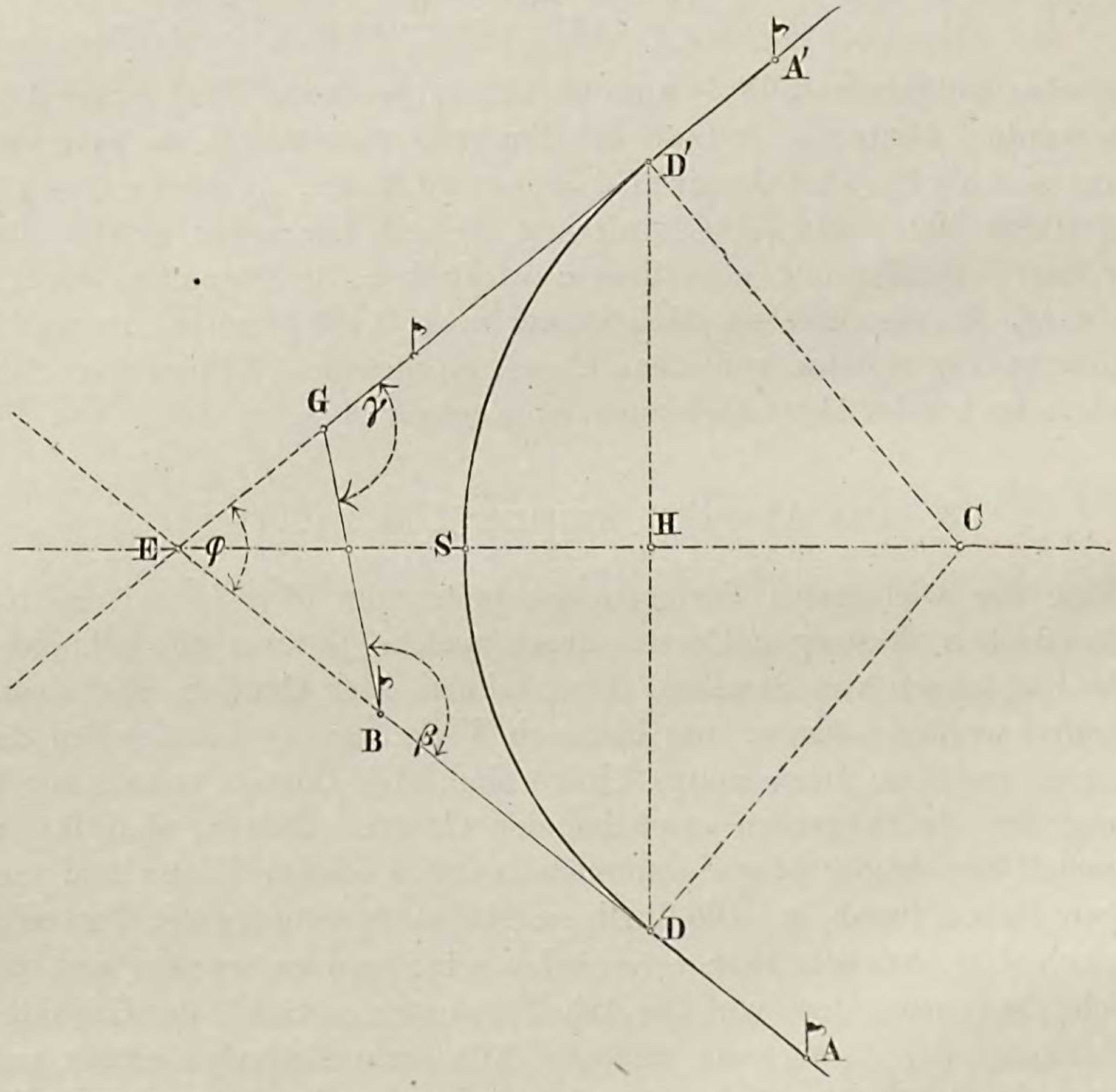
§. 34. Aufgabe. Zwei gerade sich schneidende Richtungen sind ihrer Lage nach, und die sie verbindende Curve (Kreis oder Parabel) ist durch ihre Gleichung gegeben: man soll die Entfernung der Berührungspunkte von dem Schnittpunkte der Tangenten bestimmen.

Sind (Fig. 21) A B, A′ G die gegebenen Geraden, so hat man vor allen Dingen den Punkt E in welchem sie sich schneiden, und den Horizontalwinkel φ den sie daselbst einschliessen, zu bestimmen. Der Schnitt-

punkt E wird erhalten, indem man sich entweder in der Verlängerung von A B aufstellt und darin so lange vor- oder rückwärts geht bis man auch in die verlängerte Linie A′ G gelangt; oder indem zwei bei A und A′ stehende Geometer einen Gehilfen mit einer Signalstange gleichzeitig in die Linien A B und A′ G einrichten. Steht dessen Stange in den beiden Geraden, so bezeichnet man deren Schnittpunkt mit einem festen Pfahl.

Ist dieser Punkt zugänglich und kann von ihm aus jede der Berührungslinien A B, A′ G auf eine genügend lange Strecke gesehen werden, so hat die Messung des Winkels φ welche mit dem Theodolithen oder Spiegel-

Fig. 21.



kreise geschieht, keine Schwierigkeit und ist dieselbe aus der Instrumentenlehre hinreichend bekannt. Sollte aber der Schnittpunkt E unzugänglich sein, oder könnte man von ihm aus nur ein kurzes Stück der Linie A B und A′ G übersehen, so müsste man den Winkel φ auf mittelbare Weise dadurch bestimmen dass man in zwei geeigneten Punkten B und G der Geraden A B und A′ G die Winkel β und γ misst und daraus den Winkel

$$\varphi = \beta + \gamma - 180^0$$

berechnet. Die Punkte B und G müssen so liegen dass man nicht nur von einem zum anderen und beziehlich nach A und A′ sehen sondern auch von

B bis G messen kann. Denn die Länge der Linie $BG = e$ ist nöthig, um damit die Entfernungen $BE = g$ und $GE = b$ deren man später zur Absteckung der Berührungspunkte bedarf, zu berechnen. Wir setzen jetzt den Winkel φ und, wo wir sie bedürfen, die Seiten e, b, g als bekannt voraus.

1) Ist die Verbindungscurve DSD' welche die Geraden AB, A'G in den Punkten D, D' berührt, ein Kreis, so ist dessen auf den Mittelpunkt C bezogene Gleichung

$$y^2 = r^2 + x^2$$

wobei r den constanten und gegebenen Krümmungshalbmesser bezeichnet. Denkt man sich in der Fig. 21 den Mittelpunkt C des Kreises DSD' bestimmt und denselben mit den Punkten D, D', E verbunden, so entstehen zwei congruente recktwinkelige Dreiecke CDE, CD'E aus denen sofort die gesuchte Entfernung der Berührungspunkte D, D' von E oder

$$ED = ED' = a = r \cot \tfrac{1}{2} \varphi \tag{56}$$

folgt. Misst man diese Länge a von E aus sehr genau auf den beiden Tangenten EA, EA' ab, so erhält man auf dem Felde die Berührungspunkte D, D' die mit hinreichend starken Pfählen dauerhaft bezeichnet werden. Sollte der Punkt E unzugänglich sein, so hätte man selbstverständlich nur von B aus die Länge $a - g$ und von G aus die Länge $a - b$ abzumessen um die Punkte D und D' zu erhalten.

2) Sind die Geraden AB, A'G durch eine Parabel DSD' mit einander zu verbinden, so wird der Scheitel S derselben stets in der Linie EC liegen welche den Winkel φ halbirt, und es wird ihre Gleichung für rechtwinklige oder Polarcoordinaten entweder bekannt sein oder aus den gegebenen Bestimmungsstücken leicht gefunden werden können. Es sei diese Gleichung für ein rechtwinkliges System

$$y^2 = px = 2rx$$

wobei r den kleinsten Krümmungshalbmesser der Parabel im Scheitel bezeichnet, der Ursprung der Coordinatenaxen im Scheitel der Curve liegt und die den Winkel φ halbirende Linie EC die Abscissenaxe vorstellt. Nach einer bekannten Eigenschaft der gemeinen Parabel ist die Ordinate DH des Berührungspunkts D gleich

$$y = 2x \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \varphi = r \cot \tfrac{1}{2} \varphi$$

und demzufolge diese Entfernung des Berührungspunkts D vom Schnittpunkte E der Tangenten gleich

$$a' = \frac{y}{\sin \frac{1}{2} \varphi} = \frac{r \cot \frac{1}{2} \varphi}{\sin \frac{1}{2} \varphi} \tag{57}$$

Diese Entfernung, von E aus auf den Tangenten EA und EA' abgemessen, gibt die gesuchten Berührungspunkte D und D' welche wie der Punkt E mit festen Pfählen markirt werden.

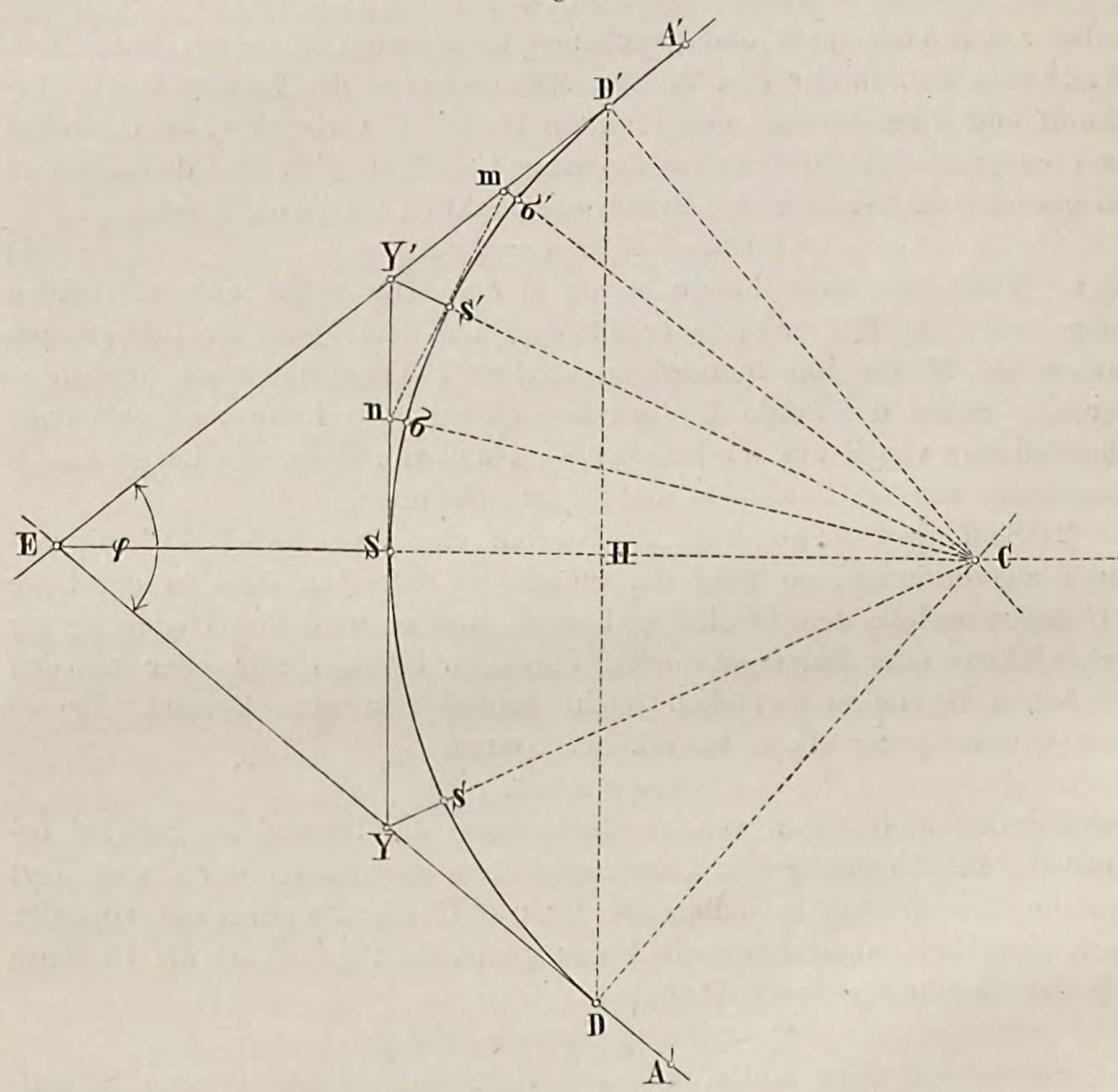
§. 35. **Aufgabe.** Es ist der Neigungswinkel (φ) der Tangenten einer Curve und diese selbst durch ihre Gleichung gegeben: man soll die Entfernung des Scheitels (S) der Curve

von dem Schnittpunkte (E) der Tangenten berechnen und abstecken.

Manchmal ist der Scheitel der Curve für deren Absteckung nöthig, immer aber ist es gut die Lage desselben zur Probe der Rechnung und Messung zu bestimmen.

1) Stellt in Fig. 22 die Curve D S D′ einen Kreisbogen vom Halbmesser r vor, und sind D, D′ dessen Berührungspunkte an den Tangenten

Fig. 22.



E A, E A′ welche zusammen den durch die Linie E C halbirten Winkel A E A′ $= \varphi$ einschliessen, so ist aus bekannten geometrischen Gründen S der Scheitel des Kreises und E S = c die gesuchte Entfernung. Denkt man sich in S eine Senkrechte zu E C errichtet, so stellt dieselbe eine Tangente des Kreises vor und es ist desshalb S Y = S Y′ = D Y = D′ Y′ = d.

Verbindet man den Schnittpunkt Y mit dem Mittelpunkte C des Kreises D S D′ um die Länge d auszudrücken, so ist

$$D C Y = S C Y = \tfrac{1}{2}(90^0 - \tfrac{1}{2}\varphi) = 45^0 - \tfrac{1}{4}\varphi$$

und daher aus den rechtwinkligen Dreiecken D C Y oder S C Y

$$d = r \operatorname{tg} (45^0 - \tfrac{1}{4} \varphi) \tag{58}$$

Hiemit findet man die gesuchte Entfernung des Scheitels S gleich

$$c = d \cot \tfrac{1}{2} \varphi = r \operatorname{tg} (45^0 - \tfrac{1}{4} \varphi) \cot \tfrac{1}{2} \varphi \tag{59}$$

Will man die Tangente Y S Y′ mit Hilfe von E Y und E Y′ abstecken, so ist

$$E\,Y = E\,Y' = f = \frac{d}{\sin \frac{1}{2} \varphi} = \frac{r \operatorname{tg} (45^0 - \frac{1}{4} \varphi)}{\sin \frac{1}{2} \varphi} \tag{60}$$

zu nehmen. Der Schnittpunkt dieser Tangente und der Halbirungslinie E C gibt den Scheitel S dessen Entfernung von E mit dem berechneten Werthe c übereinstimmen muss, wenn richtig gearbeitet wurde.

2) Ist die Curve D S D′ ein Parabelbogen, so ist die Entfernung c′ des Scheitels S von dem Punkte E durch die Gleichung

$$2\,c' = y \cot \tfrac{1}{2} \varphi = r \cot^2 \tfrac{1}{2} \varphi \tag{61}$$

welche auf der schon in §. 34 angegebenen und benützten Eigenschaft der Parabel beruht, zu bestimmen, während die Länge E Y = E Y′ oder

$$f = \frac{c'}{\cos \frac{1}{2} \varphi} = \frac{2 \cos \frac{1}{2} \varphi}{r \sin^2 \frac{1}{2} \varphi} \tag{62}$$

und die Entfernung der Schnittpunkte Y und Y′ oder S Y = S Y′ gleich

$$d' = c' \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \varphi = \tfrac{1}{2} r \cot \tfrac{1}{2} \varphi \tag{63}$$

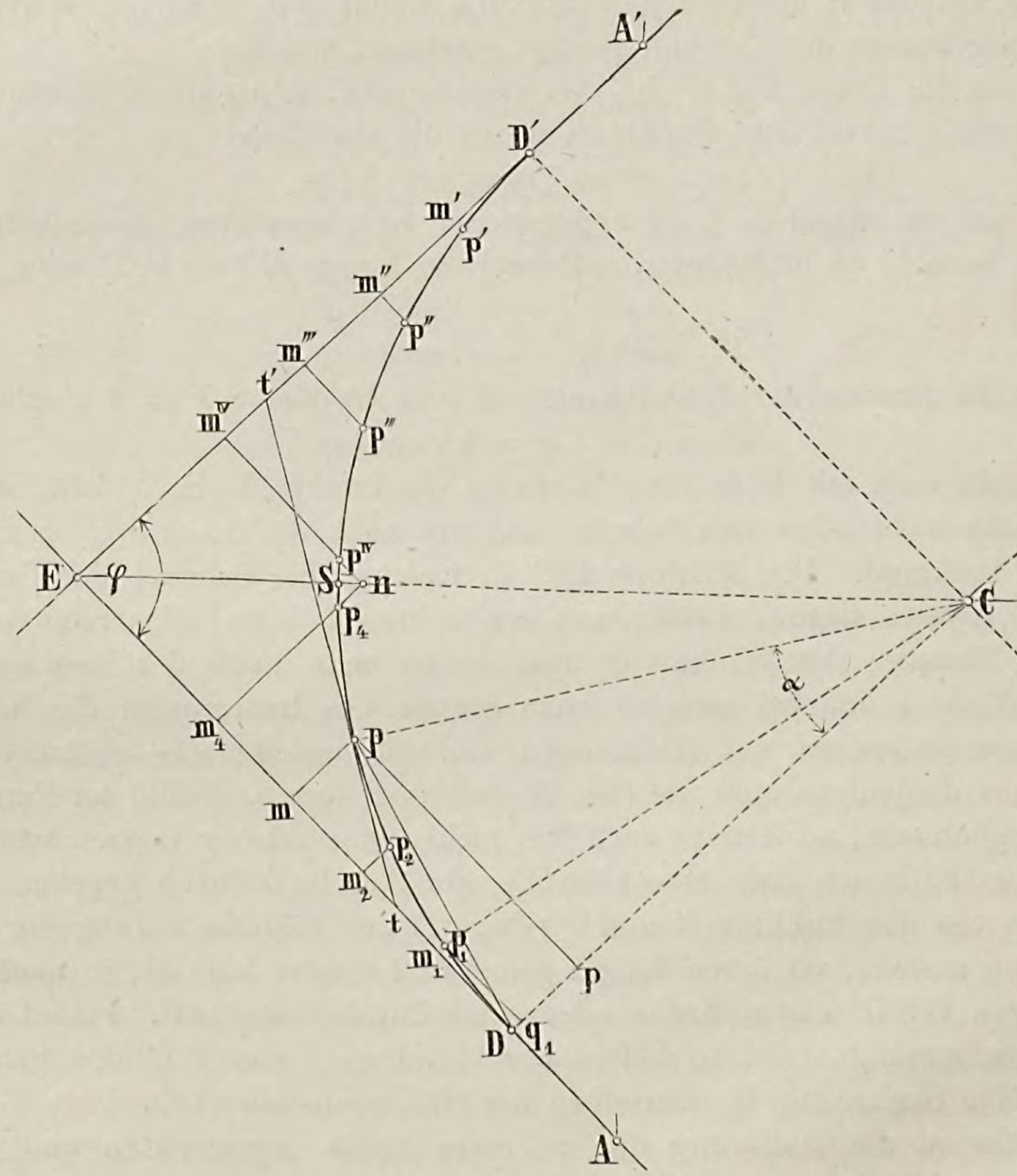
ist. Steckt man mit Hilfe dieser Grössen die Punkte Y, S, Y′ ab, so hat man damit nicht bloss den Scheitel sondern auch die Axen S C, S Y der Parabel bestimmt. Die Richtung E C in welcher die Scheitel der Parabel und des Kreises liegen, steckt man am schnellsten und sichersten schon bei der Messung des Winkels φ aus, indem man nach der Bestimmung dieses Winkels und bei unverrücktem Stande des Instruments die Nonien des Horizontalkreises auf Ablesungen einstellt welche das arithmetische Mittel aus denjenigen sind die den Winkel φ lieferten. Sollte der Punkt E unzugänglich sein, so könnte auch E S nicht unmittelbar gemessen werden; in diesem Falle ist aber eine Controle der Arbeit dadurch gegeben dass man die von den Punkten B und G (Fig. 21) aus bestimmte Tangente Y Y′ misst und zusieht, ob deren Länge genau = 2 d oder 2 d′ ist, je nachdem der Bogen D S D′ einem Kreise oder einer Parabel angehört. Findet diese Uebereinstimmung statt, so liefert der Mittelpunkt von Y Y′ den Scheitel S und eine Senkrechte in demselben die Halbirungslinie E C.

Während die Halbirung des auf dem Felde abgesteckten und eben gemessenen Winkels φ mit Hilfe eines centrischen Theodolithen sehr einfach ist, wird die Ausführung derselben Arbeit mit einem excentrischen Theodolithen ziemlich umständlich; wir haben ihr desshalb im Abschnitte B, Nr 1 der von den mittelbaren Winkelmessungen handelt, einen besonderen Paragraph gewidmet.

§. 36. Aufgabe. Es sind die beiden Tangenten und Berührungspunkte eines Kreises von bekanntem Halbmesser gegeben: man soll den zwischen jenen Punkten enthaltenen Kreisbogen abstecken.

1) Absteckung der Curve durch rechtwinklige Coordinaten. Bei dieser Methode wird jeder Berührungspunkt als Ursprung des Coordinatensystems, jede Tangente als Abscissenaxe und jeder durch einen Berührungspunkt gezogene Halbmesser als Ordinatenaxe betrachtet. Kommt es bei der Absteckung nicht darauf an dass die Bogenstücke gleich gross werden, so macht man die Abscissenunterschiede gleich; sollen aber die Bogenstücke gleich sein, so müssen nothwendig die Abscissenunterschiede

Fig. 23.



ungleich werden. Diese Verschiedenheit der Anforderungen veranlasst zwar zwei verschiedene Berechnungsweisen der Coordinaten, aber keineswegs einen Unterschied in der Art der Absteckung der Coordinaten selbst.

a) Die Abscissenunterschiede der Curvenpunkte sollen gleich sein.

Bezeichnet (in Fig. 23) D den Berührungspunkt, D E die Abscissenaxe und D C die Ordinatenaxe, so ist für irgend einen Curvenpunkt p dessen Abscisse D m = x ist, die zugehörige Ordinate

$$y = r - \sqrt{r^2 - x^2} \tag{64}$$

Da r gegeben ist, so lässt sich hieraus für jedes x das entsprechende y berechnen. Man wird zu dem Ende

$$\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{(r + x)(r - x)}$$

setzen, mit Hilfe der Logarithmen erst alle Wurzelwerthe herstellen und diese schliesslich von dem Halbmesser r abziehen, vorausgesetzt dass man keine Tabelle besitzt worin die gesuchten Ordinatenwerthe schon enthalten sind. Eine solche Tabelle enthält der Anhang. Darin findet man die Coordinaten für r = 100 bis r = 7000, und für Abscissenunterschiede von 10, 20, 25 und 50 Längeneinheiten. Da in den meisten praktischen Fällen die Grösse des Halbmessers innerhalb gewisser Grenzen beliebig gewählt werden darf, so kann man es fast immer dahin bringen dass r einen der Werthe erhält welche in der Tabelle dafür angenommen sind, und man braucht also nur in wenigen Fällen die Coordinaten selbst zu rechnen.

Hält man es für vortheilhafter den Ausdruck für die Ordinate y Gl. (64) in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe zu verwandeln, so entwickele man

$$\sqrt{r^2 - x^2} = r\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} = r\left(1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{r}\right)^2 - \tfrac{1}{8}\left(\frac{x}{r}\right)^4 - \dots\right)$$

und suche die Ordinate y aus der Gleichung

$$\frac{y}{r} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \tfrac{1}{8}\left(\frac{x}{r}\right)^4 + \tfrac{1}{16}\left(\frac{x}{r}\right)^6 + \dots \qquad (64\text{ a})$$

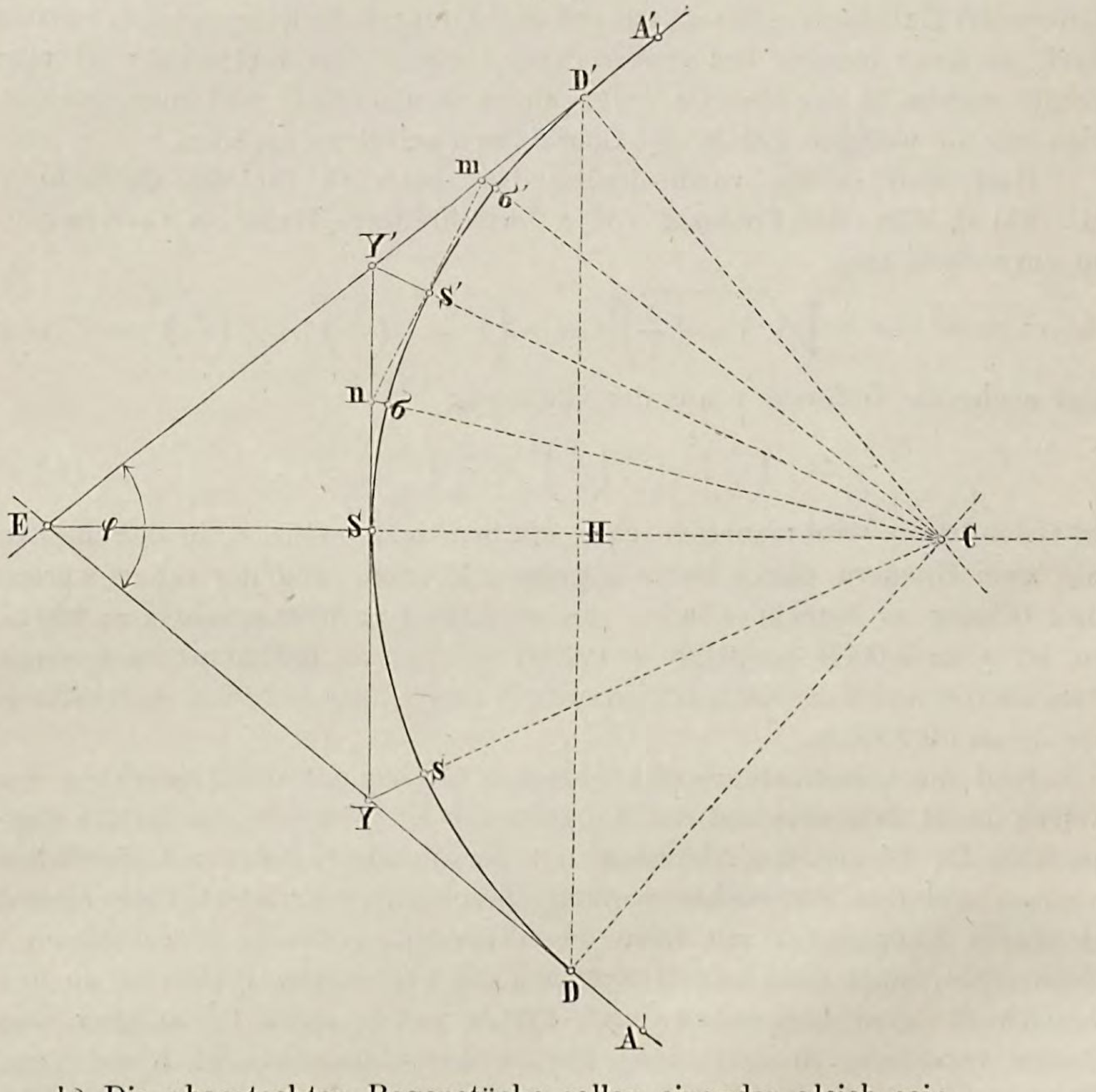
In vielen Fällen wird man sich schon mit dem ersten Gliede, in den meisten mit zwei Gliedern dieser Reihe begnügen können, und nur selten werden drei Glieder zu berechnen sein. Es sei z. B. r = 1000 m und x = 100 m, so ist y = 5,0000 + 0,0125 + 0,0001 + ... = 5,0126 m; und wenn r = 2200 m und x = 550 m ist, so wird y = 68,7500 + 1,0736 + 0,0330 + + ... = 69,8566 m.

Sind die Coordinatenwerthe bekannt, so beginnt die Absteckung der Curve damit dass man auf den Tangenten D E, D′ E von den Berührungspunkten D, D′ aus die Abscissen mit der Messkette oder mit Messlatten abmisst und ihre Endpunkte vorläufig bezeichnet. Errichtet man hierauf in diesen Endpunkten mit Hilfe des Winkelspiegels oder Prismenkreuzes Senkrechte, misst dann mit Meterstäben die berechneten Ordinaten ab und bezeichnet deren Endpunkte durch Pfähle welche etwa 0,3 m über dem Boden vorstehen, so sind dieses Punkte des abzusteckenden Kreisbogens. Zeigt sich nach dieser Absteckung dass die beiden Curvenzweige D S, D′ S ohne Unterbrechung ihrer Stetigkeit an dem bereits vorher ausgesteckten Scheitel S in einander übergehen, so kann diese Beobachtung als ein günstiges Zeichen für die Genauigkeit der Arbeit angesehen werden; findet aber dieser stetige Uebergang nicht statt, so hat man vor allen Dingen seine Rechnung zu prüfen, und wenn sich hierin kein Fehler herausstellt, die Messung, Berechnung und Absteckung aller Hilfsgrössen zu wiederholen.

Will man bei grossen Curven die langen Ordinaten welche in der

Nähe des Scheitels abzustecken wären, vermeiden, so theilt man den abzusteckenden Kreisbogen D S D′ nach Fig. 24 in vier gleiche Theile, indem man die Zwischentangente Y S Y′ herstellt, und steckt jeden dieser Theile gerade so ab wie vorher die Curvenzweige D S, D′ S. Es versteht sich dabei von selbst dass für die Bögen S s, S s′ dieselben Coordinatenwerthe gelten welche den Bögen D s, D′ s′ angehören, und dass man die Entfernungen der Scheitelpunkte s und s′ von Y und Y′ ganz in derselben Weise bestimmt wie es in §. 35 für S geschehen ist.

Fig. 24.



b) Die abgesteckten Bogenstücke sollen einander gleich sein.

Wenn der Halbmesser r des abzusteckenden Kreisbogens und der Winkel φ seiner Tangenten, somit auch die Lage der Berührungspunkte gegeben ist, so kennt man damit auch die Länge des zwischen diesen Punkten enthaltenen Bogens und kann folglich bestimmen, in wie viele gleiche Theile der letztere getheilt werden soll. Man wählt hier gern eine gerade Anzahl Theile, damit der Scheitel des Bogens von seinen Nachbarpfählen eben so weit absteht, als jeder Curvenpfahl von dem seinigen.

Nehmen wir an dass der ganze Bogen in 2n gleiche Theile zerlegt werde, so entspricht jedem Bogenstücke ein Mittelpunktswinkel

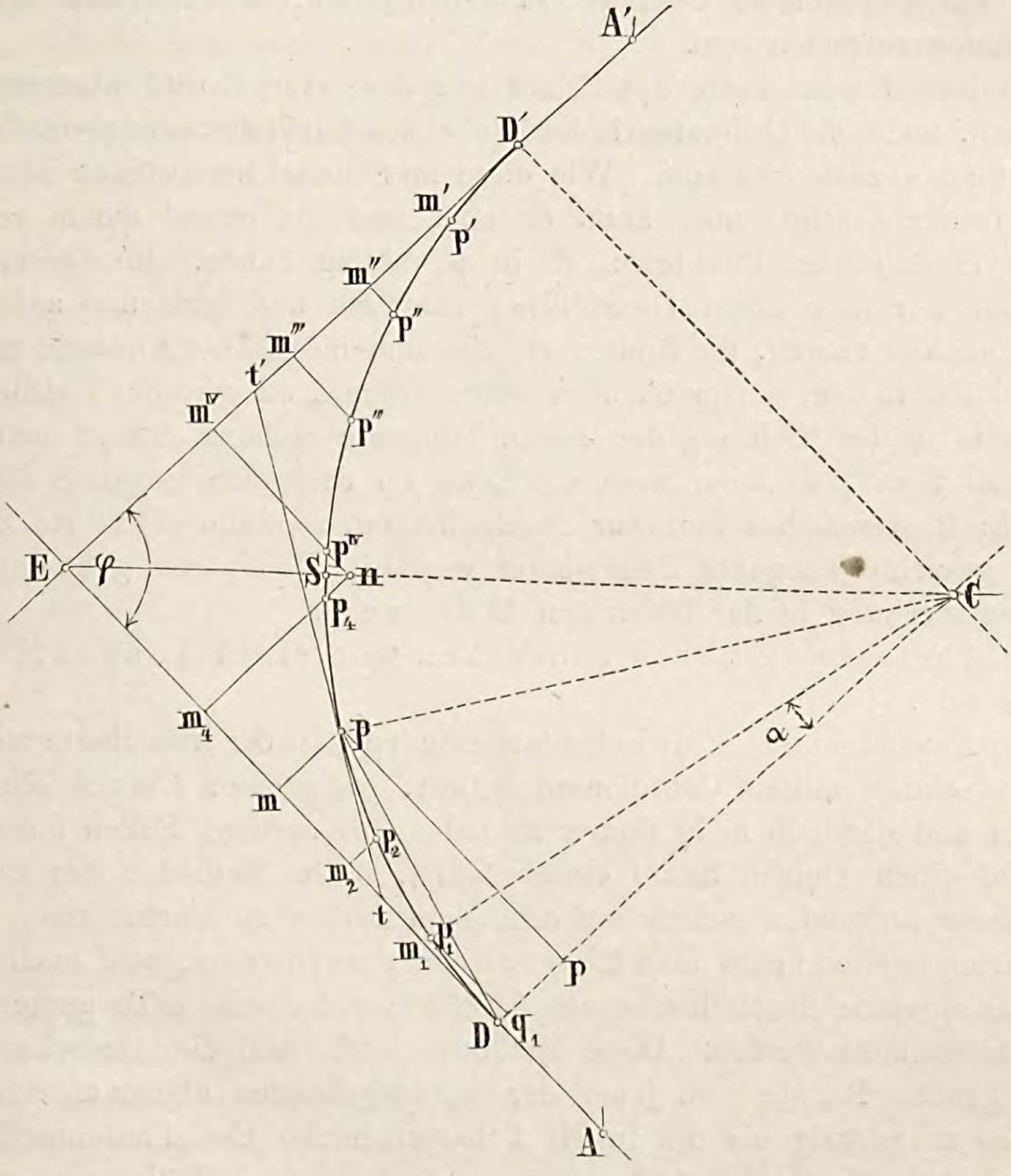
$$\alpha = \frac{180^0 - \varphi}{2\,n} \tag{66}$$

und eine Länge des Bogenstücks

$$l = 0{,}01745\;\alpha\;r \tag{67}$$

wobei α in Graden auszudrücken ist. Stellt nun in Fig. 25 wieder D S D′

Fig. 25.



den abzusteckenden Kreisbogen, D den einen und D′ den anderen Berührungspunkt vor, so sind für irgend einen Curvenpunkt p welcher um den Bogen D p = u l von D entfernt ist, die Coordinaten D m = x und m p = y:

$$x = r\,\sin\,(u\,\alpha) \tag{68}$$

$$y = 2\,r\,\sin^2\,(\tfrac{1}{2}\,u\,\alpha) \tag{69}$$

Nimmt man nach und nach u gleich 1, 2, 3, 4 u. s. f. bis u = n, so erhält man aus den vorstehenden Gleichungen die den Punkten p_1, p_2,

$p_3 \ldots$ S zugehörigen Coordinatenwerthe $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4$ u. s. w.; und trägt man dieselben in der unter a) angegebenen Weise auf dem Felde auf, so findet man daselbst die gesuchten Curvenpunkte p_1, p_2, p_3, p_4 u. s. f. bis zum Scheitel S. Zeigt sich nach der Absteckung dass der aus den Coordinaten bestimmte Scheitelpunkt mit dem nach §. 35 gefundenen zusammentrifft, und bemerkt man von Pfahl zu Pfahl vorwärts schreitend und von jedem nach dem zweitnächsten zurücksehend, keinen Unterschied in den Abständen der nächstliegenden Pfähle von diesen Absehlinien, sind also die Pfeile dem Augenmasse nach alle einander gleich, so kann man mit der Absteckung zufrieden sein.

Es bedarf wohl kaum der Erinnerung dass eine Zwischentangente gelegt wird, wenn die Ordinaten in der Nähe des Scheitels zu lang und folglich zu mühsam abzustecken sind. Wie diese im Scheitel herzustellen ist wurde schon früher gezeigt; man kann sie aber auch an irgend einem anderen bereits abgesteckten Punkte, z. B. in p, nöthig haben. In diesem Falle darf man nur in p einen Theodolithen centrisch und horizontal aufstellen, von p nach D visiren, die Nonien ablesen und hierauf die Alhidade um den Winkel $u\,\alpha$ in dem entsprechenden Sinne drehen, so wird die Visirlinie des Fernrohrs in der Richtung der neuen Tangente stehen. Steckt man nun den Stab t aus, so kann man die Linie t p rückwärts gegen S hin verlängern; lässt sich das Fernrohr durchschlagen, so kann sofort ein Stab t' in die gesuchte Tangente eingerichtet werden. Von p aus geht dann die Curvenabsteckung in der bisherigen Weise weiter.

2) Absteckung durch Einrücken von einer Tangente oder Sehne aus.

Auch wenn man eine Zwischentangente legt, ist der freie Raum welchen die Absteckung mittels Coordinaten fordert, bei grossen Curven sehr ausgedehnt und desshalb nicht immer zu haben. In solchen Fällen muss man sich auf einen kleinen Raum einschränken, d. h. Methoden der Curvenabsteckung anwenden welche auf schmalem Raume ausführbar sind. Diese Verfahrungsweisen nennt man Einrückungsmethoden, weil nach ihnen die Curvenpunkte durch ihre kurzen Abstände von gewissen Tangenten oder Sehnen bestimmt werden. Diese Methoden sind, weil die Absteckung der nachfolgenden Punkte von jener der vorausgehenden abhängt, durchaus nicht so zuverlässig als die in Nr 1 besprochenen Coordinatenmethoden, und sie werden desshalb, wie bemerkt, nur in besonderen Fällen angewendet.

a) Betrachtet man in Fig. 26 die Tangente i_1 t, so liegt der Punkt i_1 in welchem sie die Tangente D w_2 schneidet, von p_2 und D gleich weit ab und er befindet sich in dem verlängerten Halbmesser C p_1 welcher den Winkel D C p_2 halbirt. Der Fusspunkt w_1 der Ordinate $p_1 w_1$ liegt von i_1 um eine kleine Grösse $w_1 i_1$ ab welche aus der Ordinate $p_1 w_1$ und dem Winkel $w_1 p_1 i_1 = \frac{1}{2} u\,\alpha$ fliesst, indem

$$w_1 i_1 = \xi = y \operatorname{tg} (\tfrac{1}{2} u\,\alpha) \qquad (70)$$

Berechnet man hieraus die Länge ξ und trägt sie an D w_1 an, so erhält

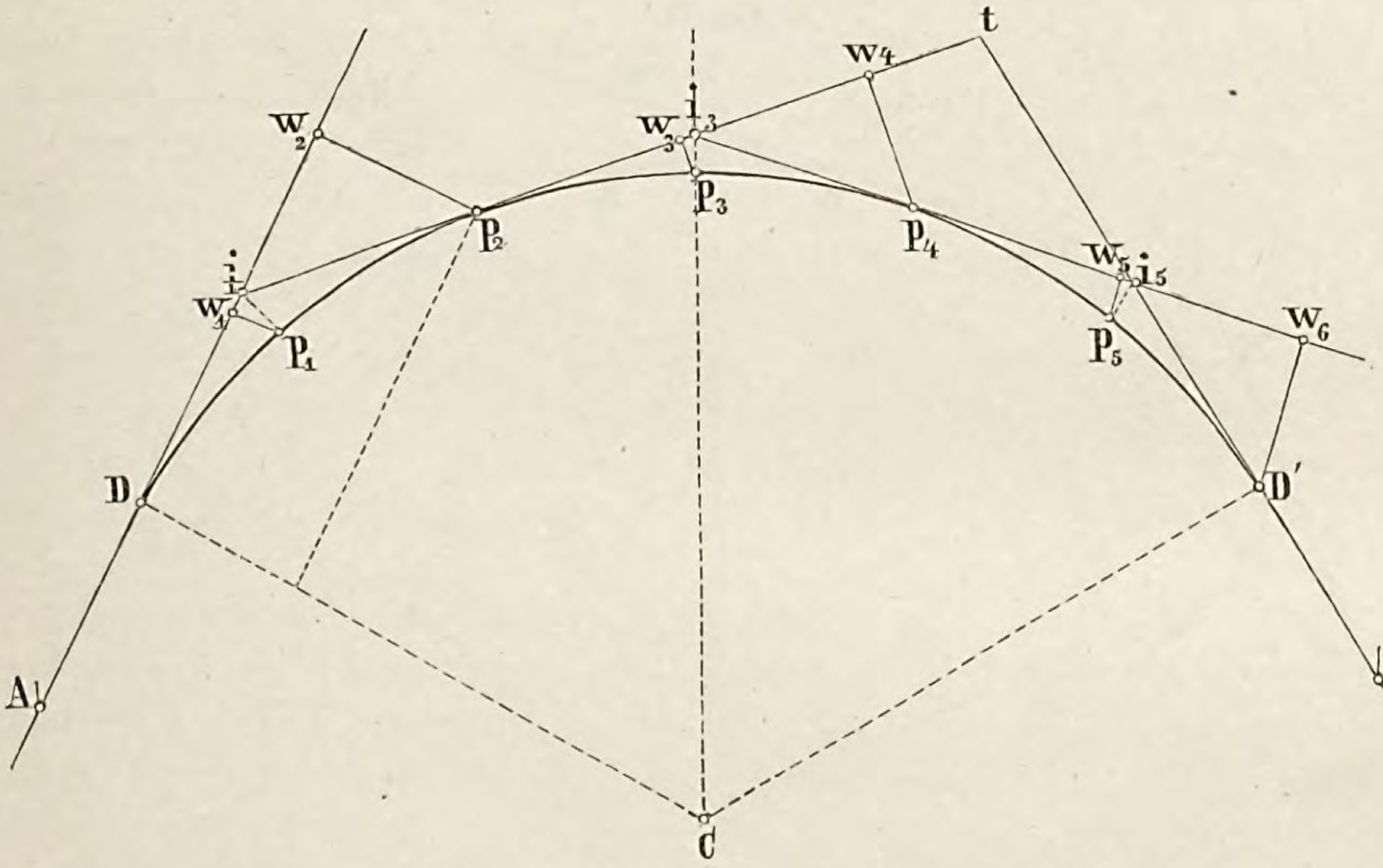
man einen Punkt i_1 der in der Tangente i_1 t liegt und also zu deren Absteckung dient, wenn man den Punkt p_1 bereits hat. Geht der Winkel $\frac{1}{2}$ u α in α über, indem u = 2 wird, so darf in dem vorliegenden Falle, wo α stets ein kleiner Winkel ist, annähernd $\mathrm{tg}\,\alpha = \alpha\,\mathrm{tg}\,1^0 = 0{,}01745\,\alpha$ und

$$\xi = 0{,}01745\,\alpha\,y \tag{71}$$

gesetzt werden. Bei der Berechnung des Werths von ξ aus der letzten Gleichung ist zu berücksichtigen dass α in Graden ausgedrückt werden muss, und dass alsdann ξ in derselben Längeneinheit erhalten wird in der y gegeben ist. Ist der Halbmesser des abzusteckenden Kreisbogens sehr gross, so kann man den kleinen Werth von ξ gegen x vernachlässigen.

Hat man nun von D aus einen Kreisbogen von dem Halbmesser r abzustecken welcher die Tangente D w_2 in D berührt und dessen Bogenstücke

Fig. 26.



D p_1, p_1 p_2, p_2 p_3 u. s. w. einander gleich werden sollen, so berechne man sich vor Allem die Winkel D C p_1 = α und D C p_2 = 2α nach Gleichung (66) und hiermit die Abscissen und Ordinaten

$$x_1 = r \sin \alpha; \qquad x_2 = r \sin 2\alpha$$
$$y_1 = 2r \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha; \quad y_2 = 2r \sin^2 \alpha$$

Ferner berechne man mit Hilfe von y_1 die Länge ξ nach (71) und stecke die Punkte p_1 und p_2 durch Abmessen dieser Coordinatenwerthe ab, indem man D $w_1 = x_1$, D $w_2 = x_2$; $w_1 p_1 = y_1$ und $w_2 p_2 = y_2$ macht. Steckt man weiter in dem um die Grösse ξ von w_1 abstehenden Punkt i_1 einen Stab ein, so erhält man die Tangente i_1 p_2 auf der man abermals die Abscissenwerthe $p_2 w_3 = x_1$ und $p_2 w_4 = x_2$ abträgt um auf den in w_3 und w_4 errichteten Senkrechten die Ordinaten $y_1 = w_3 p_3$ und $y_2 = w_4 p_4$ abzumessen. Die Tangente i_3 p_4 von der aus die Punkte p_5 und D′ bestimmt

werden, erhält man in derselben Weise wie i_1 p_2 und alle folgenden eben so. Es versteht sich von selbst dass, wenn der Winkel α nach Gleichung (66) bestimmt und die Absteckung stets nach einer Richtung fortgesetzt wurde, der nte Curvenpunkt mit dem Scheitel S und der (2n)te mit dem zweiten Berührungspunkte D' zusammentreffen muss. Besser ist es jedoch wenn man nur den halben Bogen von D aus und die andere Hälfte von D' aus vornimmt und zusieht, ob beide Curvenzweige durch den vorher bestimmten Scheitel gehen ohne sich daselbst zu schneiden.

b) Es sei für den Punkt p_1 in Fig. 27 nach den Gleichungen (66) bis (69):

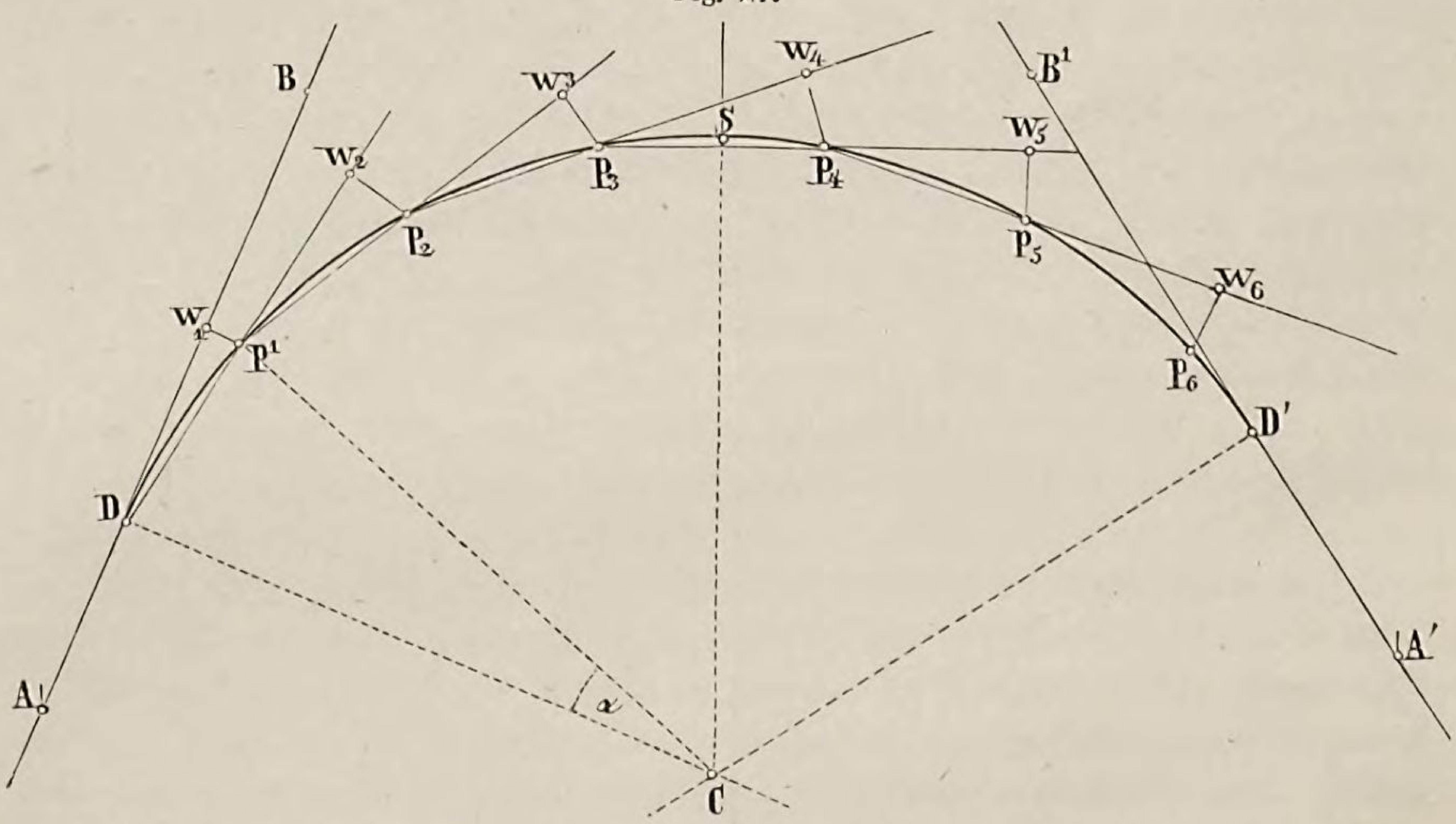
der Winkel $D\,C\,p_1 = \alpha = (180^0 - \varphi) : 2n$

der Bogen $D\,p_1 = l = 0{,}01745\, \alpha\, r$

die Abscisse $D\,w_1 = x_1 = r \sin \alpha$

die Ordinate $p_1\, w_1 = y_1 = 2r \sin^2 \frac{1}{2} \alpha$

Fig. 27.



Zieht man die Sehne $D\,p_1$ über den Kreis hinaus, macht $p_1\,p_2 = D\,p_1$ so ist der Winkel $w_2\,p_1\,p_2 = \alpha$; verlängert man $p_1\,p_2$ und macht $p_2\,p_3 = p_1\,p_2 = D\,p_1$, so wird auch der Winkel $w_3\,p_2\,p_3 = \alpha$ u. s. f. Würde man die Sehnen $p_1\,p_2 = p_2\,p_3 = p_3\,p_4 \ldots\ldots = s$ kennen, so hätte man die

Abscisse $p_1\,w_2 = p_2\,w_3 = p_3\,w_4 \ldots\ldots = \xi = s \cos \alpha$

Ordinate $p_2\,w_2 = p_3\,w_3 = p_4\,w_4 \ldots\ldots = \eta = s \sin \alpha$

und es liessen sich folglich die Punkte p_2, p_3, p_4 mit Hilfe dieser Coordinaten leicht abstecken. Nun ist aber die Sehne

$$s = 2r \sin \tfrac{1}{2} \alpha$$

und wenn man α in Bogenmass ausdrückt, nach der Sinusreihe

$$\sin \tfrac{1}{2} \alpha = \sin \left(\frac{l}{2r}\right) = \frac{l}{2r} - \frac{1}{6} \left(\frac{l}{2r}\right)^3 \text{ und}$$

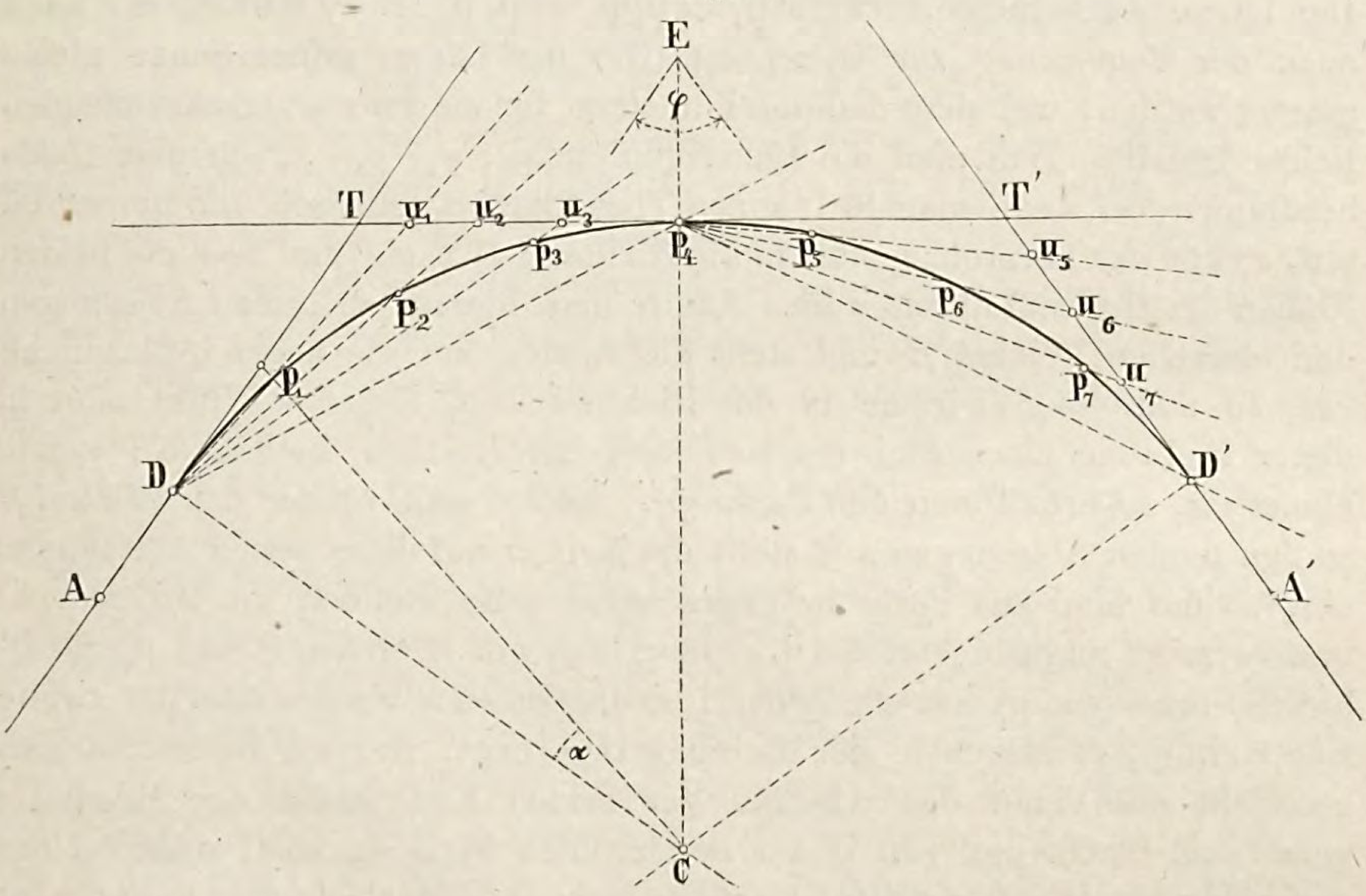
$$s = l \left(1 - \frac{1}{24} \frac{l^2}{r^2}\right) \tag{72}$$

Bedenkt man dass das Verhältniss l : r bei Strassencurven höchstens $\frac{1}{7}$, bei Eisenbahncurven höchstens $\frac{1}{20}$ und manchmal sogar $\frac{1}{100}$ beträgt, so sieht man ein dass in allen Fällen s = l gesetzt werden darf, da hierdurch die Werthe von ξ und η im ungünstigsten Falle um $\frac{1}{1000}$ zu gross werden; und unter dieser Annahme wird die

$$\text{Abscisse } \xi = s \cos \alpha = l \cos \alpha$$
$$\text{Ordinate } \eta = s \sin \alpha = l \sin \alpha \qquad (73)$$

Sind diese Coordinatenwerthe berechnet, so besteht die Absteckung bloss darin dass man auf der verlängerten Sehne D p_1 die Abscisse $\xi = p_1 w_2$ abmisst, in w_2 eine Senkrechte $w_2 p_2 = \eta$ errichtet, hierauf die Sehne $p_1 p_2$ um das Stück $p_2 w_3 = \xi$ verlängert, die Senkrechte $w_3 p_3 = \eta$ macht und so fortfährt bis man entweder im Scheitel des Bogens oder am zweiten Berührungspunkte D′ angekommen ist.

Fig. 28.



3) Abstecken von Kreisbögen durch Peripheriewinkel.

Alle Peripheriewinkel eines Kreises welche auf gleichen Bögen stehen, sind einander gleich. Dieser Satz der ebenen Geometrie liefert zwei verschiedene Methoden der Absteckung von Kreisbögen. Bei der einen (a) haben die Peripheriewinkel einen gemeinsamen Scheitel und ihre Bögen wachsen wie die natürlichen Zahlen; bei der anderen (b) stehen alle Peripheriewinkel auf einem gemeinsamen Bogen und ihre Scheitel nehmen fortwährend eine neue Lage ein.

a) Stellt die Linie D E in Fig. 28 die eine Tangente des abzusteckenden Kreisbogens D D′ und D den Berührungspunkt beider vor; denkt man sich ferner den Bogen in die gleichen Theile D p_1, $p_1 p_2$, $p_2 p_3$ u. s. w. getheilt

und die Sehnen Dp_1, Dp_2, Dp_3 ... gezogen: so erscheinen letztere als Fahrstrahlen (Radienvectoren) welche in dem Pole D mit der Axe DE beziehlich die Winkel $TDp_1 = \beta$, $TDp_2 = 2\beta$, $TDp_3 = 3\beta$ u. s. w. bilden. Kann man nun diese Winkel nacheinander an die Tangente DT antragen und die Längen Dp_1, Dp_2, Dp_3 ... der Fahrstrahlen bestimmen, so wird dadurch die Curve DD' abgesteckt.

Ist wie früher der Winkel φ und der Halbmesser r des abzusteckenden Kreises gegeben, so wird, wenn man den ganzen Bogen DD' in 2n gleiche Theile zerlegt, nach Gleichung (66) der Centriwinkel DCp_1 oder

$$\alpha = \frac{180^0 - \varphi}{2n}$$

und folglich der Winkel $TDp_1 = \frac{1}{2}\alpha$ gleich

$$\beta = \frac{180^0 - \varphi}{4n} \tag{74}$$

Die Länge jedes Bogenstücks $Dp_1 = p_1 p_2 = p_2 p_3 \ldots = 0{,}01745\, \alpha\, r$ kann nach der Bemerkung zur Gleichung (67) der Länge seiner Sehne gleich gesetzt werden, weil man dadurch nur einen für die Praxis verschwindenden Fehler begeht. Will man die Curvenpunkte p_1, p_2, p_3 ... auf dem Felde bestimmen, so stelle man in D einen Theodolithen centrisch und horizontal auf, richte das Fernrohr genau in die Richtung DT ein und lese die beiden Nonien des Horizontalkreises ab. Addirt man hierauf zu diesen Ablesungen den einfachen Winkel β und stellt die Nonien auf die neuen Ablesungen ein, so muss die Visirlinie in der Richtung Dp_1 liegen. Winkt man in dieser Richtung einen Stab ein und lässt in derselben die Länge l genau abmessen, so erhält man den Punkt p_1. Addirt man wieder den Winkel β zu den letzten Ablesungen und stellt die Nonien auf diese neuen Ablesungen ein, so hat man das Fernrohr gegen seine erste Stellung um 2β gedreht und es zeigt folglich jetzt die Richtung Dp_2 an. Um den Punkt p_2 zu erhalten, muss von p_1 aus die Länge l so abgemessen werden dass der zweite Endpunkt p_2 derselben in der Richtung Dp_2 liegt, was am besten dadurch geschieht dass man den Abstand der beiden Kettenstäbe der Messkette genau = l macht und von D aus den zweiten Stab einvisirt, während der erste in p_1 steht. Der dritte, vierte, überhaupt jeder folgende Punkt wird genau so wie p_2 bestimmt. Ist richtig gearbeitet worden, so muss man im Verfolge dieser Absteckung mit einem Punkte in dem Scheitel und einem in dem zweiten Berührungspunkte eintreffen. Da es jedoch immer mit einigen Schwierigkeiten verknüpft ist die Messkette kürzer oder länger zu machen als sie von Anfang an ist, so thut man in dem vorliegenden Falle besser den abzusteckenden Kreisbogen nicht in 2n gleiche Theile zu theilen, sondern von einem Berührungspunkte (D) aus fort und fort Bogenstücke von der Länge l welche der Kettenlänge gleich ist, wenn der Krümmungshalbmesser mindestens 150 Meter beträgt, abzuschneiden, bis man am zweiten Berührungspunkte (D') ankommt der nur zufällig mit einem der auf diesem Wege abgesteckten Punkte zusammentreffen wird, wie das

auch mit dem Scheitel der Fall ist. Selbstverständlich kann man im Voraus berechnen, wie der Scheitel und der zweite Berührungspunkt gegen die nächsten Curvenpunkte liegen müssen.

Wir wollen zu dem Ende die Kettenlänge l′ nennen; dann ist der Centriwinkel welcher einem Bogen von der Länge l′ entspricht:

$$\alpha' = 57^0{,}3 \frac{l'}{r} \tag{75}$$

und der Peripheriewinkel der zu dem Bogen l′ gehört:

$$\beta' = 28^0{,}65 \frac{l'}{r} \tag{76}$$

Da nun der ganze Kreisbogen D D′ einen Mittelpunktswinkel

$$\gamma = 180^0 - \varphi$$

hat, so erhält man seine Länge nach der Formel (67) gleich

$$L = 0{,}01745\, \gamma\, r$$

und die Anzahl der von D bis D′ abzuschneidenden Bogenstücke

$$u = \frac{\gamma}{\alpha'} = \frac{L}{l'}$$

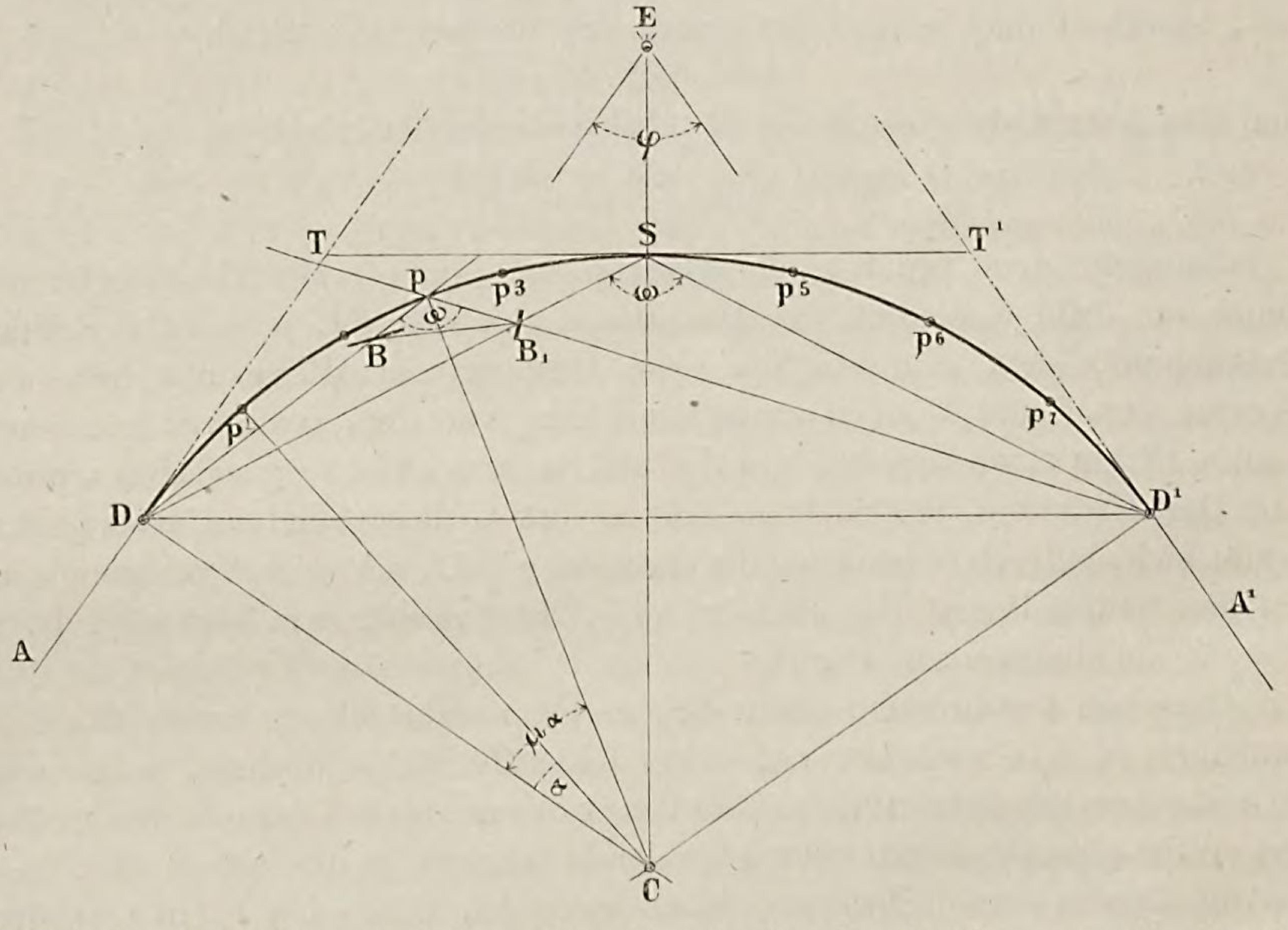
Versteht man unter ν die Ganzen und unter ε die Bruchtheile aus denen die Zahl u besteht, so dass also $u = \nu + \varepsilon$ ist, so wird der letzte Curvenpunkt den man auf die oben beschriebene Weise mit Hilfe der Werthe von l′ und β' noch abstecken kann, von dem zweiten Berührungspunkte D′ um einen Bogen $\lambda = \varepsilon\, l'$ abstehen, wenn richtig gearbeitet worden ist. Der Abstand λ' des Scheitels vom nächst vorhergehenden Curvenpunkte ergibt sich dadurch dass man die Grössen γ', L′, u′, ν', ε', λ' gerade so auf den halben Bogen $D\,p_4 = D'\,p_4$ (Fig. 28) bezieht, wie vorher γ, L, u, ν, ε, λ auf den ganzen Bogen.

Die eben beschriebene Methode der Curvenabsteckung würde ein sehr günstiges, d. i. ein ebenes und völlig freies Terrain erfordern, wenn man sie mit einem einzigen Standpunkte des Instruments (in D) ausführen wollte. Dieser Standpunkt kann aber sehr leicht verlegt und dadurch das freie Terrain dessen man bedarf, auf einen schmalen Raum beschränkt werden. Denn nimmt man an dass die Absteckung bis zu dem Punkte p_4 gediehen ist und dass schon der Punkt p_5 nicht mehr einvisirt werden kann, so lässt sich sicher das Instrument in p_4 aufstellen und nach D zurückvisiren. Dieses thut man auch, liest die Nonien ab und dreht die Alhidade um den Winkel $D\,p_4\,T = p_4\,D\,T = 4\beta$ (oder $= 4\beta'$), so dass die Visirlinie in die Richtung $p_4\,T$ kommt welche nun der neuen Tangente angehört. Schlägt man hierauf das Fernrohr durch, so kann man ausser dem Punkte T der vorhin abgesteckt wurde, auch noch einen Punkt T′ ausstecken der in der Tangente liegt, und nun die Arbeit in derselben Weise fortsetzen, wie sie in D begonnen wurde. Liesse sich das Fernrohr des Theodolithen nicht durchschlagen, so müsste man es in seinem Lager umlegen, damit die Absehlinie den noch abzusteckenden Punkten zugewendet wird. Ginge aber beides nicht an, so müsste die Alhidade genau um 180⁰ gedreht werden wodurch

die Visirlinie, wenn das Instrument und die Arbeit fehlerfrei sind, wiederum in die Richtung p_4 T′ gebracht würde. Es versteht sich übrigens von selbst dass zu den Ablesungen der Nonien welche für die Visirlinie p_4 T′ gelten, zunächst wieder nur der einfache, dann der zwei-, drei-, vier- und fünffache Winkel β zu addiren ist, sowie dass, wenn die Absteckung in dem Punkte D′ begonnen hätte und folglich von der Rechten gegen die Linke fortgeschritten wäre, die Vielfachen des Winkels β von den Ablesungen der Nonien des Horizontalkreises abzuziehen gewesen wären.

b) Sind wieder D und D′ in Fig. 29 die Berührungspunkte an den Tangenten A T und A′ T′ des abzusteckenden Kreisbogens D S D′, und ge-

Fig. 29.



stattet das Terrain von jedem der abzusteckenden Punkte aus die Berührungspunkte zu sehen, so kann man den zum Bogen D S D′ oder zur Sehne

$$D\,D' = s = 2\, r \cos \tfrac{1}{2}\varphi$$

gehörigen Peripheriewinkel ω entweder berechnen oder durch Beobachtung finden. Es ist nämlich im ersten Falle

$$D\,p\,D' = D\,S\,D' = \omega = 90^0 + \tfrac{1}{2}\varphi$$

auszurechnen und in dem zweiten Falle der Winkel der Sehne D D′ mit der Tangente A T oder A′ T′ zu messen, weil A D D′ = A′ D′ D = $\omega = 90^0 + \frac{1}{2}\varphi$ ist. Wollte man vorher nach §. 35, Gl. 59 mit Hilfe des Ausdrucks

$$E\,S = c = r \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\varphi \operatorname{tg}(45^0 - \tfrac{1}{4}\varphi)$$

den Scheitel S herstellen, so könnte man dort ebenfalls den Peripheriewinkel ω = D S D′ mit dem Spiegelsextanten oder dem Spiegelkreise messen oder mit einem anderen auf das Princip des Sextanten gegründeten Spiegel-

instrumente (z. B. einem Arcographen) einstellen um ihn dann damit an die Sehne D D′ mehrmals anzutragen. Dieses Antragen geschieht, indem man sich in der Umgebung des abzusteckenden Punkts p so aufstellt dass man mit dem auf ω eingestellten Sextanten auf den linken Schenkel p D′ visirt und sich unter Festhaltung dieser Visur so lange zum oder vom Mittelpunkte des Kreises bewegt, bis das doppelt gespiegelte Bild von D mit D′ auf dem Fadenkreuze des Sextantenfernrohrs zur Deckung gelangt ist. In diesem Augenblicke befindet sich der Schnittpunkt des auf den grossen Spiegel fallenden und des doppelt gespiegelten Strahls welcher in der Fernrohraxe liegt, im abzusteckenden Kreisbogen, und er kann durch ein Loth am Fernrohre auf den Boden hinabgesenkelt oder durch einen Absteckstab und dann durch einen Pfahl bezeichnet werden. Auf diese Weise lässt sich jeder andere Punkt $p_1\, p_2\, p_3 \ldots$ finden. Sollte die Sehne D D′ zu gross sein um die Absteckung aller Curvenpunkte auf sie zu stützen, so kann man die beiden kleineren Sehnen

$$S\,D = S\,D' = s' = 2\,r \sin\left(45^0 - \tfrac{1}{4}\varphi\right)$$

dazu benützen mit dem zugehörigen Peripheriewinkel

$$D\,p\,S = D'\,p_5\,S = \omega' = 135^0 + \tfrac{1}{4}\varphi$$

Was den vorhin erwähnten Schnittpunkt des einfallenden und des doppelt reflectirten Strahls auf der Fernrohraxe betrifft, so ist derselbe allerdings mit dem Winkel φ veränderlich; man kann ihn aber in jedem gegebenen Falle leicht berechnen und auf dem Fernrohre anmerken. Stellt nämlich in Fig. 29 der starke Strich bei B den grossen und bei B_1 den kleinen Spiegel des Sextanten und $T\,B_1$ die Fernrohraxe, sowie p den Schnitt der Strahlen D B und B_1 T vor und ist der Abstand beider Spiegel von einander $B\,B_1 = a$ und der Abstand des Punkts p vom kleinen Spiegel oder $p\,B_1 = x$, so ist in dem Dreiecke $B\,p\,B_1$ der Winkel $B\,p\,B_1 = \omega = 90^0 + \frac{1}{2}\varphi$, Winkel $p\,B_1\,B = 2\beta = 30^0$ (indem nach S. 337, Bd I Winkel $p\,B_1\,3 = 75^0$) und folglich Winkel $p\,B\,B_1 = 2\alpha = 60^0 - \frac{1}{2}\varphi$, daher sich verhält $x : a = \sin(60^0 - \frac{1}{2}\varphi) : \sin(90^0 + \frac{1}{2}\varphi)$, woraus folgt:

$$x = \frac{a}{2}\left(\sqrt{3} - \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right) = \left(0{,}866 - 0{,}5\ \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)a$$

Der kleinstmögliche Werth von x tritt ein, wenn der Lichtstrahl A B am grossen Spiegel hingleitet und den kleinen Spiegel noch trifft, d. h. bei $2\,\alpha = 0$ oder $\frac{1}{2}\varphi = 60^0$; in diesem Falle ist $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{3}$ und $x = 0$; der grösstmögliche kommt vor bei der Absteckung eines Halbkreises wo φ null und $x = 0{,}866\,a$ ist. In diesem letzteren Falle benützt man am zweckmässigsten einen Winkelspiegel oder ein dreiseitiges Winkelprisma bei welchem die Excentricität des Schnittpunktes der betreffenden Lichtstrahlen nicht in Betracht kommt. Grosse Curven für Strassen oder Eisenbahnen sind stets nur Segmentbögen und es wird für dieselben $\frac{1}{2}\varphi$ in der Regel grösser als 45^0 sein; setzt man aber $\frac{1}{2}\varphi = 45^0$, so wird $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi = 1$ und $x = 0{,}366\,a$: der Abstand x wird sich demnach zwischen 0 und 0,4 a bewegen und es kann, wenn man die Entfernung des Schnittpunkts der

Strahlen vom kleinen Spiegel im Mittel = 0,2a annimmt, kein merklicher Fehler in die Bestimmung des Curvenpunkts gelangen. Uebrigens verursacht es ja nur geringe Mühe die Grösse x für jeden abzusteckenden Kreisbogen zu berechnen und anzuwenden.

4) Vergleichung der beschriebenen Methoden des Curvenabsteckens.

Ohne Zweifel verdient bei jeder Messung diejenige Methode den Vorzug welche unter gegebenen Umständen am sichersten und einfachsten zu einer völlig genügenden Lösung der vorgelegten Aufgabe führt. Es ist daher, weil die äusseren Umstände sehr verschieden sein können, keine Methode als die absolut beste oder schlechteste zu bezeichnen, sondern es kann nur mit Bezug auf gleiche Localverhältnisse von besseren oder schlechteren Methoden die Rede sein.

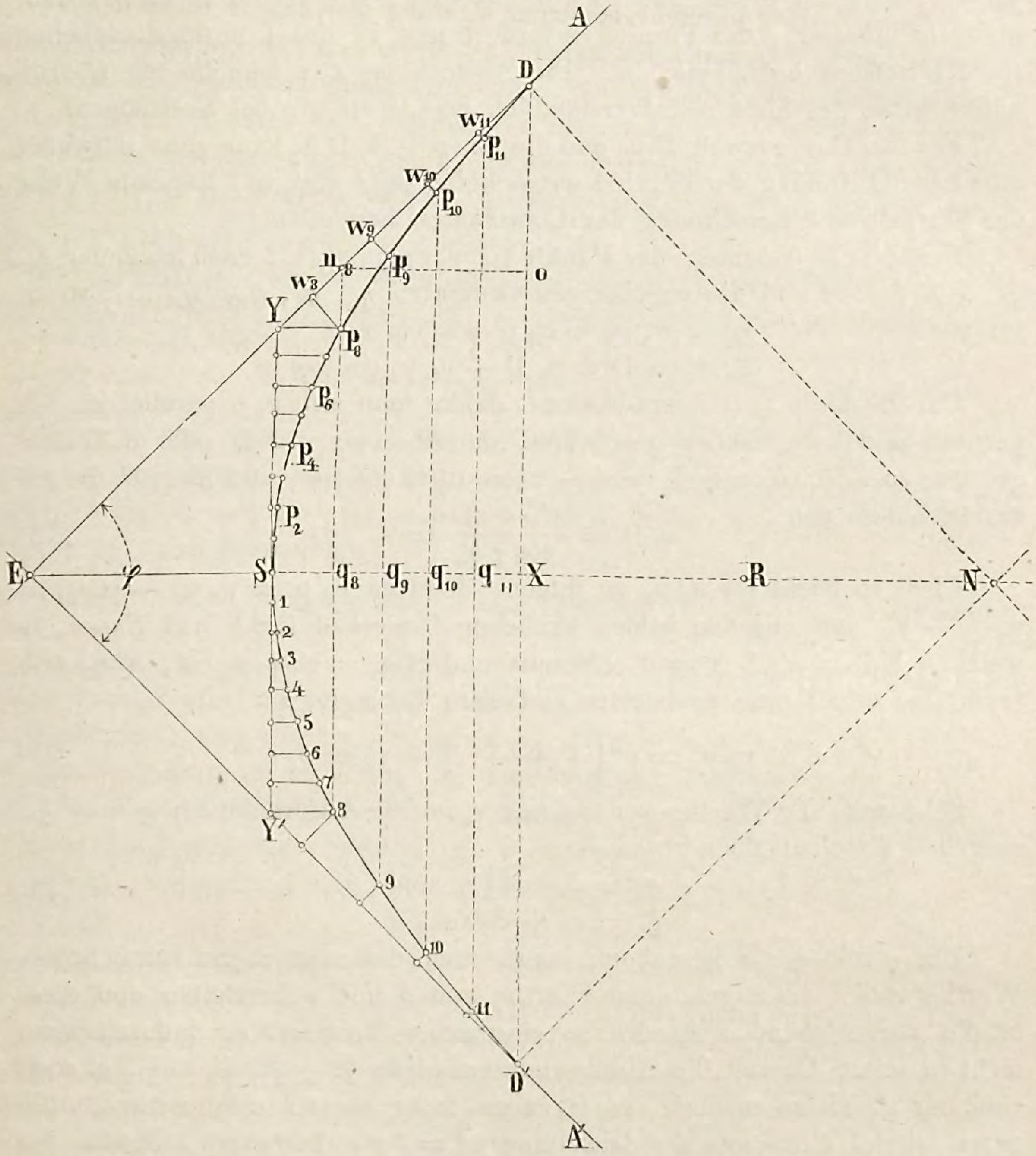
Ist das Terrain fest und nicht sehr durchschnitten, so verdienen die Coordinaten-Methoden entschieden den Vorzug vor jeder anderen Methode, und zwar desshalb, weil die Absteckung eines jeden Curvenpunkts unabhängig von der eines anderen geschieht und daher der Fehler in einem Punkte sich nicht auf alle folgenden Punkte überträgt. Diese Unabhängigkeit der Curvenpunkte von einander kommt bei keiner anderen Methode vor. Denn bei der Einrückungsmethode a) hängen die Punkte p_3 und p_4, obwohl sie durch Coordinaten abgesteckt werden, doch von dem Punkte p_2 ab, weil durch diesen die Tangente gelegt wird auf die sich die Absteckung von p_3 und p_4 gründet; und was von p_3 und p_4 in Bezug auf p_2 gilt, lässt sich auch von p_5 und p_6 in Bezug auf p_4, von p_7 und p_8 in Bezug auf p_6 u. s. w. sagen. Bei der Einrückungsmethode b) springt die Abhängigkeit jedes folgenden Punkts von dem vorhergehenden von selbst in die Augen, und auch bei der auf Polarcoordinaten gegründeten Methode Nr 3, Seite 65 erkennt man diese Abhängigkeit leicht, da jeder folgende Punkt von dem vorhergehenden aus abgeschnitten wird.

Wenn eine Curve entweder auf einem hohen Damme, oder in einem tiefen Einschnitte, oder in einem stark abfallenden, oder von vielen Bäumen, Häusern und dergleichen besetzten Terrain abzustecken ist, so verursacht das Abmessen der Coordinaten nach Nr 1, a und b nicht bloss sehr viele Mühe sondern auch eine Unsicherheit wegen der schiefen Flächen auf denen horizontale Entfernungen zu bestimmen sind. In solchen Fällen ist es daher besser sich einer Einrückmethode oder des in Nr 3 beschriebenen Verfahrens zu bedienen. Namentlich ist das letztere zu empfehlen das sich, wenn man ein gutes Winkelmessinstrument besitzt, nicht nur leicht sondern auch mit hinreichender Genauigkeit, selbst unter schwierigen Terrainverhältnissen, ausführen lässt.

§. 37. Aufgabe. Es sind die beiden Tangenten und Berührungspunkte einer Parabel von bekanntem Parameter gegeben: man soll den zwischen jenen Punkten liegenden Parabelbogen ausstecken.

Es wird in allen Fällen genügen wenn man die vorliegende Aufgabe mit Hilfe eines rechtwinkligen Coordinatensystems löst und dabei folgende Axen annimmt: für die Bogenstücke zu beiden Seiten des Scheitels die Ordinatenaxe Y Y′ und für die Curvenzweige an den Berührungspunkten die beiden Tangenten D E und D′ E der Parabel. Sind in Fig. 30 die Be-

Fig. 30.



rührungspunkte D, D′, der Scheitel S und die Axenschnittpunkte Y, Y′ nach §. 34 und 35 bestimmt, so handelt es sich zunächst um die Berechnung der Coordinaten der Bogenstücke S p_8 und S 8 welche mit Hilfe der Axe Y Y′ abgesteckt werden sollen. Da aber beide Bögen einander gleich sind, so wird fortan nur von einer Hälfte der abzusteckenden Parabel die Rede sein.

Für den Bogen $S p_8$ und die Axen S X, S Y ist die Gleichung der Parabel $y^2 = 2 r x$, woraus man für irgend einen Punkt p die Abscisse

$$x = \frac{y^2}{2r} \tag{77}$$

erhält. Die Ordinaten $y_1, y_2, y_3 \dots y_8$ der Punkte $p_1, p_2, p_3 \dots p_8$ werden so angenommen dass ihre Unterschiede $y_1 - y_0, y_2 - y_1, y_3 - y_2 \dots y_8 - y_7$ einander gleich und so gross werden, wie es der kleinste Krümmungshalbmesser r der Parabel erfordert und in den Coordinatentabellen für Kreisbögen angedeutet ist. Die Absteckung der berechneten Coordinatenwerthe geschieht selbstverständlich gerade so wie bei Kreisbögen.

Für den Curvenzweig $D p_8$ und die Axen D E, D N kann man entweder eine neue Gleichung der Parabel entwickeln, oder aber auf folgende Weise die Formeln zur Berechnung der Coordinaten herstellen.

Heissen die Abscissen der Punkte $p_8, p_9, p_{10}, p_{11} \dots$ nach einander $\xi_8, \xi_9, \xi_{10}, \xi_{11} \dots$ und die zugehörigen Ordinaten $\eta_8, \eta_9, \eta_{10}, \eta_{11} \dots$, so ist für p_8:

$$\eta_8 = w_8 p_8 = n_8 p_8 \cos \tfrac{1}{2} \varphi \text{ und}$$
$$\xi_8 = w_8 D = n_8 D + n_8 p_8 \sin \tfrac{1}{2} \varphi$$

Um die Linie $n_8 D$ auszudrücken, denke man sich $n_8 o$ parallel zu S X gezogen und, wie früher geschehen, die Abscisse von D oder $S X = c'$ gesetzt, so ist $n_8 o = q_8 X = c' - x_8 = n_8 D \cos \frac{1}{2} \varphi$, und hieraus die gesuchte Länge von

$$n_8 D = \frac{c' - x_8}{\cos \frac{1}{2} \varphi} = \varepsilon_8 \tag{78}$$

Eben so leicht ist $n_8 p_8$ zu finden; denn da $n_8 p_8 = n_8 q_8 - p_8 q_8 = n_8 q_8 - y_8$ und aus den beiden ähnlichen Dreiecken E S Y und $E q_8 n_8$ in welchen $E S = c'$, $S Y = d'$ bekannt und $E q_8 = c' + x_8$ ist, $n_8 q_8$ sich ergibt, so erhält man nach einer einfachen Rechnung:

$$n_8 p_8 = d' \left(1 + \frac{x_8}{c'}\right) - y_8 = \delta_8 \tag{79}$$

Setzt man die Werthe von δ_8 und ε_8 in die Ausdrücke für η_8 und ξ_8, so gehen dieselben über in

$$\left.\begin{aligned} \eta_8 &= \delta_8 \cos \tfrac{1}{2} \varphi \text{ und} \\ \xi_8 &= \varepsilon_8 + \delta_8 \sin \tfrac{1}{2} \varphi \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

Um η und ξ zu berechnen, wird man demnach zuerst für beliebige Werthe von x die zugehörigen Werthe von δ und ε herstellen und diese in die voranstehenden Ausdrücke einsetzen. Man hat es dadurch zwar nicht in seiner Gewalt die Abscissenunterschiede $\xi_8 - \xi_9$, $\xi_9 - \xi_{10}$ u. s. w. einander gleich zu machen, es ist aber dafür um so leichter die Coordinaten irgend eines aus der Gleichung $y^2 = 2 r x$ bestimmten Punkts der Parabel für die Axen D E und D N anzugeben.

Beträgt z. B. der kleinste Krümmungshalbmesser r am Scheitel einer Parabel 96 m und der Winkel φ der beiden Tangenten D E und D' E $124^0 28'$, so sind zur Absteckung dieser Curve deren Gleichung

$$y^2 = (2 \,.\, 96)\, x = 192\, x$$

ist, folgende Längen zu berechnen:

a) Die Entfernung der Berührungspunkte D und D' von E nach (57):

$$a' = \frac{r \cot \frac{1}{2}\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi} = \frac{96 \cot 62^0\, 14'}{\sin 62^0\, 14'} = 57{,}12\,\text{m}$$

b) der Abstand des Scheitels S vom Punkte E nach Gleichung (61):

$$c' = \tfrac{1}{2}\, r \cot^2 \tfrac{1}{2}\varphi = 13{,}306\,\text{m}$$

c) das Axenstück S Y = S Y' nach Gleichung (63):

$$d' = c \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi = 25{,}272\,\text{m}$$

d) die Coordinaten für die Punkte 1 bis 8 in Bezug auf die Axen S X, S Y nach Gl (77), wobei man y von 5 zu 5 Meter wachsen lassen kann, und

e) die Coordinaten der Punkte 8 bis 11 in Bezug auf die Axen D Y, D N nach den Gleichungen (78) und (79), wobei die Coordinaten des Punktes 8 zur Probe doppelt ausgedrückt sind.

Soll schliesslich noch der Krümmungshalbmesser R der Parabel in dem Berührungspunkte D bestimmt werden, so dient dazu die bekannte Gleichung

$$R = \frac{n^3}{(\frac{1}{2}\, p)^2} = \frac{n^3}{r^2} \tag{81}$$

in welcher n die Normale D N des Berührungspunkts und r den halben Parameter bezeichnet. Drückt man die Normale durch die Subnormale (welche constant und $= \frac{1}{2}\, p = r$ ist) und den Winkel $\frac{1}{2}\varphi$ aus, so wird $n \sin \frac{1}{2}\varphi = r$ und demzufolge

$$R = \frac{r}{\sin^3 \frac{1}{2}\varphi} = 138{,}57\,\text{m} \tag{82}$$

Man kann die Formeln welche zur Berechnung der Coordinaten ξ, η dienen, auch so einrichten dass sie von den Coordinatenwerthen x, y unabhängig werden, was die in Gleichung 80 dargestellten Ausdrücke nicht sind: Zu dem Ende ist es nöthig die Gleichung der Parabel für die rechtwinkligen Axen D E, D N zu entwickeln und daraus die zu gegebenen Werthen von ξ gehörigen Werthe von η zu suchen. (Fig. 31, S. 74.)

Es sei die Gleichung der Parabel für die Axen S X und S Y:

$$y^2 = 2\, r\, x$$

und für irgend einen Punkt des Parabelbogens S D die Abscisse S q = x und die Ordinate p q = y. Will man diese Gleichung auf die der S X und S Y parallelen rechtwinkligen Coordinatenaxen D X' und D X beziehen, so hat man nach den Lehren der analytischen Geometrie, wenn für die neuen Axen die Abscisse des Punkts $p = D\, n = x_1$ und die Ordinate $p\, n = y_1$, ferner c' die Abscisse und h die Ordinate der neuen Axenecke D in Bezug auf die alten Axen ist, zu setzen:

$$x = c' - x_1 \text{ und } y = h - y_1$$

Durch diese Substitution und mit Rücksicht darauf dass $h^2 = 2\, r\, c'$ ist, erhält man für die Axen D X' und D X die Parabelgleichung

$$x' = -\frac{1}{2r}\, y_1{}^2 + \frac{h}{r}\, y_1 \tag{83}$$

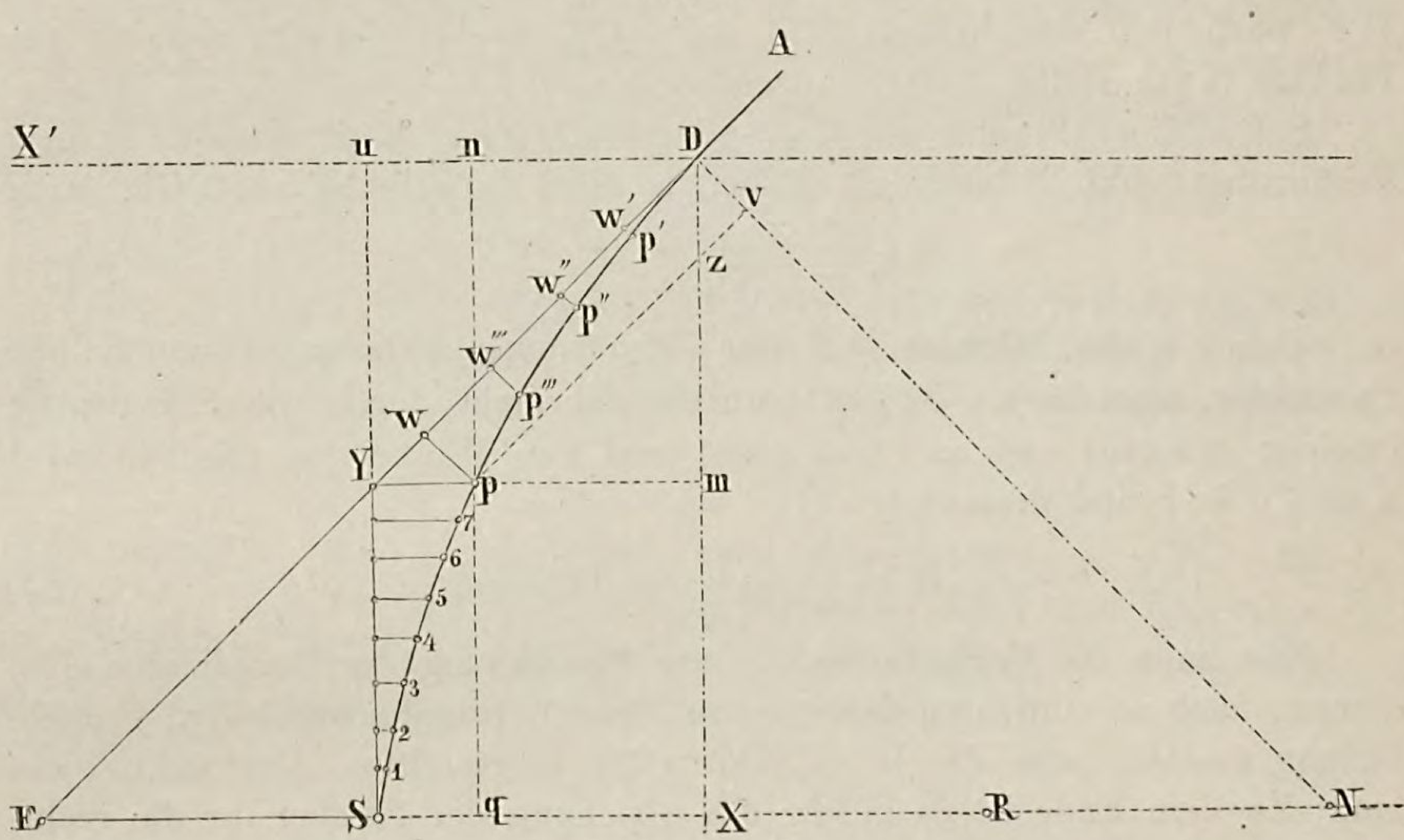
Soll diese Gleichung auf die rechtwinkligen Axen D E und D N welche mit den zweiten zwar den Anfang gemein haben, aber einen Winkel $X' D E = \frac{1}{2} \varphi$ bilden, übergetragen werden, so ist, wenn die Abscisse $D w = \xi$ und die Ordinate $w p = \eta$ gesetzt wird:

$$x' = \xi \cos \tfrac{1}{2} \varphi - \eta \sin \tfrac{1}{2} \varphi$$
$$y' = \xi \sin \tfrac{1}{2} \varphi + \eta \cos \tfrac{1}{2} \varphi$$

zu nehmen, und η oder ξ aus der Gleichung (80) zu entwickeln. Thut man diess, so wird, nach Vornahme der möglichen Vereinfachungen und wenn man $\sin \frac{1}{2} \varphi = s$ und $\cos \frac{1}{2} \varphi = c$ setzt:

$$c^2 s \,.\, \eta = r - c s^2 \xi \pm \sqrt{r (r - 2 c s^2 \xi)}$$

Fig. 31.



Da für $\xi = 0$ auch $\eta = 0$ sein muss, so folgt daraus dass für unseren Zweck nur das untere Vorzeichen der Wurzel passt. Setzt man noch

$$\frac{r}{s c^2} = u, \quad \frac{2 c s^2}{r} = v \quad \text{und} \quad \frac{s}{c} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = t$$

so geht die vorstehende Gleichung über in

$$\eta = u (1 - \sqrt{1 - v \xi}) - t \xi \qquad (84)$$

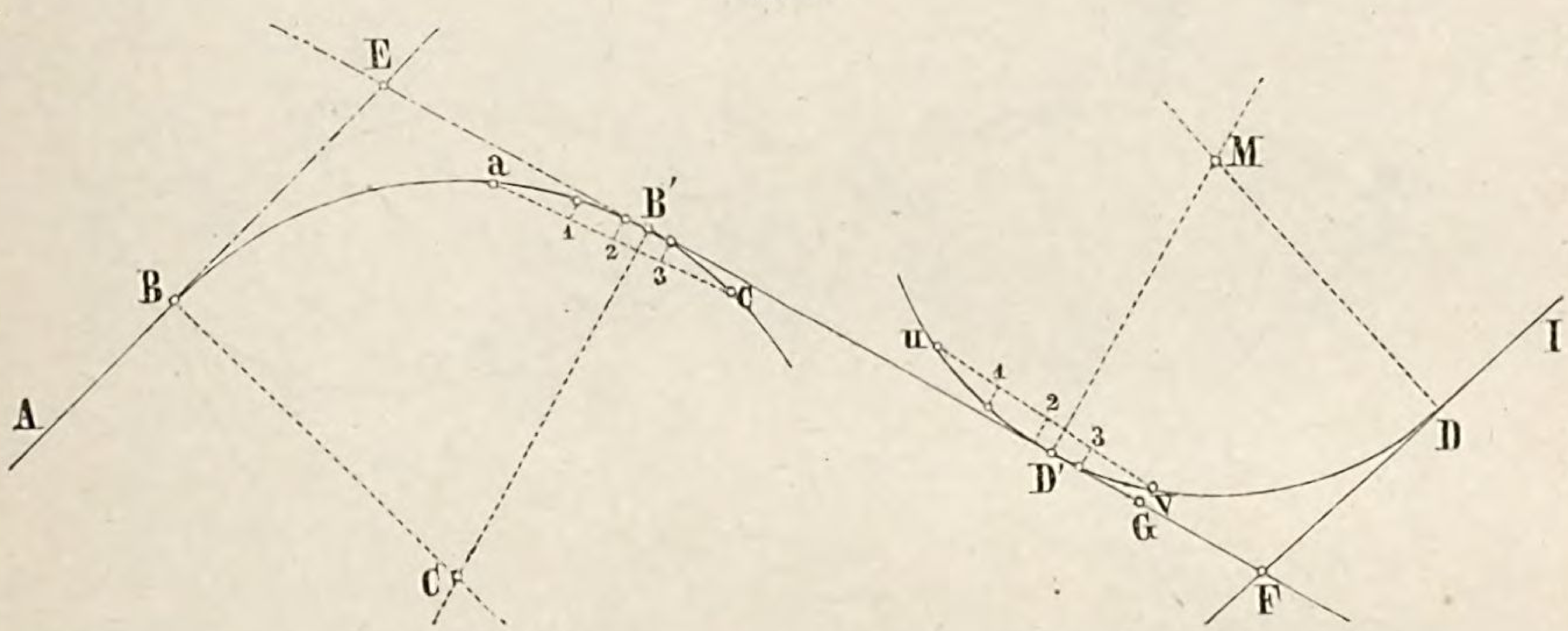
woraus man zu jeder Abscisse ξ die zugehörige Ordinate η findet.

§. 38. **Aufgabe.** Es sind auf dem Felde zwei Kreisbögen von bekannten Halbmessern abgesteckt: man soll die gemeinschaftliche Tangente derselben bestimmen.

Diese Aufgabe kann auf verschiedene Weisen gelöst werden, und es ist die Verschiedenheit der Lösungen theils durch das Terrain, theils durch die Hilfsmittel der Messung, theils durch den Grad der Genauigkeit den man erreichen will, bedingt.

1) Liegen die abgesteckten Bögen, oder wenigstens deren Theile welche die gesuchten Berührungspunkte enthalten, auf ziemlich ebenem Boden, so reicht nach unseren Erfahrungen das folgende durch seine Unmittelbarkeit und Kürze sich empfehlende Verfahren völlig aus. Man mache nämlich wie in Fig. 32, an denjenigen Stellen der abgesteckten Bögen welche die Berührungspunkte muthmasslich enthalten werden, alle Curvenpunkte durch Absteckstäbe sichtbar; stelle sich hierauf an einer der gegebenen Curven D D′ in einem Punkte auf der sicher ausserhalb der gesuchten Tangente B′ D′ liegt, und bewege sich daselbst so lange seitwärts bis man in eine Linie kommt welche durch die als äusserste erscheinenden zwei Pfähle der beiden Bögen bestimmt wird. Diese Linie ist entweder schon die gesuchte Tangente, oder weicht doch in keinem Falle viel davon ab. Um sich Gewissheit zu verschaffen, ob man die richtige Linie getroffen habe, oder ob die gefundene noch zu verbessern sei, stecke man jetzt in den beiden Kreisbögen zu beiden Seiten der vorläufig erhaltenen Berührungspunkte noch

Fig. 32.



einige nahe aneinander gelegene Curvenpunkte ab und wiederhole mit diesen neuen Punkten das oben beschriebene Verfahren, (dabei kann diejenige im Anhange mitgetheilte und erklärte Hilfstabelle zur Absteckung von Kreisbögen benützt werden worin die Ordinaten in Bezug auf die Sehne als Abscissenaxe berechnet sind). Die äussersten Stäbe in beiden Curvenästen bezeichnen jetzt mit hinreichender Genauigkeit die gesuchte Tangente B′ D′.

Will man eine andere Prüfung dieser Absteckung vornehmen, so verlängere man die gefundene Linie B′ D′, bis sie die gegebenen Tangenten A B, I D in den Punkten E und F schneidet, messe alsdann die Längen B E, D F und sehe zu, ob B′ E = B E und D′ F = D F ist. Finden kleine Unterschiede in diesen Längen statt, so ist es wohl erlaubt dieselben durch Verrückung der Berührungspunkte B′, D′ auszugleichen, vorausgesetzt dass man vorher die Linie B′ D′ mit aller Sorgfalt abgesteckt hat.

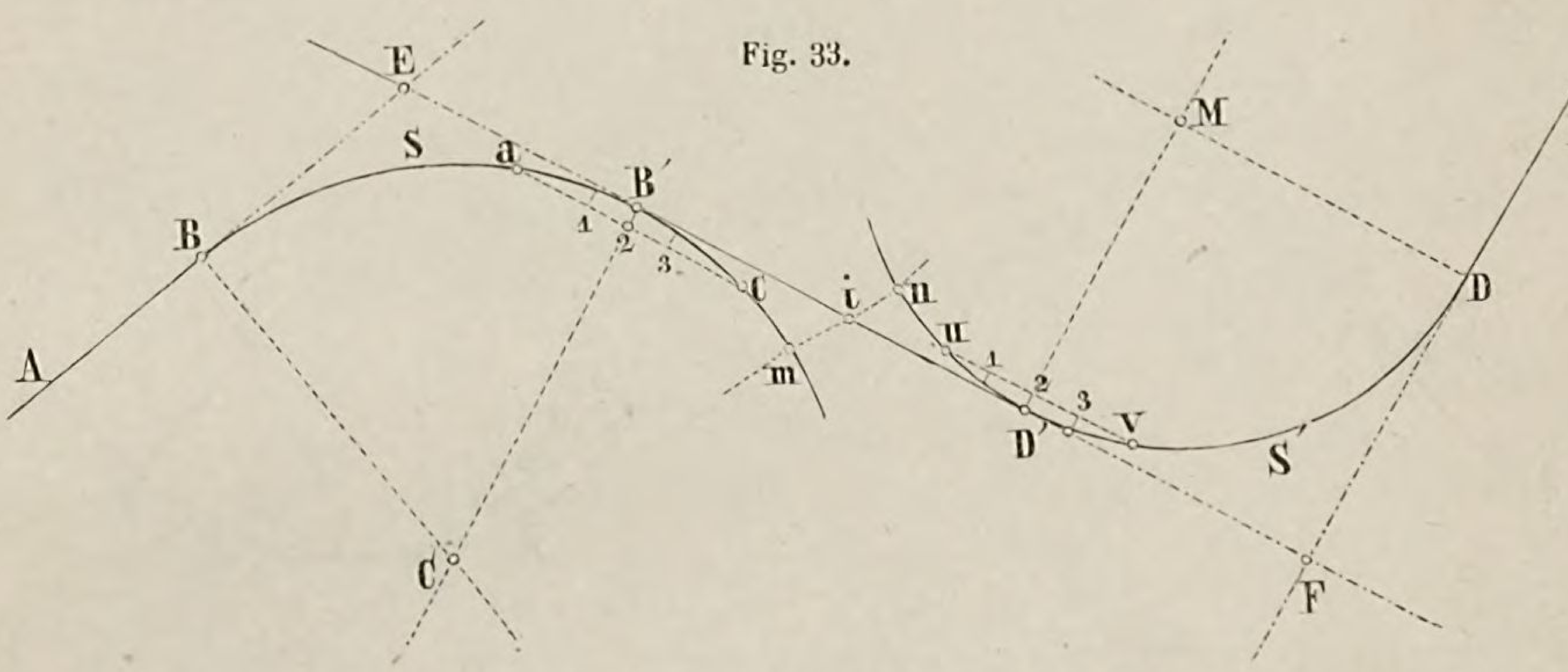
2) Liegen die abgesteckten Bogenstücke welche durch eine gemeinschaftliche Tangente verbunden werden sollen, so getrennt dass man beide

zugleich nicht übersehen kann, so kann man sich mit Vortheil des Prismenkreuzes bedienen, um die gesuchte Berührungslinie herzustellen.

Nehmen wir an zwischen den Bogenstücken B′ S und D′ S′ (Fig. 33) liege ein Hügel der sich in der Richtung C M erstreckt, so kann man auf demselben eine Stelle m aussuchen welche gestattet die bei B′ und D′ wie vorhin aufgestellten Stäbe zu überschauen. Geht man nun mit dem Prismenkreuze gegen n hin vorwärts, bis man an einen Punkt i gelangt in welchem sich die Bilder der äussersten Stäbe in den beiden Gläsern des Prismenkreuzes decken, so ist i ein Punkt der gesuchten Tangente, vorausgesetzt dass B′ und D′ wirklich die äussersten Punkte der Bögen S B′ und S′ D′ sind.

Ob diese Voraussetzung gegründet ist, erfährt man dadurch dass man ilnks und rechts von B′ und D′ mehrere nahe an einander liegende Curvenpunkte aussteckt, sich abermals in i mit dem Prismenkreuze aufstellt und zusieht, ob dort wieder dieselben zwei Stäbe wie vorhin als die äussersten erscheinen. Sind es zwei andere, so geben diese mit dem neuen Stand-

Fig. 33.



punkte der sehr nahe an i liegen wird, die gesuchte Tangente. Verlängert man dieselbe bis an die beiden anderen schon gegebenen Tangenten A B und I D, so kann man sich wie in Nr 1 von dem Grade der Genauigkeit womit die Tangente E F gefunden wurde überzeugen und nöthigenfalls noch eine kleine Verbesserung in der Lage der Berührungspunkte und des Punkts bei i eintreten lassen.

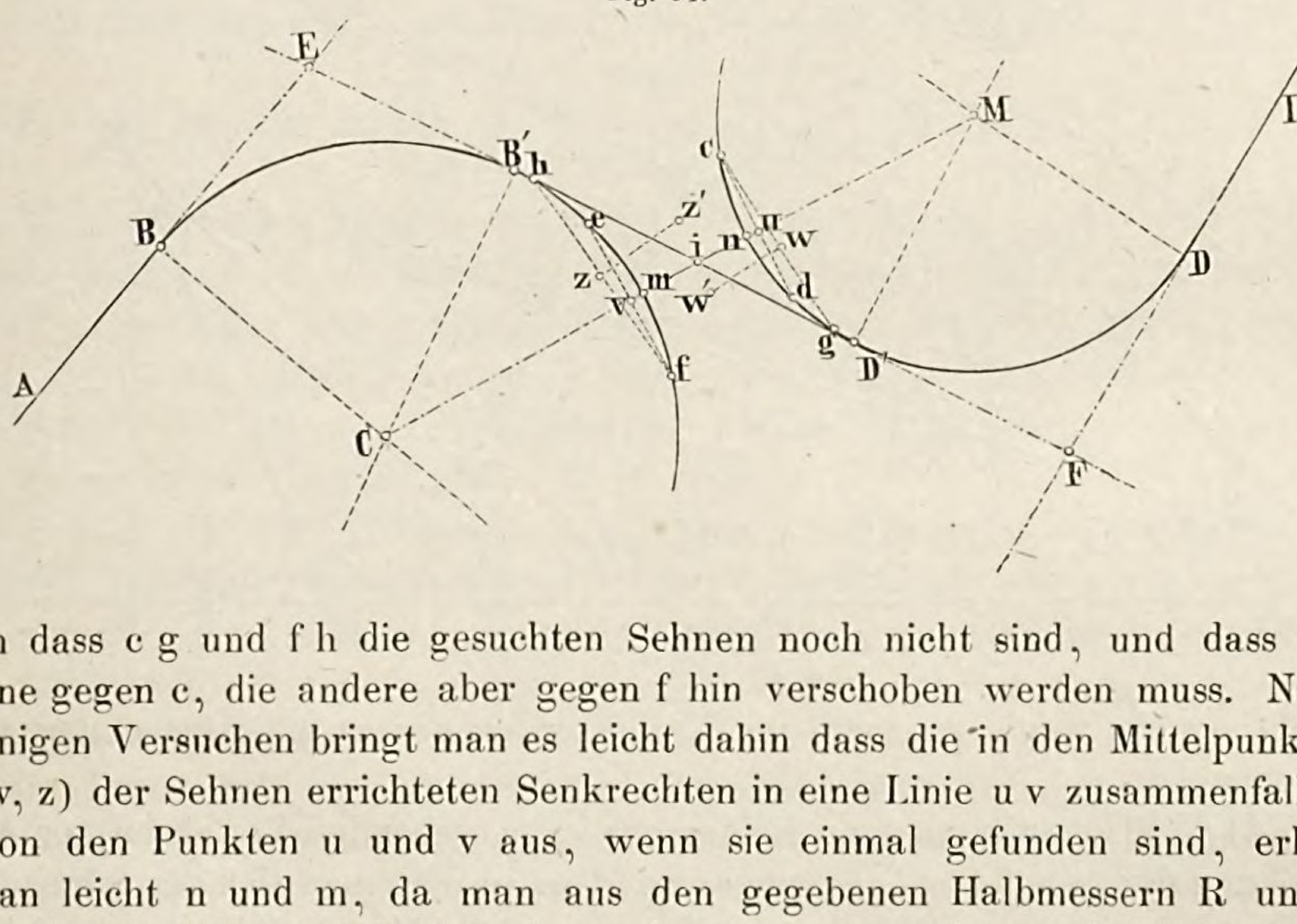
3) Ein von dem vorigen verschiedenes Verfahren das wir ebenfalls oft und mit Erfolg angewendet haben, gründet sich auf folgende Betrachtung über die Lage der gemeinschaftlichen Tangente zweier Kreisbögen.

Stellt in Fig. 34 die Linie C M die Centrale der beiden Kreisbögen und B′ D′ die gesuchte Tangente vor, so schneiden sich beide in einem Punkte i der zwischen den die kürzeste Entfernung der beiden Bögen von einander bezeichnenden Punkten m und n liegt. Könnte man sich die Linie m n verschaffen, so wäre es leicht den Punkt i abzustecken, da sich seine Entfernung von m oder n leicht berechnen lässt. Hätte man aber i, so dürfte man von dort aus nur eine Gerade i B′ nach dem äussersten Punkte

B′ des Bogens B B′ und eine zweite Gerade i D′ nach dem äussersten Punkte D′ des Bogens D D′ ziehen um die verlangte Tangente zu erhalten. Die Controle der Absteckung wäre dadurch gegeben dass man die Länge i B′ und i D′ aus bekannten Daten berechnete und zusähe ob diese berechneten Entfernungen mit den wirklichen übereinstimmen oder nicht.

Die Richtung der Centralen lässt sich auf dem Felde nicht aus den Mittelpunkten C und M bestimmen, da diese gar nie abgesteckt werden; aber das Stück m n welches nöthig ist, kann man entweder dadurch finden dass man die Bogenlängen D n und B m berechnet und abmisst, oder wenn dieses zu umständlich oder wegen der Terrainverhältnisse zu schwierig sein sollte, dadurch dass man sich an der Stelle wo die Punkte m und n muthmasslich liegen, zwei parallele Sehnen c d, e f aufsucht, deren Mittelpunkte u, v einer Linie angehören welche zu beiden senkrecht steht. Diese Sehnen findet man leicht. Denn angenommen, man habe erst c g ⋕ h f gemacht und c g in w, h f in z halbirt, so zeigen die Senkrechten w w′, z z′

Fig. 34.



an dass c g und f h die gesuchten Sehnen noch nicht sind, und dass die eine gegen c, die andere aber gegen f hin verschoben werden muss. Nach einigen Versuchen bringt man es leicht dahin dass die in den Mittelpunkten (w, z) der Sehnen errichteten Senkrechten in eine Linie u v zusammenfallen. Von den Punkten u und v aus, wenn sie einmal gefunden sind, erhält man leicht n und m, da man aus den gegebenen Halbmessern R und r der Kreise D D′ und B B′ und aus der gemessenen Länge der Sehnen c d und e f leicht u n und v m berechnen kann. Da es nunmehr keine Schwierigkeit hat die Linie m n aufzufinden, so brauchen wir nur das Stück m i = q derselben zu berechnen um den Punkt i abstecken zu können. Es ist aber, wenn man die Secante C i mit p und die ihrer Länge nach bekannte Centrale C M mit c bezeichnet, wegen der Aehnlichkeit der beiden rechtwinkligen Dreiecke C i B′ und M i D′ und wegen der Gleichheit m i = = C i — C m:

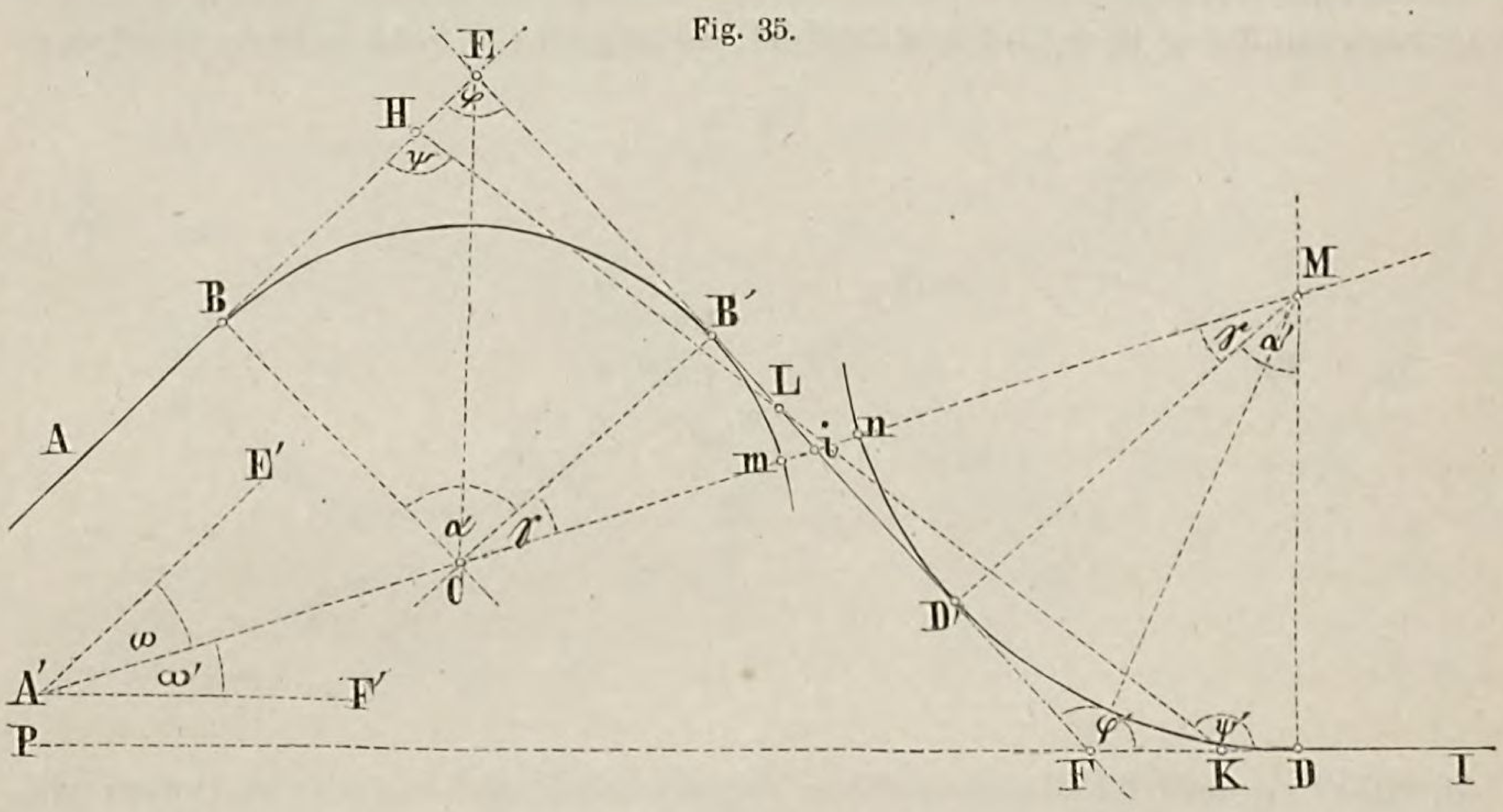
$$p = \frac{c\,r}{R + r} \text{ und } q = p - r$$

Setzt man ferner die Länge der Tangente B′ D′ = t und das durch $\sqrt{p^2 - r^2}$ gegebene Stück i B′ derselben gleich l, so findet man aus den vorhin genannten ähnlichen Dreiecken

$$t = \frac{l\, r}{R + r}$$

Treffen die von i aus gemessenen Längen l und t — l mit den durch Visiren gefundenen Punkten B′ und D′ zusammen, so kann man überzeugt sein dass die abgesteckte Tangente die richtige ist; im anderen Falle werden diese Punkte ein wenig verrückt und zwar so dass sie gleichzeitig die von i aus gemessenen Entfernungen l und t — l darstellen und in den zugehörigen Kreisbögen liegen. Es wird hierbei selten oder gar nie vorkommen dass diese neuen Punkte merklich ausserhalb der vorhin abgesteckten Tangentenrichtung liegen; sollte es aber der Fall sein, so ändert sich hierdurch diese

Fig. 35.



Richtung ein wenig ab, was als Verbesserung der ersten Absteckung anzusehen ist.

4) Will oder kann man keines der vorhergehenden Verfahren zur Absteckung der gesuchten Tangente anwenden, so mag man sich des folgenden bedienen das, wenn es in Folge der Terrainverhältnisse ausführbar ist, sicher zum gewünschten Ziele führt.

Es seien wieder dieselben Stücke gegeben welche wir bisher als bekannt angesehen haben, nämlich die Halbmesser R und r, die Länge der Centralen c und deren Neigungswinkel ω und ω' gegen die gegebenen Tangenten A B und I D. Denkt man sich, wie in Fig. 35, die gesuchte Tangente B′ D′ gezogen und bis an die gegebenen Tangenten verlängert, so ist der Schnittpunkt E von den Berührungspunkten B und B′, der Schnittpunkt F aber von den Berührungspunkten D und D′ gleich weit entfernt. Kann man nun die Winkel φ und φ' bestimmen, so lässt sich erstens

E B' = E B und F D' = F D berechnen, zweitens der Punkt E von B aus und F von D aus abmessen, drittens an B E der Winkel φ und an D F der Winkel φ' antragen, und endlich viertens durch Abmessung der Länge E B' der Punkt B', so wie durch Abmessung von D' F der Punkt D' bestimmen, womit die Aufgabe gelöst ist. Um den Winkel φ zu finden, bedenke man dass aus dem Vierecke B E B' C

$$\varphi = 180^0 - \alpha$$

und aus dem rechtwinkligen Dreiecke A B C

$$\alpha = 90^0 + \omega - \gamma$$

folgt. Da sich der Winkel γ aus dem Dreiecke C i B' durch die Gleichung

$$\cos \gamma = \frac{r}{p} = \frac{R + r}{c}$$

ergibt, so erhält man den gesuchten Winkel

$$\varphi = 90^0 + \gamma - \omega$$

und in gleicher Weise findet man den Winkel

$$\varphi' = 90^0 + \gamma - \omega'$$

es ist desshalb für den einen Bogen die Länge der Tangente

$$B\,E = B'\,E = r \cot \tfrac{1}{2} \varphi$$

und für den zweiten Bogen die Tangente

$$D\,F = D'\,F = R \cot \tfrac{1}{2} \varphi'$$

Misst man diese Längen von B und D aus auf den zugehörigen Tangentenrichtungen ab, so erhält man die Schnittpunkte E und F; stellt man dann daselbst einen Theodolithen auf und macht damit den Winkel B E B' = φ, sowie den Winkel D F D' = φ', so müssen die beiden Winkelschenkel E L und F L in eine Gerade zusammenfallen welche die gesuchte Tangente ist und deren Berührungspunkte B' und D' erhalten werden wenn man E B' = = E B und F D' = F D macht. Die Messung ist genügend geprüft wenn man sich von dem Zusammenfallen der in E und F abgesteckten Richtungen E L und F L, sowie davon überzeugt hat dass die wirkliche Entfernung der Punkte B', D' mit dem aus der Gleichung $t = (R + r) \operatorname{tg} \gamma$ berechneten Abstande B' D' = t übereinstimmt.

5) Legen sich der Ausführung des eben beschriebenen Verfahrens Schwierigkeiten in den Weg, indem etwa die Schnittpunkte E und F unzugänglich sind, oder indem von ihnen nach B' und D' hin keine Linie abgemessen werden kann, so stecke man die gesuchte Tangente dadurch ab dass man zuerst eine beliebige die beiden gegebenen Tangenten in H und K schneidende Gerade herstellt; zweitens von diesen Schnittpunkten aus die Winkel ψ und ψ' welche die Gerade H K mit den Tangenten A B und I D bildet, sowie die Längen H B = e und K D = e' genau misst; drittens wie in der vorigen Nummer die Entfernungen B E = $r \cot \frac{1}{2} \varphi$ und D F = $R \cot \frac{1}{2} \varphi'$ bestimmt; viertens die Abstände

$$H\,E = B\,E - B\,H = r \cot \tfrac{1}{2} \varphi - e = i$$
$$K\,F = D\,F - D\,K = R \cot \tfrac{1}{2} \varphi' - e' = i'$$

und aus den Dreiecken H L E und K L F die Seiten

$$H\,L = f = \frac{i \sin \varphi}{\sin(\psi - \varphi)} \text{ und } K\,L = f' = \frac{i' \sin \varphi'}{\sin(\psi' - \varphi')}$$

berechnet; fünftens von H oder K aus den Punkt L durch directe Längenmessung bestimmt; und endlich dortselbst den Winkel $\delta = \psi - \varphi$ sowohl an L H als L K anträgt. Hierdurch ist die Richtung der Tangente E F gegeben und es wird die Lage derselben sofort dadurch geprüft dass man sich überzeugt ob sie die äussersten Punkte B′ und D′ der beiden Kreisbögen B B′ und D D′ berührt oder nicht. Sollten die beiden Kreise von der Linie E L F geschnitten oder beide gar nicht getroffen werden, der hierdurch sich kundgebende Messungsfehler aber nur gering sein: so darf man nur den Winkel δ etwas grösser oder kleiner annehmen um die gesuchte Richtung genauer zu erhalten.

Will man sich von der richtigen Lage der so erhaltenen Berührungspunkte weiter überzeugen, so berechne man ihre Abstände von L, messe dieselben auf der Geraden E F von dem Scheitelpunkte L aus ab und sehe zu ob die eingemessenen Endpunkte B′ und D′ mit den durch Visiren erhaltenen zusammentreffen oder nicht. Die Entfernungen L B′ und L D′ welche man hierzu bedarf, findet man leicht, denn es ist

$$E\,L = \frac{f \sin \psi}{\sin \varphi}, \quad F\,L = \frac{f' \sin \psi'}{\sin \varphi'}$$

und folglich nach der Figur

$$L\,B' = E\,L - E\,B' = \frac{f \sin \psi}{\sin \varphi} - (e + i)$$

$$L\,D' = F\,L - F\,D' = \frac{f' \sin \psi'}{\sin \varphi'} - (e' + i')$$

Wir haben die vorstehenden Fälle nur für Kreisbögen durchgeführt; es leuchtet aber ein dass sich die hier mitgetheilten Methoden, mit Ausnahme der dritten, auch auf Parabeln anwenden lassen wenn man nur die vorkommenden Rechnungen entsprechend abändert.

§. 39. Aufgabe. Zwei unter einem bekannten Winkel φ sich schneidende gerade Richtungen A B, B C durch zwei Kreisbögen A D, D C so zu verbinden dass sie sich innerlich in einem noch unbestimmten Punkte D und die Geraden in gegebenen Punkten A, C berühren. (Fig. 36.)

Diese Aufgabe würde unendlich viele Lösungen zulassen wenn nicht einer der Halbmesser gegeben wäre. Nimmt man aber A O = r als gegeben an, so kann es sich nur mehr darum handeln, C M = r_1 und A E = E D = t, C F = F D = t_1 zu berechnen, um auf den eben genannten Tangenten die verlangten Kreisbögen von A, D und C, D aus mittels Coordinaten abzustecken. Verlängert man nun den Halbmesser A O bis N und bezeichnet in dem Dreiecke M N O die Winkel bei M, N, O mit μ, φ, ω und die gegenüberliegenden Seiten mit m, n, o; zieht man ferner A H senkrecht und N I parallel zu B C, und setzt die bekannten

Abstände A B = a, B C = b und die unbekannte Seite C N = p, so finden folgende zwei Gleichungen statt:

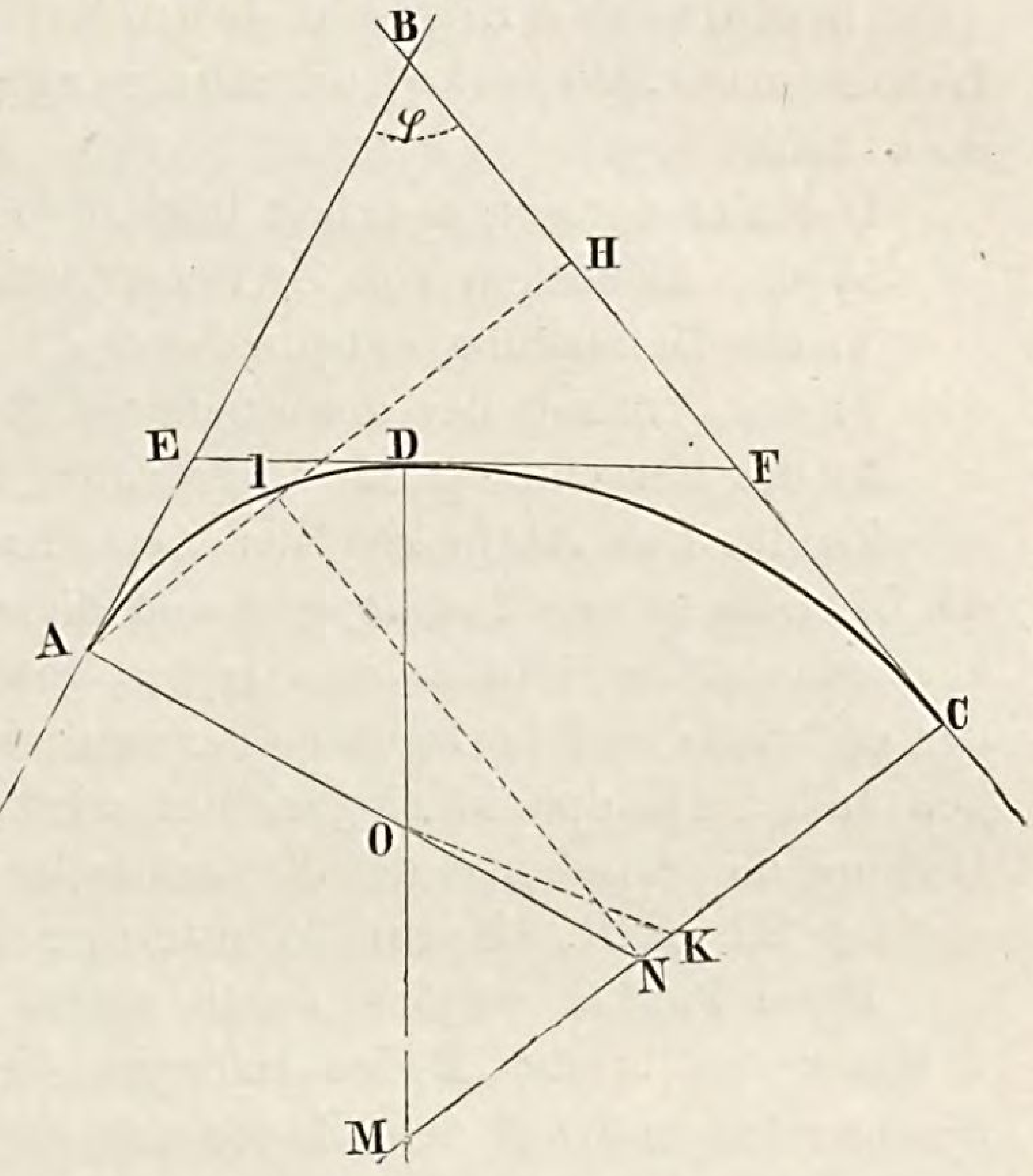
$$a \cos \varphi + (r + m) \sin \varphi = b$$
$$a \sin \varphi - (r + m) \cos \varphi = p$$

von denen die erste sofort m, die zweite p liefert. Es ist somit in dem Dreiecke M O N, da M O = M D — O D = $r_1 - r$ und M N = $r_1 - p$:

$$(r_1 - r)^2 = m^2 + (r_1 - p)^2 - 2m (r_1 - p) \cos \varphi$$

woraus sich der gesuchte Halbmesser r_1 ergibt.

Fig. 36.



Mit dem Werthe von r_1 findet man den Winkel μ aus der Proportion: $\sin \mu : \sin \varphi = m : n = m : (r_1 - r)$ und den Winkel ω aus der Gleichung: $\omega = 180^0 - (\varphi + \mu)$; mit diesen Winkeln berechnet man $t = r \operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega$ und $t_1 = r_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \mu$ womit die Aufgabe gelöst ist. Wäre dieselbe bloss durch Zeichnung zu lösen gewesen, so würde man C K = A O = r und Winkel K O M = O K M gemacht und M O bis an den Kreis A D verlängert haben, wodurch sich der Berührungspunkt D und der Halbmesser r_1 = M D = M C ergeben hätte, während die Tangentenabschnitte A E = E D und C F = F D einfach durch Construction einer in dem Punkte D auf den beiden Halbmessern M D, O D senkrecht stehenden Geraden E F erhalten worden wären.

4. Das Ausmessen gerader und krummer Linien.

Das Ausmessen oder die Bestimmung der Länge einer beliebigen Linie kann entweder mittelbar oder unmittelbar geschehen: mittelbar durch Anwendung der im vierten Abschnitte der ersten Abtheilung beschriebenen Längenmesser, und unmittelbar durch geeignete Messoperationen welche auf Grund gemessener Linien und Winkel die gesuchte Länge durch Zeichnung oder Rechnung liefern. Die Ausführung der unmittelbaren Messungen mit Messstäben, Messlatten, Ketten und Distanzmessern ist bereits bei der Erklärung des Gebrauchs dieser Instrumente so weit erörtert worden, als es nöthig ist, sich in allen vorkommenden Fällen helfen zu können, wesshalb dieser Abtheilung der Längenmessungen nur noch beigefügt zu werden braucht in praktischer Beziehung: wie man mit Messstangen die

Länge einer für das Dreiecknetz einer grösseren Landesvermessung bestimmten Grundlinie misst, und in theoretischer Hinsicht: wie man die unmittelbaren Längenmessungen mit Messstangen, Messlatten, Ketten und Bändern auszugleichen und nach ihrer Genauigkeit zu beurtheilen hat. Dafür müssen die mittelbaren Ausmessungen gerader und krummer Linien, weil von ihnen noch keine Rede war, hier ausführlich erörtert werden.

§. 40. Aufgabe. Die beiden Endpunkte einer sehr langen und über festes ebenes Terrain führenden geraden Linie sind durch steinerne Signale dauerhaft bezeichnet: man soll diese Linie mit Messstangen ausmessen und auf den Horizont reduciren.

Die hier verlangte Arbeit fordert folgende Verrichtungen:

1) das Abstecken von Zwischenpunkten der gegebenen Geraden;

2) die Herstellung entsprechender Unterlagen der Messstangen;

3) den Vollzug der unmittelbaren Messung der Linie, und

4) die Berechnung der wagrechten Länge dieser Linie.

Zu 1. Das Abstecken der Zwischenpunkte welches zum Zwecke hat die Unterlagen der Messstangen und diese selbst genau in die Richtung der auszumessenden Geraden zu bringen, geschieht mit Hilfe eines Theodolithen der centrisch und horizontal über dem einen Endpunkte aufgestellt und aui den anderen Endpunkt eingerichtet wird. Bewegt sich in Folge dieser Aufstellung die Absehlinie des Fernrohrs in der gegebenen Geraden, so ist es nach §. 29 leicht, einzelne Punkte derselben anzugeben.

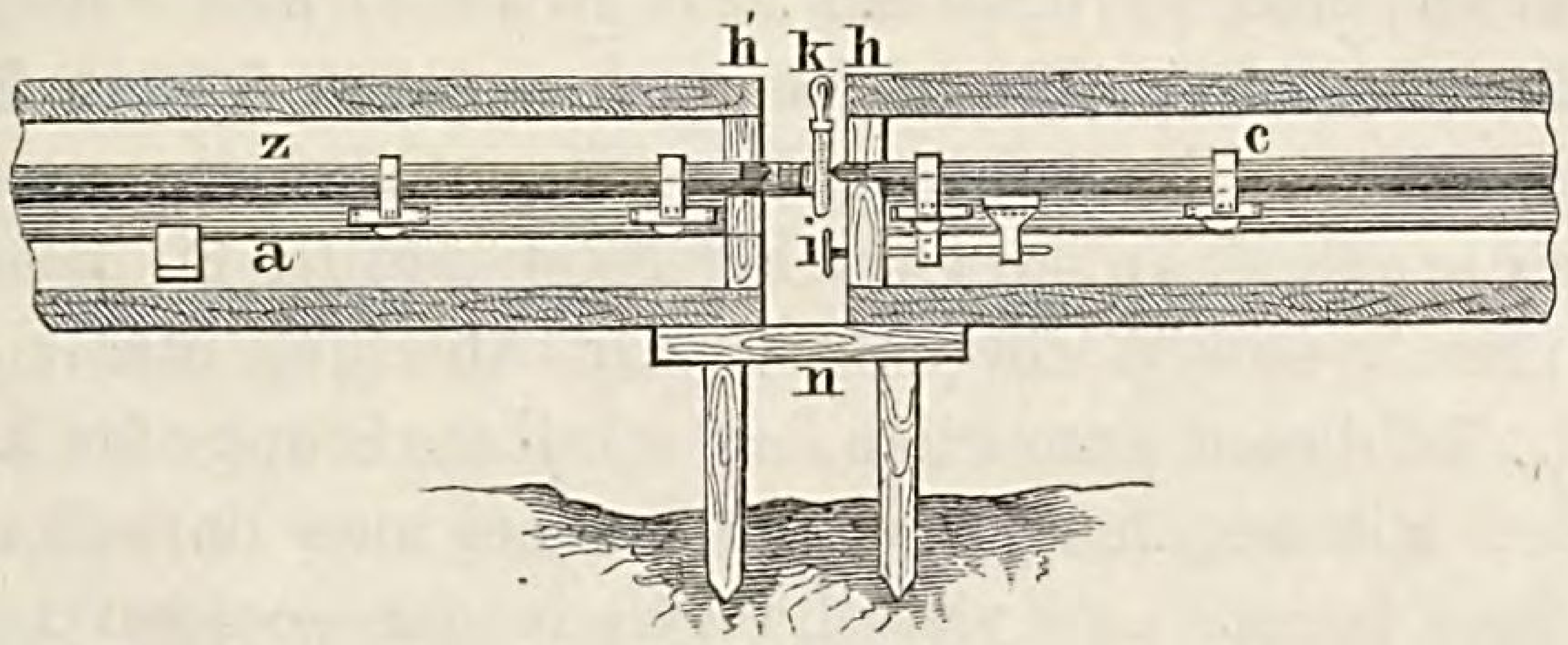
Diese Punkte werden durch starke Pfähle bezeichnet die man etwa 1 Meter tief in den Boden schlagen, in entsprechender Höhe horizontal abschneiden und auf dem Kopfe mit Nägeln versehen lässt welche genau in der Visirebene des Fernrohrs stehen. Man stellt diese Pfähle nicht zu weit auseinander damit leicht von einem zum anderen eine die Mittellinie der Unterlagen und Messstangen bezeichnende Schnur gezogen werden kann. Da es auf langen Strecken schwer ist die Signale in die Absehlinie einzuwinken, so kann man sich die Arbeit des Absteckens der Zwischenpunkte erleichtern wenn man erst einige Hauptpunkte der ganzen Linie bestimmt und von diesen aus die Zwischenpunkte einrichtet.

Um die Aufstellung des Theodolithen auf den Hauptpunkten jederzeit schnell und sicher vornehmen zu können, ist es gut drei Pfähle um dieselben im gleichseitigen Dreieck schlagen, horizontal abschneiden und mit Löchern versehen zu lassen für die Fussspitzen des Stativs; denn hierdurch kommt sofort die Alhidadenaxe des Theodolithen in die gegebene Gerade und wird jeder Verrückung des Instruments vorgebeugt.

Zu 2. Die Unterlagen der Messstangen sind entweder fortlaufende Stege von starken Brettern die an den Enden und in der Mitte unterstützt werden, oder besondere mit Gewichten beschwerte drei- oder vierbeinige Gestelle die mit einer ebenen Fläche auf dem zugerichteten Boden ruhen, oder es sind vierbeinige Schragen die man mit ihren Füssen in den Boden

drückt und auf deren Rücken die Messstangen liegen, oder endlich es sind kleine Böcke (Fig. 37) die aus zwei etwa 10 cm starken und 1 m tief in den Boden gerammten Pfählen und einem Brettstücke n bestehen das horizontal darauf genagelt ist. Damit die Messstangen deren hölzerne Kisten h, h' auf die in der Figur angedeutete Weise über die Böcke zu liegen kommen, eine nahezu wagrechte Lage erhalten, müssen die Böcke n, n einnivellirt werden. Hat das Terrain eine Steigung gegen den Hori-

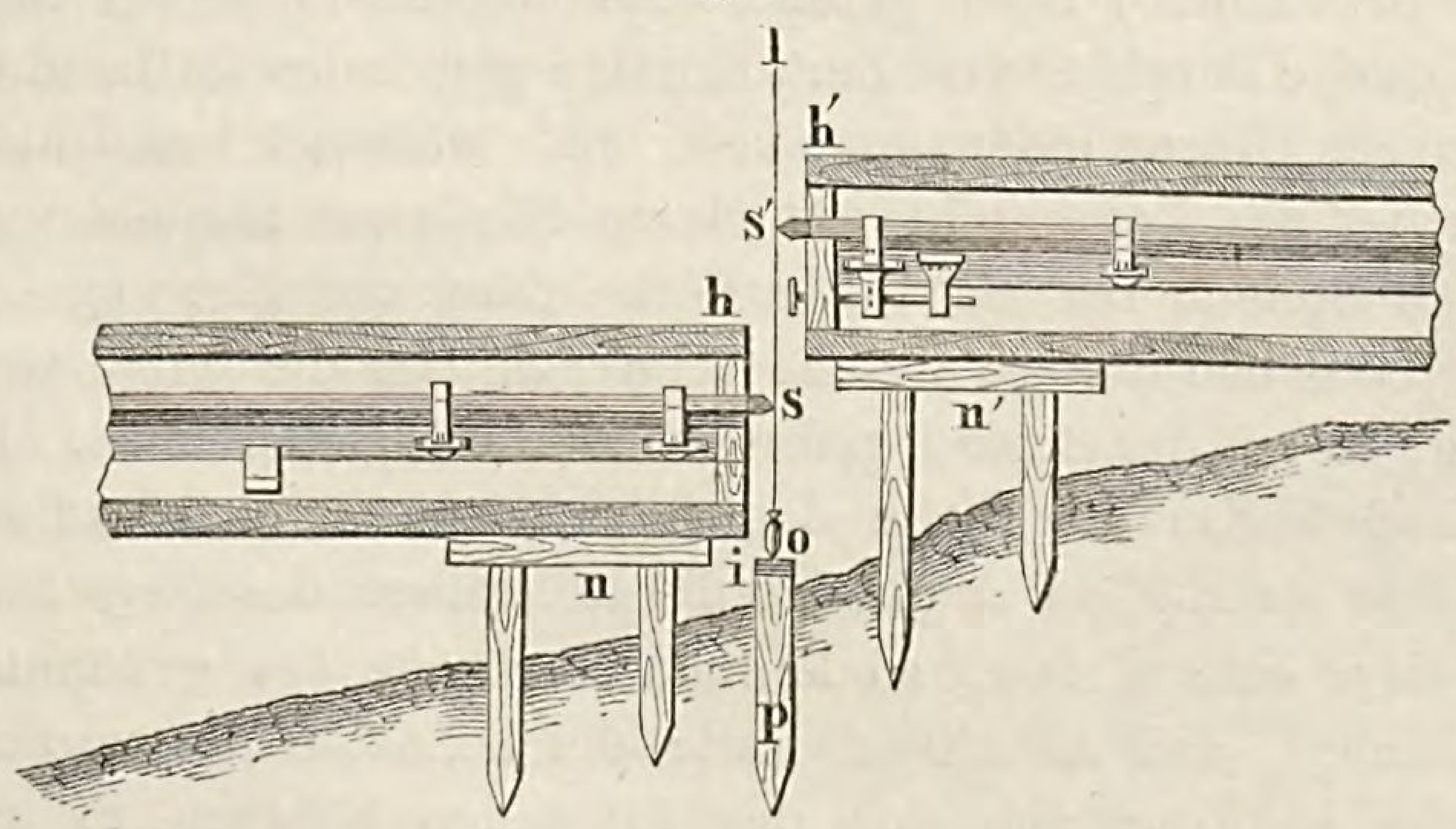
Fig. 37.



zont welche die Herstellung einer einzigen Horizontalebene zwischen den gegebenen Endpunkten nicht gestattet, so dürfen die Böcke in mehreren Horizontalebenen liegen, wenn nur die Abstufungen so angebracht sind dass man durch einen feinen Senkel den Endpunkt des vorhergehenden Massstabs zum Anfange des folgenden machen kann, wie in Fig. 38. Die Höhenlage der Ebene des ersten und letzten Stegs bestimmt sich durch die Höhe der Endpunkte der auszumessenden Linie, wobei darauf zu sehen ist dass die Kanten der Messstangen leicht in die Lothlinien dieser Punkte eingestellt werden können.

Zu 3. Nach diesen Vorbereitungen geschieht die Messung der Linie mit 4 Stangen von der Bessel'schen Construction in folgender Weise. Die

Fig. 38.



Messstange Nr 1 wird durch einen Senkel mit ihrer wagrechten Schneide genau auf den Anfangspunkt A eingestellt, und entweder mit Hilfe des auf einem der in Nr 1 genannten Hauptpunkte stehenden Theodolithen oder

BIBLIOTHECA

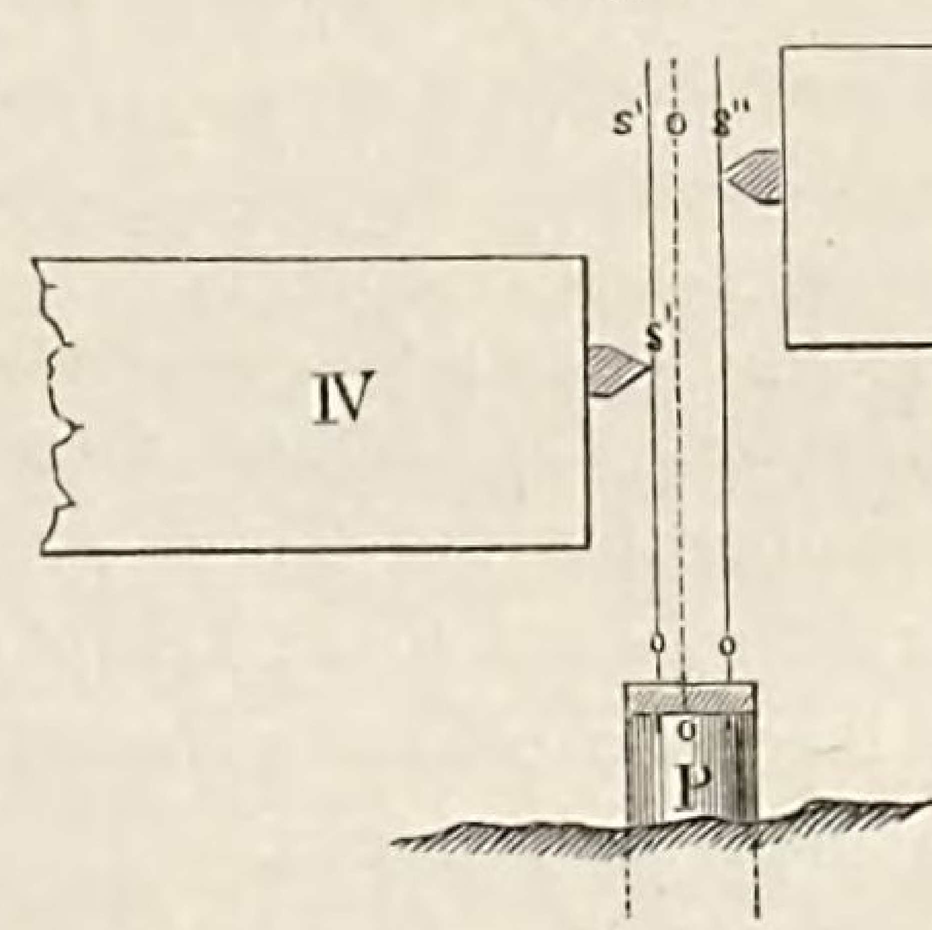
nach den auf den Böcken sichtbaren Abschnürungen in die gerade Linie A B gerichtet. Hierauf legt man die Stange Nr 2 hinter Nr 1 so dass der Raum zwischen den sich gegenüberstehenden wagrechten und lothrechten Schneiden durch den geometrischen Keil gemessen werden kann, und richtet sie wie die erste und alle folgenden genau in die auszumessende gerade Linie ein. Sind alle vier Stangen aufgelegt, so schiebt man die Keile der Messstangen nnd Metallthermometer ein, stellt die Libellen wagrecht und liest an Nr 1 ab: erstens die Angabe der Stellschraube an der Libelle, zweitens den Keil am Metallthermometer, und drittens den Keil zwischen den Stangen Nr 1 und Nr 2. Sind dieselben drei Ablesungen auch an der Stange Nr 2 und am Keile zwischen Nr 2 und Nr 3 gemacht, so nimmt man die erste Stange weg und legt sie so an Nr 4 an, wie vorher Nr 4 und Nr 3. Hierauf folgt die Ablesung an Nr 3 mit Wiederholung der Ablesung des Keils zwischen Nr 2 und Nr 3. Ist dieses geschehen, so wird die Stange Nr 2 versetzt und so fortgefahren, wie angefangen wurde, wobei man darauf sieht dass zur Zeit der Ablesung immer alle vier Stangen in der geraden Linie liegen.

Muss die Messung der Linie in Folge der Tageszeit oder aus anderen Ursachen unterbrochen werden, so hat man den Endpunkt des abgemessenen Stücks mit aller Sorgfalt und so zu versichern dass sich an ihm die weitere Messung leicht wieder anknüpfen lässt. Dieses geschieht dadurch dass man mit Latten mehrere Messstangenlagen voraus abmisst, an dem so bestimmten Ruhepunkte einen starken Pfahl von Eichenholz fest in die Erde rammt und denselben der Bodenfläche gleich und wagrecht abschneidet. Auf diesem Pfahle wird eine Vorrichtung festgeschraubt welche gestattet eine mit einem kleinen Punkte o versehene Metallplatte nach zwei sich senkrecht schneidenden Richtungen zu verschieben und nach erlangter richtiger Lage festzustellen. Diese Lage ist vorhanden, wenn der Punkt o der Platte in das (aus einem ganz dünnen Silberdrahte und einem genau abgedrehten Metallkegel bestehende) Loth gebracht ist welches von der Schneide der letzten Messstange herabhängt. Zum Schutze gegen den Luftzug wird dieses Loth mit einem Glascylinder umgeben, und während der Unterbrechung der Messung ist der Ruhepunkt mit einem hölzernen Kästchen und dieses mit Erde und Steinen bedeckt. Die Fortsetzung der Messung beginnt mit Einrichtung derselben Stange welche beim Schlusse die letzte war, in ihre frühere Lage, wobei der Senkel genau wieder einspielen muss. Es ist klar dass auf diese Weise die Dicke des Silberfadens keinen Einfluss auf die Länge der Linie ausübt, so lange sich die Höhenlage des Stegs nicht ändert. Wird aber diese eine andere, so kommt die Dicke des genannten Fadens mit in Rechnung, weil in diesem Falle die Schneide des vorhergehenden unteren Stabs von der Schneide des folgenden höheren in horizontaler Richtung um die Dicke des Drahtes absteht. (Fig. 38.)

Die Länge der zu messenden Linie wird nie oder doch nur ganz zufällig so beschaffen sein dass das Ende der letzten Messstange genau auf den zweiten Endpunkt B der Linie trifft; es wird desshalb auch die letzte

Stange um mehr oder weniger von diesem Punkte abstehen, und dieser Abstand ist alsdann noch auszumitteln. Dazu dient entweder ein Pariser Fuss, wenn die Messstangen Vielfache der Toise sind, oder ein aliquoter Theil des Meters, wenn die Messstangen danach abgeglichen wurden, oder auch irgend ein genauer Massstab welcher sich zwischen dem Endpunkte B der zu messenden Linie und der letzten Messstange auf einer horizontalen Ebene und in der vorgeschriebenen Richtung mit Hilfe von Metallplatten in der Weise abschieben lässt, wie dieses in der ersten Abtheilung beschrieben ist. Der nach dem Abschieben noch verbleibende Rest wird durch leicht zu erfindende Mittel auf einem feingetheilten Massstabe gemessen. Die Absenkelung am Schlusse einer Tagesarbeit und die Messung des Restes der Basis durch besondere kleine Massstäbe, wie sie eben beschrieben wurden, sind immer missliche Operationen: die eine wegen der Schwierigkeit bei Fortsetzung der Basismessung am folgenden Tage die erste Messstange so weit vorzuschieben dass der Senkel s (Fig. 39) genau auf den am vorhergehenden Tage festgelegten Punkt o trifft; die andere wegen der Kosten feingetheilter kurzer Massstäbe und der Sorgfalt welche das Abschieben derselben erfordert. Es dürfte desshalb folgendes bei der im August und September 1872 von den Professoren Bruhns, Nagel und Helmert durchgeführten Messung der Sächsischen Basis bei Grossenhain angewendete Verfahren wodurch beide Schwierigkeiten umgangen werden, zu empfehlen sein. Man misst nämlich die Basis vorher ziemlich genau mit hölzernen Latten oder Ketten und legt die Endpunkte und selbst mehrere Zwischenpunkte durch Steine so fest dass die ganze Länge und die Abtheilungen für sich nahezu Vielfache der Messstangen sind. Durch zweckmässige Regulirung der Abstände der einzelnen Messstangen welche durch Keile gemessen werden, bringt man es immer dahin dass der Senkel s′ (Fig. 39) mit welchem eine Tagesarbeit geschlossen wird, nahe an den vorausbezeichneten Punkt o kommt, und ebenso kann man bei Fortsetzung der Arbeit durch Verschiebung der Messstange Nr 1 den Senkel s″ nahe an o bringen. Die Abstände s′ o = a′ und s″ o = a″ ergeben sich aber mit grosser Genauigkeit dadurch dass man seitwärts der Basis in einer genau abgemessenen und zur Basis senkrechten Entfernung b (etwa 5m) die Horizontalwinkel s′ b o = φ' und s″ b o = φ'' mit einem Theodolithen möglichst genau misst und aus diesen Daten a′ = b φ' sin 1″ und a″ = b φ'' sin 1″ berechnet. (Wer sich für weitere Einzelnheiten über Basismessungen interessirt, mag Professor Schwerd's Abhandlung „Die kleine Speyerer Basis“ Speyer 1822, oder Bessel's und Baeyer's „Gradmessung in Ostpreussen“ Berlin 1838,

Fig. 39.



oder endlich des Verfassers Beschreibung der Messung der drei Bayerischen Grundlinien in dem Werke „Die Bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage“ München 1873, nachlesen.)

Zu 4. Die Reduction der Messung der Linie auf den Horizont erfordert a) dass alle Messstangenlängen für eine und dieselbe Temperatur, nämlich die Normaltemperatur des Urmasses ausgedrückt werden; b) dass aus den Angaben der Libellenschrauben die Neigungswinkel der Stangen gegen den Horizont bestimmt werden; c) dass die Länge (Reductionsgrösse) berechnet wird welche von jeder Stangenlänge abzuziehen ist; und d) dass alle reducirten Längen mit dem durch besondere Massstäbe gemessenen horizontalen Endstücke, so wie mit den Fadendicken des Senkels und mit den zwischen den Messstangen eingeschobenen Keildicken in einer Tabelle zusammengestellt werden.

Zu a) Die Bessel'schen Messstangen sind so abgeglichen dass, wenn man in den Ausdrücken für ihre Längen welche in der ersten Abtheilnug enthalten sind, und wonach

$$\begin{aligned} \text{Stange Nr } 1 &= 1728{,}8152 - 0{,}54033\, a_1 \\ \text{„ Nr } 2 &= 1729{,}5153 - 0{,}55976\, a_2 \\ \text{„ Nr } 3 &= 1729{,}0454 - 0{,}57575\, a_3 \\ \text{„ Nr } 4 &= 1729{,}0909 - 0{,}58103\, a_4 \end{aligned}$$

ist, statt a_1, a_2, a_3, a_4 die beobachteten Keildicken am Metallthermometer in Linien einsetzt, die Längen dieser Stangen ebenfalls in Linien und für die Normaltemperatur der Toise erhalten werden. Wir können somit die Länge jeder Stange für diese Temperatur als bekannt ansehen, da wir alle Grössen zu ihrer Berechnung haben. Ist diese Länge = l, so ist nur zu zeigen, wie man sie reducirt.

b) Nennt man die Angabe der Stellschraube m an der Libelle für die horizontale Lage der Messstange h, und weiss man durch Versuche dass einer ganzen Umdrehung der Schraube der Neigungswinkel φ entspricht, so wird, da alle hier vorkommenden Winkel sehr klein sind, einer anderen Angabe u der Schraube ein Neigungswinkel

$$\psi = (u - h)\,\varphi \tag{85}$$

entsprechen. Ob dieser Winkel ein Höhen- oder Tiefenwinkel ist, hat auf die Reduction keinen Einfluss und desshalb braucht auch sein Vorzeichen nicht beachtet zu werden.

c) Ist die Stange l unter dem Winkel ψ gegen den Horizont geneigt, so beträgt die Länge ihrer Horizontalprojection $l \cos \psi$ und folglich ist die Reductionsgrösse

$$v = l - l \cos \psi = 2\, l \sin^2 \tfrac{1}{2} \psi = \tfrac{1}{2}\, l \sin^2 \psi \tag{86}$$

wenn man wegen Kleinheit des Winkels $\sin^2 \frac{1}{2} \psi = \frac{1}{4} \sin^2 \psi$ setzt.
Will man den Winkel ψ nicht erst besonders rechnen, so lässt er sich dadurch in den Ausdruck für v bringen dass man den Winkel φ durch die Erhebung e ausdrückt um welche ein Stangenende über das andere

käme, wenn die Messstange der Schraube m folgte und diese eine ganze Umdrehung machte. Unter dieser Annahme ist

$$\sin\varphi = \frac{e}{l} \text{ und } \varphi = \frac{e}{l \sin 1''}$$

und mit Rücksicht auf Gl. (85) genau genug

$$\sin\psi = \psi \sin 1'' = (u - h) \frac{e}{l}$$

folglich nach Einführung dieses Werths in Gl. (86)

$$v = \frac{e^2}{2l}(u - h)^2 \tag{87}$$

An den Bessel'schen Messstangen war die Grösse e für die Stange Nr 1 = 7,7505 Linien, für Nr 2 = 7,598 Linien, für Nr 3 = 7,768 Linien und für Nr 4 = 7,957 Linien. Setzt man für l den mittleren Werth welcher sich aus allen beobachteten Keildicken (a) am Metallthermometer ergibt, so ist für die Berechnung der Reductionsgrösse der Quotient $e^2 : 2l$ für jede Stange eine constante Grösse c und daher auch

$$\log v = \log c + 2 \log (u - h) \tag{88}$$

d) Wie die Endergebnisse der Rechnung zusammenzustellen sind, bedarf keiner Erläuterung; nur die Bemerkung sei gestattet dass man entweder jede einzelne Keildicke welche den Abstand zweier Messstangen von einander bezeichnet, sofort zu l addirt und folglich auch mit reducirt; oder dass man diese Reduction weglässt und einfach nur die Summe aller Keildicken der Summe aller reducirten Massstablängen beifügt. Die auf den Horizont reducirte Länge der Linie A B stellt einen grössten Kreisbogen der Erdkugel vor, und es gehört zu demselben ein Halbmesser R welcher sich wie folgt ergibt. Bezeichnet nämlich r den Halbmesser der Erde bis zum Meeresspiegel, f die Höhe des Orts A und f' die Höhe des Orts B über der Meeresfläche, so ist $\frac{1}{2}(f + f')$ die mittlere Höhe der Linie A B über dem Meere und daher

$$R = r + \tfrac{1}{2}(f + f') \tag{89}$$

Mit Hilfe dieses Halbmessers kann man den Kreisbogen zwischen A und B wie folgt auf den Meereshorizont reduciren. Bezeichnet nämlich B den Kreisbogen vom Halbmesser R und b den concentrischen und auf dem Meeresspiegel liegend gedachten Kreisbogen welcher mit B in einer Verticalebene sich befindet und von den durch die Endpunkte von B gezogenen Halbmessern begrenzt wird, so findet die Proportion statt $B : b = R : r$ oder auch $B : B - b = R : R - r$. Setzt man $\frac{1}{2}(f + f') = R - r = h$ und die Grösse welche von dem bekannten Bogen B abgezogen werden muss um den unbekannten b zu erhalten, d. h. die Reductionsgrösse $B - b = \Delta$, so wird

$$\Delta = \frac{B h}{r + h} = \frac{h}{r}\left(1 - \frac{h}{r}\right) B \text{ und } b = \left(1 - \frac{h}{r} + \frac{h^2}{r^2}\right) B \tag{90}$$

Das Quadrat des Verhältnisses h : r kann wohl in allen Fällen vernachlässigt werden, da es höchstens den Werth 0,000000012 annehmen kann, und es genügt daher für Basismessungen zu setzen:

$$\varDelta = \frac{h}{r} B \text{ und } b = \left(1 - \frac{h}{r}\right) B$$

Hätte man für eine Höhe von 326,66 Toisen über dem Meere die auf den Horizont reducirte Basis = 5470,34 Toisen gefunden, so wäre die Reduction $\varDelta$ = 0,0001 . 5470,34 = 0,547034 Toisen (da r = 3266600 T) und die Basis auf dem Meeresspiegel b = 5469,793 Toisen. (Weiteres hierüber in dem Abschnitte über Landesvermessungen.)

§. 41. Ueber die Genauigkeit unmittelbarer Längenmessungen welche mit Messstangen, Messlatten, Messketten und Stahlbändern ausgeführt worden sind.

1) Es ist lange Zeit darüber gestritten worden, ob der mittlere zu befürchtende Fehler einer Längenmessung mit Kette oder Latte der Quadratwurzel aus der gemessenen Länge oder dieser Länge selbst proportional sei. Die erste Annahme $M = m \sqrt{L}$ welche auch wir bei Betrachtung der Messlatten (Bd I, S. 375) gemacht haben, ist eine Forderung der Theorie, während die zweite M = m L aus einer grossen Zahl von Messungen hervorging in denen die bei Kettenmessungen stets vorhandenen einseitig wirkenden constanten Messungsfehler (wozu das Abweichen der Messung von der geraden Linie, das Einbiegen der Kette, das Verschieben der Latten und Kettenstäbe gehören) nicht gehörig von den zufälligen Fehlern die allein nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu beurtheilen sind, getrennt wurden. Gelänge diese Trennung nicht, so liesse sich allerdings die Methode der kleinsten Quadrate auf den vorliegenden Fall gar nicht anwenden. Diese Trennung geschieht aber, wenn man nicht die Unterschiede der wahren Längen gegen die einzelnen Angaben der Ketten- oder Lattenmessung in Betracht zieht, sondern die Unterschiede der Ketten- oder Lattenmessungen unter sich; denn in diesem letzteren Falle sind die constanten Fehler sowohl im Minuenden als im Subtrahenden enthalten und kommen desshalb in der Differenz nicht mehr vor. Diese Differenzen sind, wenn auch nicht ganz unabhängig von den constanten Fehlern, doch jedenfalls gleich wahrscheinlich positiv und negativ, was von den Differenzen der einzelnen Messungen und der wahren Länge oder von den wahren Fehlern der Ketten- oder Lattenmessung nicht behauptet werden kann.

Bezeichnen demnach $f_1\ f_2\ f_3 \ldots$ die wahren Fehler der einzelnen Ketten- oder Lattenlagen welche bei der ersten Messung einer Länge l gemacht werden, und sind $\mathfrak{f}_1\ \mathfrak{f}_2\ \mathfrak{f}_3 \ldots$ die entsprechenden wahren Fehler einer zweiten Messung derselben Länge mit der gleichen Kette oder den gleichen Messlatten, so ist die Differenz beider Messungen oder einer Doppelmessung

$$d = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots - (\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2 + \mathfrak{f}_3 + \ldots) = (f_1 - \mathfrak{f}_1) + (f_2 - \mathfrak{f}_2) + (f_3 - \mathfrak{f}_3) + \ldots$$

und es sind die Unterschiede $f_1 - \mathfrak{f}_1$, $f_2 - \mathfrak{f}_2$, $f_3 - \mathfrak{f}_3$ Fehler auf welche die Wahrscheinlichkeitsrechnung Anwendung findet. Für die zwei gemessenen Werthe einer Ketten- oder Lattenlage sind somit die wahrscheinlichsten Fehler $+\frac{1}{2}$ d und $-\frac{1}{2}$ d; der mittlere Fehler m eines der beiden Werthe ist folglich nach Bd II, Gl. (8)

$$m = \sqrt{\frac{d^2}{2}} = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

und der mittlere Fehler μ des arithmetischen Mittels nach Gl. (9)

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{d}{2}$$

Für die Länge l′ eines zweiten an das erste sich anschliessenden Stücks einer Geraden von der Länge l + l′ ist $\frac{1}{2}$ d′ der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels der beiden für l′ gefundenen Längen, und hieraus folgt der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels aus zwei Messungen der ganzen Länge l + l′:

$$M = \sqrt{(\tfrac{1}{2}d)^2 + (\tfrac{1}{2}d')^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{d^2 + d'^2} \qquad (91)$$

Wenn demnach eine Strecke A B C aus den Längen A B = 100 m und B C = 200 m besteht und man nähme die Fehleranhäufung proportional der Länge an, so würde der Fehler, wenn er auf 100 m Länge 0,03 m beträgt, bei 200 m doppelt so viel, also 0,06 m und bei 300 m Länge 0,09 m betragen, während er sich bei einfacher Messung nach vorstehender Formel auf $M = \sqrt{(0{,}03)^2 + (0{,}06)^2} = 0{,}067$ m berechnet. Wer annimmt dass der Fehler der Längenmessung nicht der $\sqrt{L}$ sondern L selbst proportional ist, darf auch nicht den mittleren Fehler einer in abgesonderten Stücken gemessenen Länge aus den Fehlern dieser Stücke mittels der von der Methode der kleinsten Quadrate gebotenen Formel berechnen wollen. (Die Doppelbedeutung von m wird der geneigte Leser leicht unterscheiden.)

2) Professor Jordan hat in der Zeitschrift für Vermessungswesen Bd I, S. 33 u. ff. eine grosse Zahl von Versuchsmessungen mit Kette und Latte von Gerling, Handschuh, Vorländer, Börsch, Franke u. A. zusammengestellt und daraus den mittleren Fehler m der Messung einer Länge von 1 Meter gefunden für Kettenmessung m = 0,01070 und für Lattenmessung m = 0,00350 Meter; Professor Wastler hat nach der Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und Architektenvereins, Jahrgang 1876, S. 33 u. ff. aus 845 Doppelmessungen mit der Kette das sog. Quadratwurzel-Gesetz ebenfalls als richtig nachgewiesen und für Kettenmessung m = 0,00297 gefunden; in gleicher Weise fand Professor Lorber nach seiner Schrift „über die Genauigkeit der Längenmessungen," Wien 1877, aus einer sehr grossen Zahl von Doppelmessungen mit Kette, Latte und Stahlband das fragliche Gesetz bestätigt und den mittleren Fehler der Länge von 1 Meter für Kettenmessung m = 0,00300; für die Messung mit feinen Latten m = 0,00093; für die Stahlbandmessung m = 0,00216 und für die Messung mit Drehlatten

m = 0,00210 Meter. Hiernach und auf Grund unserer eigenen Erfahrungen dürfte es sich empfehlen die durchschnittlichen Werthe für m so anzunehmen, wie wir im ersten Band dieses Werks bereits gethan haben, nämlich

für genaue Latten	m =	$\pm$ 0,001 Meter
„ gewöhnliche Latten	m =	0,003 „
„ Stahlbänder	m =	0,005 „
„ Messketten	m =	0,010 „
„ Leinenbänder	m =	0,014 „

Die Werthe von m für gewöhnliche Latten (0,003), für Stahlbänder (0,005) und für Ketten (0,010) stimmen bis auf den letzteren mit den von Prof. Jordan auf S. 156 des I Bands seines Handbuchs der Vermessungskunde angenommenen überein; Jordan setzt nämlich für Kettenmessung (im Widerspruche mit seiner eigenen oben angeführten Bestimmung) m = $\pm$ 0,008 statt m = $\pm$ 0,010 Meter, und er ist hiezu wahrscheinlich durch die in neuester Zeit von Lorber u. A. gefundenen sehr kleinen Werthe von m veranlasst worden.

3) Was nun die regelmässigen Fehler betrifft welche bei den gewöhnlichen Längenmessungen nicht wohl vermieden werden können, so kann man zu einer genäherten Kenntniss ihrer Grösse nur dadurch gelangen dass man eine gegebene Gerade von bekannter Länge zuerst mit aussergewöhnlicher und dann mit gewöhnlicher Genauigkeit durch das betreffende Instrument mehrmals misst und die Unterschiede zweier solcher Messungen als den Betrag der regelmässigen Fehler ansieht. In dieser Weise hat der deutsche Geometerverein im Jahre 1873 zu Nürnberg Messungsversuche angestellt und den einseitig positiv wirkenden Fehler für Ketten- und Bandmessung = 0,032 Procent und den für Lattenmessung = 0,039 Procent der Länge gefunden. Setzt man hiefür durchschnittlich 0,03 Procent, so ist für eine Länge von 100 Meter der zufällige Fehler nach Jordan = $0{,}008 \sqrt{100} = 0{,}06$ und der regelmässige = 0,03, folglich der Gesammtfehler = 0,09, während unser Werth für m, wobei auf den regelmässigen Fehler keine weitere Rücksicht genommen ist, den Gesammtfehler = $0{,}01 \sqrt{100} = 0{,}10$ Meter liefert. Das Bestehen regelmässiger Fehler, namentlich bei der Kettenmessung, wurde von den praktischen Geometern längst erkannt, und man hat sie desshalb in verschiedenen Staaten dadurch auszugleichen gesucht dass man die Kette oder Latte um etwas länger als ihr nominelles Normalmass machte; so z. B. in Württemberg eine zwanzigfüssige Messlatte um $\frac{1}{2}$ bis 1 Linie, d. h. durchschnittlich um 0,037 Procent länger als 20 Fuss. Man kann auch heute noch den regelmässigen Fehler der Ketten-, Band- oder gewöhnlichen Lattenmessung ausgleichen, indem man das Messwerkzeug für $l + 0{,}0003\, l = 1{,}0003\, l$ berichtigt, d. h. eine Messstange von 5 m um 1,5 mm länger macht; will man aber den regelmässigen Fehler besonders in Rechnung bringen, so kann dieses nach der folgenden von Professor Jordan berechneten Tafel geschehen:

Gemessene Länge in Meter	Mittlerer zufälliger Fehler einer Messung mit			Mittlerer regelmässiger Fehler
	Latten $m = 0{,}003$	Stahlband $m = 0{,}005$	Kette $m = 0{,}008$	$+ 0{,}03\,\%$
10	$\pm$ 0,01	$\pm$ 0,02	$\pm$ 0,03	+ 0,00
50	0,02	0,04	0,06	0,02
100	0,03	0,05	0,08	0,03
200	0,04	0,07	0,11	0,06
300	0,05	0,09	0,14	0,09
400	0,06	0,10	0,16	0,12
500	0,07	0,11	0,18	0,15
1000	0,09	0,16	0,25	0,30

4) In allen Staaten welche Landesvermessungen ausführen liessen oder zur Zeit noch ausführen lassen, bestehen Vorschriften über den Grad der Genauigkeit womit die Längenmessungen bei Detailaufnahmen ausgeführt werden müssen, und es wird hiebei auf die Beschaffenheit des Bodens, ob er eben oder gebirgig ist, Rücksicht genommen. So z. B. dürfen in Baden bei der Vergleichung abgesetzter und durchlaufender Messungen derselben Linie von 30, 60, 150, 300 Meter Länge beziehlich nur $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ Procent Fehler im Gebirge und $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$ Procent Fehler in der Ebene stattfinden; in Preussen werden Ketten- und Lattenmessungen als entsprechende angesehen, wenn in der Ebene und auf sonst nicht ungünstigem Boden der an einer genau gemessenen Linie festgestellte Fehler höchstens $\frac{1}{5}$ Procent und der Widerspruch zweier gewöhnlicher Ketten- oder Lattenmessungen höchstens $\frac{1}{3}$ Procent beträgt; in Württemberg sind bei der Prüfung von Längen welche bei den Aufnahmen selbst gemessen worden sind oder aus solchen berechnet werden können, folgende Fehlergrenzen gestattet: $\frac{1}{10}$ Procent auf ebenem Boden mit Neigungen bis zu 2 Procent; $\frac{2}{10}$ Procent bei Längen auf schwach geneigtem Boden (2 bis 7 Procent) und $\frac{3}{10}$ Procent bei stark geneigtem Boden (mehr als 7 Procent); in der Schweiz sollen die auf zwei verschiedene Arten ermittelten Längen im ebenen zugänglichen Terrain je nach der Schärfe der Grenzzeichen folgende Uebereinstimmung zeigen: bei 3 bis 30 m Entfernung 3 bis 9 cm, bei 30 bis 60 m Entfernung 12 cm, bei 60 bis 90 m Entfernung 15 cm, bei 90 bis 120 m Entfernung 18 cm u. s. w.

Aus den vorstehenden Angaben die sich leicht noch vermehren liessen, entnimmt man dass die anzustrebende Genauigkeit der gewöhnlichen Längenmessungen in den einzelnen Ländern nicht bloss verschiedenartig ausgedrückt wird sondern auch sehr ungleich ist, und dass desshalb das Verlangen der Geometer nach einer überall giltigen einheitlichen Bestimmung über diesen nicht unwichtigen Gegenstand gerechtfertigt erscheint. Wir glauben dass die in der vorigen Nummer mitgetheilte Fehlertabelle als Ausgangspunkt einer solchen internationalen Bestimmung dienen könnte.

§. 42. Ausgleichung von Längenmessungen welche mit gewöhnlichen Latten, Ketten oder Stahlbändern gemacht wurden.

Ein Beispiel der Ausgleichung zufälliger Beobachtungsfehler welche bei einer kleinen in zwei Abtheilungen ausgeführten Basismessung vorkamen, ist bereits in der Lehre von der Methode der kleinsten Quadrate (Bd II, §. 17) mitgetheilt worden; hier ist desshalb laut Ueberschrift nur mehr von gewöhnlichen Längenmessungen und zwar nur von gewissen Ausgleichungen die Rede. Denn wir haben schon mehrmals bemerkt dass es keinen Werth habe die Fehler gewöhnlicher Längenmessungen nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgleichen zu wollen, indem es hier immer genügt für eine mehrmals gemessene Linie das arithmetische Mittel aus allen gefundenen Werthen als deren Länge anzusehen. Wenn jedoch der nicht seltene Fall eintritt dass zwischen zwei gegebenen Fixpunkten A und B deren bekannter Abstand L ist, ein Punkt C in gerader Linie eingeschaltet werden soll, und es ergibt die Messung dass die Summe der Abstände l und l' dieses Fixpunkts von A und B nicht gleich L sondern gleich L + w ist, so dass ein Widerspruch $w = l + l' - L$ zwischen den gemachten Längenmessungen stattfindet: so fragt es sich wie dieser Widerspruch zweckmässig ausgeglichen werden soll. Diese Aufgabe wird hier behandelt.

Die Praxis hat für deren Lösung längst die Regel aufgestellt und befolgt dass man den Widerspruch auf die einzelnen Strecken im Verhältniss ihrer Längen vertheilen und daher die Strecke $AC = l$ um $l\,w : L$ und $CB = l'$ um $l'\,w : L$ verbessern soll. Diese Regel stimmt aber auch mit jener überein welche aus der Methode der kleinsten Quadrate folgt, wenn man folgende zwei Annahmen macht: erstens dass der mittlere Fehler einer Längenmessung der Quadratwurzel aus der Länge proportional ist, und zweitens dass das Gewicht p einer gemessenen Länge l im umgekehrten Verhältnisse zu dieser Länge steht, also $p = 1 : l$ ist. Denn bezeichnet man die wahrscheinlichste Länge von AC, wofür der Werth l gemessen wurde, mit x, so ist die wahrscheinlichste Länge von CB welche durch Messung gleich l' gefunden wurde, $L - x$. Es bestehen folglich die Fehler $x - l$ und $L - x - l'$, und da das Gewicht des ersten Fehlers $p_1 = 1 : l$ und das des zweiten $p_2 = 1 : l'$ ist, so ist x aus der Function

$$f_x = \frac{1}{l}(x - l)^2 + \frac{1}{l'}(L - x - l')^2 = \text{minimum}$$

zu bestimmen. Hieraus folgt aber in bekannter Weise, wenn man am Schlusse L für $l + l'$ schreibt, was erlaubt ist:

$$x = l - \frac{l}{L}w \text{ und } L - x = l' - \frac{l'}{L}w$$

und hiemit ist die Behauptung bewiesen dass l und l' proportional ihren Längen um den Widerspruch $w = l + l' - L$ zu verbessern sind. Wollte man den mittleren Fehler μ in der Bestimmung des Punktes C angeben, so hätte man zuerst den mittleren Fehler m der Messung einer Längeneinheit aufzusuchen. Von diesem Fehler ist aber leicht einzusehen dass er

$= w : \sqrt{L}$ ist, weil w den mittleren Fehler der Messung einer Länge L bedeutet. Hiemit wird nach §. 14, Gl. (17) der gesuchte Fehler

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{[p]}} = \frac{w}{\sqrt{L}} \cdot \frac{\sqrt{l\,l'}}{\sqrt{l + l'}} = \frac{w}{L} \sqrt{l\,l'} \qquad (92)$$

Wäre die Länge L zwischen A und B nicht von vorneherein gegeben, so bliebe nichts anderes übrig als dieselbe einmal durchlaufend und dann in zwei Absätzen zu messen und das arithmetische Mittel aus L′ (dem Werthe der durchlaufenden Messung) und L″ (der Summe der Theilmessungen) für L zu nehmen und damit wie vorhin zu verfahren. Hätte man beispielsweise für A B den Werth $L' = 317{,}18$, für A C den Werth $l = 129{,}76$ und für C B den Werth $l' = 187{,}18$, somit $L'' = l + l' = 316{,}94$ gefunden, so wäre $L = 317{,}06$ und $w = l + l' - L = 316{,}94 - 317{,}06 = -0{,}12$ Meter, daher

$$\begin{aligned} x &= 129{,}76 + 0{,}049 = 129{,}809 \text{ Meter} \\ L - x &= 187{,}18 + 0{,}071 = 187{,}251 \quad „ \\ L &= 129{,}809 + 187{,}251 = 317{,}06 \quad „ \end{aligned}$$

Der mittlere Fehler in der Bestimmung des Punkts C würde sich in dem vorliegenden Falle wie folgt berechnen:

$$\mu = -\frac{0{,}12}{317{,}06} \sqrt{129{,}76 \,.\, 187{,}18} = -0{,}059 \text{ Meter}$$

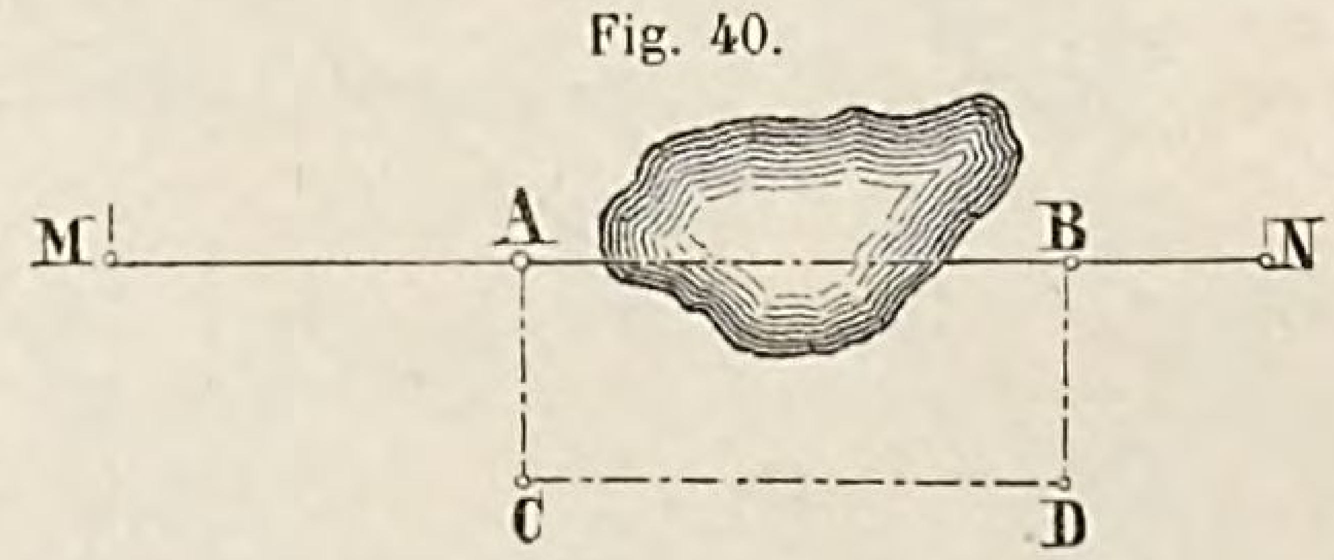
§ 43. Aufgabe. Eine gerade Linie deren Endpunkte fest bezeichnet sind, kann nicht unmittelbar gemessen werden: man soll ihre horizontale Länge mittelbar bestimmen.

Die Lösung dieser Aufgabe ist nach den Umständen verschieden.

1) Die gegebene Linie A B sei nicht sehr lang, man kann sich in jedem Endpunkte aufstellen und von einem zum anderen sehen. (Fig. 40.)

In diesem Falle erhält man die gesuchte Länge am einfachsten, indem man in den Punkten A und B Senkrechte (A C, B D) zu A B absteckt, diese einander gleich macht und die dadurch erhaltene Linie C D welche der gegebenen parallel und gleich ist, unmittelbar misst. Sollte die Absteckung einer Parallelen zu A B aus irgend welchen Ursachen unmöglich oder doch erschwert sein, so stelle man sich durch Annahme eines beliebigen Punkts C ein Dreieck A B C her, messe in demselben die Winkel bei A und B nebst einer der Seiten A C oder C B und berechne aus den gemessenen drei Stücken die gesuchte Seite A B.

Fig. 40.



2) Die nicht sehr lange gerade Linie A B sei zwar an ihren Endpunkten zugänglich, kann aber von ihnen aus nicht übersehen werden. Man wähle (Fig. 41) einen beliebigen Punkt C der so liegt dass von ihm aus nach A und B gesehen und gemessen werden kann, bestimme unmittelbar die

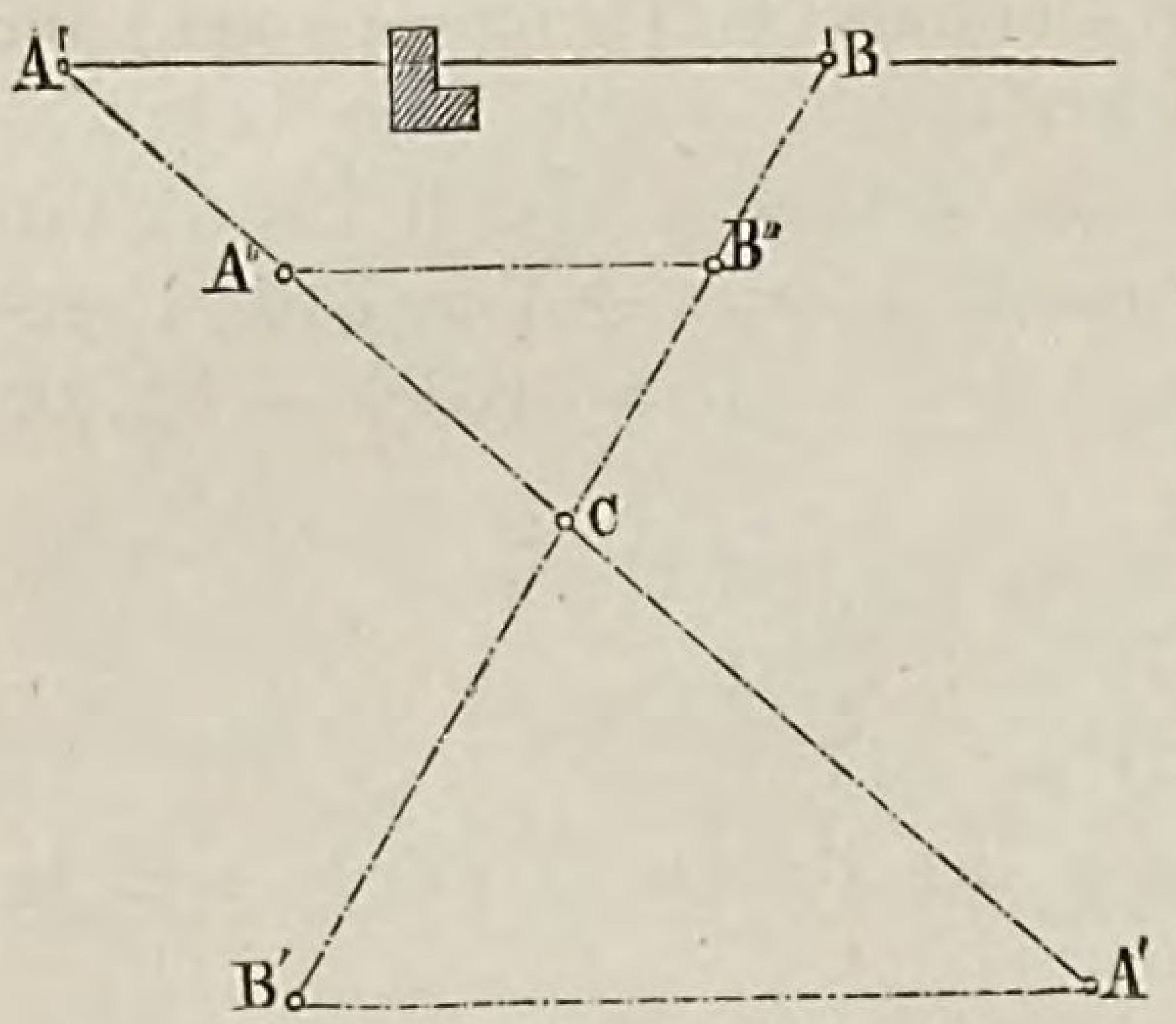
Seiten C B = a, A C = b und den Winkel A C B = C des Dreiecks A B C und berechne daraus zuerst

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (A - B) = \frac{a - b}{a + b} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C$$

hierauf die Winkel A und B selbst, und mit diesen die Seite

$$A B = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

Fig. 41.

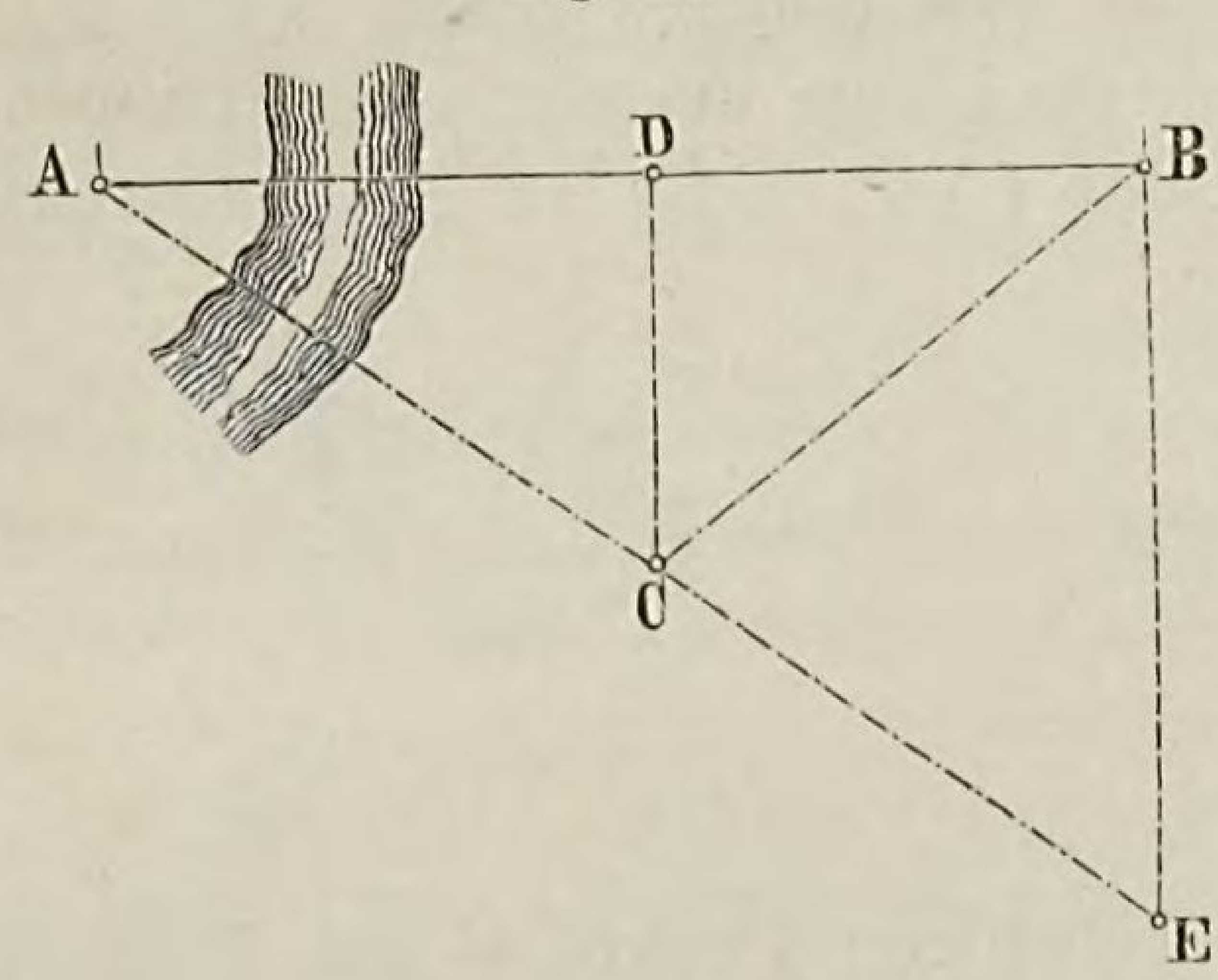


Will oder muss man die Winkelmessung umgehen, so verlängere man die durch den Punkt C bestimmten Seiten A C und B C rückwärts so weit dass A′ C = A C und B′ C = B C wird, und messe hierauf die Linie A′ B′ welche der A B gleich ist. Sollte die Verlängerung der Seiten A C und B C nicht möglich sein, so halbire man entweder diese Seiten in A″ und B″ wodurch A″ B″ = ½ A B wird, oder theile sie so dass A″B″ der AB parallel läuft, messe A″ B″ = c, B C = a, B″ C = d und berechne die gesuchte Länge A B aus der Proportion welche zwischen dieser und den gemessenen Grössen stattfindet.

3) Ein Endpunkt der Geraden A B sei unzugänglich, man kann ihn aber von dem zweiten Endpunkte aus sehen.

In diesem Falle nimmt man (nach Fig. 42) einen Punkt C beliebig, aber so an dass man von ihm aus nach A und B sehen und nach B messen kann; misst die Länge der Linie B C = a und die Winkel A B C = B und B C A = C und berechnet hieraus die Seite

Fig. 42.



$$A B = \frac{a \sin C}{\sin (B + C)}$$

Einfacher lässt sich die vorliegende Aufgabe dadurch lösen dass man mit Hilfe des Prismenkreuzes einen Punkt C sucht der mit A und B einen rechten Winkel A C B bildet, hierauf eine Senkrechte C D auf A B errichtet, B C = a, B D = e misst und A B aus der Gleichung berechnet

$$A B = \frac{a^2}{e}$$

Ausserdem kann man in B und D zwei Senkrechte zu A B errichten und diese durch eine Gerade A E abschneiden, B E = m, D C = n,

$BD = p$ messen und aus einer leicht zu bildenden Proportion die unbekannte Seite

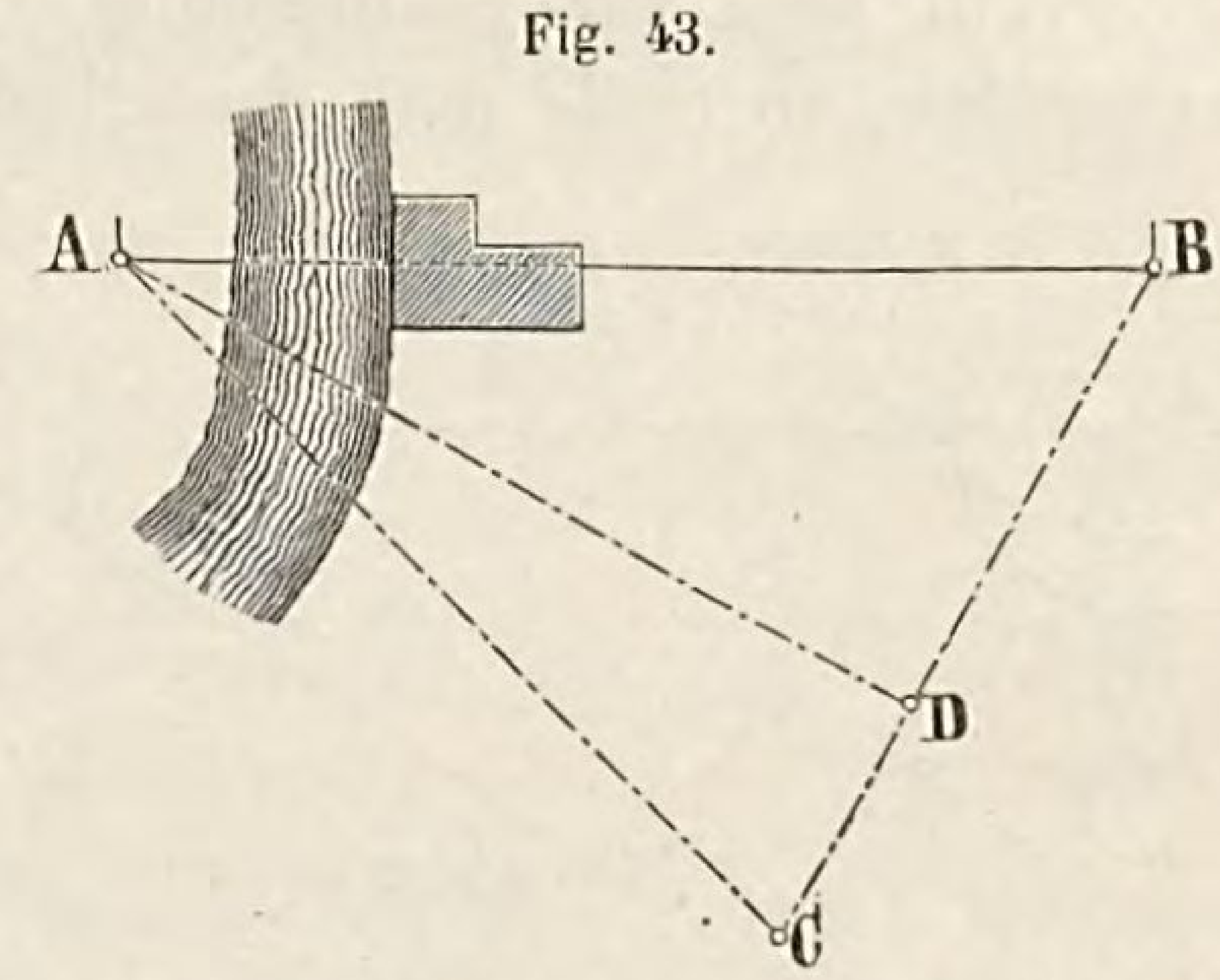
$$AB = \frac{mp}{m - n}$$

bestimmen. (Es bedarf wohl kaum der Erwähnung dass die Linien BE und DC bloss desshalb senkrecht zu AB genommen wurden, weil dieses der kürzeste Weg ist sie parallel zu machen; denn nur das Gleichlaufen dieser Linien ist hier nothwendig.)

4) Es sei wieder ein Punkt A der Geraden AB unzugänglich, und von B aus kann man nicht nach A sehen.

Man nehme einen Punkt C so an dass man nach A und B visiren und nach B messen kann; errichte auf BC eine Senkrechte AD welche durch den Punkt A geht, messe $BC = a$, $CD = d$ und den Winkel $BCA = C$, berechne zunächst die Seite $AC = b$ aus der Gleichung $b \cos C = d$, hierauf nach der in Nr 2 dieses Paragraphen angewendeten trigonometrischen Formel die Winkeldifferenz $A - B$, mit dieser und der bekannten Winkelsumme $A + B$ die Winkel A und B selbst und schliesslich

Fig. 43.



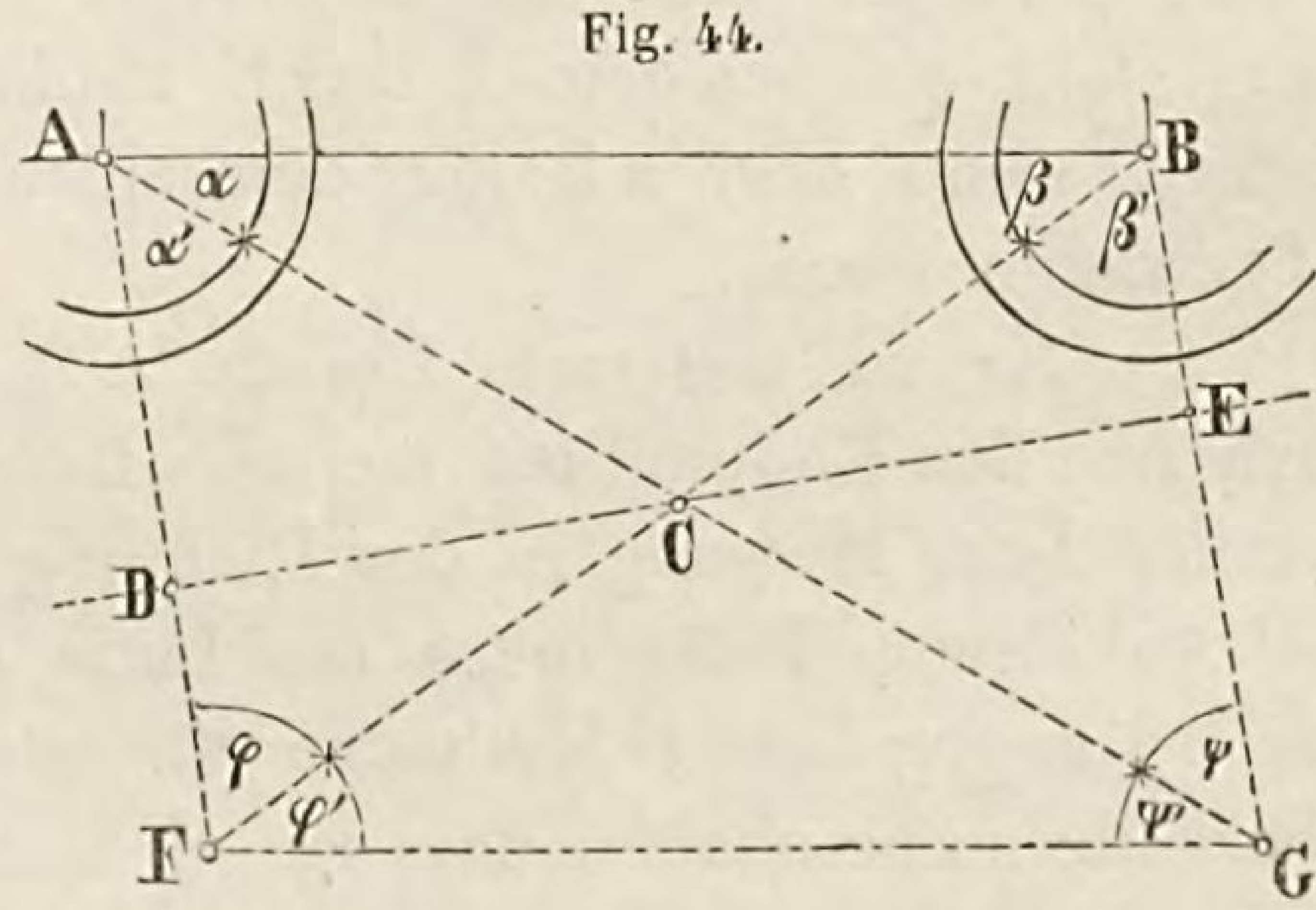
$$AB = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

Sollten sich der Herstellung der Senkrechten AD Schwierigkeiten in den Weg legen, so kann man die Richtung AD den Umständen entsprechend zuerst annehmen, dann eine durch B gehende Senkrechte auf AD fällen und diese so weit verlängern bis man an einen Punkt C kommt von dem aus A und B sichtbar sind und BC unmittelbar gemessen werden kann.

5) Die gegebene Linie AB sei ganz und gar unzugänglich, aber das sie umgebende Terrain gestatte alle erforderlichen Messoperationen.

Hätte man zur Lösung dieser Aufgabe keine anderen Hilfsmittel als Absteckstäbe, Kette und Winkelspiegel oder Prismenkreuz, so nehme man eine beliebige Gerade DE an, errichte zu ihr die beiden Senkrechten AD und BE, halbire den Abstand DE ihrer Fusspunkte in C, suche die Durchschnitte von AD, BC und von BE, AC in F und G auf und messe schliesslich die Linie FG, so ist die Aufgabe gelöst; denn es ist $FG = AB$, weil das Dreieck FCG das Dreieck ABC deckt.

Fig. 44.



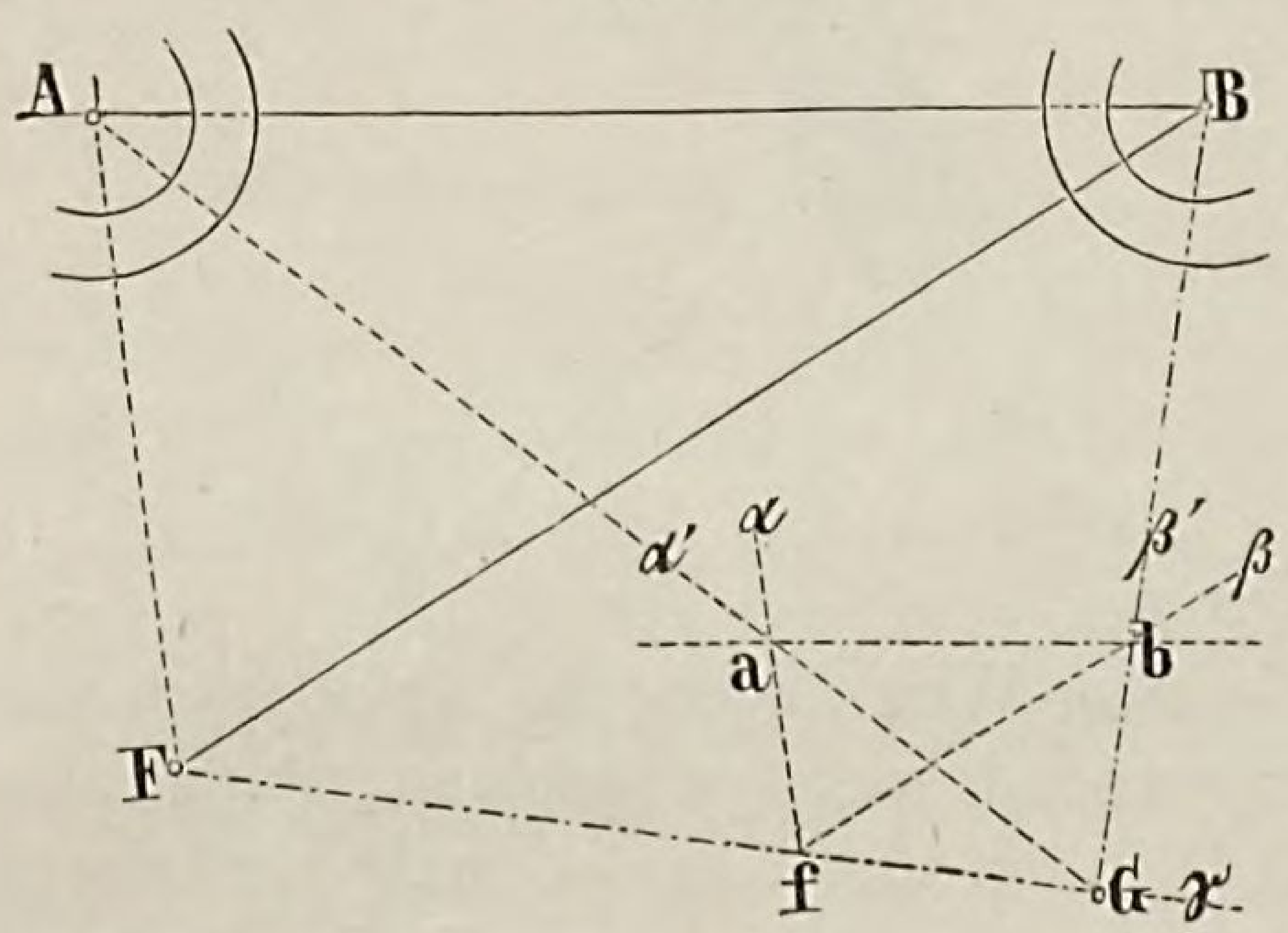
Besitzt man einen Theodolithen, Spiegelsextanten oder Spiegelkreis, so kann man von zwei Standpunkten F und G aus die Winkel A F B $= \varphi$, B F G $= \varphi'$ und A G F $= \psi'$, B G A $= \psi$, sowie die horizontale Entfernung dieser Standpunkte F G = g messen; mit diesen Grössen aus dem Dreiecke A F G die Seiten A F = b, A G = c und aus dem Dreïecke B F G die Seiten B F = d, B G = e berechnen, und schliesslich die gesuchte Länge A B aus den Dreiecken A B F und A B G in welchen je zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt sind, bestimmen. Die vier Werthe welche sich für A B ergeben, nämlich

$$\mathrm{A\,B} = \frac{\mathrm{b} \sin \varphi}{\sin \beta} = \frac{\mathrm{d} \sin \varphi}{\sin (\alpha + \alpha')} = \frac{\mathrm{e} \sin \psi}{\sin \alpha} = \frac{\mathrm{c} \sin \psi}{\sin (\beta + \beta')}$$

liefern eine Controle der Messung und Berechnung. Bei geringen Abweichungen dieser Werthe nimmt man das Mittel aus allen für A B.

Will man zur Bestimmung von A B den minder genauen Messtisch anwenden, so stelle man denselben in einem beliebigen Punkte F der nach A, B, G zu visiren und nach G zu messen gestattet, horizontal auf, projicire mit der Lothgabel den Punkt F in f auf das Messtischblatt, visire nacheinander die Punkte A, B, G an und ziehe die entsprechenden Visirlinien f α, f β, f γ. Hierauf messe man die Länge F G auf dem Felde, trage sie verjüngt = f g auf der Linie f γ von f aus ab und versetze nun den Messtisch so nach G dass g lothrecht über G und γ f in die Visirebene G F kommt, während das Tischblatt selbst horizontal ist.

Fig. 45.



Visirt man nun nach A und zieht die Linie g α', so erhält man den Schnittpunkt a, und wenn von g nach B visirt und die Linie g β' gezogen wird, so ergibt sich der Schnitt b. Hiermit ist aber das Viereck a b g f hergestellt welches dem A B G F ähnlich ist und die Länge der Seite A B liefert, wenn man a b mit demselben Massstabe misst nach welchem f g abgetragen wurde.

6) Die zu messende Gerade A B sei sehr lang, und es befinden sich zwischen den Endpunkten mehrere Hindernisse welche das Visiren und eine unmittelbare Messung in der Richtung A B unmöglich machen.

In diesem Falle muss die Linie A B nach einer der in §. 30 (Nr 1 bis 3) angegebenen Methoden abgesteckt werden. Diese Methoden sind aber alle so beschaffen dass sie nicht bloss die Entfernungen der Zwischenpunkte der Linie A B von gewissen Hilfslinien, sondern auch die Entfernungen dieser Punkte unter einander durch Rechnung finden lassen. Man braucht also nur die für die Absteckung gemessenen Grössen nach

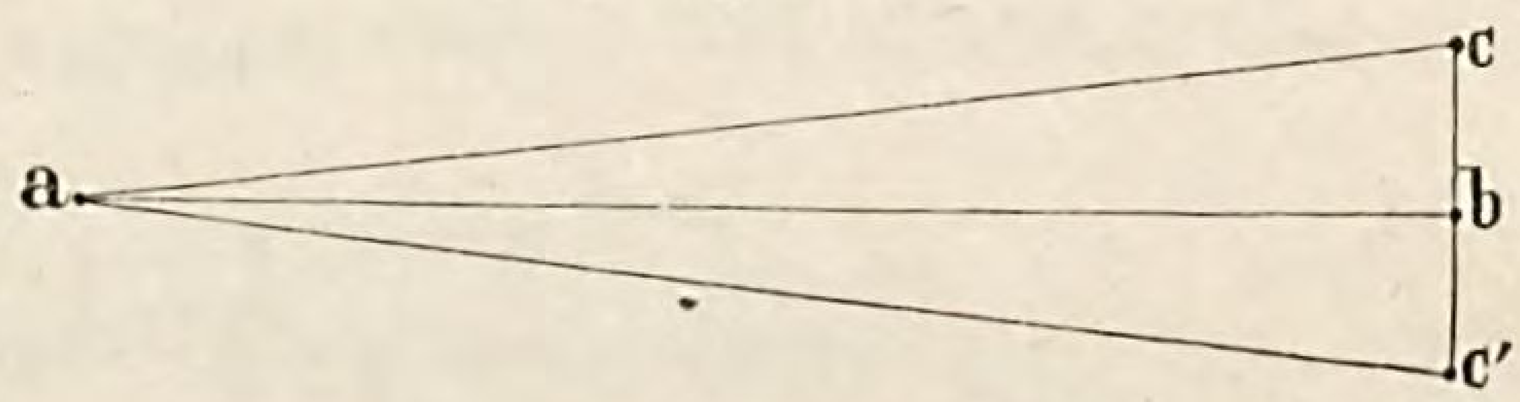
Anleitung der zugehörigen Figuren richtig zu verbinden um die gesuchte Länge A B durch Rechnung zu erhalten welche nur die Lösung höchst einfacher trigonometrischer Aufgaben erfordert.

7) Die zu messenden Entfernungen seien im Verhältniss zu den Hilfslinien sehr gross und sollen in kürzester Zeit bestimmt werden.

Diese Forderung hat zahlreiche Versuche Distanzmesser für militärische Zwecke zu erfinden, hervorgerufen, ist aber bis heute nicht erfüllt und wird immer schwieriger zu erfüllen, je mehr mit der Verbesserung der Geschosse deren Tragweite zunimmt. Nach unserer Ansicht sind für Entfernungen von einigen tausend Schritten nur mittelbare Messungen im Stande die erforderliche Genauigkeit zu gewähren, und da diese Messungen in wenigen Minuten vollendet sein müssen, so empfehlen wir schon seit zehn Jahren folgendes Verfahren.

Man lasse sich zwei Spiegelsextanten anfertigen die für Winkel in der Nähe von 90°, etwa von 75° bis 105°, besonders helle Bilder der Objecte geben, und berechne hiezu eine Tafel aus der die Seiten a c und a c′ des langgestreckten ungleichschenkligen Dreiecks a c c′ gefunden werden können, wenn die Grundlinie c c′ = a = 100 m und die Winkel a c c′ = A und a c′ c = B bekannt sind. Die Grundlinie c c′ wird jedesmal so abgesteckt dass sie mit der Visirlinie nach a nahezu einen rechten Winkel bildet und eine Länge von 100 m hat welche mit einem Rollbande abzumessen ist. Die Winkel A und B werden (der Eile wegen) gleichzeitig von zwei Personen gemessen; sind sie bekannt, so gibt die Tafel sofort die Längen der Schenkel a c und a c′. (Bis jetzt scheint dieser Vorschlag nicht beachtet worden zu sein.)

Fig. 46.



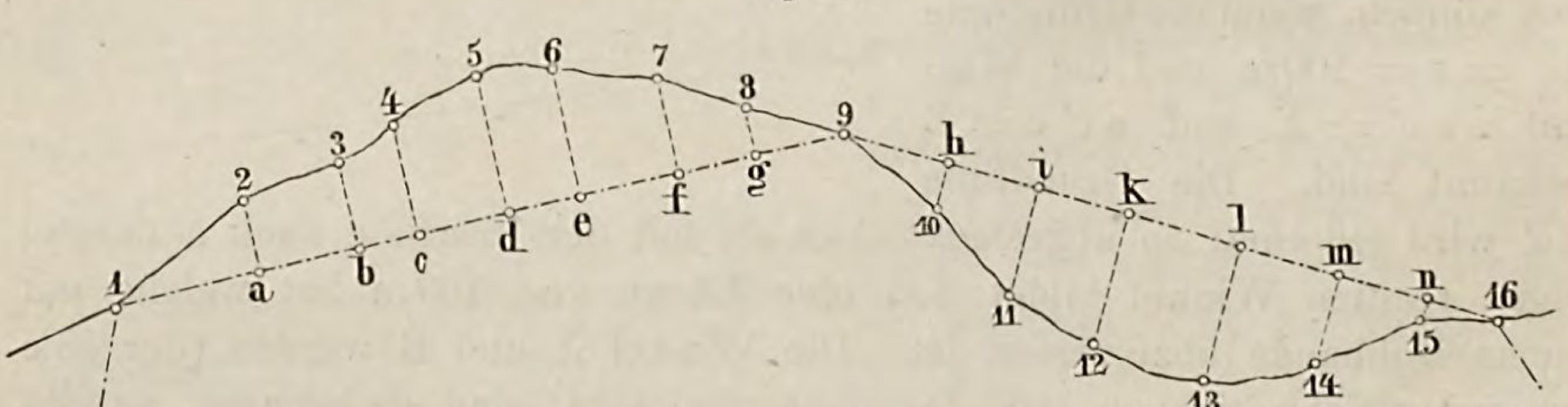
Das Verfahren welches im Jahre 1865 unter dem Namen „Franz'scher Distanzmesser“ ein gewisses Aufsehen erregte und eine glänzende Honorirung des vermeintlichen Erfinders von Seite des Königlich Bayerischen Kriegsministeriums zur Folge hatte, ist nur eine Anwendung unseres distanzmessenden Prismas (Bd I, §. 125) auf den vorliegenden Zweck, bei der die Erfindung des Herrn Franz höchstens darin besteht dass er die Schenkel des der Messung zu Grunde liegenden gleichschenkligen Dreiecks a c c′ (Fig. 46) vierzigmal so gross annahm als die Grundlinie c c′. Mit unserem Prisma hat Herr Franz die Entfernung a c wie folgt gemessen. Wenn der Schenkel a c′ des gleichschenkligen Dreiecks a c′ c = 40mal der Grundlinie c c′ ist, so wird der Winkel a c′ c = a c c′ = B aus der Gleichung $\cos B = \frac{1}{80} = 0{,}0125$ zu 89° 17′ gefunden. Schleift man nun unser Prisma (Fig. 155, Bd I) so dass B = 89° 17′ und $C = \frac{1}{2} B = 44° \; 38',5$ ist, so kann man damit durch das gleiche Verfahren welches mit dem in Fig. 153 dargestellten Prisma den rechten Winkel liefert, den Winkel von 89° 17′ abstecken. Ist a c′ c = 89° 17′ gemacht und sucht man auf dem Schenkel

c′ c einen Punkt c auf der so liegt dass auch a c c′ = 89° 17′ wird, so ist a c c′ ein gleichschenkliges Dreieck und darin a c = a c′ = 40 . c c′; man hat also nur die Basis c c′ abzuschreiten und die Anzahl der Schritte 40mal zu nehmen, um die Entfernung a c′ in Schritten zu erhalten. Würde man die Anzahl der Schritte 100mal genommen haben, so hätte sich die Entfernung a c′ in Fuss ergeben, da ein Schritt zu 2,5 Fuss angenommen wird. (Hierin liegt der Grund, warum Herr Franz den Schenkel des Dreiecks a c c′ gerade 40mal so gross als die Grundlinie angenommen hat.)

§. 44. Aufgabe. Irgend eine krumme Linie ist auf dem Felde gegeben: man soll dieselbe aufnehmen und ausmessen.

Da eine krumme Linie fortwährend ihre Richtung ändert, so leuchtet von selbst ein dass sie im allgemeinen nicht so genau als eine gerade Linie aufgenommen und ausgemessen werden kann. Denn diese Aufnahme und Ausmessung ist nur dadurch möglich dass man an die Stelle der Curve eine gebrochene Linie setzt welche mit jener so nahe als möglich zusammenfällt. Diese gebrochene Linie allein wird aufgenommen und ihrer horizontalen Länge nach bestimmt. Ist die aufzunehmende Linie nicht bereits

Fig. 47.



abgesteckt, wie es bei regelmässigen Curven für Eisenbahnen oder Strassen der Fall ist, so bezeichne man die aufzunehmenden Punkte 1, 2, 3, 4 durch numerirte Markpflöcke welche so weit auseinander stehen dass die dadurch entstehende gebrochene Linie der vorhin ausgesprochenen Bedingung möglichst genügt. Hierauf lege man in die krummlinige Figur zwei oder mehr unter sich zusammenhängende gerade Linien (wie z. B. in Fig. 47 die Geraden 1.9 und 9.16) so dass sie von den aufzunehmenden Punkten nicht zu weit abliegen, und dass sich auf ihnen mit der Messkette oder mit Messstäben leicht messen lässt. Ist dieses geschehen, so mache man einen Handriss von der ganzen Figur und bestimme die gegenseitige Lage der Hilfslinien (1.9 und 9.16) durch Messung ihrer horizontalen Längen und der Winkel (1,9,16) welche sie mit einander bilden. Schliesslich suche man mit dem neuen Prismenkreuze oder dem fünfseitigen Winkelprisma (Bd I, §. 128) die Fusspunkte a, b, c, d, e ... der senkrechten Ordinaten der Punkte 2, 3, 4, 5, 6 .., messe die Abscissen 1 a, 1 b, 1 c, 1 d .., schreibe die gefundenen Längen in dem Handrisse bei a, b, c, d, e ... ein, messe alsdann auch die Ordinaten und trage ihre Längen ebenfalls in die Zeichnung deutlich über. Mit diesen Grössen kann man die krumme

Linie 1, 2, 3, 4, 5 . . . 16 annähernd zeichnen und aus der Zeichnung lässt sich ihre Länge entweder abmessen oder berechnen, wenn man es nicht vorzieht diese Längenbestimmung auf dem Felde unmittelbar zu machen, indem man die Sehnen 1 — 2, 2 — 3, 3 — 4, 4 — 5, 5 — 6 . . . misst und addirt.

B. Messung der Winkel und Dreiecke.

§. 45. Die gegenwärtige Abtheilung hat sich in Bezug auf Winkel nur mehr mit den mittelbaren Bestimmungen derselben und mit dem Einflusse der regelmässigen Beobachtungsfehler auf unmittelbare Winkelmessungen, in Bezug auf Dreiecke aber mit deren Aufnahme durch den Theodolithen und den Messtisch, mit der Ausgleichung der gemessenen Dreieckswinkel, mit den Folgen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler und mit der Bestimmung derjenigen Gestalt der Dreiecke zu beschäftigen welche diesen Fehlern den geringsten Einfluss auf die zu berechnenden Stücke eines Dreiecks gestattet. Die Anlage und Berechnung der Dreiecksnetze für grössere Terrainaufnahmen wird in dem Capitel über Landesvermessungen erörtert werden.

1. Mittelbare Winkelmessungen.

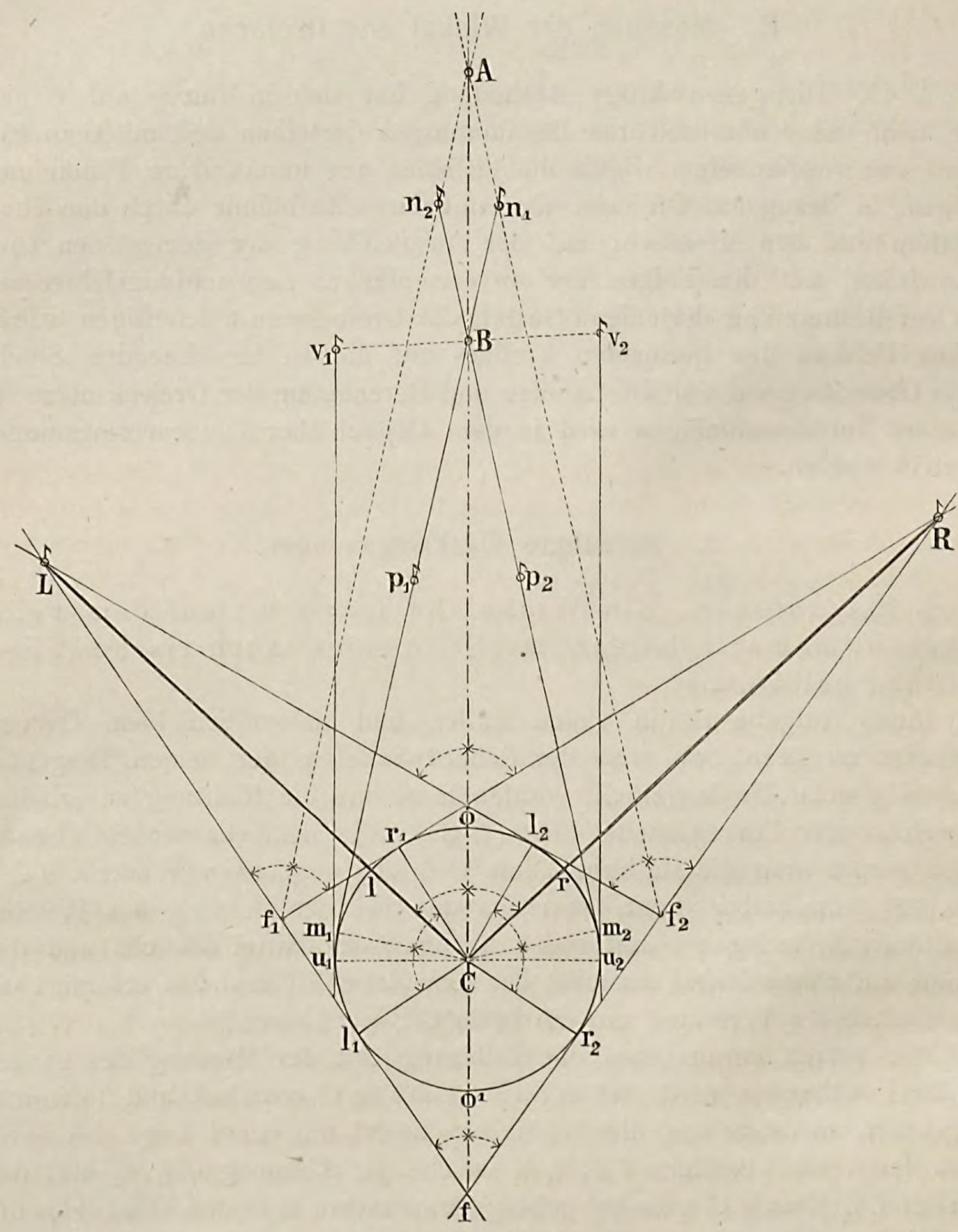
§. 46. Aufgabe. Ein Winkel L C R $= \varphi$ ist auf dem Felde gegeben; man soll ihn dort mit Hilfe eines excentrischen Theodolithen halbiren.

Diese Aufgabe ist in vielen Fällen und namentlich beim Curvenabstecken zu lösen, wo stets der Schnittwinkel φ der beiden Tangenten in zwei gleiche Theile getheilt werden muss um die Richtung zu erhalten in welcher der Curvenscheitel liegt (§. 35). Mit dem centrischen Theodolithen erhält man die Halbirungslinie C B des gegebenen Winkels L C R (Fig. 48) unmittelbar wenn man aus den bei der Messung des Winkels erhaltenen Ablesungen l und r das arithmetische Mittel o sucht und den Nonius auf dieses Mittel einstellt; der excentrische Theodolith erfordert ein umständlicheres Verfahren um die Linie C B zu finden.

Wir setzen voraus dass die Halbirung mit der Messung des ganzen Winkels verbunden wird. Ist der Theodolith in C centrisch und horizontal aufgestellt, so messe man den Winkel φ zuerst mit der 1 Lage des Fernrohrs durch die Visirlinien f L, f_1 R welche die Ablesungen l_1, r_1 und den Winkel L f_1 R $= l_1$ C $r_1 = \varphi_1$ geben; dann messe man den Winkel φ mit der 2 Fernrohrlage durch die Visirlinien f_2 L, f R welche die Ablesungen l_2, r_2 und den Winkel L f_2 R $= l_2$ C $r_2 = \varphi_2$ liefern. Aus geometrischen Gründen ist leicht einzusehen dass die Halbirungslinien der Winkel φ_1 und φ_2, nämlich f_1 A und f_2 A sich in einem Punkte A der Mittellinie schneiden müssen, und dass das Gleiche der Fall ist bei den Parallellinien

$m_1 p_1$ und $m_2 p_2$ welche sehr leicht dadurch abgesteckt werden können dass man das eine Mal die Nonien auf das arithmetische Mittel $m_1 = \frac{1}{2}(l_1 + r_1)$ und das andere Mal auf das Mittel $m_2 = \frac{1}{2}(l_2 + r_2)$ einstellt. Hat man die Richtungen $m_1 p_1$ und $m_2 p_2$ durch je zwei Stäbe p_1, n_1 und p_2, n_2

Fig. 48.



bezeichnet, so ist es sehr leicht deren Schnittpunkt B zu finden welcher mit C die Halbirungslinie vorstellt.

Man kann die Linie C B auch dadurch finden dass man das Fernrohr sowohl in der 1 als in der 2 Lage auf eine Richtung $u_1 v_1$, $u_2 v_2$ einstellt

welche mit der gesuchten Halbirungslinie C B parallel ist und um die Excentricität des Fernrohrs $e = C u_1 = C u_2$ vom Winkelscheitel absteht, und dann den Abstand der beiden Stäbe v_1 v_2 in B halbirt. Um die Ablesungen u_1, u_2 zu erhalten bei denen die Visirlinie des Fernrohrs der C B parallel ist, braucht man nur zu überlegen dass die Richtung C L oder die Ablesung $l = \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$ und die Richtung C R oder die Ablesung $r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$, folglich die Richtung C B oder die Ablesung $o = \frac{1}{2}(l + r) = \frac{1}{4}(l_1 + l_2 + r_1 + r_2)$ und

$$u_1 = o - 90^0 = \frac{1}{4}(l_1 + l_2 + r_1 + r_2) - 90^0$$
$$u_2 = o + 90^0 = \frac{1}{4}(l_1 + l_2 + r_1 + r_2) + 90^0$$

ist; stellt man also den betreffenden Nonius (wir betrachten hier immer nur einen) auf u_1 ein, so gibt die Visirlinie den Punkt v_1, und stellt man ihn auf u_2 ein, so erhält man den Punkt v_2, und hiemit die Parallelen zur Halbirungslinie $u_1 v_1$ und $u_2 v_2$.

§. 47. Aufgabe. Die Grösse eines Horizontalwinkels dessen Scheitel unzugänglich ist, durch Messungen in der Nähe dieses Scheitels zu bestimmen.

Diese Aufgabe kommt bei der Anlage von Dreiecksnetzen öfters vor und ist den Geometern unter der kürzeren Bezeichnung: „einen Winkel zu centriren oder auf seinen Scheitel zu reduciren," bekannt. Ist nämlich in den Figuren 49 bis 52 der zu messende Winkel durch A C B vorgestellt und kann derselbe nicht in C gemessen werden, so wählt man hierzu einen um C herum liegenden Punkt D, misst den Winkel A D B nebst einigen Hilfsgrössen und berechnet daraus den Winkel A C B. Den Inbegriff dieser Arbeiten nennt man das Centriren des Winkels A D B oder Reduciren desselben auf den Scheitel C.

Dieses Centriren oder Reduciren fordert dass die Längen der Winkelschenkel $A C = b$ und $B C = a$, die Seite $C D = e$ und die Winkel $A D B = \psi$ und $C D A = \varphi$ bekannt seien. Bei einer Triangulirung kennt man die Seiten a und b aus den anstossenden Dreiecken, und die Winkel φ und ψ können unmittelbar gemessen werden, da der Standpunkt D so gewählt wird dass man ungehindert nach A, B, C visiren kann. Dagegen lässt sich die Grösse der Excentricität e nur selten unmittelbar bestimmen; in den meisten Fällen wird sie mittelbar dadurch gefunden dass man in einem Hilfsdreiecke C D E eine Seite D E nebst den zwei anliegenden Winkeln sehr genau misst und hieraus $C D = e$ berechnet.

Da der Punkt D um C herum jede beliebige Lage haben kann, so wird sich der Ausdruck für den gesuchten Winkel $A C B = C$ je nach der Lage von D verschieden gestalten wenn man jedem der in die Rechnung eintretenden Winkel einen positiven Werth beilegt; setzt man aber fest dass der Winkel A D B stets mit $+ \psi$, der Winkel A D C stets mit $+ \varphi$, der Winkel C A D mit $\pm \alpha$ und C B D mit $\pm \beta$ bezeichnet werde, je nachdem die Schenkel D A und D B rechts oder links von C A und C B liegen: so fallen die Ausdrücke für C, wie man aus den beigedruckten

Fig. 49. Fig. 50.

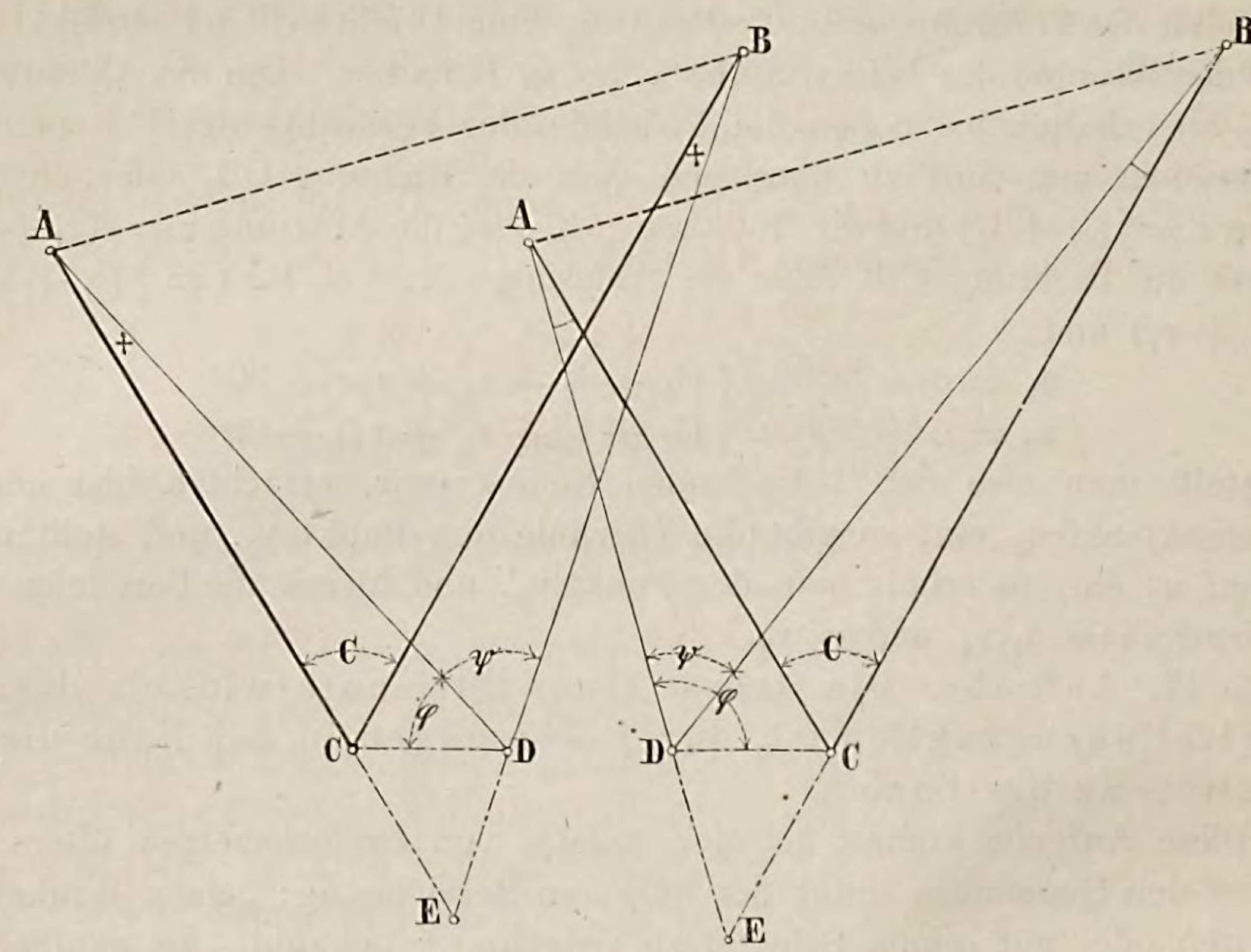
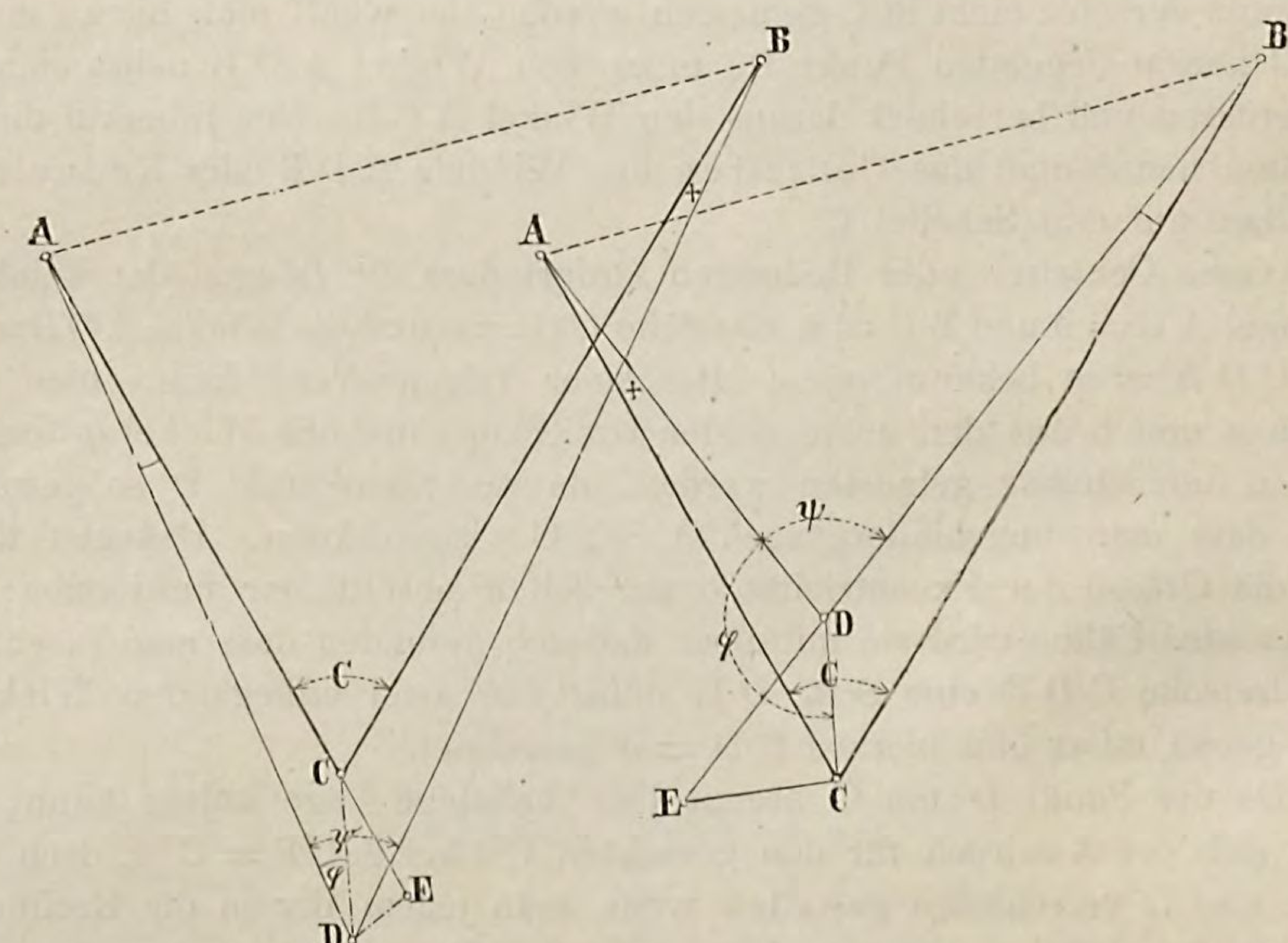


Fig. 51. Fig. 52.



Figuren durch Construction (d. h. dadurch dass man von D aus Parallellinien zu den Schenkeln C A und C B zieht) leicht selbst findet, in den einen allein zu berücksichtigenden Ausdruck zusammen:

$$C = \psi - \alpha + \beta = \psi + (\beta - \alpha) = \psi + \delta \tag{93}$$

welcher sagt dass die Verbesserung $\delta = \beta - \alpha$ mit ihrem sich von selbst ergebenden Vorzeichen dem Winkel ψ stets beizufügen ist. Nun ist nach Fig. 49

$$\sin \alpha = \frac{e}{b} \sin \varphi \text{ und } \sin \beta = \frac{e}{a} \sin (\varphi + \psi)$$

folglich, weil α und β immer nur sehr kleine Winkel sind, wenn man dieselben nunmehr in Secunden ausdrückt:

$$\alpha = \frac{e \sin \varphi}{b \sin 1''} = 206265'' \frac{e}{b} \sin \varphi$$

$$\beta = \frac{e \sin (\varphi + \psi)}{a \sin 1''} = 206265'' \frac{e}{a} \sin (\varphi + \psi)$$

$$\delta = 206265'' \frac{e}{a} \left(\sin (\varphi + \psi) - \frac{a}{b} \sin \varphi \right) \tag{94}$$

$$C = \psi + 206265'' \frac{e}{a} \left[\sin (\varphi + \psi) - \frac{a}{b} \sin \varphi \right] \tag{95}$$

Manche Geodäten messen den dritten Winkel eines Dreiecks selbst dann ausserhalb des Scheitels wenn Nichts die centrische Aufstellung des Theodolithen hindert. Als Grund dieses Verfahrens geben sie die grössere Unbefangenheit an welche der Beobachter besitze wenn er das von seiner directen Messung erwartete Resultat nicht im Voraus kennt.

Die Grössen a, b, e, φ, ψ aus denen sich der Winkel C ergibt, nennt man dessen Centrirungselemente. Wir wollen deren Verwerthung an zwei Beispielen zeigen. Es sei für beide Fälle log a = 4,37865, log b = = 4,01233 und log e = 0,92841 und für den Fall

Nr 1 (Fig. 49) weiter noch $\varphi = 5^0\ 54'\ 29''$ und $\psi = 61^0\ 25'\ 11''$, so stellt sich die Rechnung so:

$\log \varrho = 5{,}31443$	$\log \varrho = 5{,}31443$
$\log e = 0{,}92841$	$\log e = 0{,}92841$
$C . \log b = 5{,}98767$	$C . \log a = 5{,}62135$
$\log \sin \varphi = 9{,}01255$	$\log \sin (\varphi + \psi) = 9{,}96507$
$\log \alpha = 1{,}24306$	$\log \beta = 1{,}82926$
$\alpha = + 17'',50$	$\beta = 67'',49$

$C = 61^0\ 25'\ 11'' - 17'',50 + 67'',50 = 61^0\ 25'\ 11'' + 50'' = 61^0\ 26'\ 1''$

Es sei ferner für den Fall

Nr 2 (Fig. 50) weiter noch $\varphi = 97^0\ 45'\ 20''$ und $\psi = 61^0\ 23'\ 34'',6$ so ist

$\log \varrho = 5{,}31443$	$\log \varrho = 5{,}31443$
$\log e = 0{,}92841$	$\log e = 0{,}92841$
$C . \log b = 5{,}98767$	$C . \log a = 5{,}62135$
$\log \sin \varphi = 9{,}99601$	$\log \sin (\varphi + \psi) = 9{,}55008$
$\log \alpha = 2{,}23652$	$\log \beta = 1{,}41427$
$\alpha = - 172'',39$	$\beta = - 25'',96$

$C = 61^0\ 23'\ 34'',60 + 172'',39 - 25'',96 = 61^0\ 23'\ 34{,}60 + 146'',43 =$
$= 61^0\ 26'\ 1''$.

Die Centrirungsformel (95) lässt sich auch dadurch richtig anwenden dass man das Entstehen der Vorzeichen von α und β in die Grösse und Lage des Winkels φ legt. Indem man nämlich festsetzt dass dieser Winkel stets von der Richtung der Centrallinie D C aus und, vom Scheitel D aus betrachtet, von links nach rechts zu zählen ist, wird nach den Formeln für

$$\sin\alpha = \frac{e}{b}\sin\varphi \quad \text{oder} \quad \alpha = \frac{e\sin\varphi}{b\sin 1''}$$

$$\sin\beta = \frac{e}{a}\sin(\varphi+\psi) \quad \text{oder} \quad \beta = \frac{e\sin(\varphi+\psi)}{a\sin 1''}$$

im Falle der Fig. 49 Winkel φ und $(\varphi+\psi) < 180^0$, daher α und β positiv;

im Falle der Fig. 50 ist $360^0 - \varphi$ für φ und $360^0 - \varphi + \psi = 360^0 - (\varphi - \psi)$ zu setzen und daher (weil $\psi < \varphi$) sowohl α als β negativ;

im Falle der Fig. 51 ist für φ ebenfalls $360^0 - \varphi$ und für $\varphi + \psi$ daher $360^0 - \varphi + \psi = 360^0 + \psi - \varphi$ zu setzen; es ist folglich α negativ und (weil $\psi > \varphi$) β positiv;

im Falle der Fig. 52 ist endlich $\varphi < 180^0$ und $(\varphi + \psi) > 180^0$, daher α positiv und β negativ.

Setzt man in den oben gerechneten zwei Beispielen die hier angegebenen Werthe für φ ein, so ändert sich an dem ersten (Nr 1, Fig. 49) gar nichts und an dem zweiten wird $\log\varphi = 9{,}90601_{neg}$ und $\log(\varphi+\psi) = 9{,}55008_{neg}$, wodurch die Werthe von α und β das Vorzeichen minus bekommen das ihnen bei der ersten Rechnung auf Grund der Fig. 50 beigelegt wurde.

Es kommt nicht selten vor dass man von Einem Standpunkte aus mehrere Winkel auf den Scheitel zu reduciren hat. In diesem Falle ist es einfacher nicht die Winkel sondern die vom Standpunkte D aus gemessenen Richtungen zu centriren. Bezeichnet man nämlich die in Bezug auf D A gemessenen Richtungswinkel der Punkte B B′ B″. . . nacheinander mit ψ' ψ'' ψ'''. . . und die Entfernungen C B, C B′, C B″. . . beziehlich mit a, a′, a″. . . so lässt sich die Formel (95) so oft anwenden als zu centriren ist wenn man in derselben einfach die Buchstaben a und ψ strichelt, so dass die nunmehr auf C A bezogenen Richtungen der Punkte B B′ B″. . . . folgende werden:

$$C = \psi + 206265''\, e\left(\frac{\sin(\varphi+\psi)}{a} - \frac{\sin\varphi}{b}\right)$$

$$C' = \psi' + 206265''\, e\left(\frac{\sin(\varphi+\psi')}{a} - \frac{\sin\varphi}{b}\right)$$

$$C'' = \psi'' + 206265''\, e\left(\frac{\sin(\varphi+\psi'')}{a} - \frac{\sin\varphi}{b}\right) \quad \text{u. s. w.}$$

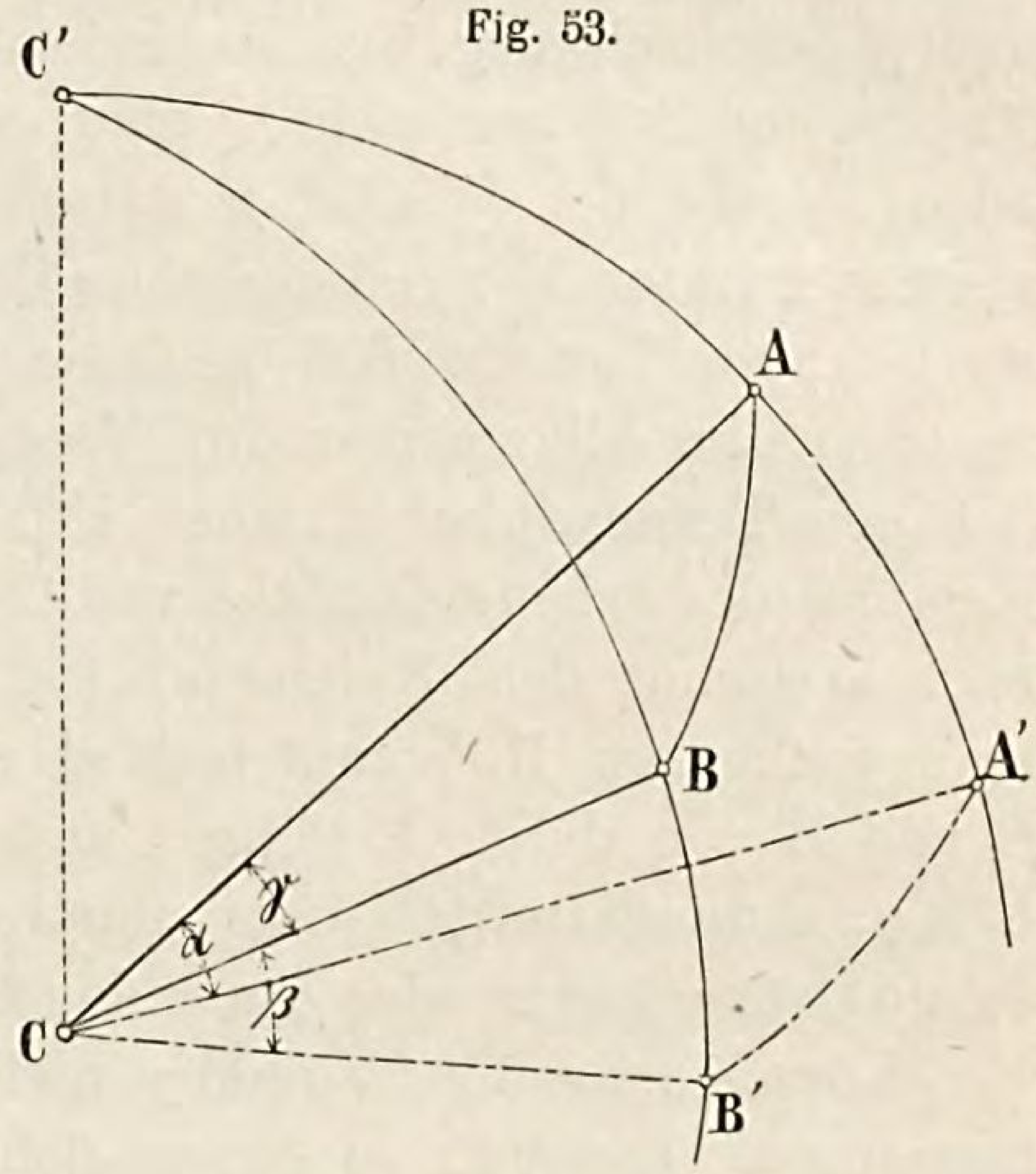
Hieraus ergibt sich dass, wenn die erste Verbesserung oder Reduction δ nach Gl (94) einmal berechnet ist, für die folgenden nur mehr die Quotienten $\sin(\varphi+\psi') : a'$, $\sin(\varphi+\psi'') : a''$. . . . neu zu berechnen sind,

und dass folglich durch die Zusammenfassung mehrerer Reductionen Arbeit gespart werden kann.

§. 48. Aufgabe. Ein schiefer Winkel und die Neigung seiner Schenkel gegen den Horizont ist gegeben: man soll die Grösse seiner Horizontalprojection berechnen.

Die Bestimmung dieser Projection wird von den Geometern mit dem kürzeren Ausdrucke „einen Winkel auf den Horizont zu reduciren" bezeichnet. Soll der schiefe Winkel A C B (Fig. 53) reducirt werden, so denke man sich durch seinen Scheitel C eine Horizontalebene und durch jeden Schenkel C A, C B eine Verticalebene gelegt. Diese Verticalebenen schneiden sich selbst in der lothrechten Geraden C C′ und die Horizontalebene nach den Linien C A′, C B′ welche die gesuchte Horizontalprojection A′ C B′ des gegebenen schiefen Winkels A C B vorstellen. Denkt man sich ferner um den Scheitel C eine Kugelfläche vom Halbmesser = 1 beschrieben, so wird diese von der Ebene des schiefen Winkels nach dem grössten Kreise A B, von der Horizontalebene nach A′ B′, und von den Verticalebenen nach den Bögen C′ A A′, C′ B B′ geschnitten; es entstehen folglich zwei sphärische Dreiecke die beide den gesuchten Winkel enthalten, nämlich das gleichschenklige Dreieck A′ B′ C′ und das schiefwinklige A B C′. Von dem letzteren sind die drei Seiten bekannt; denn es ist A B = c = γ = dem gemessenen schiefen Winkel A C B; A C′ = b = $90^0 - \alpha$ = dem Complement des Neigungswinkels α des Schenkels C A; B C′ = a = $90^0 - \beta$ = dem Complement des Neigungswinkels β des Schenkels C B.

Fig. 53.



Man findet folglich den Winkel A′ C B′ = C′ = γ' aus der bekannten Grundformel der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

wenn man darin $a = 90^0 - \beta$, $b = 90^0 - \alpha$, $c = \gamma$ und $C = \gamma'$ setzt. Nach dieser Substitution und einer einfachen Umformung ergibt sich schliesslich

$$\cos \frac{\gamma'}{2} = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma)}{\cos \alpha \cos \beta}} \qquad (96)$$

Will man den Winkel γ' nicht hieraus berechnen, so setze man in der aus der vorigen Grundformel folgenden Gleichung:

$$\cos \gamma = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma' \qquad (97)$$

den bekannten Quotienten $\sin \alpha \sin \beta : \cos \gamma = \cos \delta$ und bestimme mit

Benützung des hieraus berechneten Hilfswinkels δ den Winkel γ' aus der Gleichung:

$$\cos\gamma' = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}\delta\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta} \tag{98}$$

welche sich sehr einfach entwickelt.

In den vorausgehenden Entwickelungen wurden α und β als Höhenwinkel und desshalb beide als positive Grössen angesehen; erscheint nun einer oder der andere als Tiefenwinkel, so ist er als negative Grösse zu behandeln und zu berücksichtigen dass $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$ ist. Werden α und β zugleich negativ, so ändern sich selbstverständlich die Ausdrücke Nr 96 und 98 gar nicht. Sind α und β Höhenwinkel, so können sie eben so wie der Winkel γ mittels des Spiegelkreises oder des Spiegelsextanten unter Anwendung eines Quecksilber- oder Glashorizonts gemessen werden; als Tiefenwinkel sind sie aber auf andere Weise zu bestimmen, wozu sich im Allgemeinen drei Wege darbieten. Entweder kann man nämlich den Tiefenwinkel in einen Höhenwinkel verwandeln, indem man die Neigung des Schenkels nicht von C sondern von A oder B aus misst; oder man bestimmt den Tiefenwinkel durch einen Theodolithen; oder endlich man sucht den Höhenunterschied zwischen C und A = p, und zwischen C und B = q durch Nivelliren und die horizontalen Längen C A = m und C B = n durch mittel- oder unmittelbare Messung, und berechnet die absolute Grösse von α oder β aus den Gleichungen $m\operatorname{tg}\alpha = p$ und $n\operatorname{tg}\beta = q$.

Könnte man den Winkel γ nicht mit einem Theodolithen oder Spiegelinstrumente messen, so liesse sich seine Horizontalprojection γ' dadurch finden dass man in den Schenkeln C A und C B zwei Punkte D und E absteckt, in dem dadurch gebildeten Dreiecke C D E die drei Seiten c, d, e und ihre Neigungswinkel oder sofort die Horizontalprojectionen c′, d′, e′ dieser Seiten misst und aus letzteren nach der bekannten trigonometrischen Formel $(d'e')^2\sin^2\gamma' = 4s(s-c')(s-d')(s-e')$ worin $2s = c' + d' + e'$ ist, den Winkel γ' berechnet.

2. Einfluss der regelmässigen Beobachtungsfehler auf die Winkelmessungen.

§. 49. Bekanntlich ist keine Messung ganz fehlerfrei wenn sie auch mit den vorzüglichsten Instrumenten und unter den günstigsten äusseren Bedingungen von dem geschicktesten Geometer ausgeführt wurde; denn aus der trotz aller Feinheit doch noch bestehenden Unvollkommenheit unserer Sinne und Instrumente, aus unberechenbaren Einflüssen der Witterung, Beleuchtung, Temperatur u. dgl., oder aus anderen zufälligen Störungen die der Beobachter kaum wahrnimmt, entspringen immer gewisse wenn auch ganz kleine Abweichungen von der absolut richtigen Grösse die wir messen wollen. Diese Abweichungen heissen nach §. 2, S. 5 dieses Bands

zufällige oder unvermeidliche Fehler und werden in dem fünften Capitel dieses Abschnitts bezüglich ihres Einflusses auf die Messungsresultate noch besonders betrachtet, sowie sie hinsichtlich ihrer Ausgleichung schon in dem ersten Abschnitte untersucht worden sind. Es gibt aber auch Messungsfehler welche durch geschickte Behandlung vorzüglicher Instrumente und geeignete Messoperationen vermieden werden können, oder deren Einfluss auf die Beobachtungsresultate sich wenigstens berechnen und dadurch ausgleichen lässt. Diese Fehler heissen im Gegensatze zu den zufälligen Fehlern constante oder regelmässige Fehler, weil sie unter denselben Umständen stets in gleicher Grösse auftreten und aus den sie veranlassenden Ursachen berechnet werden können. Nur von diesen Fehlern ist hier die Rede.

Die regelmässigen oder constanten Fehler welche bei der Winkelmessung vorkommen, können verschiedene Ursachen haben; zu den am häufigsten auftretenden Fehlerquellen sind folgende zu rechnen:

1) die excentrische Aufstellung des Theodolithen oder des Messtisches;
2) die Excentricität der Alhidade des Theodolithen oder der Kippregel;
3) die Excentricität der Fernrohre dieser Instrumente;
4) die schiefe Lage der Limbus- oder Messtischebene;
5) die Neigung der Visirebene gegen das Loth;
6) die unrichtige Lage der anzuvisirenden Punkte.

Bei den nachfolgenden Berechnungen der Einflüsse dieser Fehlerquellen auf die unmittelbaren Winkelmessungen wird vorausgesetzt dass immer nur eine Quelle vorhanden sei aus der Fehler entspringen, während alle übrigen als nicht vorhanden angesehen werden. Nach der Grösse ihres Einflusses wird sich selbstverständlich die Sorgfalt zu richten haben welche auf ihre Vernichtung zu wenden ist. Am Schlusse dieses Abschnitts werden alle Fehler zusammengefasst werden.

§. 50. Aufgabe. Die Grösse des Einflusses der excentrischen Aufstellung des Theodolithen oder Messtisches auf die Messung eines Horizontalwinkels zu bestimmen.

Der hier zu behandelnde Messungsfehler besteht darin dass beim Theodolithen die Alhidadenaxe und beim Messtische der auf dem Blatte gegebene Scheitelpunkt des Winkels nicht in das Loth des natürlichen Winkelscheitels gestellt wird. Denkt man sich dieses Loth bis zum Horizontalkreise des Theodolithen oder bis zur Messtischebene verlängert, so wird der Abstand seines Schnittpunkts von dem Durchgangspunkte der Alhidadenaxe oder von dem Bildpunkte des Winkelscheitels die Grösse der Excentricität der Aufstellung des einen oder des anderen Instruments bezeichnen.

Ist in Fig. 54 der Punkt C die Projection des natürlichen Winkelscheitels und D die Alhidadenaxe des Theodolithen oder der Bildpunkt des Winkelscheitels auf dem Messtischblatte, stellt also die Linie $CD = e$ die Excentricität der Aufstellung des Winkelmessers vor: so wird statt des auf dem Felde gegebenen Horizontalwinkels $ACB = C$ der Horizontal-

Fig. 54. Fig. 55.

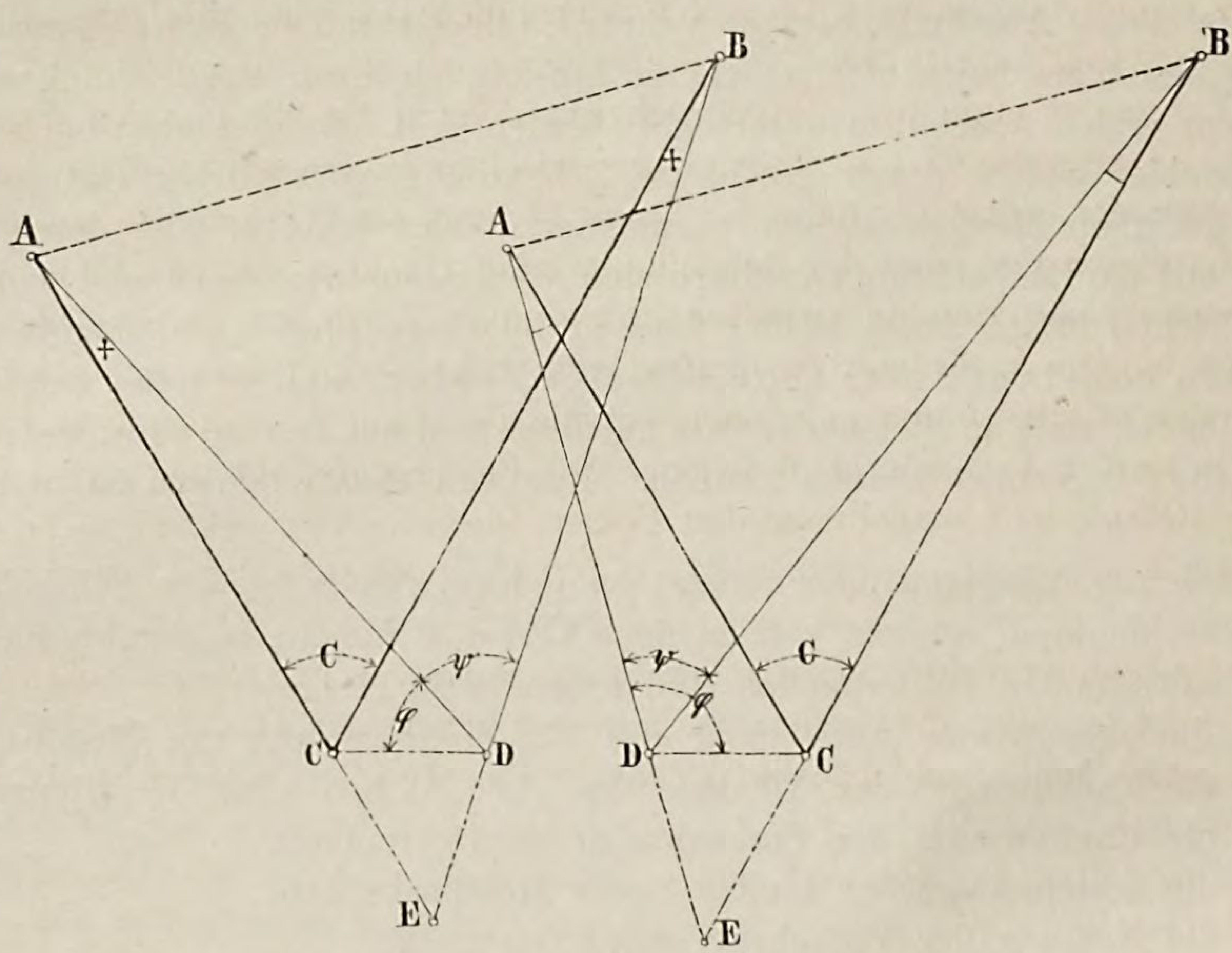
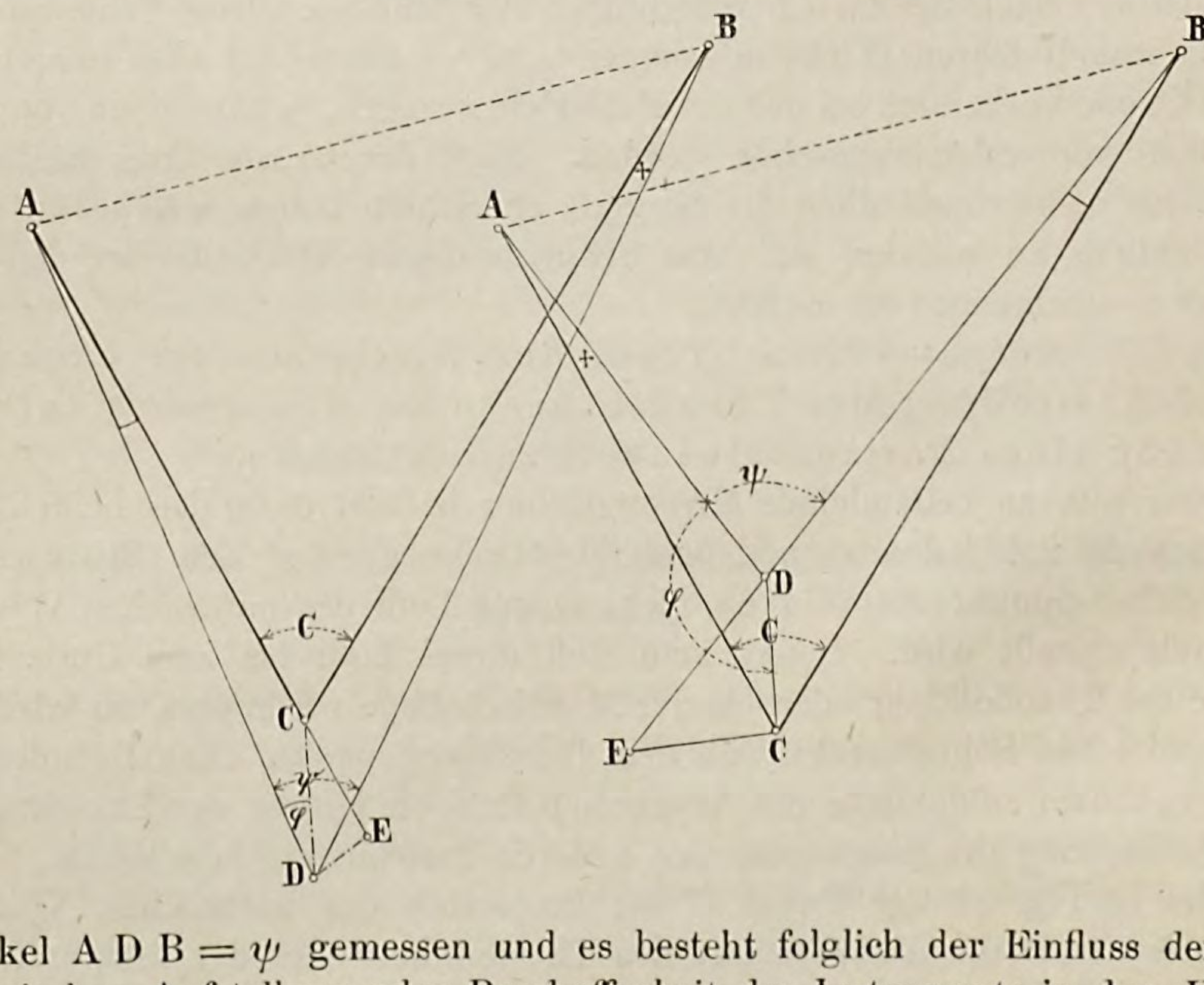


Fig. 56. Fig. 57.



winkel A D B $= \psi$ gemessen und es besteht folglich der Einfluss der excentrischen Aufstellung oder Beschaffenheit des Instruments in dem Unterschiede der Winkel C und ψ, d. h. es ist der gesuchte Fehler

$$\delta = C - \psi = \beta - \alpha \tag{99}$$

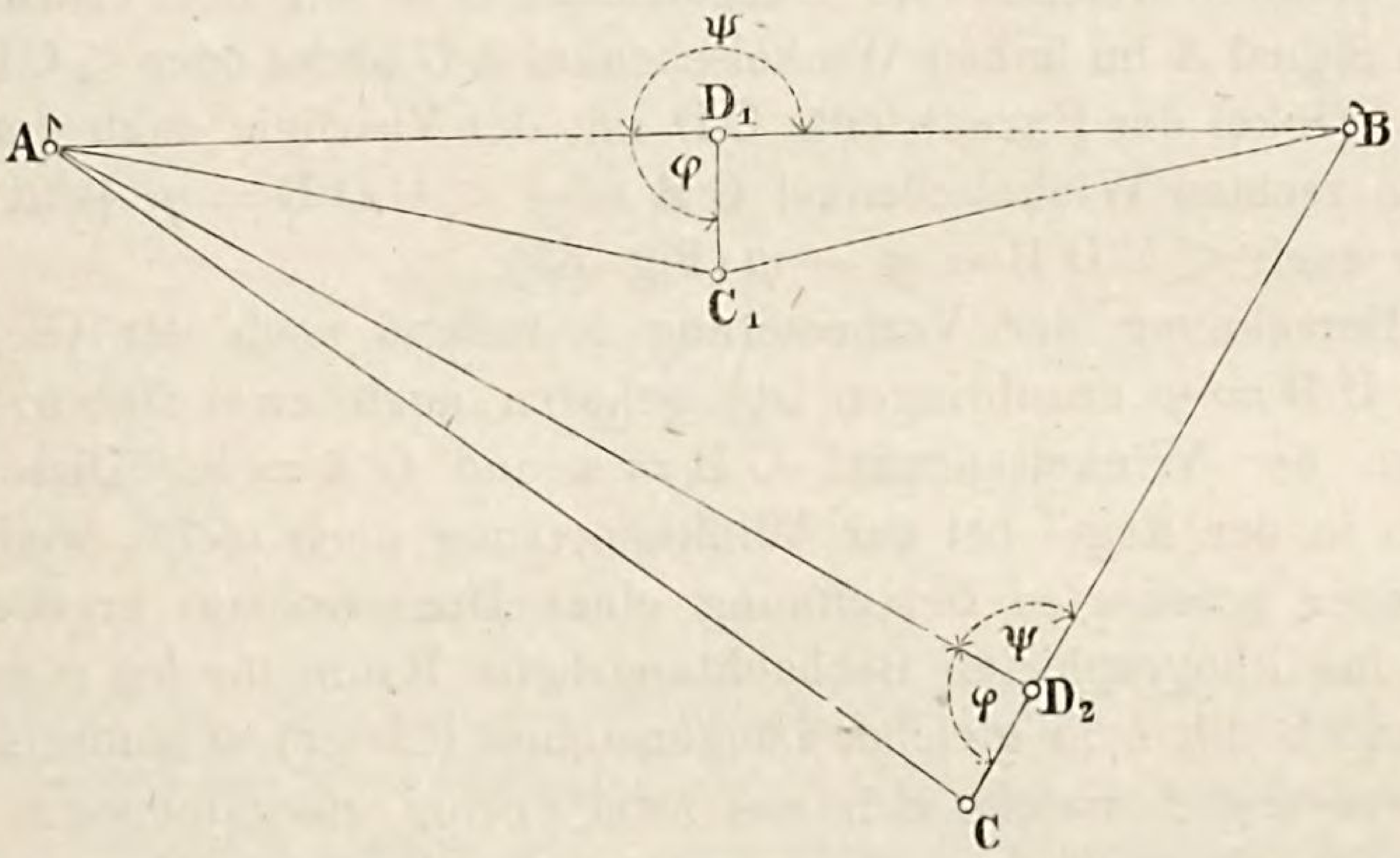
wobei α den sehr kleinen Winkel C A D und β den ebenfalls sehr kleinen Winkel C B D bezeichnet.

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem in Nr 93 aus den Figuren 49 bis 52 abgeleiteten, so findet man zwischen beiden eine völlige Uebereinstimmung. Auch hier kann der Punkt D rings um C herum liegen, wesshalb bezüglich der Lage der Reductionswinkel α und β die vier Fälle möglich sind welche jene hier wiederholten Figuren darstellen und welche sich in dem obigen Ausdrucke zusammenfassen lassen wenn man α und β positiv oder negativ nimmt, je nachdem die Schenkel D A oder D B rechts oder links von C A oder C B liegen. Mit Bezug auf §. 47 und namentlich auf Gl (95) erhält man daher den Fehler oder die Verbesserung

$$\delta = 206265'' \frac{e}{a} \left[\sin(\varphi + \psi) - \frac{a}{b} \sin \varphi\right] \tag{100}$$

Der Einfluss δ der excentrischen Aufstellung des Instruments wird null wenn $C = \psi$ oder $\beta = \alpha$ ist, d. h. wenn der Punkt D auf dem Kreise A B C liegt, und wenn die Winkelschenkel im Vergleiche zur Excentricität

Fig. 58.



sehr lang sind. Er wird bei unveränderlichem Werthe der Grössen a, b, c am grössten wenn $\varphi = 90^0$ und $\psi = 180^0$, also $\varphi + \psi = 270^0$ ist, d. h. wenn sich der Standpunkt D des Instruments, wie Fig. 58 zeigt, auf der Geraden A B befindet und der zu messende Winkel C nahezu zwei rechten gleich ist. In dem Falle des Maximums wird

$$\delta = -\,206265''\, e \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \tag{101}$$

und in dem Falle wo $\varphi = \psi = 90^0$ ist:

$$\delta = -\,206265'' \frac{e}{b} \tag{102}$$

Wenn also die gegebenen Excentricitätselemente e = 1,7878 m, die Winkel C D A = $\varphi = 131^0\,44'$ und C D B = $\varphi + \psi = 208^0\,47'$, endlich log a = log C B = 4,67109 und log b = log C A = 4,43863 sind, so wird

$\delta = -3'',79 - 10'',02 = -13'',1$ und $C = \psi - 13'',1$. Wäre bei einer Messtischaufnahme $e = 0{,}03$ m und $a = b = 60$ m, so würde im Falle des Maximums $\delta = -206'',3 = -3'\,26'',3$ und wenn $\varphi = \psi = 90^0$ ist $\delta = -103'',1 = -1'\,43'',1$. Wenn sich solche Fehler auch noch bei einer Messtischaufnahme ertragen liessen, so können sie doch nimmermehr bei einer Winkelmessung mit dem Theodolithen geduldet werden, wesshalb auf die centrische Aufstellung dieser Instrumente alle Sorgfalt verwendet werden muss.

In Bezug auf die Einrichtung der Beobachtungshefte für excentrisch zu messende Winkel ist zu bemerken dass man je nach der Zahl dieser Winkel und der Beschaffenheit der Theodolithen eines der drei Schemata A, B, C auf den Seiten 281, 301, 309 des ersten Bands anwenden kann, wenn man nur entweder in der Ueberschrift oder in der Spalte für Bemerkungen die Excentricitäts-Elemente welche bei der Messung miterhoben werden, einsetzt, nämlich nach der vorstehenden Formel (100)

1) den Abstand des Theodolithen-Standpunkts D von dem Scheitel C des zu messenden Winkels oder die Excentricität $CD = e$ in Meter;
2) den Winkel welchen die Excentricität CD mit der Visirlinie nach dem Signal A im linken Winkelschenkel AC bildet oder $< CDA = \varphi$;
3) den Winkel der Excentricität CD mit der Visirlinie nach dem Signal B im rechten Winkelschenkel CB oder $< CDB = \varphi + \psi$ (Fig. 54) oder auch $< CDB = \varphi - \psi$ (Fig. 55).

Zur Berechnung der Verbesserung δ welche nach der Gl (99) am Winkel $ADB = \psi$ anzubringen ist, gehören noch zwei Daten, nämlich die Längen der Winkelschenkel $CB = a$ und $CA = b$. Diese Längen kennt man in der Regel bei der Winkelmessung noch nicht, weil sie sich erst aus einer genäherten Berechnung eines Dreiecknetzes ergeben; man lässt aber im lithographirten Beobachtungshefte Raum für log a und log b, wobei a und b mit e in gleicher Längeneinheit (Meter) auszudrücken sind. Die Verbesserung δ welche sich aus zwei Posten zusammensetzt wird in der Spalte für Bemerkungen berechnet und mit ihrem Vorzeichen dem Mittel aus allen beobachteten Werthen von ψ beigefügt um den richtigen Winkel $C = \psi + \delta$ zu erhalten.

§. 51. Aufgabe. Den aus der Excentricität der Alhidade entspringenden Fehler in der Winkelaufnahme zu berechnen.

Wird der Horizontalwinkel durch einen Theodolithen gemessen, so beträgt der Fehler f nach Abschnitt III, C, 2 der Instrumentenlehre

$$f = 412530'' \cdot \frac{e}{r} \sin \tfrac{1}{2} \varphi' \cos (\omega - \tfrac{1}{2} \varphi') \qquad (103)$$

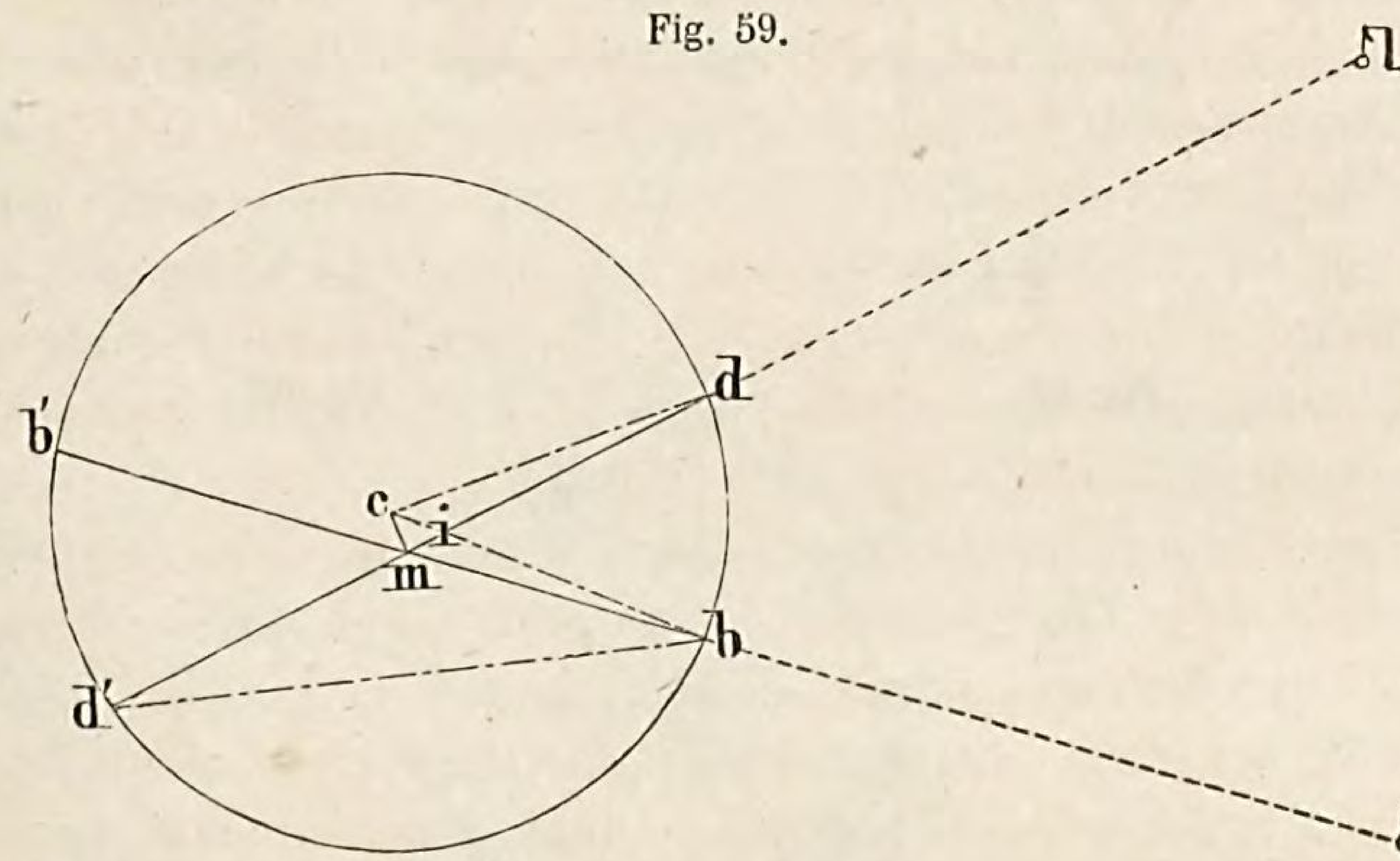
wobei mit Bezug auf Fig. 59 folgende Bezeichnungen gebraucht sind:

e für die Excentricität (c m) der Alhidade;
ω „ den Neigungswinkel (d c m) der Linien c m und c d;
r „ den Halbmesser (c b, c d) des Limbus, und
φ' „ den am Nonius abgelesenen Winkel (b c d).

Der Werth von f kann, wie in der Instrumentenlehre dargethan ist, selbst für eine Excentricität der Alhidade von nur $\frac{1}{20}$ Linie über 3 Minuten betragen, also sehr gross werden. Dieser Einfluss lässt sich aber einfach beseitigen wenn am Theodolithen zwei sich gegenüberstehende Nonien angebracht sind und abgelesen werden; wesshalb hier wiederholt auf die Wichtigkeit zweier Nonien am Theodolithen und deren gleichzeitige Benützung aufmerksam gemacht wird.

Bei Messtischaufnahmen tritt die Oberfläche des Tischblatts an die Stelle des Limbus, der Bildpunkt des Winkelscheitels an die Stelle des Kreismittelpunkts, und die Linealkante der Kippregel an die Stelle der Alhidade. Legt man nämlich diese Kante nicht genau an den abgebildeten Scheitelpunkt des Winkels an, so ist eine Excentricität der Alhidade vorhanden und es ist ihre Grösse gleich dem Abstande des gegebenen Scheitelpunkts von dem Scheitel der sich durch die Aufnahme des Winkels ergibt.

Fig. 59.



Stellt in den vier Figuren 60 bis 63 der Punkt C den auf dem Messtische abgebildeten Winkelscheitel und A C B den aufzunehmenden Winkel vor, so erhält man, wenn das Lineal nicht in C sondern entfernt davon angelegt wird, statt des Winkels A C B = C den Winkel A D B = ψ. Verbindet man D mit C, so ist C D die Excentricität e des Lineals der Kippregel und $\delta = C - \psi$ der hieraus entspringende Fehler des Winkels C. Nennt man wieder die kleinen Winkel bei A und B beziehlich α und β, so ist nach den genannten Figuren, und da im Uebrigen die Bezeichnungen und Entwickelungen des §. 47 gelten, hier wie dort der Fehler

$$\delta = 206265'' \frac{e}{a} \left[\sin(\varphi + \psi) - \frac{a}{b} \sin \varphi\right] \qquad (104)$$

Es gelten somit alle Folgerungen welche im vorigen Paragraph in Bezug auf die excentrische Aufstellung aus dieser Gleichung gezogen wurden, auch für die Grösse des Einflusses der Excentricität der Linealkante. Wenn hiernach die grössten Werthe von δ durch die Ausdrücke Nr 101 und 102 gegeben sind, so sieht man leicht ein dass eine geringe Excentricität der

Fig. 60.

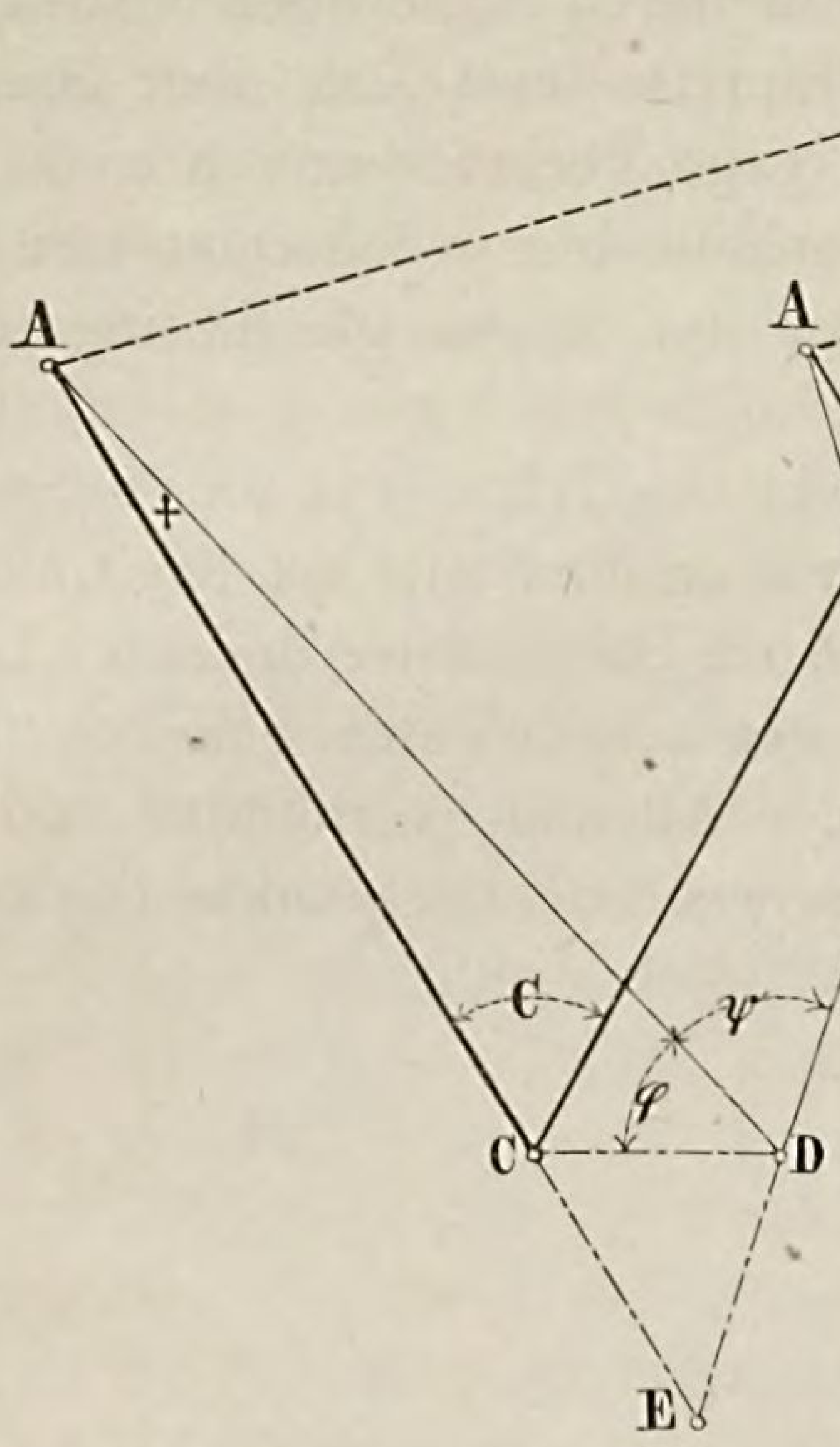


Fig. 61.

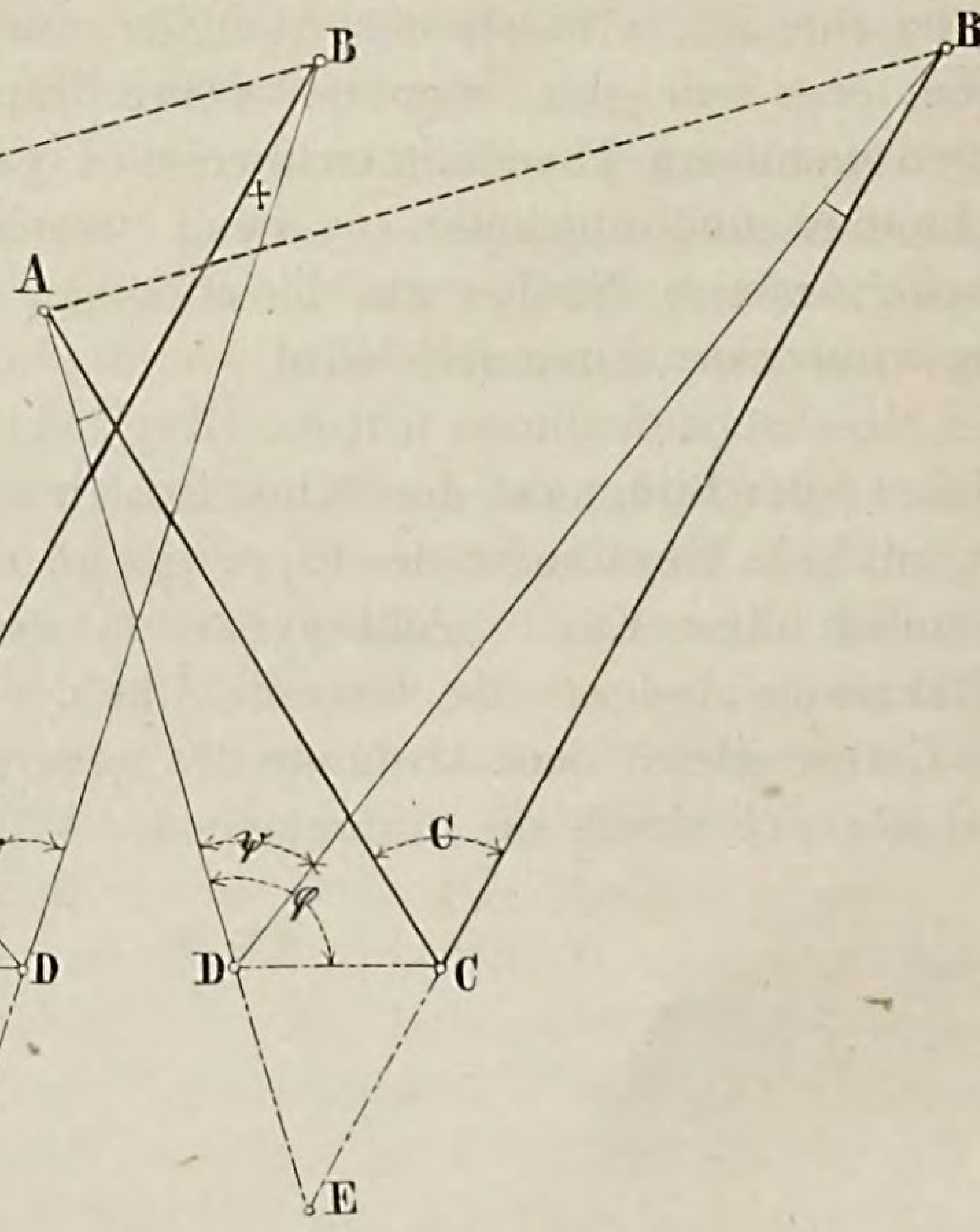


Fig. 62.

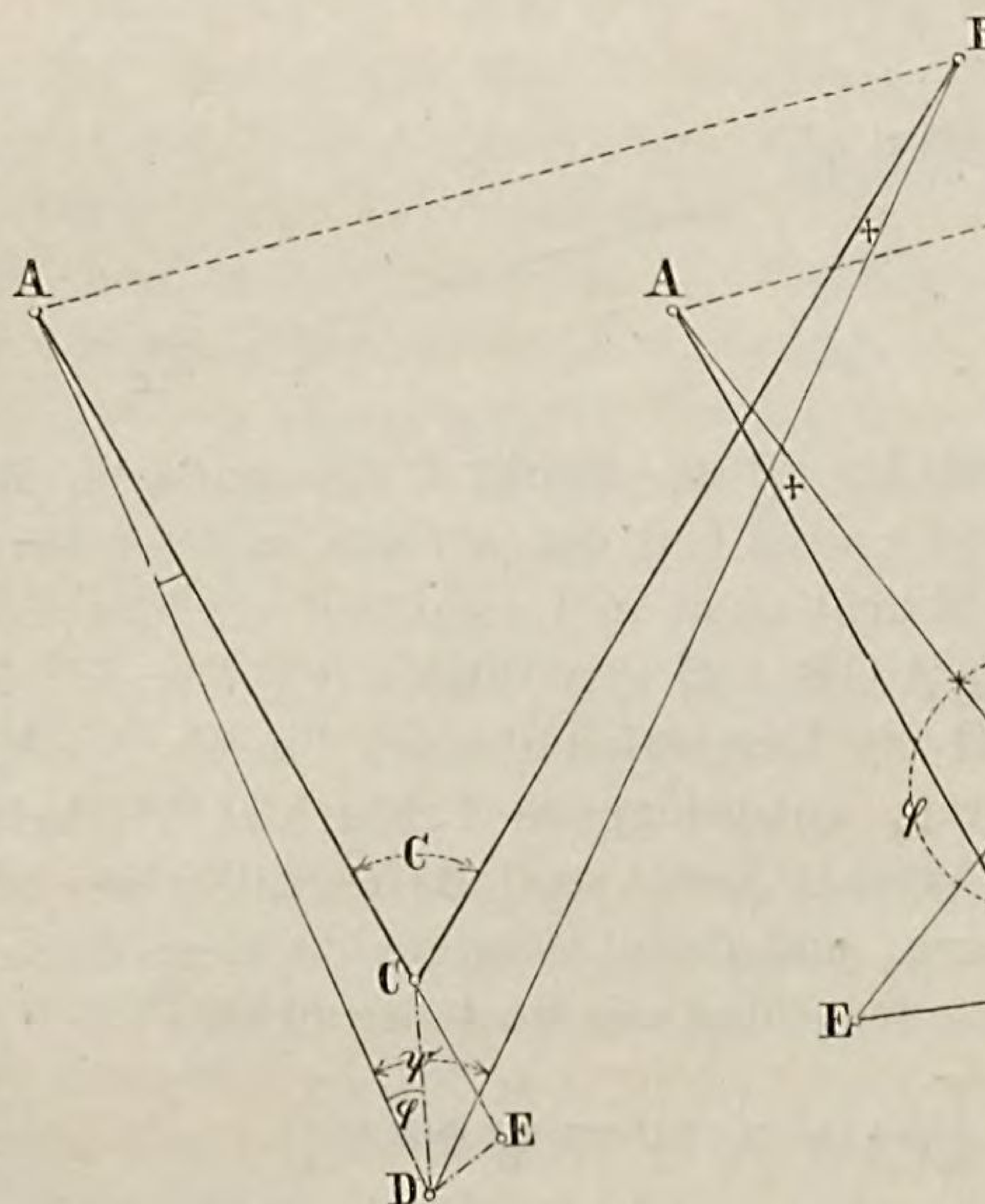
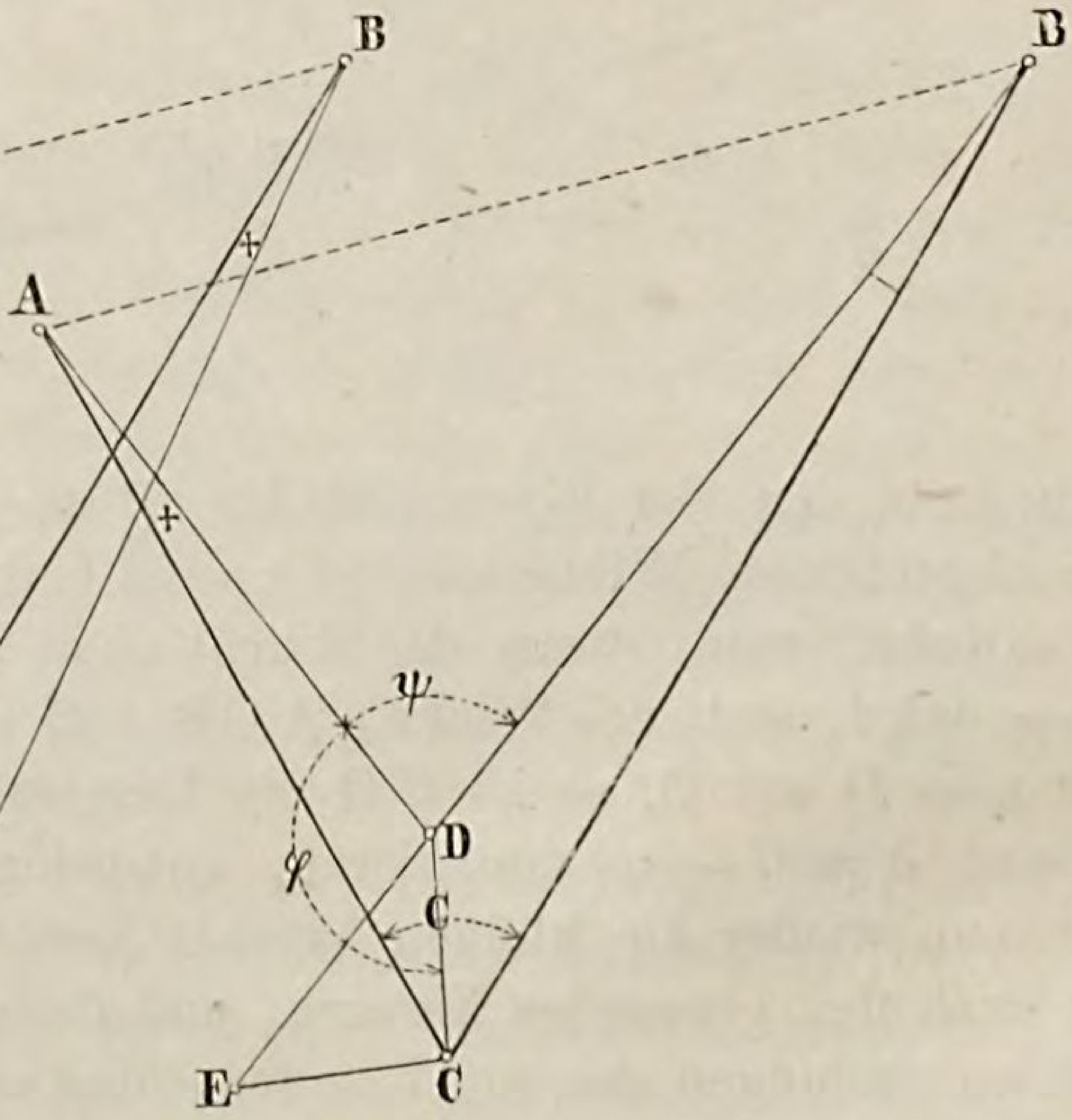


Fig. 63.



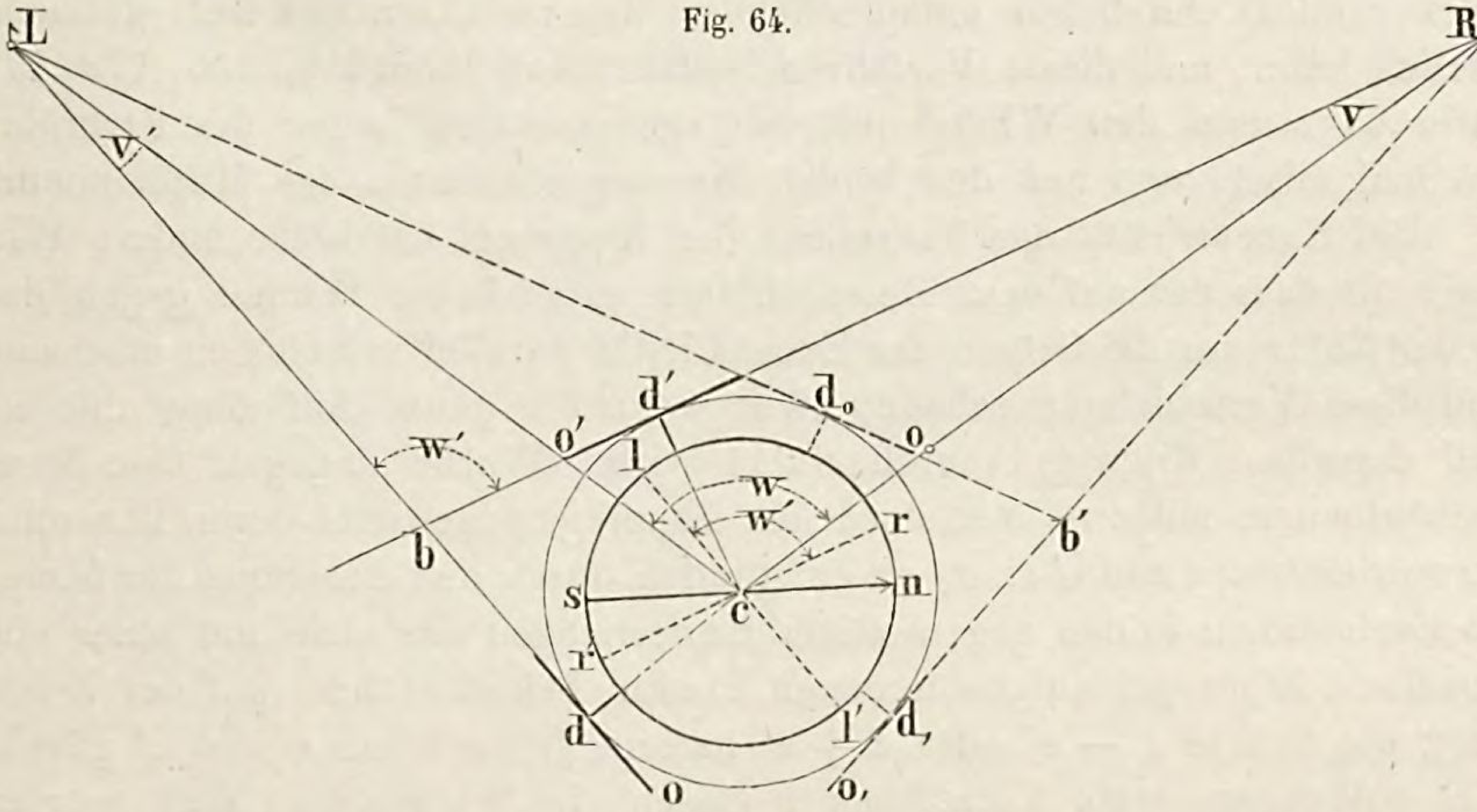
Linealkante der Kippregel der Grösse des zu messenden Winkels nicht schadet; denn wenn e sogar 3 mm betrüge und a = b = 60 m wäre, so würde δ nur $10'',3$ ausmachen. Etwas Anderes aber ist es wenn mit diesem Apparate zusammenhängende Aufnahmen zu machen sind. Würde

man hierbei die Linealkante nicht genau an die gegebenen Scheitelpunkte der Winkel anlegen, so entstünden in der gegenseitigen Entfernung einzelner Punkte Fehler welche der Excentricität des Kippregellineals, mit dem Massstabe der Aufnahme gemessen, gleichkämen: bei der Verjüngung von 1 : 5000 würde somit eine Excentricität von 1 mm einem Fehler von 5 m entsprechen. Das scharfe Anlegen des Lineals der Kippregel an die voraus bestimmten Winkelscheitel kann somit für Messtischaufnahmen nicht genug empfohlen werden.

§. 52. Aufgabe. Zu bestimmen, wie gross der aus der Excentricität des Fernrohrs entspringende Fehler eines mit Theodolith oder Kippregel gemessenen Horizontalwinkels ist.

Denkt man sich durch die verticale Alhidadenaxe des Theodolithen oder durch die horizontale Linealkante der Kippregel eine Verticalebene gelegt

Fig. 64.



welche mit der Fernrohraxe parallel läuft, so ist der Abstand der letzteren Axe von der gedachten Ebene entweder null oder nicht. In dem ersteren Falle hat das Fernrohr des Instruments keine Excentricität, im letzteren heisst der Abstand der Fernrohraxe von jener Ebene die Excentricität des Fernrohrs oder der Absehlinie. Die Wirkung einer solchen Excentricität kann wie folgt berechnet werden.

Es sei in der obenstehenden Figur (64) c die horizontale Projection der Alhidadenaxe, o d die gleichnamige Projection der Fernrohraxe und c d = e die Excentricität des Fernrohrs des Theodolithen. Ist mit diesem über c horiontal gestellten Instrumente der Winkel L c R zu messen, so wird das Fernrohr zuerst die Richtung o d nach L und hierauf die Richtung o′ d′ nach R erhalten, wodurch statt des Winkels L c R = w der Winkel L b R = d c d′ = w′ gemessen wird. Der aus der Excentricität des Fernrohrs entspringende Fehler δ entspricht nun offenbar dem Unterschiede

dieser Winkel und ist daher, wenn man die kleinen Winkel b R c = v und d L c = v' setzt, durch die Gleichung gegeben:

$$\delta = w - w' = v' - v$$

Haben die Winkelschenkel c R, c L die Längen l, l', so wird, da l sin v = l' sin v' = e und genau genug

$$v = \frac{e}{l \sin 1''} \text{ und } v' = \frac{e}{l' \sin 1''}, \text{ der Fehler}$$

$$\delta = \frac{e}{\sin 1''}\left(\frac{1}{l'} - \frac{1}{l}\right) = 206265'' \, e \left(\frac{1}{l'} - \frac{1}{l}\right) \qquad (105)$$

Dieser Fehler ist null, wenn die Winkelschenkel gleich lang sind, und um so grösser, je mehr der Unterschied der Schenkellängen beträgt. Da sein Einfluss bedeutend werden kann und die Vernichtung desselben durch Berechnung umständlich und nicht immer möglich ist (insofern manchmal l und l' unbekannt sind): so ist jeder gute Theodolith so eingerichtet dass jener Einfluss durch ein entsprechendes Messverfahren auf Null gebracht werden kann, und dieses Verfahren besteht nach Band I §§. 156, 172, 177 darin dass man den Winkel mit entgegengesetzten Lagen des Fernrohrs zweimal misst, und aus den beiden Messungsresultaten das Mittel nimmt.

Die Excentricität der Visirebene der Kippregel hat keine andere Wirkung als dass der auf dem Messtischblatte gezeichnete Winkel gegen den in der Natur um die Grösse der Excentricität parallel verschoben erscheint, und diese Verschiebung schadet nicht wenn die ganze Aufnahme mit ein und derselben Kippregel durchgeführt wird. Würde dagegen eine Messtischaufnahme mit zwei verschiedenen Kippregeln gemacht deren Fernrohrexcentricitäten e und e' sind, so entstünden durch den Anschluss der beiden Theilaufnahmen in den gegenseitigen Entfernungen der nicht mit einer und derselben Kippregel aufgenommenen Punkte Fehler welche auf der Zeichnung die Grösse e — e' oder e + e' hätten, je nachdem e und e' gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen besässen; in Wirklichkeit aber würden die Fehler $\delta = m\,(e + e')$ sein wenn m die Verjüngung der Aufnahme bezeichnet.

Ein etwas schlimmerer Feind als die Excentricität der Visirebene ist die schiefe Lage dieser Ebene gegen die Linealkante; da aber der Parallelismus zwischen beiden nach früher gegebener Anweisung leicht geprüft und hergestellt werden kann, so erscheint es überflüssig die Folgen eines so leicht zu vermeidenden Fehlers weiter zu untersuchen.

§. 53. Aufgabe. Man soll den Fehler eines bei schiefer Lage der Limbus- oder Messtischebene aufgenommenen Horizontalwinkels berechnen.

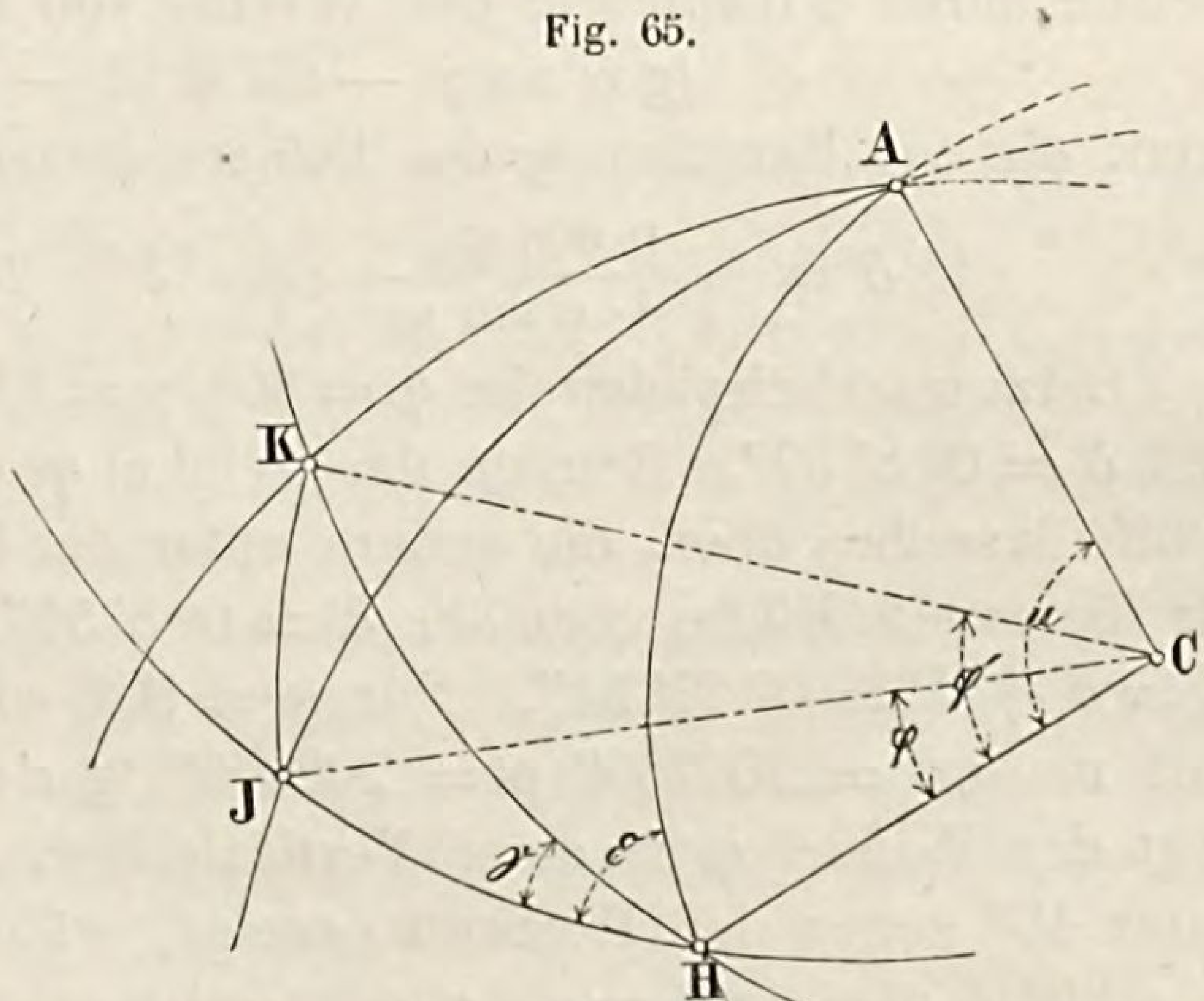
Dieser Fehler rührt weniger davon her dass der durch die Absehlinie des Fernrohrs auf den Limbus oder das Messtischblatt senkrecht projicirte Winkel nicht in einer Horizontalebene liegt, als davon dass die projicirenden Ebenen nicht lothrecht sind und vermöge der Einrichtung des Theodolithen und der Kippregel nicht lothrecht sein können, so lange die Limbus- und

Messtischebenen geneigt sind. Könnte man trotz dieser Neigung die anvisirten Winkelschenkel durch Lothebenen projiciren, so dürfte die schiefe Lage der Instrumentenebene ziemlich gross sein wenn ein auffallender Winkelfehler entstehen sollte, wie aus den hier einschlägigen Formeln des §. 48 hervorgeht.

Um einen klaren Begriff von der Entstehung des zu berechnenden Fehlers zu geben, denken wir uns den gegebenen Naturwinkel W dessen beide Schenkel in einer gegen den Horizont geneigten Ebene liegen, mittels einer durch den Winkelscheitel gehenden wagrechten Geraden in zwei Theile u und v zerlegt und jeden dieser Theile (also auch den ganzen Winkel) auf eine durch die Theilungslinie gehende Horizontalebene projicirt. Jeder Theilwinkel u und v hat einen wagrechten und einen geneigten Schenkel, und es gelten die Betrachtungen welche man für einen Winkel anstellt, auch für den anderen. Erfährt man auf diese Weise den Fehler δ in der Horizontalprojection φ des Winkels u, so gilt ein ähnlicher Ausdruck δ' für den Fehler der Projection ψ des Winkels v; der Fehler $\varDelta$ in der Horizontalprojection Ω des Winkels W welcher $= u \pm v$ ist, wird somit $= \pm (\delta \pm \delta')$ sein, je nach der Lage der Winkelschenkel. Die Verbindung der Werthe von δ und δ' ist in einem bestimmten Falle nicht schwierig, und da es hier nur darauf ankommt zu erfahren, ob aus einer schiefen Lage der Limbus- oder Messtischebene bedeutende Messungsfehler entspringen können, so genügt es hier einen schiefen Winkel u zu betrachten dessen einer Schenkel wagrecht ist.

Zu dem Ende denken wir uns durch diesen Schenkel die unter dem Winkel γ gegen den Horizont geneigte Limbus- oder Messtischebene gelegt und darauf den Winkel u dessen geneigter Schenkel mit dem Horizont den Winkel α bilden soll, während seine Ebene unter dem Winkel ε dagegen geneigt ist, senkrecht projicirt, wie es durch die Visirebene in der That geschieht. Nennt man diese Projection φ' und die wahre φ, so ist der Fehler des Winkels φ gleich $\delta = \varphi' - \varphi$, und es kommt nur mehr darauf an denselben durch die gegebenen Grössen φ, α, γ auszudrücken.

Fig. 65.



Stellt in Fig. 65 der Punkt C den Scheitel, C H den wagrechten und C A den geneigten Schenkel des Winkels A C H = u vor; bezeichnet ferner die Linie C J die Horizontalspur einer durch C A gelegten Verticalebene und

CK den Schnitt einer zweiten durch CA gehenden und auf der Limbus- oder Messtischoberfläche senkrecht stehenden Ebene mit dieser Fläche; und denkt man sich endlich um den Punkt C mit dem Halbmesser r = 1 eine Kugelfläche beschrieben welche die Horizontalebene nach dem grössten Kreisbogen HJ, die Limbusebene nach dem grössten Kreisbogen HK und die beiden projicirenden Ebenen nach den grössten Kreisbögen AJ und AK schneidet, so ist

$$\text{arc } AH = \text{ang } ACH = u$$
$$\text{arc } JH = \text{ang } JCH = \varphi$$
$$\text{arc } KH = \text{ang } KCH = \varphi'$$
$$\text{arc } JA = \text{ang } JCA = \alpha$$
$$W.\, AHJ = \varepsilon,\ W.\, JHK = \gamma$$

und es folgt aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke AJH:

$$\cot \varepsilon = \sin \varphi \cot \alpha \text{ und } \tang \varphi = \cos \varepsilon \tang u \tag{106}$$

während das ebenfalls rechtwinklige sphärische Dreieck AKH gibt

$$\tang \varphi' = \cos(\varepsilon - \gamma) \operatorname{tg} u \tag{107}$$

Mit Hilfe dieser drei Gleichungen kann man den Fehler $\delta = \varphi' - \varphi$ vollständig berechnen; denn da α und φ gegeben sind, so sucht man aus der ersten Gleichung (106) den Winkel ε, mit diesem erhält man aus der zweiten Gleichung (106) den Winkel u, und hiemit aus (107) den Winkel φ'. Soll die Auflösung der beiden ersten Gleichungen umgangen und φ' sofort aus φ, α, γ gefunden werden, so eliminire man aus der Gleichung (107) mit Hilfe der beiden (106) die Grössen u und ε, so dass

$$\operatorname{tg} \varphi' = \cos \gamma \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \alpha \sin \gamma \sec \varphi \tag{108}$$

wird. Nach einer bekannten trigonometrischen Formel ist

$$(1 + \operatorname{tg} \varphi' \operatorname{tg} \varphi) \operatorname{tg} (\varphi' - \varphi) = \operatorname{tg} \varphi' - \operatorname{tg} \varphi$$

welche durch Substitution des Werths von $\operatorname{tg} \varphi'$ und wenn man

$$\operatorname{tg} \alpha \sin \gamma - \sin \varphi (1 - \cos \gamma) = p \tag{109}$$

setzt, die zur Berechnung des Fehlers dienende Gleichung liefert:

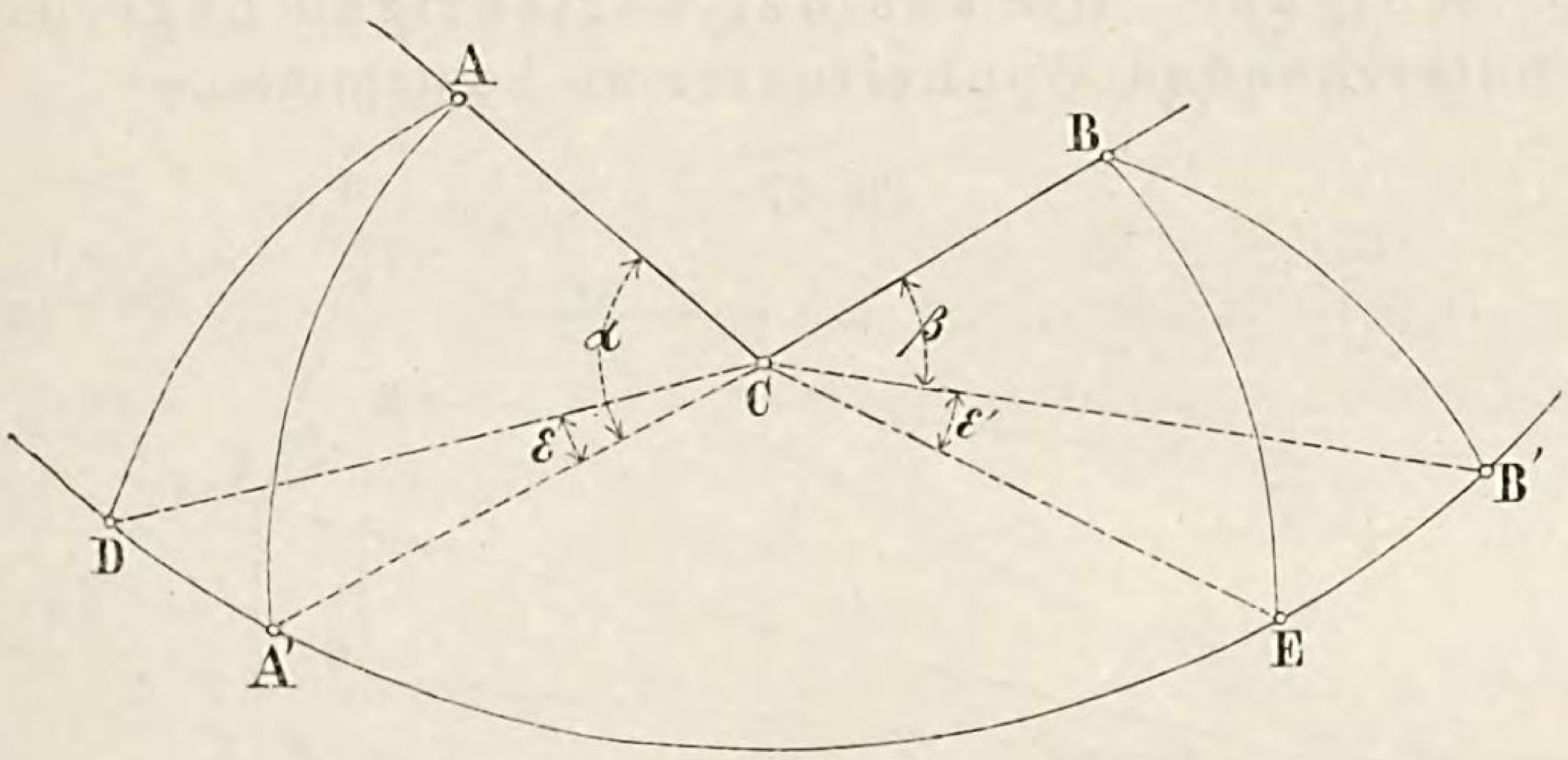
$$\operatorname{tg} \delta = \frac{p \cos \varphi}{1 + p \sin \varphi} \text{ oder } \delta = 206265'' \frac{p \cos \varphi}{1 + p \sin \varphi} \tag{110}$$

Setzt man beispielsweise $\varphi = 30^0$, $\gamma = 1^0$, $\alpha = 10^0$, so wird p = 0,00302 und $\delta = 0^0\, 8'\, 57''$. Betrüge der Winkel φ dagegen 60^0 und läge die eine Hälfte desselben über, die andere unter der Horizontalebene CHJ, so wäre für die zweite Hälfte ebenfalls $\delta' = 0^0\, 8'\, 57''$ und folglich der ganze Fehler $\Delta = \delta + \delta' = 0^0\, 17'\, 54''$. Für $\varphi = 90^0$ wird $\delta = 0$, und für $\varphi = 0$ erhält man $\delta = 206265''\, p = 206265'' \operatorname{tg} \alpha \sin \gamma$. In dem letzteren Falle liegt der Winkel φ in einer Verticalebene. Wäre nun der eine Schenkel unter 45^0 gegen den Horizont geneigt, während der andere wagrecht ist, so erhielte man $\operatorname{tg} \delta = \sin \gamma$ oder sehr nahe $\delta = \gamma$; d. h. es würde das Instrument bei einer Neigung seines Horizontalkreises von einem Grad auch den Horizontalwinkel φ welcher null ist, gleich einem Grad angeben. Man entnimmt hieraus wie nachtheilig die schiefe Lage der Limbusebene werden kann, und wie sorgfältig sie zu vermeiden ist.

§. 54. Aufgabe. Den Fehler in einem Horizontalwinkel zu berechnen welcher aus der schiefen Lage der Visirebene gegen die Limbus- oder Messtischebene entspringt.

Die Ebene des Limbus oder des Messtisches wird jetzt als wagrecht vorausgesetzt, die Visirebene aber bilde in Folge der geneigten Lage der Drehaxe des Fernrohrs mit der lothrechten Alhidadenaxe einen Winkel γ. Der zu messende Winkel heisse A C B und habe zwei über die durch den Scheitel C gelegte Limbus- oder Messtischebene erhobene Schenkel. In Fig. 66 stelle die aus C beschriebene Kreisfläche D A′ E B′ den Limbus oder das Messtischblatt, A C den einen, B C den anderen Winkelschenkel vor, und A C sei unter dem Winkel α, B C unter β gegen den Horizont geneigt. Denkt man sich um den Scheitel C eine Kugel vom Halbmesser C D = C E = 1 beschrieben, so wird diese von der Limbusebene nach dem grössten Kreise D A′ E B′, von den Visirebenen A C D, B C E nach den grössten Bögen A D, B E, und von den Verticalebenen A C A′, B C B′ nach den grössten Bögen A A′, B B′ geschnitten, und es stellt A′ C B′ = φ

Fig. 66.



den richtigen, D C E = ψ aber den falschen Horizontalwinkel vor. Der Schenkel C D welchen die Visirebene A C D projicirt, ist um den Winkel D C A′ = ε und der Schenkel C E welcher aus der Visirebene B C E entspringt, um den Winkel ε' fehlerhaft; folglich ist der Gesammtfehler δ in dem vorliegenden Falle $= \varepsilon - \varepsilon'$; läge der Schenkel C B unter der Limbusebene, so würde der Fehler $\delta' = \varepsilon + \varepsilon'$ sein.

Die rechtwinkligen sphärischen Dreiecke A D A′ und B E B′ sind zur Berechnung der Fehlerwinkel ε und ε' geeignet; denn es ist in A D A′ der Bogen A′ D = ε, arc A A′ = α, Winkel A A′ D = 90° und Winkel A D A′ = 90° — γ, wenn γ der Neigungswinkel der Visirebene gegen das Loth ist; folglich findet man

$$\sin \varepsilon = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma$$

Im Dreiecke B E B′ ist der Bogen E B′ = ε', arc B B′ = β, Winkel B B′ E = = 90° und Winkel B E B′ = 90° — γ; mithin auch

$$\sin \varepsilon' = \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$$

Da ε und ε' immer nur kleine Winkel sind, so ist

$$\varepsilon = 206265'' \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma,\ \varepsilon' = 206265'' \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma \text{ und}$$

$$\delta = 206265'' \operatorname{tg} \gamma (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) \qquad (111)$$

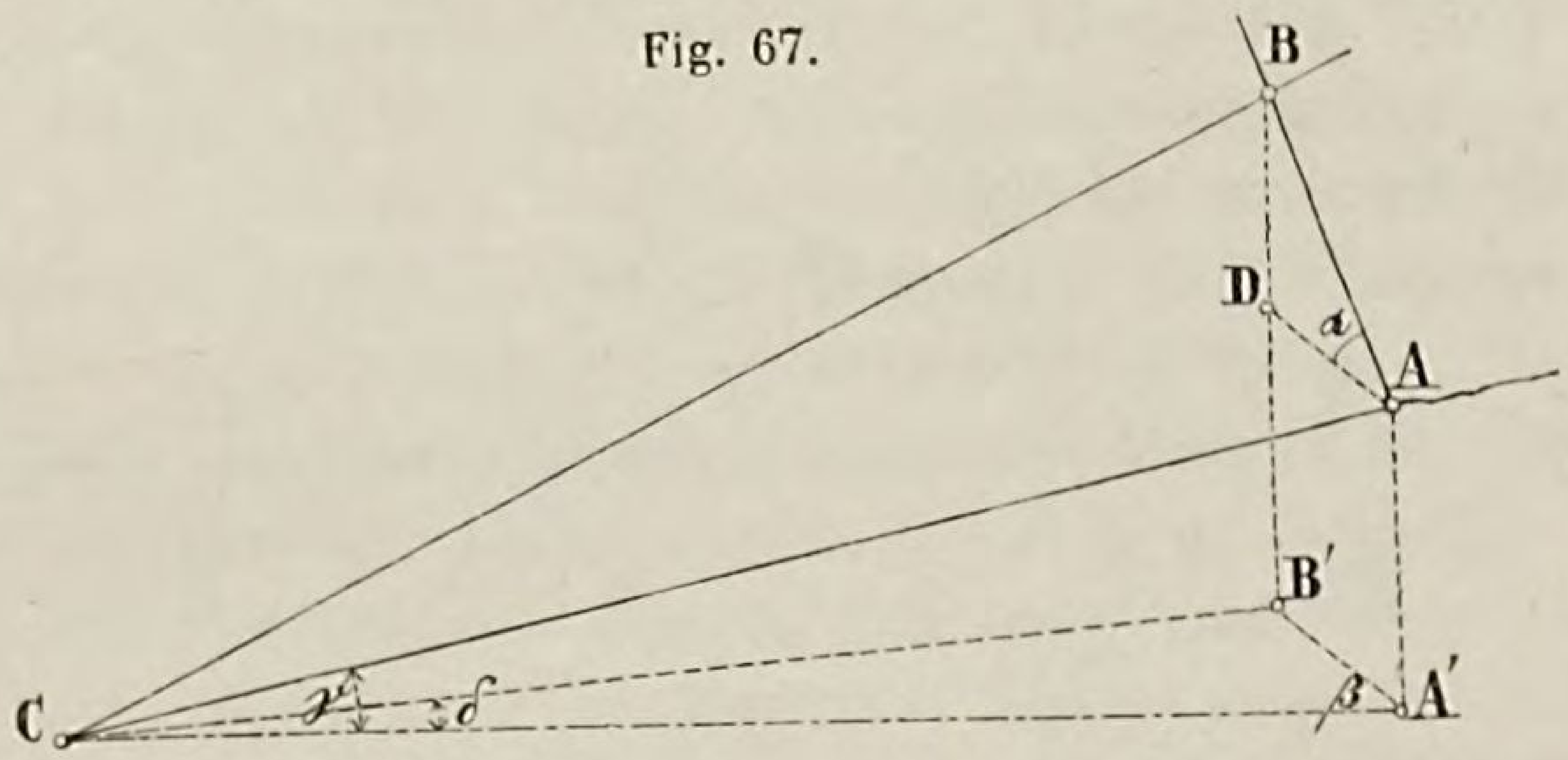
wobei α und β positiv zu nehmen sind wenn sie Höhenwinkel, und negativ wenn sie Tiefenwinkel vorstellen. Ist also der Schenkel C B abwärts geneigt, mithin β negativ, so wird

$$\delta = \delta' = 206265'' \operatorname{tg} \gamma (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \qquad (112)$$

Setzt man in dem letzteren Falle $\alpha = +20^0$, $\beta = -20^0$, so folgt für $\gamma = 1^0$ der Fehler $\delta' = \varepsilon + \varepsilon' = 2621$ Sec. $= 44$ Minuten. Dieser Fehler gilt für jeden Horizontalwinkel, also auch für einen der sehr nahe an Null liegt; woraus zu entnehmen ist, wie vielmal grösser der Fehler als der gemessene Winkel werden kann, und wie nothwendig es ist durch sorgfältige Berichtigung des Theodolithen und der Kippregel die schiefe Lage der Visirebene zu vermeiden. Da bei Messtischaufnahmen diese Lage auch dann eintritt wenn das Lineal der Kippregel durch unterliegende Sandkörnchen u. s. w. einseitig erhoben wird, so ist weiter noch auf die Reinheit des aufgespannten Papiers und der Tischoberfläche zu achten.

§. 55. A u f g a b e. Die aus der unrichtigen Lage der Zielpunkte entstehenden Winkelfehler zu bestimmen.

Fig. 67.



Die Zielpunkte sind durch Signale gegeben welche aus Stangen, Pfeilern, Pyramiden u. s. w. bestehen. Wird nun ein schiefstehendes Stangensignal nicht am Fusspunkte anvisirt, so ist ein unrichtiger Zielpunkt benützt und dadurch ein Fehler in den gemessenen Winkel gebracht worden. Dasselbe geschieht wenn eine lothrechte cylindrische Säule oder eine polirte Kugel nicht in der Richtung eines Durchmessers sondern seitwärts anvisirt wird.

1) Stellt die Linie C A in Fig. 67 einen Winkelschenkel, C den Scheitel des Winkels und den Mittelpunkt des Instruments, A B die schiefe Signalstange vor, und geht die Visirlinie nach dem Punkte B statt nach A: so erhält man nicht die richtige Projection C A′ des Schenkels C A sondern die falsche C B′, wodurch in den Horizontalwinkel ein Fehler A′ C B′ $= \delta$ kommt welcher lediglich von dem Signal A B herrührt. Ist dasselbe unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigt und heisst h die Entfernung des Punkts B von A, so ist die Horizontalprojection von A B oder

$$\text{A D} = \text{A}' \text{B}' = \text{h} \cos \alpha$$

nennt man ferner l die Länge des Schenkels C A und γ dessen Neigungswinkel gegen den Horizont, so ist C A' = l cos γ; und wird endlich der Winkel C A' B' unter welchem die projicirende Ebene A C A' gegen die Signalebene A B D geneigt ist, mit β bezeichnet: so kennt man in dem Dreiecke A' B' C drei Stücke und kann folglich den Winkel δ finden. Es wird nämlich, wenn man B' auf C A' projicirt, genau

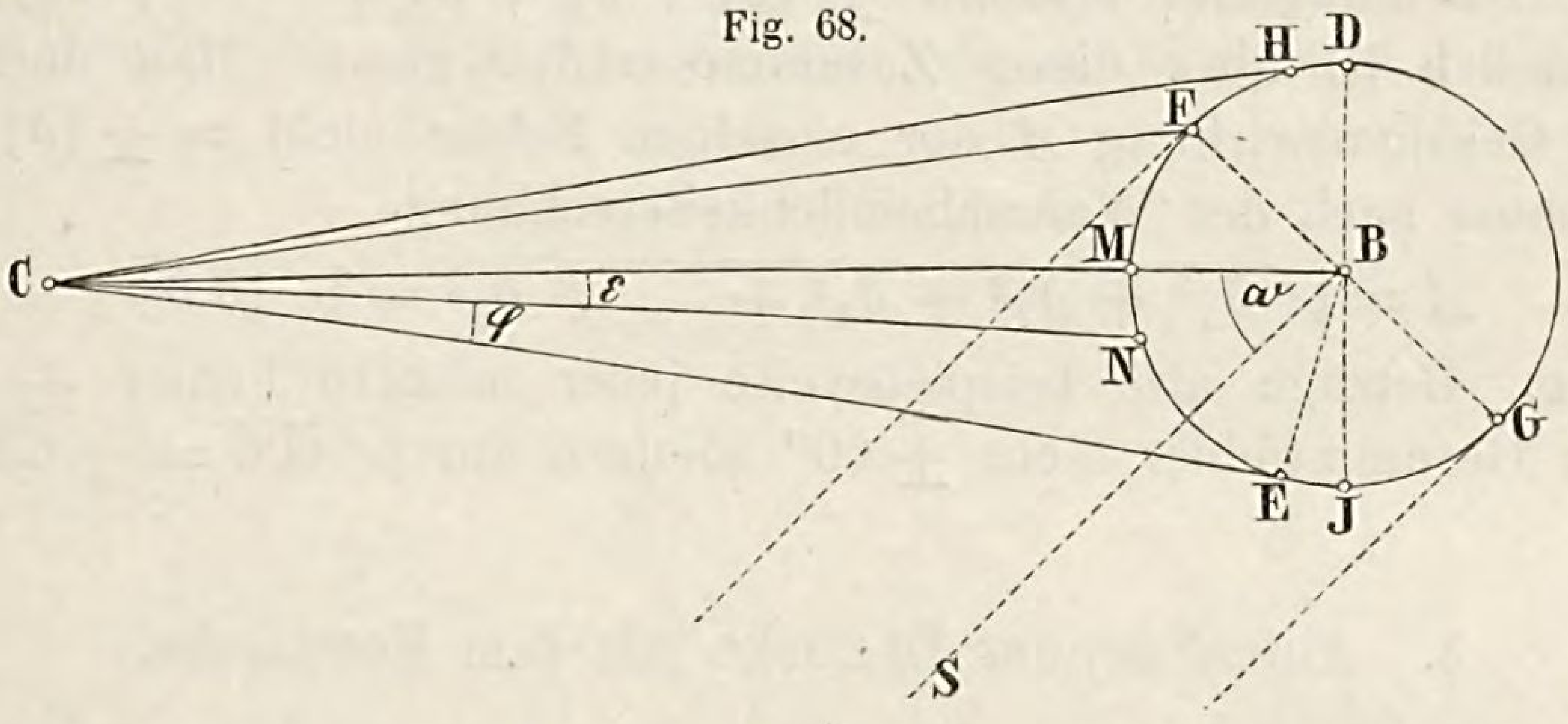
$$\operatorname{tg} \delta = \frac{h \cos \alpha \sin \beta}{l \cos \gamma - h \cos \alpha \cos \beta} \tag{113}$$

und wenn man h cos α cos β gegen das weit grössere Product l cos γ vernachlässigt, näherungsweise

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{h \cos \alpha \sin \beta}{l \cos \gamma} \text{ und } \delta = \frac{h \cos \alpha \sin \beta}{l \cos \gamma \sin 1''} \tag{114}$$

Insofern der Werth dieses Ausdrucks bloss von β abhängt, wird er am grössten wenn $\beta = 90^0$ ist, d. h. wenn die Visirebene senkrecht zur Signalebene steht; unter allen Umständen wächst der Fehler mit der Grösse h und dem Neigungswinkel $90^0 - \alpha$ der Signalstange gegen das Loth in A.

Fig. 68.



2) Wenn eine als Signal dienende runde Säule (B, Fig. 68) nicht in der Richtung der Visirebene (C B) von der Sonne beleuchtet ist, so wird man das Fadenkreuz des bei C befindlichen Fernrohrs nicht auf die Mitte M der sichtbaren Cylinderfläche H E sondern auf die Mitte N des von der Sonne in der Richtung S B beschienenen und von C aus sichtbaren Theils F E dieser Fläche einstellen und dadurch einen Fehler in den Horizontalwinkel bringen welcher dem Winkel M C N = ε entspricht. Bezeichnet

ω den Winkel der Sonnenstrahlen gegen die Visirebene C B,
r den Halbmesser F B der anvisirten Säule,
l die Länge des Winkelschenkels C B,
φ den Winkel F C N gleich dem Winkel N C E,

so folgt aus dem als gleichschenklig anzusehenden Dreiecke C F B und dem bei B rechtwinkligen Dreiecke C B E

$$l \sin (\varphi - \varepsilon) = r \cos \omega \text{ und } l \sin (\varphi + \varepsilon) = r$$

oder, da $\varphi - \varepsilon$ und $\varphi + \varepsilon$ sehr kleine Winkel sind,

$$\varphi - \varepsilon = \frac{r \cos \omega}{l \sin 1''}, \quad \varphi + \varepsilon = \frac{r}{l \sin 1''}$$

$$\varepsilon = \frac{r \sin^2 \frac{1}{2} \omega}{l \sin 1''} = 206265'' \frac{r}{l} \sin^2 \tfrac{1}{2} \omega \tag{115}$$

und für den besonderen Fall dass $\omega = 60^0$, $r = 0{,}5$ und $l = 1000$ ist, $\varepsilon = 25{,}8$ Secunden. Man sieht dass dieser Fehler selbst bei minder scharfen Messungen nicht immer übersehen werden darf.

§. 56. Gesammtwirkung der Fehler. Nach den in den §§. 50 bis 55 enthaltenen Formeln kann man in jedem gegebenen Falle aus bekannten Fehlerursachen deren Einwirkung auf das Messungsresultat berechnen. Angenommen, diese Rechnung wäre für ein bestimmtes Instrument und verschiedene Winkel durchgeführt worden und hätte zu dem Resultate geführt dass der mittlere Fehler wegen excentrischer Aufstellung des Instruments $\pm \delta_1$ Secunden, der aus einer Excentricität der Alhidade hervorgehende $\pm \delta_2$ Secunden, der von der Excentricität des Fernrohrs herrührende $\pm \delta_3$ Secunden u. s. w. betrage, so wäre es zwar denkbar dass in dem ungünstigsten Falle alle positiven oder alle negativen Werthe von δ zusammenträfen und der Gesammtfehler alsdann $\pm (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_6)$ würde, wahrscheinlich ist aber dieses Zusammentreffen nicht. Man darf daher auch die Gesammtwirkung Δ der einzelnen Fehler nicht $= \pm [\delta]$ setzen, sondern muss nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung

$$\Delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \ldots + \delta_6^2} = \sqrt{[\delta\,\delta]} \tag{116}$$

annehmen. Betrüge also beispielsweise jeder mittlere Fehler $\pm 10''$, so wäre der Gesammtfehler nicht $\pm 60''$ sondern nur $\sqrt{600} = \pm 21'',5$.

3. Aufnahme der Dreiecke mit dem Messtische.

§. 57. Es ist bereits bekannt wie man einen gegebenen Punkt des Messtisches centrisch über einem gegebenen Punkte des Felds aufstellt und gleichzeitig das Blatt nach einer gegebenen Richtung orientirt und in eine wagrechte Lage bringt; ferner, wie man mit dem Messtische und der Kippregel horizontale Winkel misst. Hier wird gelehrt wie sich aus drei gemessenen Stücken eines beliebigen Dreiecks auf dem Felde ein diesem ähnliches Dreieck auf dem Messtischblatte zeichnen lässt.

Wenn man bloss nach dem Verhältniss der Seiten eines auf dem Felde bezeichneten Dreiecks (Felddreiecks) fragt, so beantwortet ein ähnliches Dreieck auf dem Messtische (Bilddreieck) diese Frage vollkommen; will man aber auch Aufschluss haben über die Grösse der Seiten oder der Dreiecksfläche, so muss mindestens eine Seite des Felddreiecks bekannt und in einem bestimmten Massstabe auf dem Messtischblatte aufgetragen sein. Mit diesem Massstabe misst man dann die anderen Seiten. Wollte man die Verjüngung erst nachträglich bestimmen, so müsste ein besonderer Massstab hiefür gezeichnet werden. Wir nehmen an dass die Erforschung

der absoluten Grösse der Seiten und Flächen stets mit beabsichtigt werde und setzen desshalb immer eine Seite als gegeben voraus.

Bei der Aufnahme der Dreiecke mit dem Messtische kommen eigentlich nur drei verschiedene Fälle vor; es ist nämlich das Dreieck herzustellen entweder aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel, oder aus einer Seite nnd den beiden anliegenden Winkeln, oder aber aus einer Seite nebst einem anliegenden und einem gegenüberliegenden Winkel. Jeder dieser Fälle wird von den praktischen Geometern kurz bezeichnet; wir behalten diese Bezeichnungen (wenn auch zum Theil in anderem Sinne) bei und nennen

a) Vorwärtseinschneiden die Aufnahme eines Dreiecks aus einer Seite und den zwei anliegenden Winkeln;

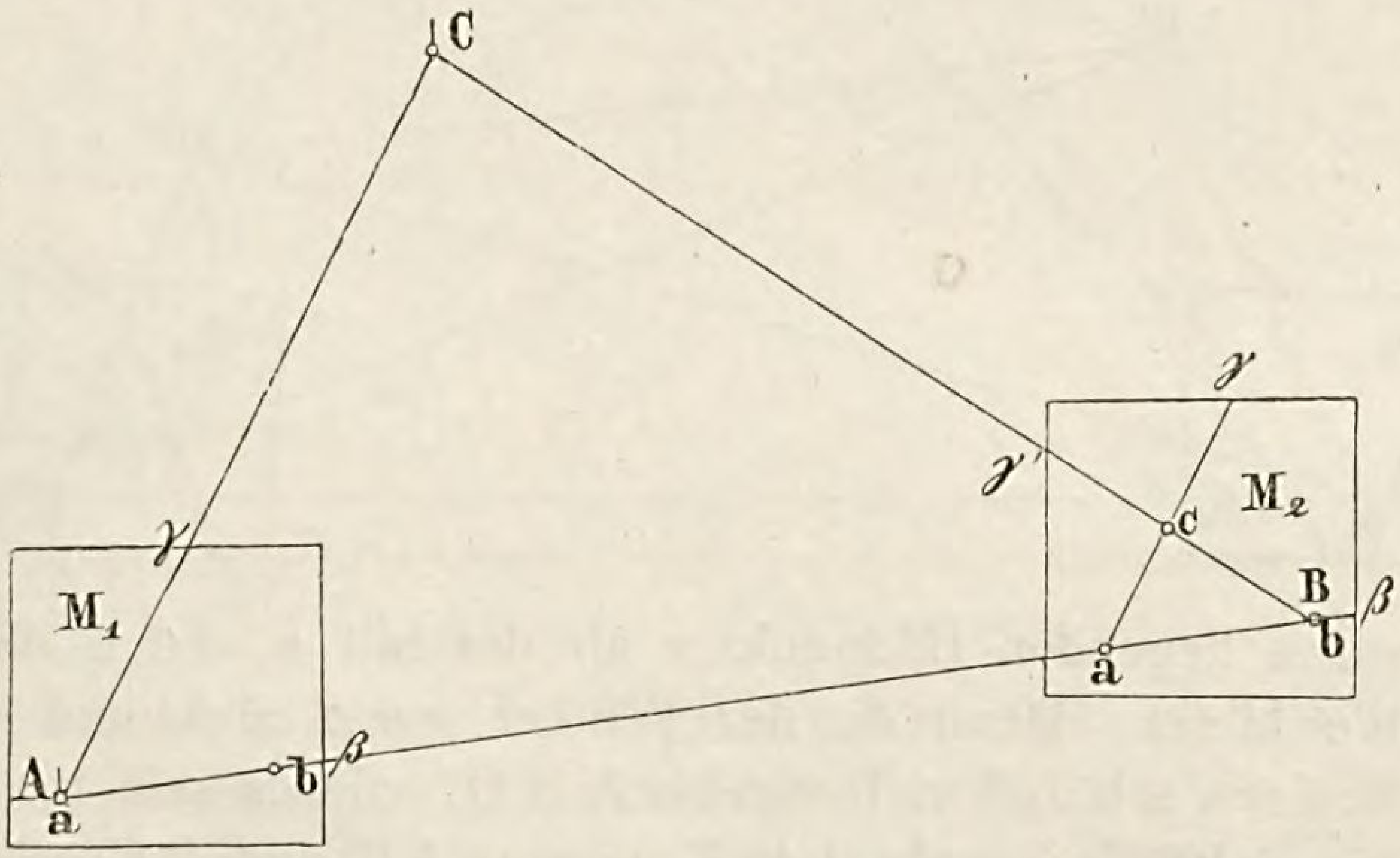
b) Rückwärtseinschneiden die Aufnahme eines Dreiecks aus einer Seite mit anliegendem und gegenüberliegendem Winkel, und

c) Seitwärtseinschneiden (Stationiren) die Aufnahme eines Dreiecks aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel.

§. 58. Aufgabe. Ein auf dem Felde gegebenes Dreieck mit dem Messtische durch Vorwärtseinschneiden aufzunehmen.

Das Felddreieck heisse A B C und sein Bilddreieck a b c (Fig. 69).

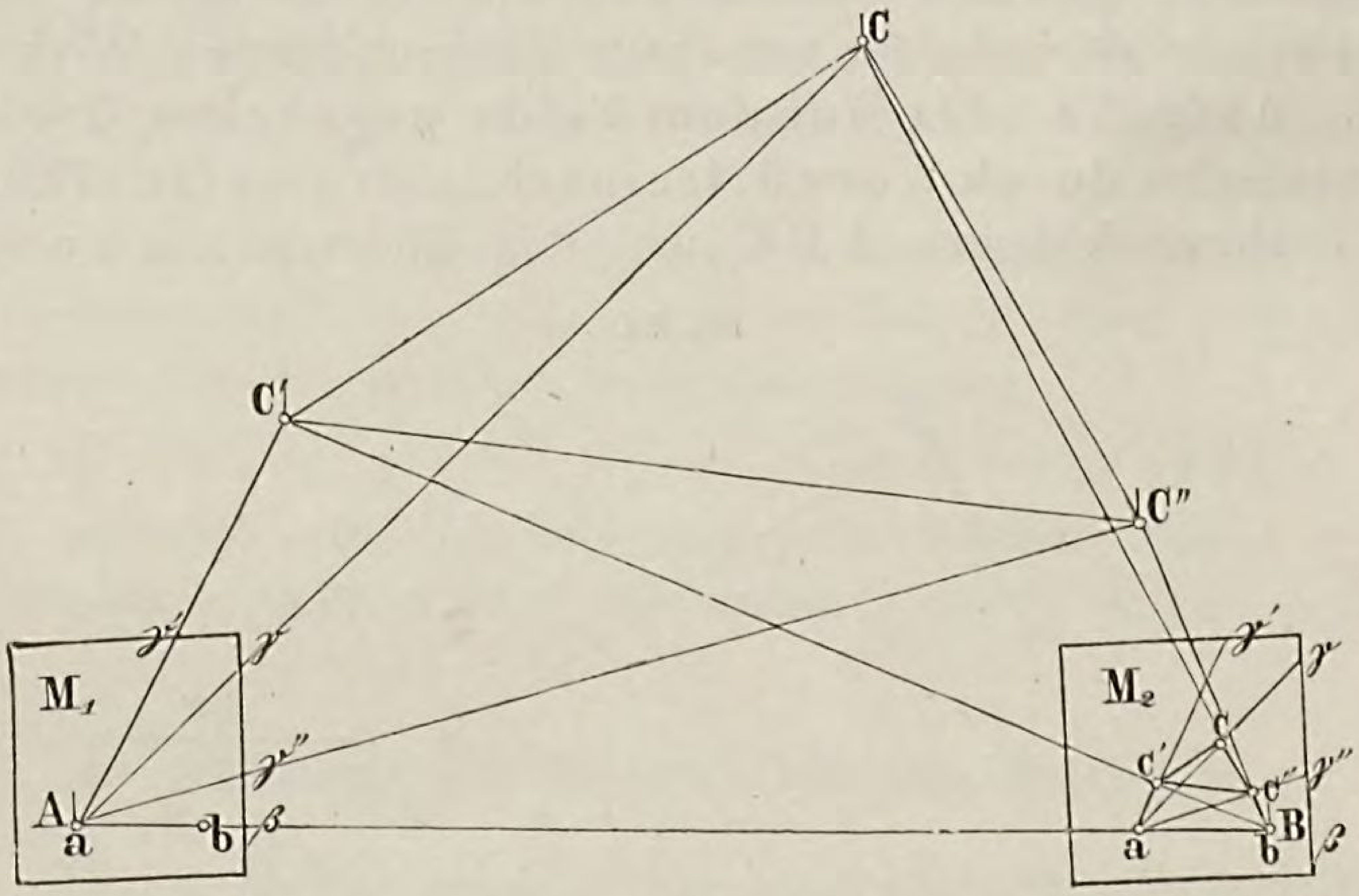
Fig. 69.



Da es sich hier bloss um die Aufnahme des gegebenen Dreiecks handelt, also keine der Seiten des Bilddreiecks auf dem Messtischblatte eine bestimmte Richtung gegen schon vorhandene Linien zu haben braucht, so stellen wir den Messtisch über einem der gegebenen zugänglichen Punkte A des Felds so auf dass dessen durch die Lothgabel zu bestimmendes Bild a eine Lage erhält bei welcher das Bilddreieck auf dem Messtische Platz findet ohne dass seine Ecken zu nahe an die Ränder des Blatts fallen. Ist der Tisch horizontal gestellt und der Bildpunkt a bestimmt, so legt man an diesen das Lineal der Kippregel genau an, visirt nach B und zieht an der Kante des Lineals mit einem sehr harten Bleistifte eine äusserst feine Linie a β so lang als möglich. Auf dieser Linie muss der Punkt b liegen,

und man erhält ihn wenn die Horizontalprojection von A B gemessen und im verjüngten Masse als die Linie a b von a aus abgetragen wird. Nachdem b bestimmt ist, visirt man von a nach C und zieht wiederum eine sehr feine Linie a γ bis an den Rand des Tischblatts. Nun kommt der Messtisch von der Stellung M_1 in die M_2 über dem Punkte B und zwar dadurch dass man b lothrecht über B und b a in die Verticalebene B A bringt, während gleichzeitig das Tischblatt horizontal gestellt wird. (Vergl. Bd. I, Abschnitt III, Abth. B.) Kürzer bezeichnet man dieses Verfahren, indem man sagt: es wird b centrisch mit B gestellt und der Tisch nach A B orientirt. Hat man sich überzeugt dass bei horizontalem Tische die Visirlinie der an β a liegenden Kippregel das in A stehende Signal trifft, so visire man von b nach C und ziehe die Linie b γ'. Diese Linie begegnet der früher gezogenen a γ in c und schneidet somit auf dem Messtische

Fig. 70.



den nach vorne liegenden Bildpunkt c ab der mit a und b das gesuchte Dreieck a b c bildet. Denn da der Winkel γ a β = A und a b γ' = B, so ist das Dreieck a b c dem Dreiecke A B C, wie es sein muss, ähnlich, und man kann folglich das absolute Mass von A C und B C erhalten wenn man a c und b c mit demselben Massstabe misst nach welchem a b aufgetragen wurde.

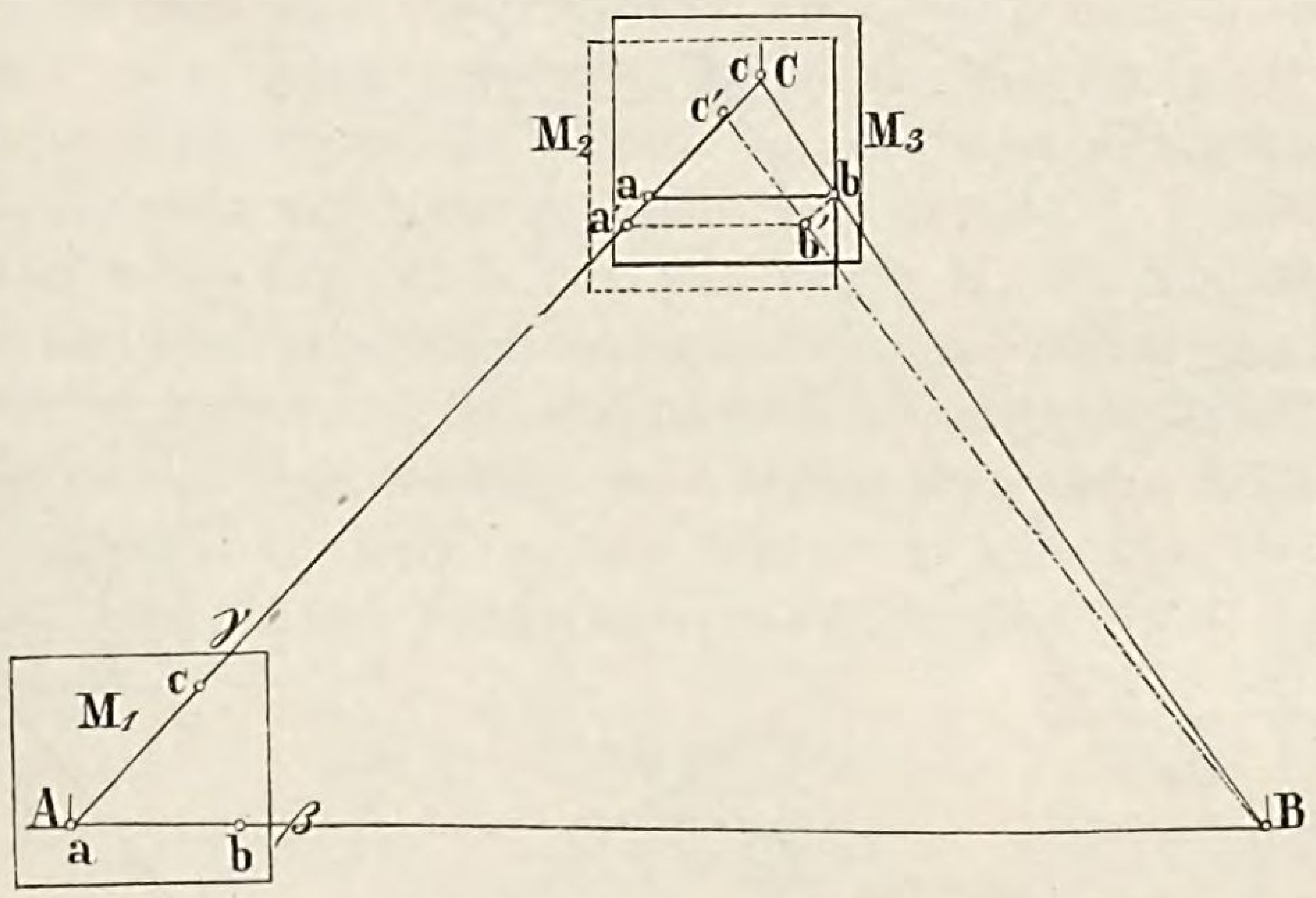
Da der Punkt C jede beliebige Lage haben, sich also auch in C' oder C'' (Fig. 70) befinden kann, so ist klar dass sich diese letzteren Punkte von A und B aus gerade so aufnehmen lassen wie der erstere. Werden aber drei solche Punkte von der Standlinie A B aus aufgenommen, so erhält man auf dem Messtische ein Dreieck c c' c'' welches dem Dreiecke C C' C'' ähnlich und eben so verjüngt ist wie die Grundlinie a b. Es geht hieraus zur Genüge hervor dass es, um ein Dreieck durch Vorwärtseinschneiden aufzunehmen, nicht gerade nöthig ist, eine seiner Seiten als Standlinie zu wählen sondern dass sich jede Gerade dazu eignet welche nicht zu kurz

ist, leicht gemessen werden kann und von ihren Endpunkten aus eine freie Aussicht nach den aufzunehmenden Dreieckspunkten gestattet. Ferner sieht man sofort ein dass man eine beliebige Anzahl Punkte die um die Standlinie A B vertheilt sind und von ihr aus anvisirt werden können, durch Vorwärtseinschneiden bestimmen kann, und dass somit diese Methode auch zur Aufnahme von Vielecken geeignet ist. Uebrigens bedarf es wohl kaum der Erinnerung dass man den Standpunkt A nicht eher verlässt, bis alle aufzunehmenden Eckpunkte anvisirt und die Linien a β, a γ, a γ', a γ'' gezogen sind, und dass man in B ebenso zu verfahren habe.

§. 59. Aufgabe. Ein auf dem Felde gegebenes Dreieck durch Rückwärtseinschneiden auf zwei Punkte aufzunehmen.

Es sei wieder A B C (Fig. 71) das gegebene Dreieck und a b c das gesuchte Bilddreieck. Die Seite welche bereits gemessen und auf den Horizont reducirt ist, heisse A B, und die zu messenden Winkel seien A und C;

Fig. 71.

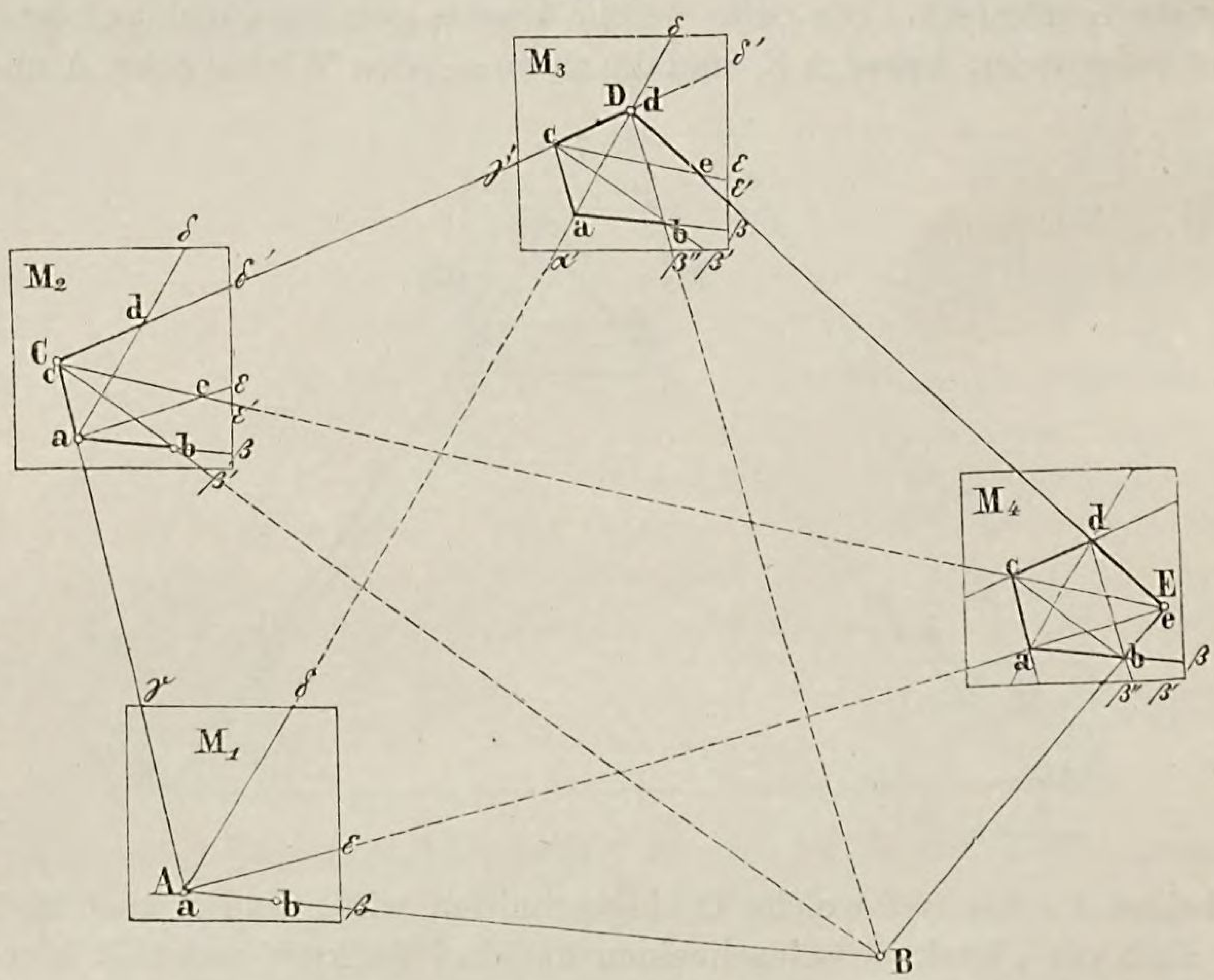


die beiden Punkte auf welche C eingeschnitten wird, sind A und B. (Es gibt auch ein „Rückwärtseinschneiden auf drei Punkte“ wesshalb hier der Beisatz „auf zwei Punkte“ nicht fehlen darf. Vergl. den Paragraph welcher die Pothenot'sche Aufgabe behandelt.)

In dem Punkte A stelle man den Messtisch so auf dass a centrisch zu A und die Platte horizontal wird. Hierauf visire man nach B und C, ziehe die Linien a β und a γ, und trage A B in verjüngtem Masse (a b) ab. Nachdem die Messung in A vollendet ist, stelle man den Messtisch über C auf. Würde die Länge des Schenkels A C bekannt sein, so könnte man durch Abtragen ihrer Verjüngung a c auf a γ den Punkt c bestimmen, und es wäre die Aufgabe gelöst. Da aber A C unbekannt ist, so schätzt man diese Länge und nimmt danach vorläufig den Punkt c an. Die weitere Arbeit besteht nun darin, zu prüfen ob c richtig angenommen ist, und wenn dieses nicht der Fall, den richtigen Punkt c durch das Prüfungs-

verfahren selbst zu finden. Zu dem Ende macht man c centrisch zu C und orientirt das Blatt M_2 nach C A, indem man die Kippregel an a c legt und die Wendeplatte des Tisches so lange dreht, bis das Fadenkreuz der Kippregel das Signal A deckt. Findet diese Deckung statt und ist der Tisch horizontal, so lege man die Linealkante genau an den Punkt b′ der Linie a′ b′ welche die a b in der Stellung M_2 des Messtisches repräsentirt, an, visire nach B und ziehe die Linie b′ c′. Wäre M_2 die richtige Stellung des Tisches und folglich a′ c die richtige verjüngte Länge von A C, so müsste der Punkt c′ mit c zusammenfallen, da in den Dreiecken c′ a′ b′ und C A B zwei Seiten proportionirt und die eingeschlossenen Winkel c′ a′ b′ und C A B gleich wären. Fällt nun c′ nicht auf c, so ist

Fig. 72.



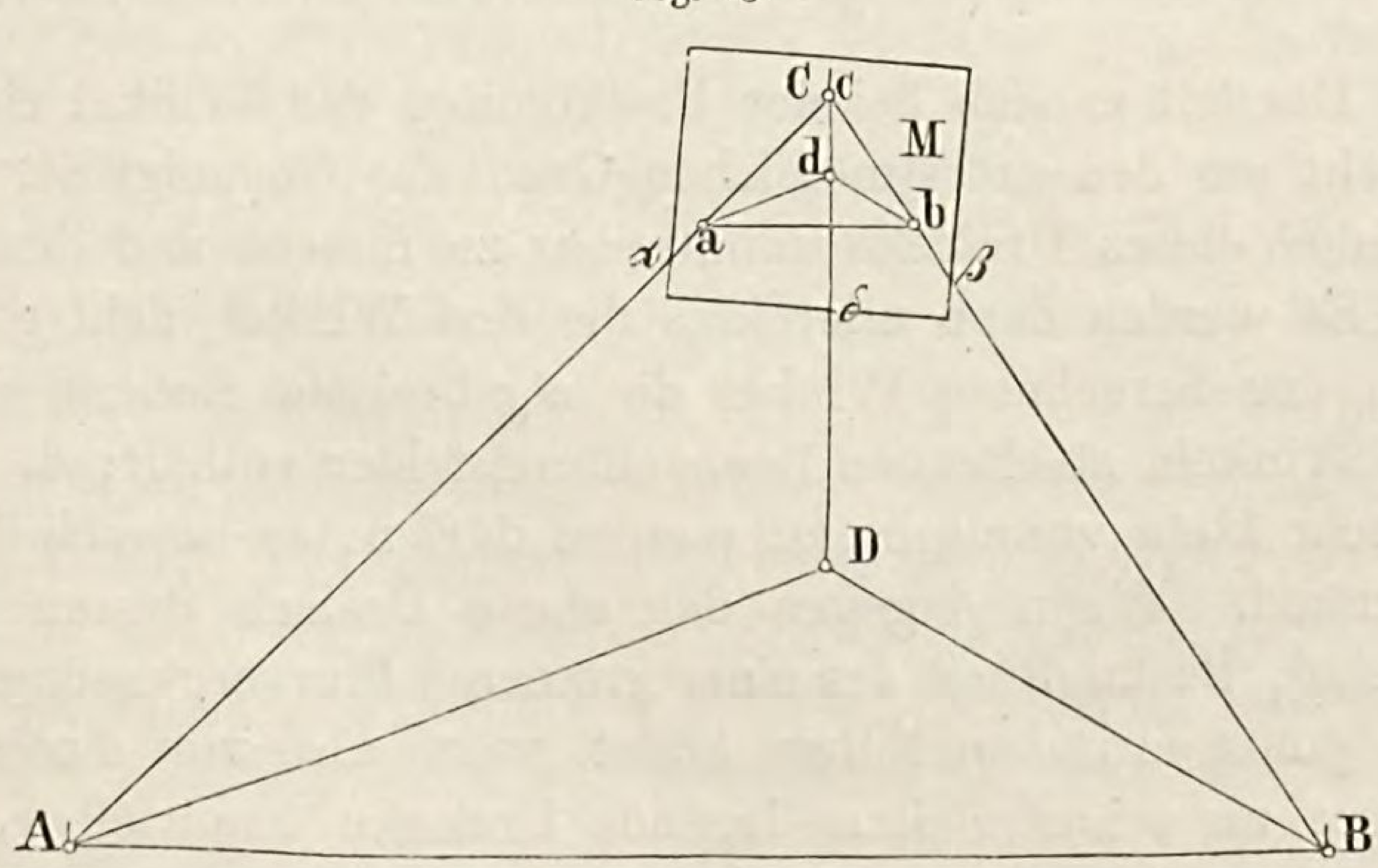
die angenommene Linie a′ c um c c′ entweder zu lang oder zu kurz, nach unserer Figur zu lang. Darum verschiebe man jezt dass Blatt in der Richtung von a′ nach c′, bis dieser neue Punkt lothrecht über C liegt, und orientire das Blatt wieder nach A C, wodurch es die Lage M_3 annimmt. Legt man nun die Linealkante an b und stellt das Fadenkreuz der Kippregel auf B ein, so wird die an dem Lineale gezogene Linie b c entweder genau oder doch fast genau durch den Punkt c′ gehen der jetzt in c steht, wodurch das Dreieck a b c vollständig bestimmt ist; denn es ist nunmehr der Winkel bei a = dem Winkel A und der Winkel bei c = dem Winkel C. Dass das Dreieck a b c in dem Massstabe gezeichnet ist nach welchem die Seite A B aufgetragen wurde, folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke

a b c und A B C von selbst. (Wir machen hier darauf aufmerksam dass die vorliegende Aufgabe mit dem vom Verfasser dieses Buchs erfundenen und weiter unten (bei Lösung der Pothenot'schen Aufgabe) beschriebenen „Einschneidezirkel" auf eine sehr einfache Weise auch mechanisch gelöst werden kann, indem man den Winkel C in die Schenkel dieses Zirkels nimmt, letztere an a und b anlegt und mit der Axe des Zirkelgewinds den Scheitel c auf a c′ abschneidet.)

So wie der Punkt C rückwärts von A B eingeschnitten wurde, lässt sich jeder andere beliebige Punkt D, E (Fig. 72) einschneiden; folglich kann man auch durch dieses Verfahren ein Bilddreieck c d e herstellen welches einem gegebenen Felddreiecke C D E ähnlich ist, ohne dass man eine Seite des letzteren zu kennen braucht wenn man nur irgend eine Gerade A B hat deren horizontale Länge bekannt ist und welche so liegt dass sie von den drei Punkten C, D, E aus anvisirt werden kann, wie in Fig. 72 angenommen wurde. Es versteht sich hierbei von selbst dass es nicht nöthig ist dass man von C nach D, oder von D nach E, oder endlich von C nach E sehen könne; gestattet jedoch das Terrain in einer oder der anderen dieser Richtungen das Visiren, so wird man diese sich von selbst darbietende Controle der Messung nicht von der Hand weisen. Wie die einzelnen Linien der Fig. 72 in den vier Lagen M_1, M_2, M_3, M_4 des Messtisches nach und nach entstanden sind und sich das Vieleck a b c d e welches dem natürlichen Polygon A B C D E ähnlich ist, ergeben hat, bedarf nach den vorausgehenden Erörterungen wohl keiner besonderen Erklärung mehr.

§. 60. Aufgabe. Ein in der Natur gegebenes Dreieck mit dem Messtische durch Seitwärtseinschneiden oder Stationiren aufzunehmen.

Fig. 73.



Das aufzunehmende Dreieck heisse A B C und sein Bild a b c (Fig. 73). Man messe auf dem Felde die Horizontalprojectionen zweier Seiten A C, B C, stelle im Scheitel des von ihnen gebildeten Winkels C den Messtisch horizontal, projicire diesen Winkelscheitel auf die Tischplatte, lege die

Linealkante der Kippregel an die Projection (c), visire die Signale (A, B) der beiden übrigen Dreieckspunkte an und ziehe die Linien (c α, c β) welche zu diesen Visirlinien gehören. Trägt man nun auf beiden die verjüngten Seitenprojectionen (c a, c b) ab und verbindet die Endpunkte (a, b), so ist das hierdurch entstehende Dreieck a b c dem Dreiecke A B C ähnlich, da beide proportionirte Seiten und zwischen diesen gleiche Winkel haben.

Wäre noch ein vierter Punkt D auf dem Felde gegeben gewesen, so hätte man denselben von C aus ebenso wie A oder B aufnehmen und durch den Punkt d auf dem Messtische darstellen können. Demnach erhielte man das Tischdreieck a b d von einem Punkte C ausserhalb des Felddreiecks A B D bloss durch wiederholte Anwendung der Methode des Seitwärtseinschneidens. Denn indem man von c nach D visirt, die Linie c δ zieht und auf derselben die Verjüngung von C D = c d abträgt, hat man eigentlich die drei Dreiecke A B C, A C D, B C D direct durch Abmessung zweier Seiten und des eingeschlossenen Winkels, A D B aber indirect aus den drei durch Construction sich ergebenden Stücken a d, d b, W. a d b aufgenommen.

Es ist hiernach leicht einzusehen, wie sich durch Seitwärtseinschneiden ein Vieleck aufnehmen lässt, ohne dass man den Messtisch in einem der Eckpunkte aufstellt. Damit wird aber keineswegs behauptet dass diese Methode praktisch und der in §. 74 beschriebenen vorzuziehen sei. Bei besonderen Localverhältnissen kann übrigens von ihr in Beziehung auf einzelne Polygonpunkte Gebrauch gemacht werden. Die Methode des Seitwärtseinschneidens ist namentlich bei der Aufnahme der Vielecke aus dem Umfange, wobei alle Seiten und Winkel gemessen werden, anwendbar. (Vergl. §. 75, welcher das Aufnehmen der Vielecke aus dem Umfange lehrt.)

4. Aufnahme der Dreiecke mit dem Theodolithen.

§. 61. Handelt es sich bei der Bestimmung der Winkel eines ebenen Dreiecks nicht um den grösstmöglichen Grad der Genauigkeit, so genügt es zwei Winkel dieses Dreiecks unmittelbar zu messen und den dritten zu berechnen. Es werden dann allerdings die drei Winkel nicht gleich genau sein, indem der berechnete Winkel die algebraische Summe der in den gemessenen Winkeln steckenden Beobachtungsfehler enthält; da aber diese Fehler als sehr klein vorausgesetzt werden dürfen, so ist auch ihre Summe nicht bedeutend. Wenn dagegen das ebene Dreieck dessen Winkel zu bestimmen sind, Bestandtheil des einer grösseren Flurvermessung zu Grunde liegenden trigonometrischen Netzes bildet, wenn also von diesem Dreiecke wieder andere an seinen Seiten liegende Dreiecke unmittelbar, und jene Dreiecke welche sich an diese anschliessen, mittelbar abhängen, so unterlässt man es nicht alle drei Winkel des Dreiecks direct oder nöthigenfalls durch Centrirung zu messen. Indem man alsdann die beobachtete Winkelsumme mit der theoretischen von 180^0 vergleicht, erhält man nicht nur ein Urtheil über die Genauigkeit der Messung sondern kann auch durch

Vertheilung der Differenz beider Summen auf die drei Winkel den Fehler in jedem einzelnen Winkel im Allgemeinen kleiner machen, als er ist wenn man bloss zwei Winkel misst und den dritten berechnet.

Die unmittelbare Messung aller Winkel eines Dreiecks welche in der Regel schon für ein ebenes Dreiecksnetz gefordert wird, ist unerlässlich für ein sphärisches Dreieck oder ein aus solchen Dreiecken bestehendes Netz. In diesem Falle ist die Summe aller Winkel des Dreiecks grösser als 180^0, und es heisst der Ueberschuss dieser Summe der sphärische Excess. Bezeichnet man diese von der Form des Dreiecks abhängende Grösse mit ε, so soll die beobachtete Winkelsumme $= 180^0 + \varepsilon$ sein; da sie es aber nie oder nur zufällig ist, so besteht auch hier wieder eine Differenz welche uns ein Urtheil über die Genauigkeit der Winkelmessungen und Gelegenheit zu deren Verbesserungen gibt. Heisst nämlich die beobachtete Winkelsumme $180^0 + \varepsilon'$, so ist die Winkeldifferenz $\varepsilon - \varepsilon'$ zu vertheilen.

In welcher Weise diese Vertheilung sowohl bei sphärischen als ebenen Dreiecken zu geschehen habe, hängt davon ab ob alle drei Winkel mit gleicher Genauigkeit gemessen sind oder nicht. Sind alle Winkel gleich genau, so wird die Differenz $\varepsilon - \varepsilon'$ nach §. 22, S. 26 gleichheitlich vertheilt; ist aber die Genauigkeit verschieden, so vertheilt man die Grösse $\varepsilon - \varepsilon'$ nach §. 24, S. 27 im umgekehrten Verhältniss der Gewichte welche den einzelnen Winkelmessungen zukommen.

§. 62. Aufgabe. Man soll den sphärischen Excess eines geodätischen Dreiecks bestimmen.

Obwohl die Seiten eines Dreiecks das einem trigonometrischen Netze für eine Landes- oder Gradmessung angehört, in Wirklichkeit keine grössten Kreise einer Kugel sondern Verticalschnitte des Erdsphäroids und eigentlich geodätische Linien sind: so pflegt man doch den sphärischen Excess eines solchen Dreiecks so zu berechnen als ob dieses ein Kugeldreieck wäre, und man ist dazu berechtigt weil der hieraus entspringende Fehler ganz unmerklich wird, indem selbst die grössten geodätischen Dreiecke nur einen ausserordentlich kleinen Theil der Erdoberfläche umschliessen. Hier wird zunächst der sphärische Excess aus den drei Seiten eines beliebigen Dreiecks (das also kein geodätisches zu sein braucht) bestimmt und dann gezeigt wie man daraus den Excess der Erddreiecke findet wenn entweder auch drei Seiten, oder zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel, oder eine Seite und zwei ihr anliegende Winkel bekannt sind.

Bezeichnen a, b, c die gegebenen Seiten und A, B, C die ihnen gegenüberliegenden Winkel des sphärischen Dreiecks A B C dessen Excess

$$\varepsilon = A + B + C - 180^0$$

gesucht wird, so kann man nach Gent (Grunert's Archiv Bd. 20, S. 358) aus den Gauss'schen Formeln:

$$\cos \tfrac{1}{2} (A + B) \cos \tfrac{1}{2} c = \cos \tfrac{1}{2} (a + b) \sin \tfrac{1}{2} C$$
$$\sin \tfrac{1}{2} (A + B) \cos \tfrac{1}{2} c = \cos \tfrac{1}{2} (a - b) \cos \tfrac{1}{2} C$$

zunächst die folgenden Gleichungen bilden:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B) \mp \cos(90^0 - \frac{1}{2}C)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b) \mp \cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}c}$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B) \mp \sin(90^0 - \frac{1}{2}C)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b) \mp \cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}c}$$

und hieraus durch einfache Zerlegungen der Zähler die nachstehenden Relationen ableiten, in denen

$$a + b + c = 2s \text{ und } A + B - C + 180^0 = \omega$$

gesetzt ist und ε den gesuchten sphärischen Excess bedeutet:

$$\sin\tfrac{1}{4}\varepsilon \sin\tfrac{1}{4}\omega \cos\tfrac{1}{2}c = \sin\tfrac{1}{2}s \sin\tfrac{1}{2}(s-c)\sin\tfrac{1}{2}C$$

$$\cos\tfrac{1}{4}\varepsilon \cos\tfrac{1}{4}\omega \cos\tfrac{1}{2}c = \cos\tfrac{1}{2}s \cos\tfrac{1}{2}(s-c)\sin\tfrac{1}{2}C$$

$$\sin\tfrac{1}{4}\varepsilon \cos\tfrac{1}{4}\omega \cos\tfrac{1}{2}c = \sin\tfrac{1}{2}(s-a) \sin\tfrac{1}{2}(s-b)\cos\tfrac{1}{2}C$$

$$\cos\tfrac{1}{4}\varepsilon \sin\tfrac{1}{4}\omega \cos\tfrac{1}{2}c = \cos\tfrac{1}{2}(s-a) \cos\tfrac{1}{2}(s-b)\cos\tfrac{1}{2}C$$

Dividirt man die erste dieser Gleichungen durch die zweite und die dritte durch die vierte, so folgt:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}\varepsilon \operatorname{tg}\tfrac{1}{4}\omega = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}s \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(s-c)$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}\varepsilon \cot\tfrac{1}{4}\omega = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(s-a) \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(s-b)$$

und wenn man diese beiden Gleichungen mit einander multiplicirt, so erhält man zur Berechnung des sphärischen Excesses irgend eines Kugeldreiecks den zuerst von Lhuilier aufgefundenen Ausdruck:

$$\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{4}\varepsilon = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}s \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(s-a) \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(s-b) \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(s-c) \qquad (117)$$

Um von der Grösse des sphärischen Excesses der geodätischen Dreiecke eine bestimmte Anschauung zu geben, denken wir uns ein gleichseitiges Kugeldreieck und berechnen daraus Excesse für verschiedene Werthe der Seiten nach der Gleichung

$$\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{4}\varepsilon = \operatorname{tg}\tfrac{3}{4}a \operatorname{tg}^3\tfrac{1}{4}a \qquad (118)$$

welche aus der vorhergehenden folgt wenn man $a = b = c$ setzt. Nimmt man nacheinander $a = 1, 5, 10, 15$ geogr. Meilen $= 4, 20, 40, 60$ Minuten an, so wird der sphärische Excess beziehlich $\frac{1}{8}$, 3, 12, 27 Secunden, und es folgt hieraus dass bei Erddreiecken deren Seiten weniger als eine Meile oder auch nur weniger als 10 Kilometer betragen, gar keine Rücksicht auf den sphärischen Excess zu nehmen ist und dieselben folglich als ebene Dreiecke behandelt werden dürfen.

Da die Seiten a, b, c der geodätischen Dreiecke stets nur einen sehr kleinen Theil eines grössten Kreises der Erdkugel ausmachen, und meistentheils die halbe Summe aller drei Seiten kleiner als ein Erdgrad, d. h. kleiner als 15 Meilen ist, so darf (unter r den Halbmesser der Erdkugel und unter a, b, c, s die wirklichen Längen der Seiten verstanden) in dem Ausdrucke (117) gesetzt werden:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}s = \frac{s}{2r};\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(s-a) = \frac{s-a}{2r};\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(s-b) = \frac{s-b}{2r}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(s-c) = \frac{s-c}{2r};\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{4}\varepsilon = \tfrac{1}{4}\varepsilon \operatorname{tg} 1'' \text{ und folglich}$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{r^2 \operatorname{tg} 1''} \qquad (119)$$

Nun ist aber aus der ebenen Trigonometrie bekannt dass die Fläche f eines ebenen Dreiecks welches die Seiten a, b, c hat, der Quadratwurzel aus s (s — a) (s — b) (s — c) gleich ist; führt man daher in die letzte Gleichung f ein, so wird für ein geodätisches Dreieck der sphärische Excess

$$\varepsilon = \frac{f}{r^2 \operatorname{tg} 1''} = 206265'' \frac{f}{r^2} \tag{120}$$

Sind zwei Seiten a, b und der von ihnen eingeschlossene Winkel C′ eines ebenen Dreiecks A B C bekannt, so ist $f = \frac{1}{2}$ a b sin C′; und wenn in dem vorliegenden Falle auch nicht C′ sondern C bekannt ist, so darf doch unbeschadet der Genauigkeit $f = \frac{1}{2}$ a b sin C und

$$\varepsilon = \frac{a\, b \sin C}{2\, r^2 \operatorname{tg} 1''} = 206265'' \frac{a\, b \sin C}{2\, r^2} \tag{121}$$

gesetzt werden. Kennt man in einem sphärischen Dreiecke A B C eine Seite c und die beiden anliegenden Winkel A und B, so ist aus dem vorhin angegebenen Grunde der sphärische Excess genau genug durch die Formel

$$\varepsilon = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2\, r^2 \sin (A + B) \operatorname{tg} 1''} \tag{122}$$

ausgedrückt, worin auch sin (A + B) = sin C gesetzt werden kann.

Die vorstehenden Ausdrücke für ε haben einen gemeinsamen Coefficienten der Dreiecksfläche f, nämlich

$$k = \frac{1}{r^2 \operatorname{tg} 1''} = \frac{206265''}{r^2}$$

und diesen kann man im Voraus feststellen, so dass alsdann die Werthe von ε einfacher zu berechnen sind. Der Krümmungshalbmesser r wird wegen der sphäroidischen Gestalt der Erde in höheren Breiten etwas grösser, daher auch der Werth von k etwas kleiner; die Unterschiede der einzelnen Coefficienten sind jedoch nur gering, denn in Metermass ist z. B.

für die Breite $\varphi = 45^0$ der log k = 1,70511 — 10
für die Breite $\varphi = 50^0$ ist log k = 1,70461 — 10

Wenn nun für das Dreieck der bayerischen Landesvermessung: Speyer — Calmit — Oggersheim die gemessene Basis Speyer — Oggersheim c = 19795 m, der Winkel bei S = 75⁰ 24′ 9″,73, jener bei O = 62⁰ 31′ 20″,79 und der bei C = 42⁰ 4′ 30″,19 und die mittlere Breite dieses Dreiecks $\varphi = 49^0\ 30'$ ist, so wird dessen sphärischer Excess

$$\varepsilon = k\,.\,a\, b \sin C = \left[1{,}40361 - 10\right] c^2 \frac{\sin O \sin S}{\sin C} = 1{,}27''$$

während die Messung einen solchen von nur 0,71″ ergeben hat. (In einer besonderen Tafel des Anhangs (Nr VI, Spalte 4) sind die Werthe für log k = log ($\varrho : r^2$) = log 206265 — 2 log r enthalten welche mit der Fläche des Dreiecks $f = \frac{1}{2}$ a b sin C multiplicirt den Excess ε geben.)

§. 63. Aufgabe. In einem Dreiecke A B C wurde die Seite A B = c = 24187,5 Toisen und der Winkel bei

A mit dem Gewichte $10 = 71^0\,48'\,34{,}3''$
B mit dem Gewichte $20 = 48\;\;27\;\;12{,}8$
C mit dem Gewichte $12 = 59\;\;44\;\;22{,}5$

gemessen: man soll diese Winkel ausgleichen.

Zuerst ist der sphärische Excess ε nach der vorstehenden Formel zu berechnen. In diesem Ausdrucke ist bekannt:

$$c = 24187,5^t;\; r = 3266608^t;\; \frac{1''}{\operatorname{tg} 1''} = 206265''$$

Die Winkel A und B könnte man zwar nehmen, wie sie gemessen wurden: da jedoch $\alpha + \beta + \gamma = 180^0\,0'\,9'',6$ gegeben ist, so sind die Werthe von A und B welche um den dritten Theil von $\varepsilon' = 9'',6$ d. i. um $3'',2$ verkleinert sind, zur Berechnung des sphärischen Excesses am geeignetsten, nämlich:

$$A' = 71^0\,48'\,31{,}1'';\; B' = 48^0\,27'\,9{,}6''$$

Setzt man alle diese Werthe in den Ausdruck für ε ein und vollzieht die Ausrechnung, so findet man den Excess $\varepsilon = 4{,}65''$ und es ist folglich die Differenz $180^0\,0'\,4{,}65'' - 180^0\,0'\,9{,}60'' = -\,4{,}95''$ auf die drei Winkel A, B, C nach §. 23, S. 26 zu vertheilen. Heissen die Verbesserungen beziehlich v_1, v_2, v_3, so hat man zunächst die Bedingungsgleichung

$$v_1 + v_2 + v_3 = -\,4{,}95''$$

dann die drei Correlatengleichungen:

$$v_1 = \tfrac{1}{10}\,k_1;\; v_2 = \tfrac{1}{20}\,k_1;\; v_3 = \tfrac{1}{12}\,k_1$$

und schliesslich die Normalgleichung

$$(\tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{20} + \tfrac{1}{12})\,k_1 = 0{,}233\,k_1 = -\,4{,}95''$$

Hieraus findet man $k_1 = -\,21{,}25''$ und damit die Verbesserungen

$$v_1 = -\,2{,}12'';\; v_2 = -\,1{,}06'';\; v_3 = -\,1{,}77''$$

Es sind somit die verbesserten Winkel deren Summe $= 180^0\,0'\,4{,}65''$ sein muss:

$$A = 71^0\,48'\,32{,}18''$$
$$B = 48\;\;27\;\;11{,}74$$
$$C = 59\;\;44\;\;20{,}73$$

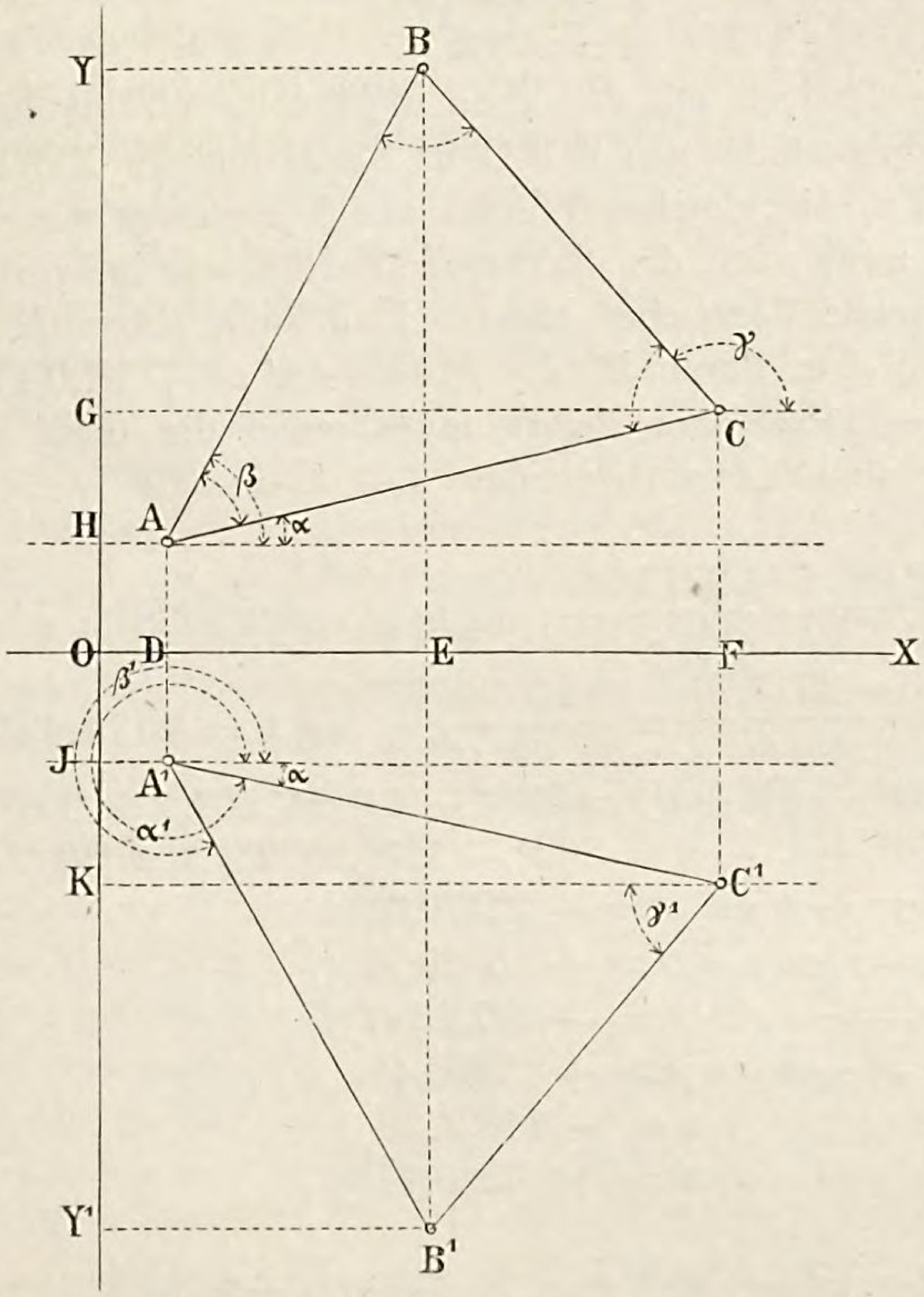
§. 64. Aufgabe. Von einem ebenen Dreiecke ABC sind die Coordinaten zweier Punkte A, C und die drei Winkel gegeben: es sollen die Coordinaten des dritten Punkts B bestimmt werden.

Für diese Grundaufgabe aller Triangulirungen in der Ebene mögen in der Fig. 74 die Geraden OX, OY die positiven Richtungen der senkrechten Coordinatenaxen, x_1 und y_1 die gegebenen Coordinaten von A, x_2 und y_2 jene von C und x, y die gesuchten Coordinaten von B sein. Die drei gemessenen und bereits auf 180^0 ausgeglichenen Winkel des Dreiecks sollen A, B, C heissen.

Nach den Formeln der analytischen Geometrie ist allgemein, wenn man unter $(A\,C) = \alpha$, $(A\,B) = \beta$ und $(C\,B) = \gamma$ die Winkel der Richtungen AC, AB, CB mit der Abscissenaxe und unter a, b, c die Seitenlängen CB, AC, AB versteht:

$$\begin{gathered}
\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1};\ b = \frac{y_2 - y_1}{\sin\alpha} = \frac{x_2 - x_1}{\cos\alpha} \\
\beta = A + \alpha;\ \gamma = 180^0 - (C - \alpha) = \beta + B \\
c \sin(A + C) = b \sin C;\ a \sin(A + C) = b \sin A \\
y = y_1 + c \sin\beta = y_2 + a \sin\gamma \\
x = x_1 + c \cos\beta = x_2 + a \cos\gamma
\end{gathered} \tag{123}$$

Fig. 74.



Zahlenbeispiele:

1) Wenn die Winkel $A = 50^0\,54'\,10''$ und die Coordinaten $x_1 = 1020{,}30$ m

$B = 67\ 25\ 35 \qquad y_1 = 2345{,}67$

$C = 61\ 40\ 15 \qquad x_2 = 15678{,}91$

$A + B + C = 180^0\ 0'\ 0'' \qquad y_2 = 5065{,}43$

sind, so findet man nach den vorstehenden Formeln den Winkel α aus

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2719{,}76}{14658{,}61};\ \log\operatorname{tg}\alpha = 9{,}2684381;\ \alpha = 10^0\,30'\,40'',$$

$$b = \frac{2719{,}76}{\sin\alpha} = \frac{14658{,}61}{\cos\alpha};\ \log b = 4{,}1734423$$

$$\beta = 61^0\,24'\,50'',1;\ \gamma = 128^0\,50'\,25'',1 = 180^0 - 51^0\,9'\,34'',9$$
$$\log c = \log b + \log \sin C - \log \sin B = 4{,}1526576$$
$$\log a = \log b + \log \sin A - \log \sin B = 4{,}0979633$$
$$\log c + \log \sin \beta = 4{,}0962011;\quad c \sin \beta = +\ 12479{,}61\,\mathrm{m}$$
$$\log c + \log \cos \beta = 3{,}8325205;\quad c \cos \beta = +\ 6800{,}16$$
$$\log a + \log \sin \gamma = 3{,}9894435;\quad a \sin \gamma = +\ 9759{,}86$$
$$\log a + \log \cos \gamma = 3{,}8953358_n;\quad a \cos \gamma = -\ 7858{,}43$$
$$y = 14825{,}28$$
$$x = 7820{,}47$$

2) Läge das Dreieck mit den oben angegebenen Winkeln A, B, C so als ob es das Spiegelbild von A B C in Bezug auf die X-Axe wäre, so behielten x_1 und x_2 die gleichen Werthe und Vorzeichen wie vorhin, während y_1 und y_2 zwar auch die absoluten Werthe wie im vorigen Beispiel aber entgegengesetzte Vorzeichen hätten. Man kann also voraussehen dass die Rechnung für den Punkt B′ die Abscisse $x' = +\ 7820{,}47$ m und die Ordinate $y' = -\ 14825{,}28$ m liefern muss wenn die oben entwickelten Formeln richtig auf den vorliegenden Fall übertragen werden. In der That ist

$$\mathrm{tg}\,\alpha' = \frac{y'_2 - y'_1}{x_2 - x_1} = -\frac{2719{,}76}{14658{,}61};\ \log \mathrm{tg}\,\alpha' = 9{,}2684381_n;\ \alpha' = 360^0 - \alpha$$
$$b = \frac{-\ 2719{,}76}{\sin \alpha'} = \frac{14658{,}61}{\cos \alpha'};\ \log b = 4{,}1734423$$
$$\beta' = 360^0 - (A + \alpha) = 360^0 - 61^0\,24'\,50'',1 = 360^0 - \beta$$
$$\gamma' = 180^0 + C - \alpha = 360^0 - 128^0\,50'\,25'',1 = 360^0 - \gamma$$
$$c \sin \beta' = -\ c \sin \beta = -\ 12479{,}61\,\mathrm{m}$$
$$c \cos \beta' = +\ c \cos \beta = +\ 6800{,}16$$
$$a \sin \gamma' = -\ a \sin \gamma = -\ 9759{,}86$$
$$a \cos \gamma' = -\ a \cos \gamma = +\ 7858{,}43$$
$$y = -\ 14825{,}28$$
$$x = +\ 7820{,}47$$

5. Einfluss der unvermeidlichen Beobachtungsfehler auf Dreiecksberechnungen.

§. 65. Ein Dreieck ist durch drei Stücke bestimmt wenn sich darunter eine Seite befindet. Sind diese Stücke mit mathematischer Genauigkeit gegeben, so werden auch die übrigen Stücke mit dieser Genauigkeit gefunden; enthalten aber die gegebenen Stücke kleine Fehler, so müssen nothwendig auch die aus ihnen berechneten Stücke des Dreiecks mehr oder minder fehlerhaft werden. Es ist nun für den praktischen Geometer wichtig, zu wissen: innerhalb welcher Grenzen die berechneten Stücke eines Dreiecks falsch sind wenn die Fehlergrenzen der Messungsresultate bekannt sind, und für welche Form der Dreiecke der Einfluss der Beobachtungsfehler möglichst klein wird.

Bei der nachfolgenden Untersuchung dieser Fragen wird vorausgesetzt dass die Messungsfehler nicht von einem schlechten Zustande der Instrumente oder von der Ungeschicklichkeit oder Nachlässigkeit des Geometers herrühren sondern dass sie zu den unvermeidlichen Fehlern gehören, also möglichst klein sind. Werden nun zwei so kleine Grössen mit einander multiplicirt, so kann ihr Product gegen jedes andere Product das aus einer gemessenen Grösse und deren Zuwachs oder Abnahme hervorgeht, vernachlässigt werden, so wie die zweite Potenz der Fehlergrösse verschwindend klein ist gegen ihre erste Potenz.

Unter dieser Voraussetzung, und da es sich bei Betrachtung der Folgen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler doch nur um annähernde Resultate handelt, ist es gestattet, die Aenderung welche eine Function von gemessenen und desshalb fehlerhaften Grössen erleidet wenn letztere um ihre Fehler verbessert werden, dadurch zu finden dass man jene Function nach den einer geringen Veränderlichkeit fähigen Grössen differentiirt.

Sind z. B. die Grundlinie x und die Höhe y eines Parallelogramms beziehlich um $\varDelta x$ und $\varDelta y$ zu klein gemessen worden, also ihre wahren Längen $x + \varDelta x$ und $y + \varDelta y$, so ist der wahre Flächeninhalt des Parallelogramms

$$(x + \varDelta x)(y + \varDelta y) = x y + x \varDelta y + y \varDelta x + \varDelta x \varDelta y$$

während der aus den Messungsresultaten hervorgehende $x y$ ist. Die Aenderung nun welche der Ausdruck $x y$ erleidet, indem man $x + \varDelta x$ für x und $y + \varDelta y$ für y setzt, ist mit Rücksicht auf die Bemerkung über die Grösse des Products $\varDelta x \varDelta y$:

$$\varDelta (x y) = (x + \varDelta x)(y + \varDelta y) - x y = x \varDelta y + y \varDelta x$$

Vergleicht man aber dieses Ergebniss mit dem welches aus der Differentiirung des Products $x y$ hervorgeht, so unterscheidet es sich von letzterem nur dadurch dass hier $\varDelta$ steht, wo dort d; und dieser Unterschied rührt lediglich davon her dass die Fehler $\varDelta x$, $\varDelta y$ keine unendlich kleinen Grössen sind und zu sein brauchen, obwohl sie immerhin als sehr klein zu denken sind. Wir werden in den nachfolgenden Entwickelungen $d x$, $d y$ statt $\varDelta x$, $\varDelta y$ schreiben und darunter sehr kleine Werthe verstehen.

Die Fehler $d x$ und $d y$ können ebensowohl positiv als negativ sein und es kann $+ d x$ mit $+ d y$, $+ d x$ mit $- d y$, $- d x$ mit $+ d y$ und $- d x$ mit $- d y$ zusammentreffen. Bewegt sich also der wahre Werth einer Linie x zwischen $x + d x$ und $x - d x$, jener der Linie y aber zwischen $y + d y$ und $y - d y$, so kann der wahre Werth des Verhältnisses beider von dem Verhältniss $x : y$ ebensowohl um die Grösse

$$\pm \frac{y\,d x + x\,d y}{y^2} \text{ als um die Grösse } \pm \frac{y\,d x - x\,d y}{y^2}$$

verschieden sein. Die äussersten Grenzen des Verhältnisswerths sind demnach

$$\frac{x}{y} + \frac{y\,d x + x\,d y}{y^2} \text{ und } \frac{x}{y} - \frac{y\,d x - x\,d y}{y^2}$$

Stellen $d x$ und $d y$ Fehler vor welche bei Winkelmessungen unvermeidlich waren, so sind dieselben beim Vergleichen mit den zugehörigen

Winkeln in ein und derselben Masseinheit auszudrücken, so dass wenn in einem Winkel $x = 37^0\,40'\,20''$ ein Fehler d x von 5″ vorkommt, der absolute Werth von $d\,x = 5''$ und der von $x = 135620''$ ist. Der relative Fehler wird alsdann
$$\frac{d\,x}{x} = \frac{5}{135620} = \frac{1}{27124}$$

Ist aber ein Winkel nicht unmittelbar sondern durch irgend eine trigonometrische Function d. h. durch das Verhältniss zweier Linien gegeben, so muss auch sein Fehler durch ein solches Verhältniss ausgedrückt werden. Das passendste Verhältniss gibt in diesem Falle der den Winkelfehler messende Kreisbogen und der Halbmesser 1. Hiernach ist ein Fehler

$$\text{von 1 Secunde} = \frac{2\,\pi}{360\,.\,60\,.\,60} = \frac{1}{206265}\cdot \tag{124}$$

$$\text{von 1 Minute} = \frac{2\,\pi}{360\,.\,60} = \frac{60}{206265} = \frac{1}{3438} \tag{125}$$

Hat man $\sin x \,.\, d\,x$ zu berechnen für $x = 37^0\,40'\,20''$ und $d\,x = 5''$, so geschieht es wie folgt:

$$\log \sin x = \log (\sin 37^0\,40'\,20'') = 0{,}78614 - 1$$
$$\log d\,x = \log \left(\frac{5}{206265}\right) = 0{,}38455 - 5$$
$$\log (\sin x \,.\, d\,x) = \log \sin x + \log d\,x = 0{,}17069 - 5$$
$$\sin x \,.\, d\,x = 0{,}0000148$$

§. 66. Aufgabe. Ein Dreieck ist durch Vorwärtseinschneiden aufgenommen worden; man soll bestimmen welchen Einfluss die Beobachtungsfehler auf die berechneten Seiten haben, und wann dieser Einfluss am kleinsten wird.

Das Dreieck heisse A B C, die gemessene Seite sei c und die beiden anliegenden ebenfalls gemessenen Winkel seien A und B. Die Messungsfehler sollen $\pm\,d\,c$, $\pm\,d\,A$, $\pm\,d\,B$ sein. Es fragt sich, innerhalb welcher Grenzen die berechneten Werthe der Seiten a und b unsicher sind.

Betrachten wir zuerst die Seite a und nehmen wir an, alle Beobachtungsfehler seien positiv, also die Seite c um d c, der Winkel A um d A und der Winkel B um d B zu klein gemessen, so dass die richtigen Werthe beziehlich $c + d\,c$, $A + d\,A$ und $B + d\,B$ sind. Sucht man die Seite a aus den durch Beobachtung gefundenen Grössen c, A und B, so dient dazu die bekannte Gleichung:
$$a = \frac{c \sin A}{\sin (A + B)} \tag{126}$$

Würde man nun in diesem Ausdrucke $c + d\,c$ für c, $A + d\,A$ für A, und $B + d\,B$ für B setzen, so fände man einen zweiten Werth von a und dessen Unterschied von dem ersten gäbe den Fehler in der Seite a. Diesen Fehler erhält man aber unmittelbar wenn man die vorstehende Gleichung logarithmisirt und nach §. 65 differentiirt; hiedurch wird

$$\log a = \log c + \log \sin A - \log \sin (A + B)$$
$$\frac{d\,a}{a} = \frac{d\,c}{c} + \frac{d\,A}{\operatorname{tg} A} - \frac{d\,A + d\,B}{\operatorname{tg} (A + B)} \tag{127}$$

Dieser Ausdruck gibt das Verhältniss des Fehlers in der Seite a zu dieser Seite selbst an. Wären beide Winkel fehlerfrei, so würde

$$\frac{d\,a}{a} = \frac{d\,c}{c}$$

d. h. die berechnete Seite a in demselben Verhältniss falsch sein, als die gemessene Seite c. Wäre dagegen die Seite c ohne Fehler, so erhielte man

$$\frac{d\,a}{a} = \frac{d\,A}{tg\,A} - \frac{d\,A + d\,B}{tg\,(A + B)} = \frac{d\,A}{tg\,A} + \frac{d\,A + d\,B}{tg\,C} \qquad (128)$$

und hiernach würde der Werth des Fehlers d a um so grösser sein, je kleiner tg C, d. h. je spitzer der Winkel C ist; bei unverändertem A würde der Fehler d a um so kleiner, je mehr sich der Winkel C einem rechten nähert, oder darüber hinaus geht. Sind die Fehler d c, d A, d B mit negativen oder verschiedenen Vorzeichen versehen, so darf man nur, um den Werth von d a : a zu erhalten, in der rechten Seite der Gleichung (127) diese Vorzeichen einführen. Stellt man alle möglichen Werthe des Verhältnisses d a : a her, so wird einer den grössten absoluten Werth haben, und da dieser Werth sowohl positiv als negativ sein kann, so gibt derselbe den Spielraum an, innerhalb dessen sich der relative Fehler d a : a bewegt.

Dass dieselben Betrachtungen welche für die Seite a angestellt werden können, auch für b gelten, versteht sich von selbst. Es wird demnach auch

$$\frac{d\,b}{b} = \frac{d\,c}{c} + \frac{d\,B}{tg\,B} - \frac{d\,A + d\,B}{tg\,(A + B)} \qquad (129)$$

sein. Fragt man, unter welcher Bedingung der relative Fehler in b gleich dem in a wird, so liefern die Gleichungen (127) und (129) die Antwort: wenn B = A ist. Fragt man weiter, unter welcher Bedingung der Fehler in der berechneten Seite b am kleinsten wird, vorausgesetzt dass d c null oder constant ist, so stimmt die Antwort darauf mit der nach Gl (128) für die Seite a gegebenen überein.

Stellt man jetzt die Frage auf: wie muss ein durch Vorwärtseinschneiden aufzunehmendes Dreieck beschaffen sein wenn dasselbe den Messungsfehlern unter allen Verhältnissen den geringsten Einfluss auf die zu berechnenden Seiten gestatten soll: so kann man sich die Antwort dass es gleichseitig oder doch nahezu gleichseitig sein muss, selbst geben. Denn nimmt man es aus der Seite c auf, so soll für a und b der Winkel C sich 90° nähern; wird es aus a aufgenommen, so gilt dieselbe Forderung für den Winkel A, um die Fehler in b und c möglichst klein zu machen; und macht man die Seite b zur Basis, so soll der Winkel B sich 90° nähern. Da es aber nicht möglich ist dass alle drei Winkel zugleich 90° nahe kommen, und da die Fehler d a, d b, d c um so grösser werden, je spitzer die Winkel C, B, A sind, so ist es offenbar das Vortheilhafteste wenn A = B = C = 60° und mithin das Dreieck gleichseitig ist.

§. 67. Aufgabe. In einem durch Rückwärtseinschneiden aufgenommenen Dreiecke sind die gemessenen Stücke fehler-

haft: es soll angegeben werden, um wie viel die daraus berechneten Seiten falsch sind, und welches die beste Form des Dreiecks für diese Art der Aufnahme ist.

Heisst das Dreieck A B C und sind die gemessenen Stücke: die Seite c, der Winkel A und der Winkel B: so findet man aus diesen Stücken die Seite a aus der Gleichung $a \sin C = c \sin A$ oder aus

$$\log a = \log c + \log \sin A - \log \sin C \tag{130}$$

Ist die Seite c mit dem Fehler $\pm\, d\, c$, der Winkel A mit dem Fehler $\pm\, d\, A$ und der Winkel C mit dem Fehler $\pm\, d\, C$ behaftet, berücksichtigt man aber vorläufig nur die positiven Werthe der Fehler, so erhält man durch Differentiiren der letzten Gleichung den relativen Fehler in a:

$$\frac{d\,a}{a} = \frac{d\,c}{c} + \frac{d\,A}{\operatorname{tg} A} - \frac{d\,C}{\operatorname{tg} C} \tag{131}$$

Führt man in dem Ausdrucke rechts alle möglichen Verbindungen der Vorzeichen von d c, d A und d C ein, so wird man den grössten absoluten Werth von d a : a finden und damit auch die grösste Abweichung des aus den gemessenen Stücken berechneten Werths der Seite a von ihrem wahren Werthe. Da der Ausdruck

$$\frac{d\,A}{\operatorname{tg} A} - \frac{d\,C}{\operatorname{tg} C} = 0$$

ist wenn die relativen Fehler der gemessenen Winkel einander gleich sind, so folgt dass in diesem Falle die Seite a in demselben Masse falsch erhalten wird, als die Seite c fehlerhaft gemessen wurde. Wäre c fehlerfrei und hätte man in A und C Fehler begangen welche sich ihrer absoluten Grösse nach wie die Tangenten von A und C verhielten, ihrer Lage nach aber beide positiv oder beide negativ wären: so würden sich die Wirkungen dieser Fehler gegenseitig vernichten und man fände die Seite a gerade so wie sie fehlerfreie Stücke geliefert hätten.

Sind d c und d A positiv, so wird für $A < 90^0$ und $C > 90^0$

$$\frac{d\,a}{a} = \pm \left(\frac{d\,c}{c} + \frac{d\,A}{\operatorname{tg} A} + \frac{d\,C}{\operatorname{tg} C} \right) \tag{132}$$

je nachdem der Fehler d C negativ oder positiv ist. Dieser Fehler ist, insofern er von dem Vorzeichen abhängt, der grösste welcher in der Seite a vorkommen kann, und es beträgt somit die Schwankung der Grenzen des Werths von a:

$$2 \left(\frac{d\,c}{c} + \frac{d\,A}{\operatorname{tg} A} + \frac{d\,C}{\operatorname{tg} C} \right)$$

Ist der Fehler $d\,A = d\,C$, so wird, wenn diese Fehler in gleichem Sinne begangen wurden, der Fehler in a, so weit er von den Winkeln abhängt, null, sobald diese Winkel einander gleich sind. Geht man nun nicht davon aus dass gerade die Seite c zur Aufnahme des Dreiecks diene, sondern stellt man es frei welche Seite man dazu wählen mag, so ist klar dass wenn der Aufnahme die Seite b zu Grunde gelegt und c gesucht wird, die Winkel B und C ebenfalls einander gleich sein müssen wenn

die Grösse von c durch die Winkelmessung nicht berührt werden soll. Hat man aber die Bedingung $A = C$ und $B = C$, also $A = B = C$, so folgt von selbst dass wiederum das gleichseitige oder ein diesem nahekommendes Dreieck dasjenige ist welches den Messungsfehlern den geringsten Einfluss auf die zu berechnenden Stücke gestattet.

§. 68. Aufgabe. Zu bestimmen, wie gross die aus den Beobachtungsfehlern entspringenden Fehler in den berechneten Stücken eines durch Seitwärtseinschneiden aufgenommenen Dreiecks werden, und welche Form des Dreiecks für diese Art der Aufnahme am zweckmässigsten ist.

Die gemessenen Stücke des Dreiecks A B C seien die Seiten a, b und der Winkel C. Zur Berechnung der Seite c dient die bekannte Gleichung:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos C$$

Differentiirt man diese Gleichung, so wird

$$c\,dc = a\,da + b\,db - (a\,db + b\,da)\cos C + a\,b\sin C\,dC \qquad (133)$$

und nach der Division mit $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos C$ der Fehler in c:

$$\frac{dc}{c} = \frac{(a - b\cos C)\,da + (b - a\cos C)\,db + a\,b\sin C\,dC}{a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos C} \qquad (134)$$

In diesem Ausdrucke kommen nur die gemessenen Grössen a, b, C vor. Führt man auch die übrigen c, A, B ein und berücksichtigt dass $(a - b\cos C) = c\cos B$ und $(b - a\cos C) = c\cos A$ ist, so wird

$$\frac{d\,c}{c} = \frac{a\cos B}{c}\,\frac{d\,a}{a} + \frac{b\cos A}{c}\,\frac{d\,b}{b} + \frac{b\sin A}{c}\,d\,C \qquad (135)$$

Sind a und b mit gleicher relativer Genauigkeit gemessen, so ist, da $a\cos B + b\cos A = c$, der relative Fehler in c gleich

$$\frac{d\,c}{c} = \frac{d\,a}{a} + \frac{b\sin A}{c}\,d\,C$$

Setzt man in Gleichung (133) den Winkel $C = 180^0$, so wird

$$c\,.\,d\,c = (a + b)\,(d\,a + d\,b)$$

und da in diesem Falle das Dreieck in eine Gerade von der Länge $a + b = c$ übergeht, so folgt $d\,c = d\,a + d\,b$. Nimmt man $C = 0$ an, so wird $c\,.\,d\,c = (a - b)\,(d\,a - d\,b)$ und da hier $c = a - b$ ist, so erhält man $d\,c = d\,a - d\,b$; ein Ergebniss dessen Richtigkeit auch ohne diese Entwickelung einleuchtet. Wären die Seiten fehlerfrei gemessen, also d a und d b null, so würde

$$c\,.\,d\,c = a\,b\sin C\,dC$$

d. h. der Fehler in der berechneten Seite dem Winkelfehler proportional sein. Will man ausser dem Fehler in der Seite c auch die Fehler in den Winkeln A und B bestimmen, so gehören dazu drei Gleichungen, während wir bisher bloss eine, nämlich die aus der Grundgleichung hervorgegangene (133) behandelten. Eine der beiden Gleichungen in welchen die Winkel A und B vorkommen, ist die bekannte Relation $a\sin B = b\sin A$ woraus folgt

$$a\cos B\,.\,d\,B + \sin B\,.\,d\,a = b\cos A\,.\,d\,A + \sin A\,.\,d\,b \qquad (136)$$

und die dritte Gleichung ergibt sich aus der ebenfalls gegebenen Summe der drei auf 180⁰ ausgeglichenen Winkel, nämlich aus $A + B + C = 180^0$. Differentiirt man diese Gleichung, so kommt

$$d\,A + d\,B + d\,C = 0 \qquad (137)$$

Sucht man aus (136) und (137) die Werthe von d A und d B durch einfaches Substituiren, so gelangt man sofort zu den Ausdrücken:

$$d\,A = \frac{b \sin A}{c}\left(\frac{d\,a}{a} - \frac{d\,b}{b}\right) - \frac{a \cos B}{c} \cdot d\,C \qquad (138)$$

$$d\,B = \frac{b \sin A}{c}\left(\frac{d\,b}{b} - \frac{d\,a}{a}\right) - \frac{b \cos A}{c} \cdot d\,C \qquad (139)$$

woraus man entnimmt dass die Fehler in den berechneten Winkeln A und B um so kleiner werden, je grösser die Seite c im Verhältniss zu a und b, d. h. je grösser der eingeschlossene Winkel ist. Dieses Ergebniss ist (nach Abtheilung C) sehr günstig für die Aufnahme der Vielecke aus ihrem Umfange, weil hierbei meist stumpfwinklige Dreiecke aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel aufzunehmen sind.

Haben die Messungen der Seiten a und b eine gleiche Genauigkeit, und sind die Messungsfehler in einerlei Sinn begangen worden, so ist

$$d\,A = -\frac{a \cos B}{c} \cdot d\,C \qquad (140)$$

$$d\,B = -\frac{b \cos A}{c} \cdot d\,C \qquad (141)$$

Addirt man diese beiden Ausdrücke und berücksichtigt dass $a \cos B + b \cos A = c$ ist, so kommt, wie es sein muss, $d\,A + d\,B + d\,C = 0$; und werden die beiden Winkel A und B einander gleich, so ist $a \cos B = b \cos A = \frac{1}{2} c$ und daher $d\,A = d\,B = -\frac{1}{2}\,d\,C$.

Soll ein Dreieck so angeordnet werden dass, wenn man es nach und nach von allen drei Endpunkten aus durch Seitwärtseinschneiden aufnimmt, die Summe aller Folgen der Beobachtungsfehler auf die berechneten Stücke möglichst klein wird, so ist dazu abermals nur ein gleichseitiges oder diesem nahe kommendes Dreieck geeignet; denn für die Aufnahme aus der Ecke C ist es vortheilhaft wenn die Winkel A und B und also auch die Seiten a und b gleich sind; für die Messung aus dem Punkte B werden die Folgen der Beobachtungsfehler am geringsten wenn die Winkel A und C oder die Seiten a und c nicht von einander abweichen, und für die Aufnahme aus dem Punkte A besteht die Bedingung $B = C$ oder $b = c$; allen diesen Bedingungen zugleich kann aber nur ein gleichseitiges Dreieck entsprechen.

§. 69. Aufgabe. In einem ebenen Dreiecke A B C sind die Coordinaten x, y eines Punkts B aus den Coordinaten der beiden anderen Punkte und aus den drei auf 180⁰ ausgeglichenen Winkeln bestimmt worden: man soll die zu befürchtenden Fehler in x und y berechnen wenn jeder der zur Coordinaten-

bestimmung benützten Winkel A und C um eine sehr kleine Grösse $d\omega$ unsicher ist.

Wir fassen hier den in §. 64 behandelten Fall mit der dort abgedruckten Figur ins Auge und beschränken die Fehlerberechnung auf den Punkt B, da die für B′ principiell nicht verschieden ist. Dabei nehmen wir die Coordinaten $x_1\ y_1\ x_2\ y_2$ und die daraus abgeleiteten Werthe von α und b als richtig und constant an, so dass in den Ausdrücken für die Coordinaten, nämlich in

$$y = y_1 + c \sin\beta = y_2 + a \sin\gamma$$
$$x = x_1 + c \cos\beta = x_2 + a \cos\gamma$$

ausser x und y nur die Seiten a, c und die Winkel β, γ veränderlich sind. Um nur eine Veränderliche in den Ausdrücken für die Fehler dx und dy zu haben, müssen die Seiten a und c durch die veränderlichen Winkel A und C von denen sie abhängen, ausgedrückt werden. Nun ist aber nach der Figur, wenn beiden Winkeln A und C eine gleichgrosse und gleichgerichtete (positive oder negative) Aenderung $d\omega$ zugeschrieben wird:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin(A+C)}$$

und daher $$\frac{da}{b} = \frac{d\omega}{\sin(A+C)}\left(\cos A - 2\sin A \operatorname{cotg}(A+C)\right)$$

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin(A+C)}$$

und daher $$\frac{dc}{b} = \frac{d\omega}{\sin(A+C)}\left(\cos C - 2\sin C \operatorname{cotg}(A+C)\right)$$

Setzt man $2\sin A \operatorname{cotg}(A+C) = P$ und $2\sin C \operatorname{cotg}(A+C) = P_1$, so ist weiter

$$da = \frac{b\,.\,d\omega}{\sin(A+C)}\left(\cos A - P\right) \text{ und } dc = \frac{b\,.\,d\omega}{\sin(A+C)}\left(\cos C - P_1\right)$$

daher auch, wenn man obige Coordinatenwerthe für y und x differentiirt:

$$\left.\begin{aligned} dy &= \frac{b\,.\,d\omega}{\sin(A+C)}\left(\sin(\beta+C) - P_1\sin\beta\right) = \\ &= \frac{b\,.\,d\omega}{\sin(A+C)}\left(\sin(\gamma-A) - P\sin\gamma\right) \\ dx &= \frac{b\,.\,d\omega}{\sin(A+C)}\left(\cos(\beta+C) - P_1\cos\beta\right) = \\ &= \frac{b\,.\,d\omega}{\sin(A+C)}\left(\cos(\gamma-A) - P\cos\gamma\right) \end{aligned}\right\} \quad (142)$$

Bezeichnet man die Verbindungslinie $B B_0$ des mit falschen Daten berechneten Punkts B und des wahren B_0 der Grösse nach durch f und ihren Winkel mit der Abscissenaxe durch $\varDelta$, so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie

$$\operatorname{tg}\varDelta = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin(\beta+C) - P_1\sin\beta}{\cos(\beta+C) - P_1\cos\beta} = \frac{\sin(\gamma-A) - P\sin\gamma}{\cos(\gamma-A) - P\cos\gamma} \quad (143)$$

$$f = \sqrt{d\,x^2 + d\,y^2} = \pm \frac{b\,.\,d\,\omega}{\sin(A + C)} \sqrt{1 - 2\,P_1 \cos C + P_1{}^2} =$$

$$= \pm \frac{b\,.\,d\,\omega}{\sin(A + C)} \sqrt{1 - 2\,P \cos A + P^2} \qquad (144)$$

und hiemit der Fehler f seiner Grösse und Richtung nach bestimmt. Die Doppelausdrücke für d x, d y, t g $\varDelta$, f gewähren eine vorzügliche und leicht ausführbare Rechnungsprobe.

Zahlenbeispiel. Will man wissen wie gross die Fehler in x und y der in §. 64 berechneten besonderen Aufgabe sind wenn jeder der bei der Berechnung dieser Coordinaten benützten Winkel A und C um $d\,\omega = 10$ Sec. unsicher ist, so benütze man von dorther zunächst die Werthe
$A = 50^0 54' 10''$; $C = 61^0 40' 15''$; $A + C = 112^0 34' 25'' = 180^0 - 67^0 25' 35''$;
$\log b = 4{,}17344$; $\beta = 61^0\,24'\,50''$; $\gamma = 128^0\,50'\,25'' = 180^0 - 51^0\,9'\,35''$;
und bedenke ferner dass der einem Winkel von 10 Secunden entsprechende und im Bogenmass ausgedrückte Werth

$$d\omega = \frac{10}{206265} \text{ und } \log d\omega = 5{,}68557 - 10$$

ist. Mit diesen Daten findet man zunächst

$$P = 2 \sin A \operatorname{cotg}(A + C) = -0{,}64526;\ \log P = 9{,}80974_{neg}$$
$$P_1 = 2 \sin C \operatorname{cotg}(A + C) = -0{,}73186;\ \log P_1 = 9{,}86443_{neg}$$
$$\sin(\beta + C) - P_1 \sin\beta = +1{,}48051;\ \log = 0{,}17041$$
$$\cos(\beta + C) - P_1 \cos\beta = -0{,}19570;\ \log = 0{,}29159$$
$$\sin(\gamma - A) - P \sin\gamma = +1{,}48051;\ \log = 0{,}17041$$
$$\cos(\gamma - A) - P \cos\gamma = -0{,}19570;\ \log = 0{,}29159$$

und hiemit nach den vorstehenden Formeln für positive $d\,\omega$:

$$d\,y = +1{,}159\,m \qquad \varDelta = 97^0\,31'\,48''$$
$$d\,x = -0{,}153\,m \qquad f = 1{,}169\,m$$

woraus sich also ergibt dass der in §. 64 bestimmte Werth von $y = 14825{,}28$ m um $\pm 1{,}159$ m und der von $x = 7820{,}47$ m um $\pm 0{,}153$ m unsicher ist, sowie dass der Abstand f der beiden Punkte B, B_0 in einer Richtung welche mit der Abscissenaxe einen Winkel von $97^0\,31'\,48''$ bildet 1,169 m beträgt.

C. Messung von Vielecken.

§. 70. Ist ein Verband von Grundstücken oder ein Flurbezirk für sich, d. i. ohne Zusammenhang mit einer grösseren Landesvermessung, aufzunehmen, so beginnt man die Messung nicht damit dass man sofort jedes Grundstück einzeln aufnimmt und die erhaltenen Bilder in einer der Natur entsprechenden Folge aneinander reiht, sondern man überzieht zuerst die aufzunehmende Fläche mit einem Netze von genau gemessenen Dreiecken oder mit einem ebenso genau bestimmten Vielecke und knüpft an dessen Ecken und Seiten die Aufnahme der Grundstückgrenzen an. Der Vortheil dieses Verfahrens wonach vom Grossen in's Kleine gearbeitet und

die Controle der nachfolgenden Messungen in die vorausgegangenen Bestimmungen gelegt wird, beruht theils in der Sicherstellung gegen das Uebersehen grober Fehler in der Detailaufnahme, theils in der möglichst gleichmässigen Vertheilung der unvermeidlichen Messungsfehler, und ist jenem Vortheile vergleichbar den ein geordneter Zusammenhang der Umfangs- und Zwischenmauern eines Gebäudes für dessen inneren Ausbau gewährt.

Es ist hier nur von solchen Vielecken die Rede welche für kleinere Aufnahmen nöthig sind und welche demnach, auch wenn sie sich über eine Meile erstrecken sollten, als eben angesehen werden können; die grösseren aus Dreiecken zusammengesetzten Vielecke oder die Dreiecksnetze welche die Grundlage der Landes- und Gradmessungen bilden und deren horizontale Projectionen nicht mehr auf einer Ebene sondern nur auf der Kugelfläche richtig dargestellt werden können, werden erst in dem von der Messung ganzer Länder handelnden Abschnitte betrachtet. Auch betrachten wir hier nicht bloss geschlossene Vielecke sondern auch durch gerade Linien verbundene Reihenfolgen von Punkten d. i. offene Vielecke oder polygonale Züge, wie sie bei geometrischen Aufnahmen und Absteckungen für technische Zwecke oft genug vorkommen.

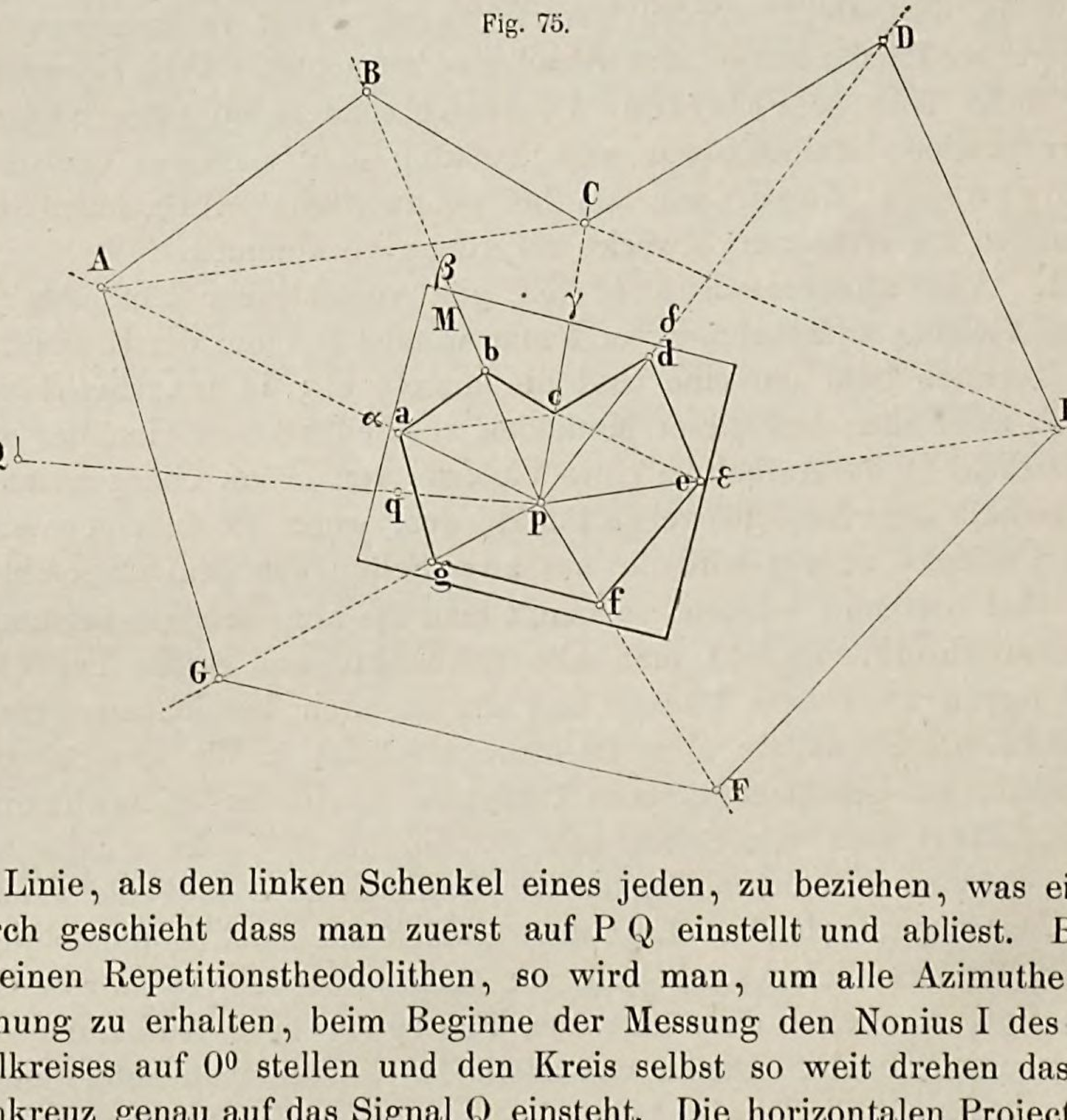
§. 71. Aufnahmsmethoden. Es gibt verschiedene Methoden geschlossene Vielecke aufzunehmen, und man wendet je nach der Beschaffenheit des Terrains bald die eine bald die andere an; in manchen Fällen lassen sich zwei oder drei dieser Methoden vortheilhaft mit einander verbinden. Geschieht die Aufnahme eines Vielecks von einem einzigen inner- oder ausserhalb desselben gelegenen Punkte aus, wobei die aufzunehmende Figur in Dreiecke zerlegt wird die aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel bestimmt werden, so nennt man das angewendete Verfahren die Polarmethode. Bezieht man alle Eckpunkte und Seiten des Vielecks auf irgend zwei feste Punkte und die dadurch bezeichnete gerade Linie welche als Grundlinie aller Dreiecke erscheint in die das Polygon zerlegt wird, so geschieht dessen Aufnahme nach der Einschneidmethode. Misst man alle Seiten und Winkel des Vielecks unmittelbar und stellt dasselbe aus diesen Theilen des Umfangs dar, so bedient man sich der Umfangsmethode. Legt man endlich alle Punkte und folglich auch alle Seiten des Vielecks mit Hilfe von recht- oder schiefwinkligen Coordinaten fest, so heisst diese Art der Festlegung oder Aufnahme die Coordinatenmethode. Diesen vier Methoden könnte man sofort noch eine fünfte beifügen, die Dreiecksmethode, nach welcher jedes Vieleck in ein Netz von Dreiecken die weder eine gemeinschaftliche Spitze noch Basis haben, zerlegt wird; es ist aber vorzuziehen diese bei grösseren Aufnahmen anzuwendende und unter dem Namen Triangulation bekannte wichtige Aufnahmsmethode in einem besonderen, dem folgenden Capitel zu erörtern.

§. 72. Aufgabe. Ein auf dem Felde abgestecktes geschlossenes Vieleck soll nach der Polarmethode aufgenommen werden.

Die Lösung dieser Aufgabe setzt immer voraus dass der vom Vieleck eingeschlossene Raum von Hindernissen möglichst frei ist, damit man von dem gewählten oder gegebenen Standpunkte aus nach allen Endpunkten hin visiren und messen kann. Der als Pol erscheinende Standpunkt wird am zweckmässigsten innerhalb und möglichst in der Mitte des Polygons angenommen, er kann aber auch in einer Ecke und sogar ausserhalb der aufzunehmenden Figur liegen.

Geschieht die Aufnahme mit dem Theodolithen, so stelle man denselben über dem Pole P (Fig. 75) centrisch und horizontal auf und messe die Azimuthalwinkel aller Richtungslinien P A, P B u. s. w. bis wieder zu P A. Soll das aufzunehmende Vieleck gegen eine gegebene feste Linie, z. B. P Q, orientirt werden, so thut man am besten alle Horizontalwinkel auf

Fig. 75.



diese Linie, als den linken Schenkel eines jeden, zu beziehen, was einfach dadurch geschieht dass man zuerst auf P Q einstellt und abliest. Besitzt man einen Repetitionstheodolithen, so wird man, um alle Azimuthe ohne Rechnung zu erhalten, beim Beginne der Messung den Nonius I des Horizontalkreises auf 0^0 stellen und den Kreis selbst so weit drehen dass das Fadenkreuz genau auf das Signal Q einsteht. Die horizontalen Projectionen der Linien P A, P B u. s. w. werden entweder mit Messlatten oder mit der Messkette auf bekannte Weise bestimmt; ist aber das Theodolithenfernrohr, wie das der neuen Kippregeln, zum Distanzmessen eingerichtet, so wird (bei sehr mässigen Ansprüchen an die Genauigkeit der geometrischen Aufnahme der Einzelnheiten des Flurbezirks) die Längenmessung selbstverständlich sofort mit der Winkelmessung verbunden und gleichzeitig

die Erhebung oder Senkung des Rohrs beobachtet, um die gemessenen schiefen Entfernungen auf den Horizont zu reduciren. Wie aus den horizontalen Fahrstrahlen und den Azimuthalwinkeln das Vieleck zu zeichnen ist, bedarf wohl keiner Beschreibung.

Wird das Vieleck mit dem Messtische und dem Reichenbach'schen Distanzmesser aufgenommen, so stelle man, wenn das Bild p q der Orientirungslinie P Q gegeben sein sollte, den Messtisch so auf dass p lothrecht über P und p q in der Verticalebene P Q liegt wenn das Tischblatt horizontal ist und feststeht. Hierauf lege man die Linealkante des Distanzmessers an p, visire nach A, lese auf der daselbst befindlichen Distanzlatte die schiefe Entfernung A P ab, reducire dieselbe mit Tabelle oder Diagramm auf den Horizont und trage die reducirte Länge von p aus in verjüngtem Masse = p a auf der feinen Linie ab welche man an der Linealkante hinzieht. In gleicher Weise verfahre man mit den Linien P B, P C, P D . . und verbinde schliesslich die Bildpunkte a, b, c, d . . wodurch eine dem gegebenen Vielecke A B C D . . ähnliche Figur a b c d . . auf dem Messtischblatte entsteht, wie sie die Aufgabe verlangt.

Man sieht sofort ein dass das Vieleck A B C D E . . nicht geschlossen zu sein braucht, um nach dieser Methode aufgenommen zu werden; man überzeugt sich aber auch leicht dass weder in der Aufnahme des geschlossenen noch des offenen Vielecks eine Controle für die richtige Messung liegt, und dass die Prüfung der letzteren nur dadurch bewirkt werden kann dass man entweder einzelne Seiten A B, B C . . oder Diagonalen A C, C E . . des Polygons misst und vergleicht, ob sie mit ihren Bildern a b, b c . . oder a c, c e . . übereinstimmen oder nicht.

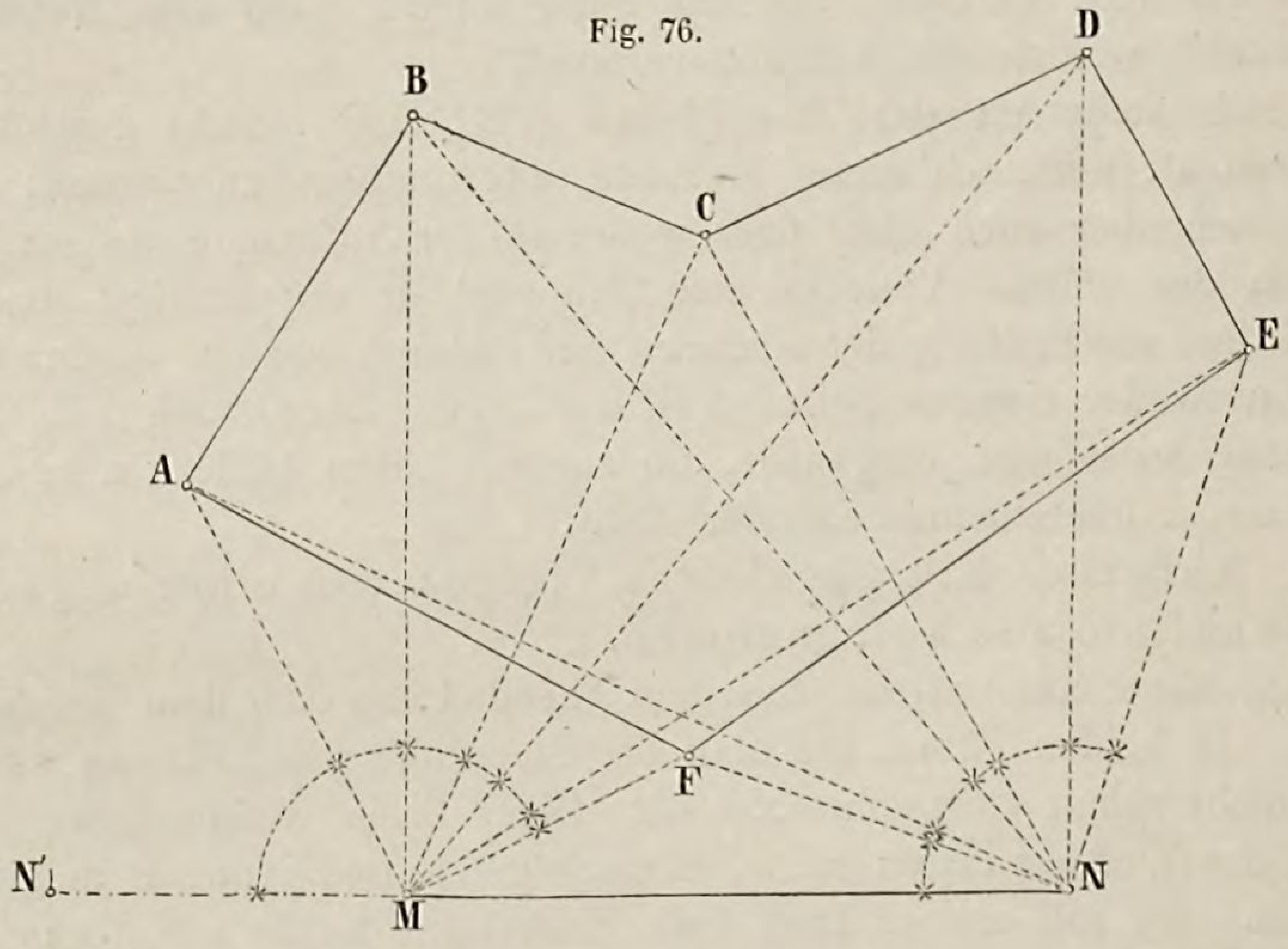
§. 73. Aufgabe. Ein gegebenes Vieleck von einer abgemessenen Standlinie aus aufzunehmen.

Die Aufnahme kann wieder mit dem Theodolithen oder dem Messtische geschehen. In beiden Fällen hat man die Standlinie geschickt zu wählen wenn sie nicht schon vorgeschrieben ist. Diese Basis welche inner- oder ausserhalb des Vielecks liegen kann, muss folgende Bedingungen möglichst gut erfüllen. Sie soll erstens zwei feste Endpunkte haben auf denen sich die Winkelmessinstrumente sicher aufstellen und alle Punkte des Vielecks anvisiren lassen; ferner soll sie so liegen dass sie genau gemessen werden kann und die Eckpunkte durch gute Schnitte (d. h. durch Winkel von mehr als 20° und weniger als 160°) gibt; und endlich soll die Standlinie nicht zu kurz sein damit wiederum die schlechten Schnitte vermieden werden. Im Allgemeinen kann man annehmen dass eine ausserhalb des Vielecks liegende Grundlinie bessere Schnitte gibt, als eine im Vieleck.

Besitzt man zur Messung der Winkel einen Repetitionstheodolithen dessen Fernrohr sich durchschlagen oder umlegen lässt, so wird man bei der Aufstellung in dem Punkte M der Basis M N (Fig. 76) den Nonius I auf den Nullpunkt des Horizontalkreises einstellen und diesen selbst so drehen dass das Fernrohr genau auf das in der Richtung N M liegende

Signal N' zeigt; hierauf das Fernrohr durchschlagen und sofort nach A visiren: die Ablesung am Nonius I gibt alsdann den Winkel N' M A. Nach der Einstellung auf B erhält man aus der Ablesung am Nonius I den Winkel N' M B u. s. w. Sind alle Winkel in M gemessen und man will die Messung nicht wiederholen, so versetzt man das Instrument nach N, stellt wieder den Nonius I auf Null und richtet durch Drehung des Horizontal- und Verticalkreises das Fadenkreuz zuerst auf das Signal M. Ist der Horizontalkreis festgestellt, so bewegt man die Alhidade nach und nach so weit nach rechts, bis das Fadenkreuz successive auf die Punkte F, A, B, C . . trifft und wiederum alle Winkel der Visirlinien N F, N A, N B . . mit der Basis N M gemessen sind. Trägt man diese Winkel mit Hilfe von Tangenten an die auf den Horizont reducirte Basis m n an, so bekommt man durch Verbindung der entsprechenden Schnitte das Vieleck

Fig. 76.



a b c d e f welches dem Vielecke A B C D E F ähnlich und die Lösung der Aufgabe ist.

Wie mit Hilfe des Messtisches und der Kippregel das Vieleck A B C D E F von der Standlinie M N aus aufzunehmen ist, lehrt bereits §. 58, weil sich hier das was für drei Punkte gilt, auf eine beliebige Anzahl von Punkten und somit auch auf das Vieleck A B C D E F anwenden lässt. Sollte es die Lage der Standlinie mit sich bringen dass ein Punkt (C) des Vielecks nicht durch Vorwärtseinschneiden bestimmt werden könnte, so müssten die beiden nächstgelegenen Polygonseiten (C B, C D) abgemessen und hiermit der gesuchte Punkt (c) construirt werden. Dasselbe hätte zu geschehen wenn der Schnitt dieses Punkts ein schlechter, also seine Bestimmung selbst unsicher wäre. Es versteht sich von selbst dass sich der in Rede stehende Punkt auch nach §. 59 durch Rückwärtseinschneiden finden liesse wobei

irgend zwei von ihm aus gut sichtbare und schon vorher bestimmte Eckpunkte benützt werden könnten. Zur Controle der Messung kann man auch solche Punkte welche aus guten Schnitten gefunden wurden, durch Rückwärtseinschneiden bestimmen und zusehen, ob man in beiden Fällen ein und dasselbe Resultat erhält.

§. 74. Aufgabe. Ein Polygon nach der Umfangsmethode aufzunehmen und zum Schlusse zu bringen.

Diese Aufnahmsmethode findet vorzüglich dann ihre Anwendung wenn das Visiren innerhalb der darzustellenden Terrainfläche durch Häuser, Bäume etc. erschwert oder unmöglich ist, also bei Aufnahme von Ortschaften, Wäldern u. dgl. Sie wird durch das Messen der Seiten ziemlich mühsam, gewährt aber, wenn man alle Stücke des Vielecks gemessen hat, durch den mehr oder weniger genauen Schluss der aufgenommenen Figur sofort eine Controle der Messung.

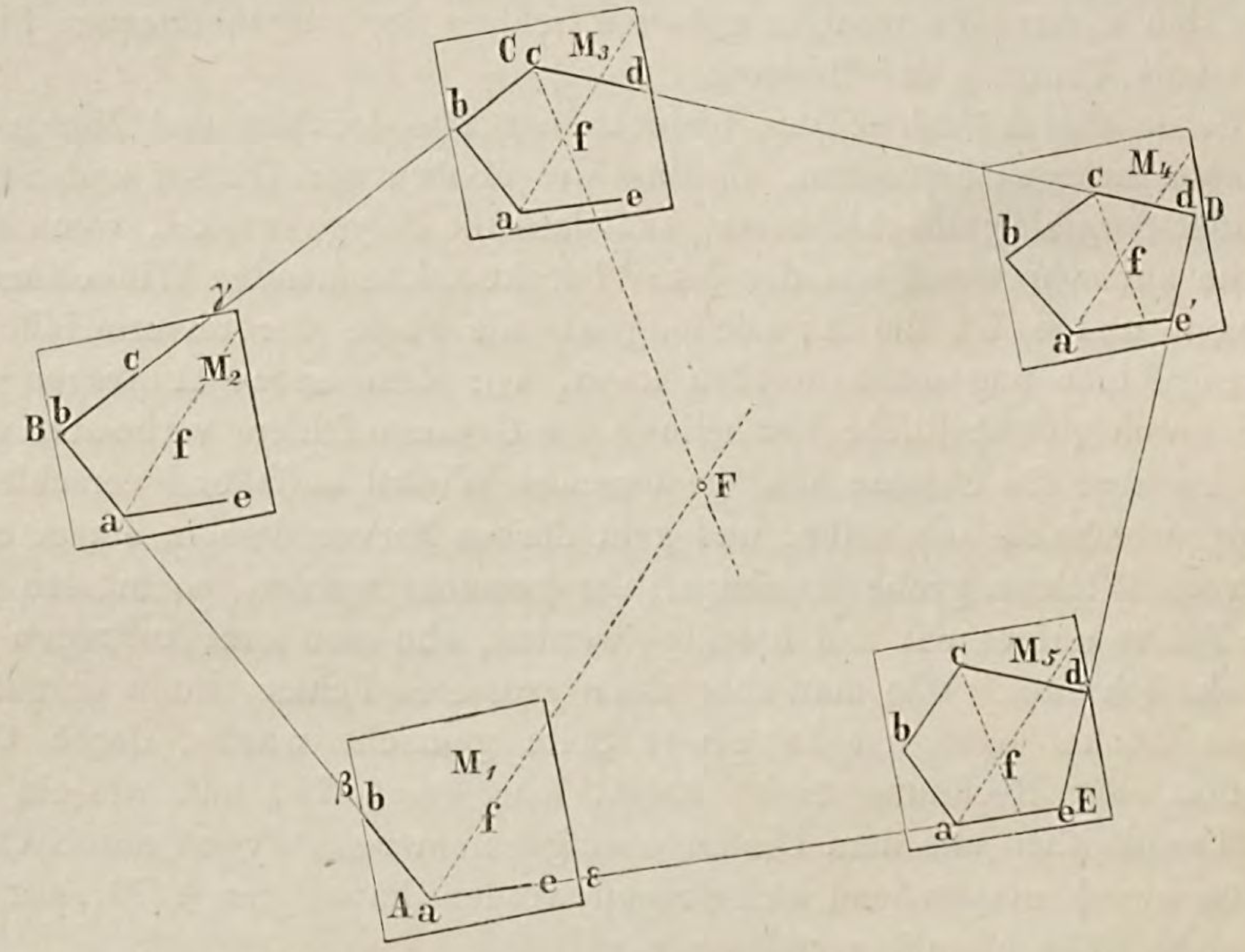
Ueber die Aufnahme des Vielecks mit Theodolithen und Messlatten ist kaum mehr zu bemerken, als dass das Messen der Winkel und Seiten mit aller Sorgfalt geschehen muss, und dass die Polygonwinkel, wenn ihre Summe nur sehr wenig von der dem Vielecke zukommenden Winkelsumme abweicht und somit die Abweichung als die Folge der unvermeidlichen Messungsfehler angesehen werden kann, vor dem ersten Auftragen der Figur durch gleichheitliche Vertheilung des Gesammtfehlers verbessert werden. Ist aber die Summe aller gemessenen Winkel auffallend verschieden von der welche sie sein sollte, und geht daraus hervor dass in einem oder mehreren Winkeln grobe Messungsfehler gemacht wurden, so müssen erst diese Fehler aufgesucht und beseitigt werden, ehe man zum Auftragen des Vielecks schreitet. Wie man aber einen grösseren Fehler, wenn er nur in einem Winkel oder nur in einer Seite gemacht wurde, durch Construction oder Rechnung finden kann, lehrt der §. 75, und wie ein mit dem Theodolithen aus dem Umfange aufgenommenes Polygon durch Coordinaten zweckentsprechend aufgetragen werden kann, der §. 76, auf die für solche Fälle hiermit verwiesen wird.

Bedient man sich, wie es meist geschieht, des Messtisches zur Aufnahme des Polygons aus dem Umfange, so hat man sich vor allen Dingen aus den zweimal und mit Messlatten sehr genau gemessenen Seiten der Figur ein Bild derselben in dem Massstabe zu entwerfen welcher der Aufnahme zu Grunde gelegt werden soll, und zuzusehen, ob dieses (allerdings nur annähernd richtige) Bild auf dem Messtische Platz findet oder nicht, und wenn ja, in welcher Lage. Sollte die gezeichnete Figur zu gross sein, so kann man entweder einen kleineren Massstab für die Aufnahme wählen, oder aber die Aufnahme so vollziehen dass man auf dem Messtische zwar alle Stücke des Vielecks gezeichnet erhält, aber dieses selbst erst auf einem grösseren Blatte zusammensetzen muss. Zunächst setzen wir voraus dass die ganze Figur auf dem Blatte Platz finde.

Stellt ABCDE das auf dem Felde mit starken Pfählen, in die oben

zum Einstecken von Messfahnen Löcher gebohrt sind, bezeichnete Vieleck vor und sind bereits alle Seiten desselben gemessen und auf den Horizont reducirt, so stelle man den Messtisch auf dem Endpunkte A so auf dass a lothrecht über A und die vorhin als passend gefundene Richtung a β in die Richtung von A B fällt, sobald der Tisch horizontal und fest steht. Ist ausser der Richtung a β auch die a ε nach E, d. i. der Winkel B A E bestimmt, so trage man A B in verjüngtem Masse = a b und A E verjüngt = a e ab. Sollte man von A aus einen Punkt F innerhalb der Figur sehen und von A nach F messen können, so ist es für die spätere Aufstellung des Tisches und die Controle der Messung gut, diesen Punkt sofort mit auf-

Fig. 77.



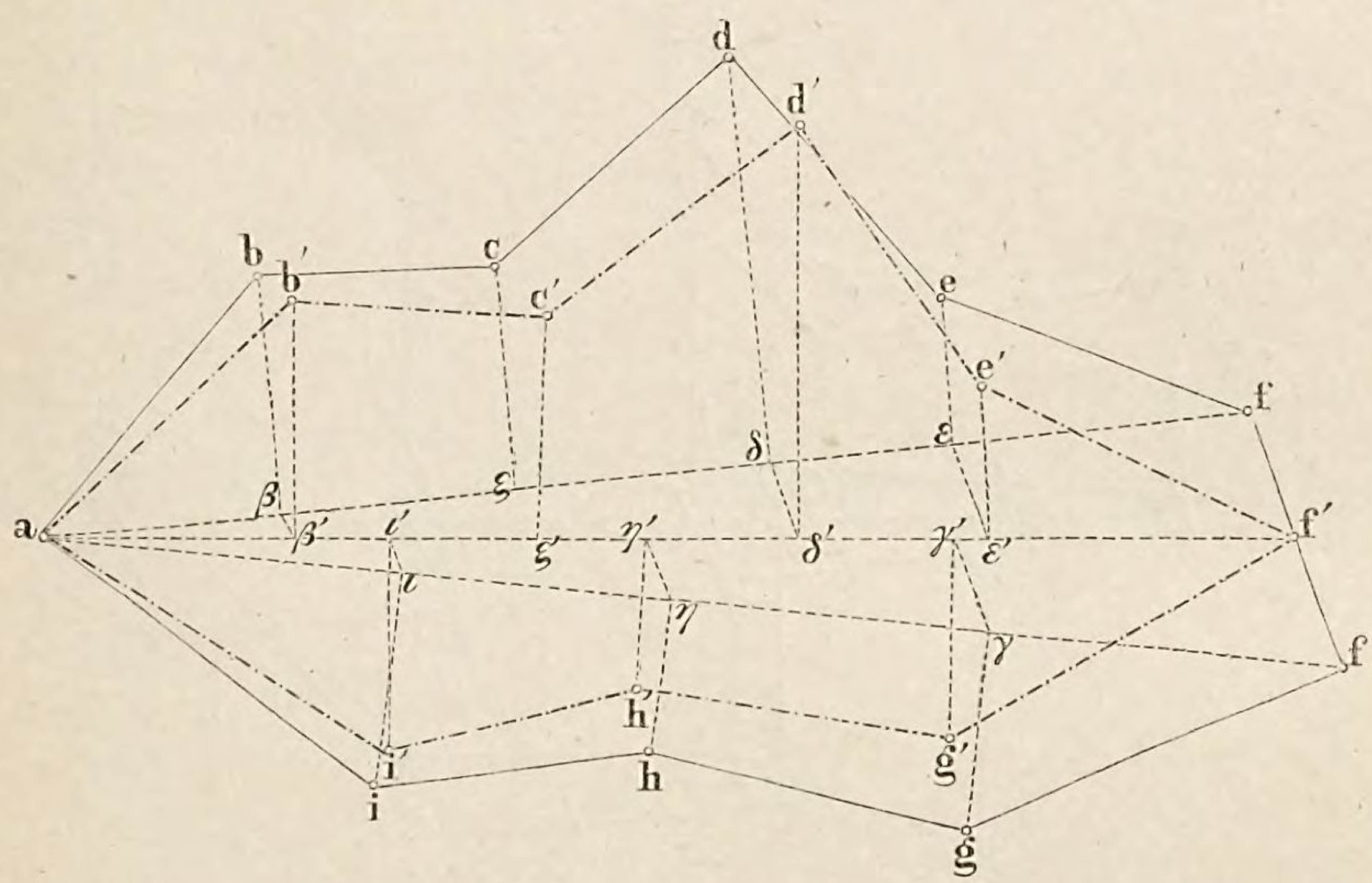
zunehmen und in der Figur als f darzustellen. Hierauf kommt der Messtisch in die zweite Lage M_2 über den Punkt B, so nämlich dass b lothrecht über B steht und b a nach B A orientirt ist. In B wird der Winkel C B A gemessen und die Seite B C verjüngt = b c aufgetragen. In C wird c über C gestellt, nach C B orientirt, der Winkel B C D gemessen und C D verjüngt = c d abgetragen. Sollte man von C aus auch F sehen können, so visirt man, die Kippregel an c legend, dahin und überzeugt sich, ob die an der Linealkante gezogene Linie durch f geht oder nicht. Ginge diese Linie nicht durch f, so müsste in dem bisherigen Verfahren ein Fehler vorgekommen sein der sofort aufzusuchen und zu verbessern wäre. Die Fortsetzung der Messung fordert dass d centrisch über D und d c in die Richtung D C gestellt werde. Hier wird nach E visirt und die Seite d e'

erhalten. Trifft der Punkt e′ der Seite d e′ mit dem Punkte e der Seite a e zusammen, „so schliesst das Polygon,“ im andern Falle nicht.

Findet ein Schluss der Figur statt, so kann man denselben als ein gutes Zeichen für die genaue Arbeit ansehen; man wird aber in diesem Falle gleichwohl noch den Punkt e über E bringen, den Messtisch nach E D orientiren und zusehen, ob auch der bereits gezeichnete Winkel a e d dem A E D gleich ist. Diese Prüfung der Messung ist desshalb gut, weil man dadurch erfährt ob das Schliessen nicht in Folge eines gröberen Messungsfehlers der alle unvermeidlichen Fehler ausgleicht, geschieht.

In der Regel wird sich, wenn man in dem vorletzten Punkte (D) angekommen ist, die Figur nicht schliessen, d. h. es wird, mit Beziehung auf Fig. 77, der Punkt e′ von e mehr oder weniger abstehen. Diese Er-

Fig. 78.



scheinung wird als das Resultat der unvermeidlichen Beobachtungsfehler angesehen, so lange der Abstand e e′ in günstigem Terrain nicht mehr als $\frac{1}{800}$ und in ungünstigem Terrain nicht mehr als $\frac{1}{400}$ des ganzen Umfangs a b c d e beträgt. In diesem Falle schreitet man zur Ausgleichung der unvermeidlichen Fehler, d. h. man bringt das aufgenommene Polygon zum Schluss; beträgt aber die Linie e e′ mehr als $\frac{1}{800}$ und beziehungsweise mehr als $\frac{1}{400}$ des Polygonumfangs, so bleibt nichts Anderes übrig, als die ganze Messung zu wiederholen und dabei zu berücksichtigen dass sich die unvermeidlichen Fehler besser vertheilen, wenn man die Aufnahme des Polygons nach zwei Seiten hin vornimmt, d. i. von A über B bis C und hierauf von E über D bis C.

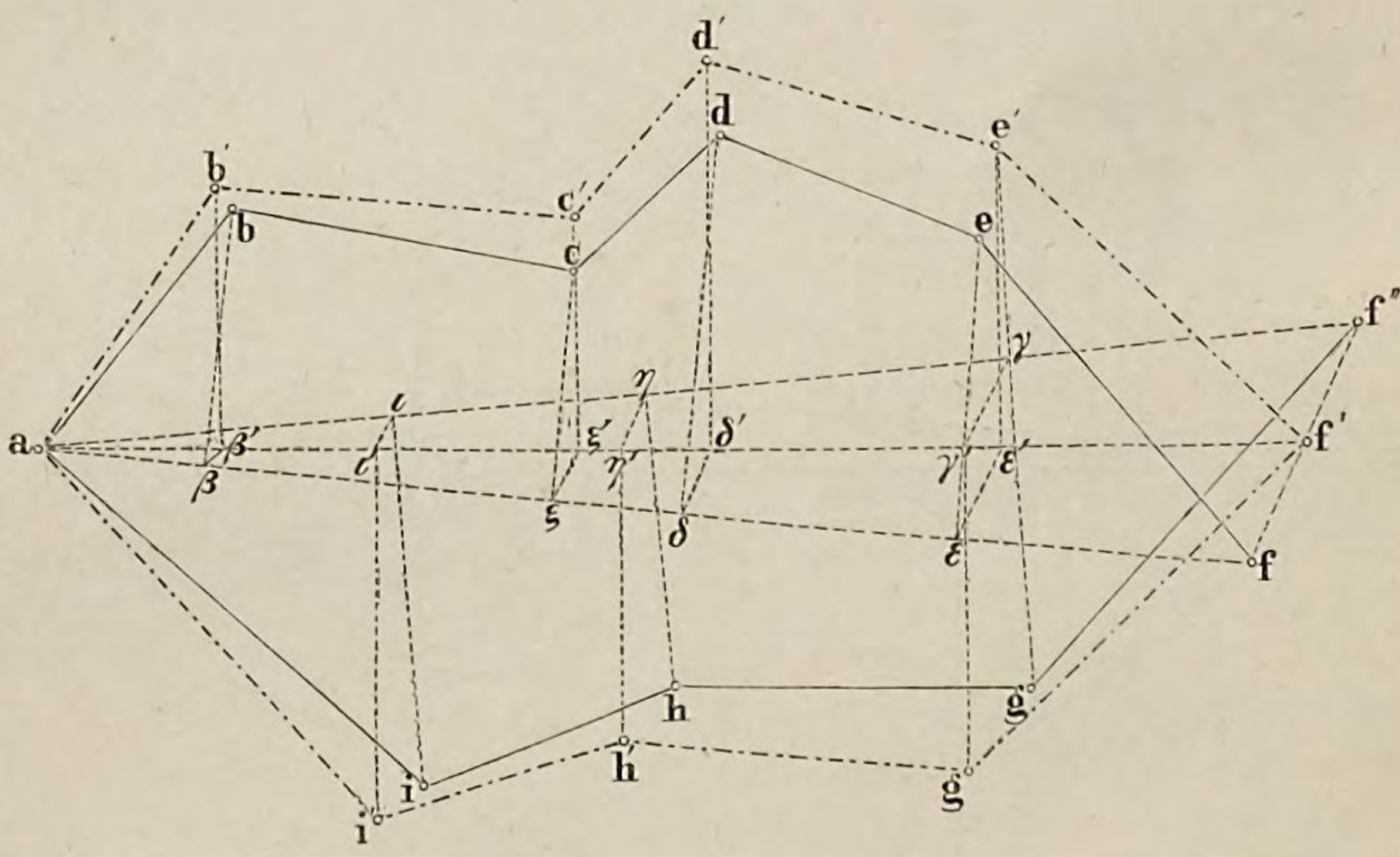
1) Bei den zunächst folgenden empirischen Regeln für die Herbeiführung von Polygonschlüssen ist vorausgesetzt dass das Polygon von dem Punkte

A aus nach zwei Seiten hin aufgenommen sei, und dass dadurch die beiden Theile desselben a b c d e f und a i h g f″ (Fig. 78 bis 80) erhalten worden seien. Wäre die Aufnahme von dem Punkte f″ aus über g und a bis nach f hin in einer Richtung vollzogen und am Ende der Abstand f f″ der Schlusspunkte erhalten worden, so würde man das Polygon in zwei Theile a b c d e f und a i h g f″ zerlegen, und zwar dadurch dass man einen Punkt a sucht der wo möglich um gleichviele Seiten von f und f″ absteht. Denkt man sich nun die Linien a f und a f″ gezogen, so können dieselben folgende drei Lagen gegen einander annehmen:

a) Der eine Theil des Polygons a b c d e f ist von dem anderen a i h g f″ ganz getrennt, wie in Fig. 78;

b) beide Theile greifen in einander über, wie in Fig. 79 der Theil a b c d e f in den Theil a i h g f″; und

Fig. 79.



c) die Verbindungslinien a f und a f″ fallen in eine Gerade, wie in Fig. 80.

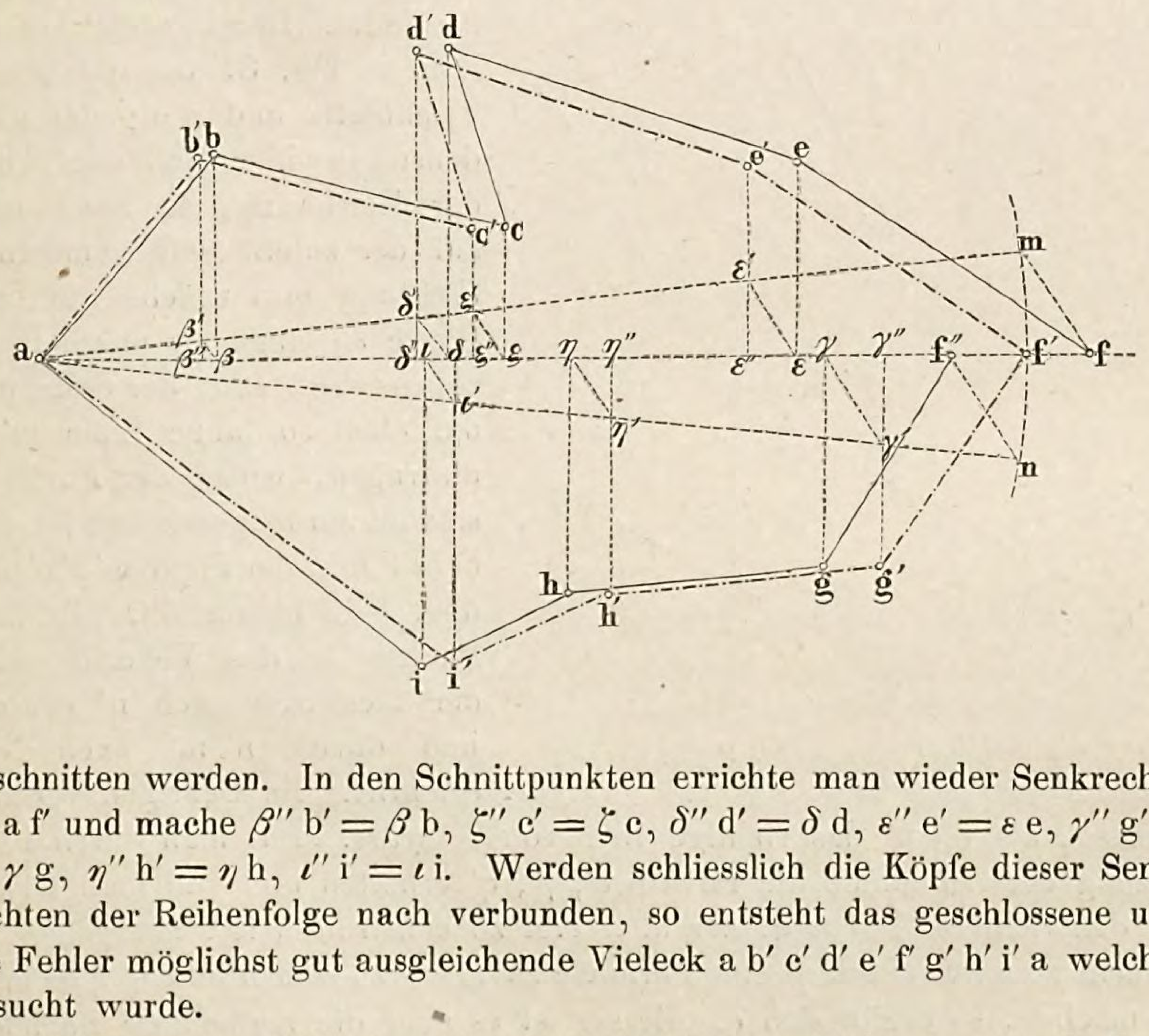
In dem ersten Falle (Fig. 78) ziehe man f f″, fälle die Senkrechten b β, c ζ, d δ, e ε, g γ, h η, i ι, halbire f f″ in f′ und ziehe die Linien $\beta\,\beta'$ $\zeta\,\zeta'$, $\delta\,\delta'$, $\varepsilon\,\varepsilon'$, $\gamma\,\gamma'$, $\eta\,\eta'$, $\iota\,\iota'$ zu f f″ parallel bis an die Halbirungslinie a f′. Hierauf errichte man in den Punkten β', ζ', δ', ε', γ', η', ι' Senkrechte zu a f′ und mache dieselben nach einander gleich b β, c ζ, d δ, e ε, g γ, h η, i ι. Werden nun die Köpfe dieser Senkrechten durch Gerade verbunden, so entsteht das Polygon a b′ c′ d′ e′ f′ g′ h′ i′ a welches sich schliesst und von dem durch die Aufnahme unmittelbar erhaltenen nur sehr wenig unterscheidet.

In dem zweiten Falle (Fig. 79) verbinde man zuerst wieder f mit f″, halbire f f″ in f′ und ziehe a f′. Hierauf errichte man zu a f die Senkrechten

b β, c ζ, d δ, e ε und zu a f″ die Perpendikel g γ, h η, i ι. Von deren Fusspunkten aus ziehe man die Linien $\beta\beta'$, $\zeta\zeta'$, $\delta\delta'$, $\varepsilon\varepsilon'$, $\gamma\gamma'$, $\eta\eta'$, $\iota\iota'$ parallel zu f f″, bis sie die Linie a f′ schneiden. Errichtet man nun in den Schnittpunkten die Ordinaten β' b′ = β b, ζ' c′ = ζ c, δ' d′ = δ d, ε' e′ = = ε e, γ' g′ = γ g, η' h′ = η h, ι' i′ = ι i und verbindet deren Köpfe nacheinander durch gerade Linien, so erhält man das gesuchte geschlossene Polygon a b′ c′ d′ e′ f′ g′ h′ i′ a.

In dem dritten Falle endlich (Fig. 80) halbire man wieder den Abstand f f″ in f′, beschreibe aus a mit dem Halbmesser a f′ einen Kreisbogen und ziehe die Halbmesser a m und a n unter gleichen Winkeln gegen die Linie a f′. Weiter fälle man zu a f′ die Senkrechten b β, c ζ, d δ, e ε, g γ, h η, i ι und ziehe von deren Fusspunkten aus die Linien $\beta\beta'$, $\zeta\zeta'$, $\delta\delta'$, $\varepsilon\varepsilon'$, $\gamma\gamma'$, $\eta\eta'$, $\iota\iota'$ mit f m und f″ n parallel, bis die Hilfslinien a m und a n

Fig. 80.



geschnitten werden. In den Schnittpunkten errichte man wieder Senkrechte zu a f′ und mache β'' b′ = β b, ζ'' c′ = ζ c, δ'' d′ = δ d, ε'' e′ = ε e, γ'' g′ = = γ g, η'' h′ = η h, ι'' i′ = ι i. Werden schliesslich die Köpfe dieser Senkrechten der Reihenfolge nach verbunden, so entsteht das geschlossene und die Fehler möglichst gut ausgleichende Vieleck a b′ c′ d′ e′ f′ g′ h′ i′ a welches gesucht wurde.

2) Wenn das Vieleck, wie es gewöhnlich geschieht, nur nach Einer Richtung aufgenommen ist und innerhalb der oben angegebenen Grenzen nicht schliesst, so kann man den Schluss einfacher als in Nr 1 auf folgende Weise bewirken. Es sei in Fig. 80 das aufzunehmende Vieleck a b′ c′ d′ e′ f′ a, die Aufnahme habe die nicht schliessende Figur a b c d e f f′ ergeben und f f′ sei kleiner als $\frac{1}{800}$ und beziehungsweise $\frac{1}{400}$ des ganzen

Polygonumfangs. Man verbinde nun f mit f', ziehe durch b, c, d, e parallele Linien zu f f', berechne b b', c c'... aus den Proportionen:

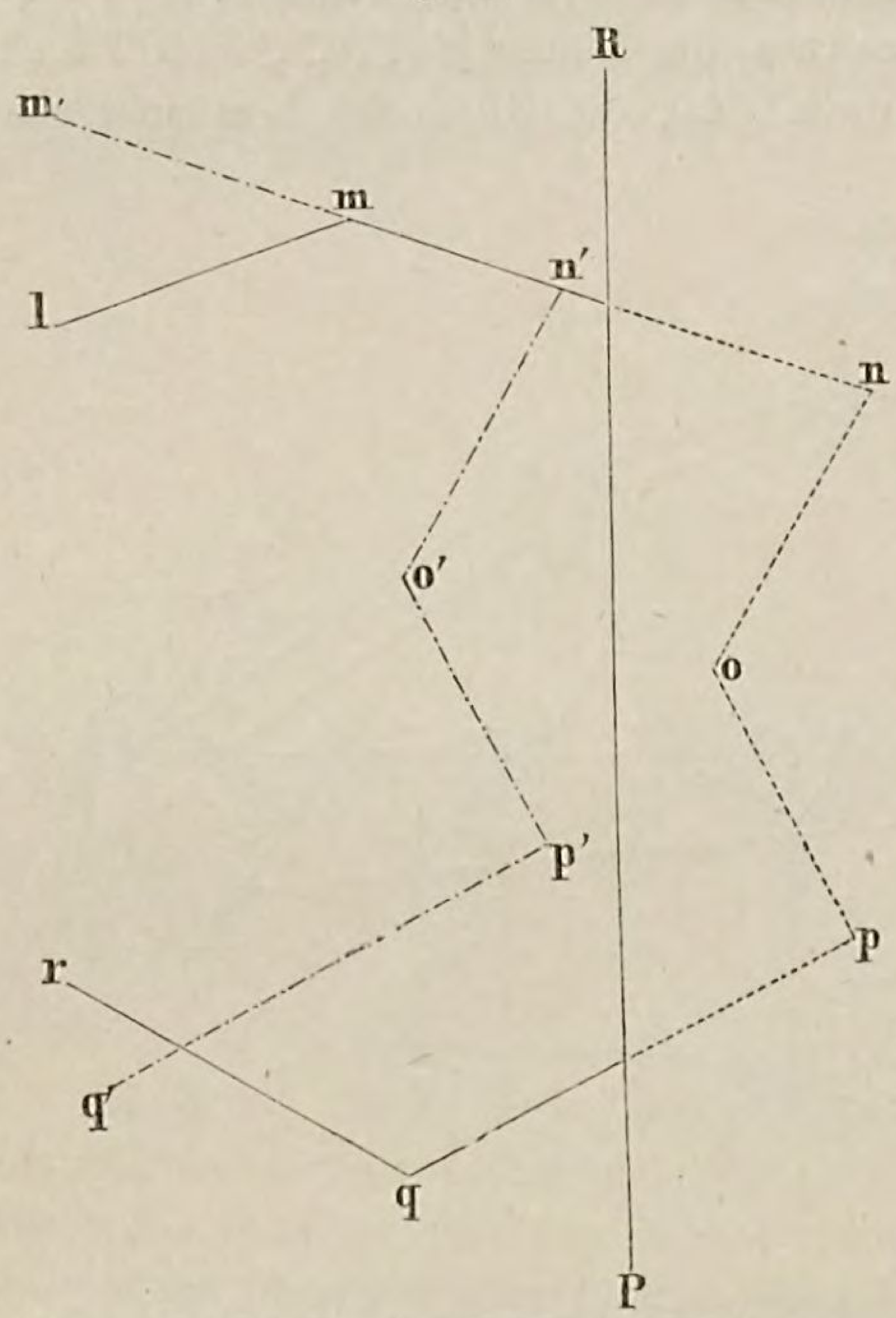
$$b\,b' : f\,f' = a\,b : (a\,b + b\,c + c\,d + d\,e + e\,f)$$

$$c\,c' : f\,f' = (a\,b + b\,c) : (a\,b + b\,c + c\,d + d\,e + e\,f) \text{ u. s. w.}$$

und trage diese Verbesserungen von den Punkten b, c... aus in der Richtung von f nach f' ab, so erhält man das ausgeglichene Vieleck a b' c' d' e' f' a welches gesucht wurde.

3) Sollte bei der Aufnahme des Polygons mit dem Messtische der Fall eintreten dass ein Theil der Zeichnung über das Tischblatt hinausreicht, so kann man sich dadurch helfen dass man den über den Rand des Blatts hinausfallenden Theil zunächst für sich aufnimmt und erst später mit dem übrigen Theile der aufgenommenen Figur verbindet. Denn gesetzt, es sei P R in Fig. 81 der Rand des Tischblatts und n o p der über denselben hinausfallende Theil der Zeichnung, so kann man auf der zuletzt aufgenommenen Richtung m n welche auf dem Blatte so lange als möglich gezogen wird, statt der Seite m n die eben so lange Linie m' n' auftragen, wobei der Punkt n' so weit zurückgeschoben ist dass kein Punkt der Figur m' n' o' p' q' über P R hinausfällt. In dem Punkte N des Vielecks wird der Messtisch nach n' centrirt und durch n' m' nach N M orientirt. Im Uebrigen verfährt man so, als ob n' das richtige Bild von N wäre. Hat man durch Fortsetzung der Aufnahme die Punkte o', p', q' erhalten und will man wieder auf den richtigen Punkt q, der aber erst zu construiren ist, übergehen, so braucht man nur durch q' eine Parallele zu m' n' zu ziehen und q' q = m' m zu machen, so ergibt sich q. Besser ist es aber die Aufnahme, nachdem sie vom Anfangspunkte A an über B und C bis Q nach obigem Verfahren gemacht ist, von A aus über Z und W bis Q fortzusetzen und zu vollenden. Dadurch ergibt sich q von selbst. Zur Controle kann man auch noch die Richtung q p herstellen welche, wenn richtig gearbeitet wurde, mit q' p' parallel sein muss.

Fig. 81.



§. 75. Aufgabe. Ein aus dem Umfange aufgenommenes

Polygon schliesst wegen eines groben Messungsfehlers nicht: man soll diesen Fehler aufsuchen.

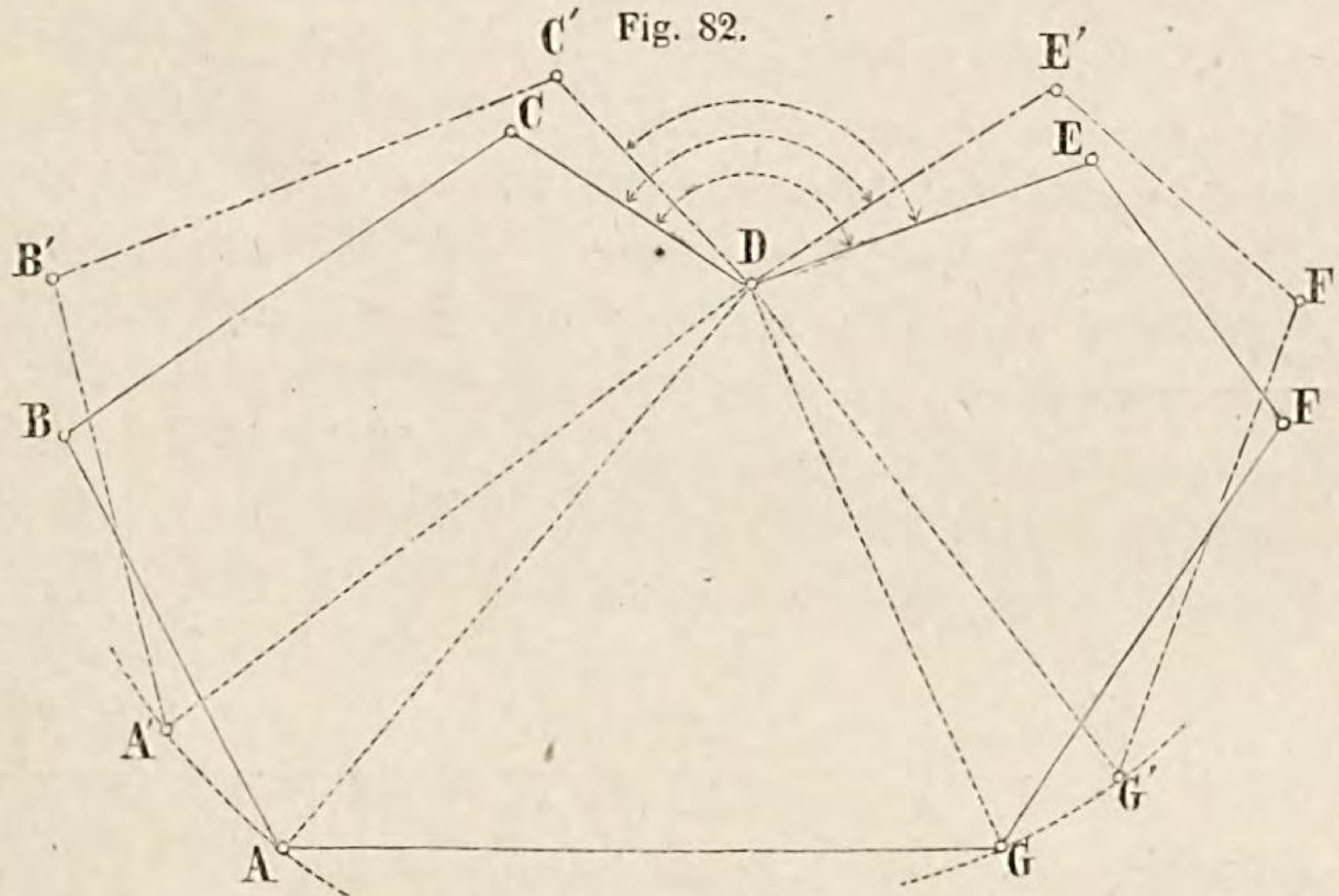
Der Fehler kann entweder in einem Winkel oder in einer Seite liegen und durch Zeichnung oder durch Rechnung zu bestimmen sein.

A. Es sei ein Winkel, und zwar nur ein einziger, falsch gemessen.

1) Der fehlerhafte Winkel ist durch Zeichnung zu finden. (Fig. 82.)

Nimmt man an dass der Winkel C D E falsch aufgenommen worden sei, so wird, wenn man das Vieleck, von der Seite A G ausgehend, über B und C hin aufträgt, die sich nicht schliessende Figur G A B C D E′ F′ G′ entstehen von welcher der Theil G A B C D vollständig richtig, der übrige aber falsch ist, weil er den fehlerhaften Winkel bei D enthält. Trägt man die gemessenen Stücke nochmals von A G aus auf und zwar in einer der vorigen entgegengesetzten Richtung, so entsteht die Figur A G F E D C′ B′ A′ welche von A bis D richtig, von D bis A′ aber falsch ist. Vergleicht man

Fig. 82.



die aufgetragenen zwei Vielecke mit einander, so sieht man dass sich dieselben nothwendig in dem Punkte D welcher in beiden aus fehlerfreien Bestimmungsstücken erhalten wurde, schneiden müssen; umgekehrt also wird man den Scheitel (D) des fehlerhaften Winkels finden wenn man die aufgenommenen Seiten und Winkel von einer und derselben Seite aus zweimal in entgegengesetzter Richtung aufträgt und zusieht, wo sich die beiden Figuren schneiden. Auch ist leicht einzusehen dass durch die Verbindung der Schlusspunkte G, G′ oder A, A′ mit dem Scheitel D der Fehler des Winkels = G D G′ = A D A′ = E D E′ = C D C′ gefunden werde.

2) Der fehlerhafte Winkel ist durch Rechnung zu finden. (Fig. 82.)

Denkt man sich von allen Endpunkten der Vielecke A B C D E′ F′ G′ und A G F E D C′ B′ A′ auf die als Hauptlinie angenommene Seite A G Perpendikel gefällt, so ist klar dass die beiden für jeden Punkt vorhandenen Senkrechten in ihrer Länge verschieden sind, mit Ausnahme derjenigen zwei welche dem Punkte D angehören. Berechnet man demnach mit Hilfe

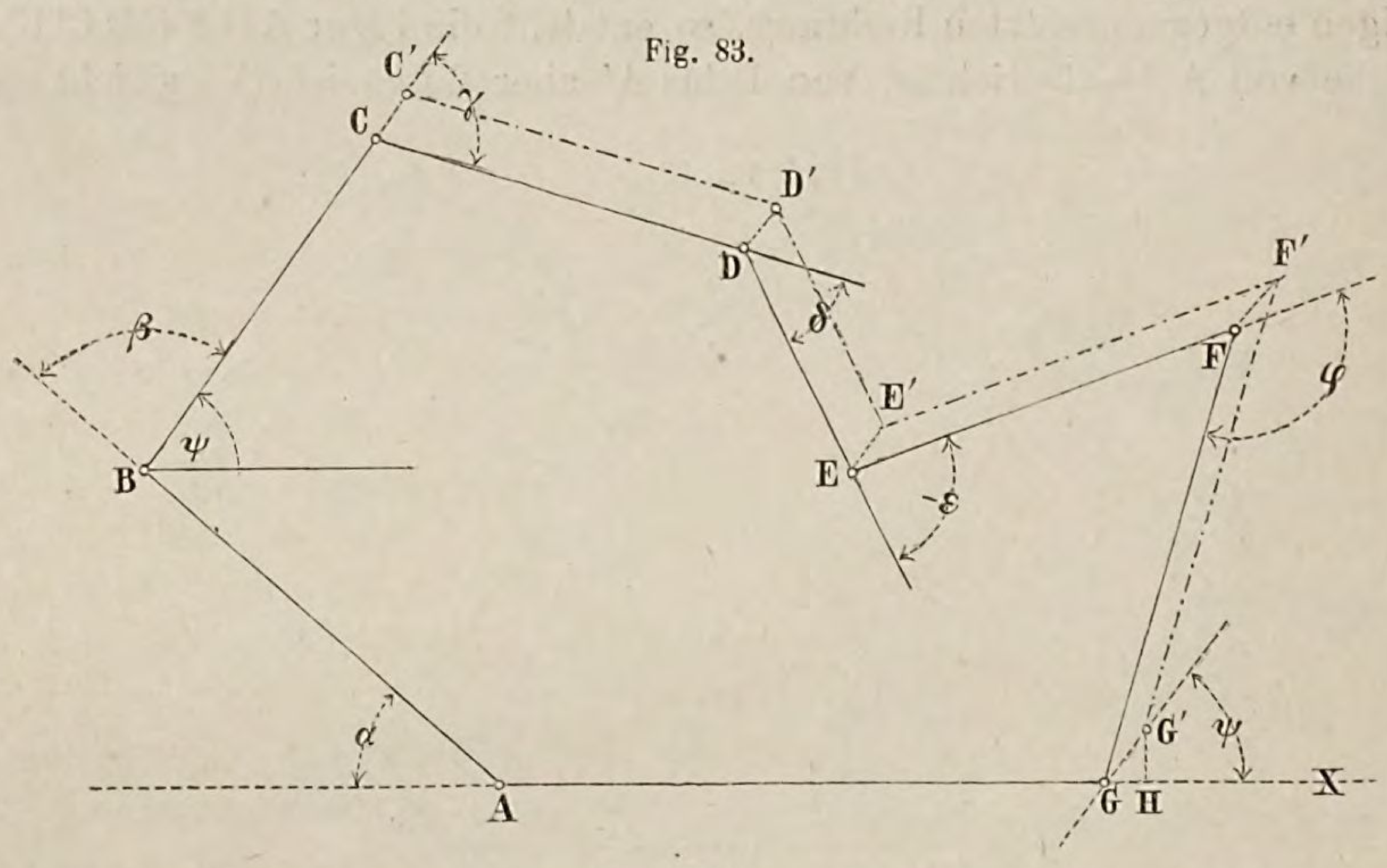
bekannter polygonometrischer Formeln aus den gegebenen Stücken alle Ordinaten doppelt, so erhält man einmal zwei gleiche Werthe, und der Punkt dem sie angehören, ist der Scheitel des gesuchten Winkels. Die Grösse seines Fehlers lässt sich zwar aus den Dreiecken A D A′ oder G D G′ berechnen; es ist aber in jedem Falle, auch in dem vorigen, besser den fehlerhaften Winkel an Ort und Stelle nochmals zu messen.

B. Es sei eine Seite, und zwar nur eine einzige, falsch gemessen.

1) Die fehlerhafte Seite ist durch Zeichnung zu finden. (Fig. 83.)

Stellt A B C D E F G ein geschlossenes Vieleck vor, so wird, wenn man die Seite B C um das Stück C C′ verlängert, alle übrigen Stücke des Vielecks aber unverändert beibehält, die offene Figur G A B C′ D′ E′ F′ G′ entstehen. Verbindet man die Punkte D′, E′, F′, G′ mit den gleichnamigen

Fig. 83.



Punkten D, E, F, G, so sind, wie leicht einzusehen, die Verbindungslinien D D′, E E′, F F′, G G′ alle mit C C′ gleich und parallel. Aus dieser geometrischen Wahrheit fliesst für die Auffindung der fehlerhaften Seite (B C) eines Vielecks folgende Regel: Man verbinde die beiden Schlusspunkte (G, G′) des aufgetragenen offenen Vielecks durch eine gerade Linie (G G′) und sehe zu, welcher von den Polygonseiten diese Linie parallel ist: die parallele Seite ist die falsche und der Betrag des Fehlers ist durch den Abstand G G′ der Schlusspunkte ausgedrückt. Kommen in dem Vielecke zwei parallele Seiten vor, so kann nur ein Nachmessen auf dem Felde entscheiden welche von beiden falsch ist. Dieses Nachmessen ist aber auch in dem Falle, wo keine parallelen Polygonseiten vorkommen, nicht bloss zu empfehlen sondern sogar nöthig, da sonst alle unvermeidlichen Beobachtungsfehler an dieser Seite mit angebracht werden.

2) Die fehlerhafte Seite ist durch Rechnung zu finden. (Fig. 83.)

Wird die Seite G A als Abscissenaxe gewählt, so kann man nach den bekannten polygonometrischen Grundformeln die unter Nr 145 u. ff. zu-

sammengestellt sind, sowohl die Abscissen als Ordinaten aller Eckpunkte A, B, C', D', E', F', G' aus den gegebenen Seiten und Winkeln berechnen. Hieraus kann man ferner die Neigung (ψ) der Schlusslinie G' G gegen die Abscissenaxe und auch ihre Länge finden. Berechnet man endlich aus den gemessenen Grössen die Neigungen aller Polygonseiten gegen die Axe A G und vergleicht die Neigungswinkel mit dem von G G', so wird man eine Seite (B C) finden welche sehr nahe denselben Neigungswinkel (ψ) hat, und diese (oder eine ihr parallele) ist als die fehlerhafte zu bezeichnen. Der Fehler den man auf dem Felde durch directes Nachmessen erhält, wird dem berechneten Abstande G G' der Schlusspunkte ebenfalls sehr nahe gleich sein.

§. 76. Aufgabe. Ein mit dem Theodolithen aus dem Umfange aufgenommenes Vieleck soll mittels Coordinaten so genau als möglich aufgetragen werden.

Es ist eine missliche Sache wenn man sich zum Auftragen von Winkeln des Gradbogens bedient, denn die Genauigkeit der Zeichnung bleibt in diesem Falle stets weit hinter der Genauigkeit der Winkelmessung zurück. Dieses Missverhältniss zwischen Aufnahme und Zeichnung bessert sich wenn man die Winkel nach ihren vorher berechneten Tangenten aufträgt, und am genauesten wird verfahren wenn man zur Zeichnung eines Vielecks dessen aus den gemessenen Stücken des Umfangs bestimmte Coordinaten benützt. Da rechtwinklige Coordinaten am sichersten und schnellsten aufgetragen werden können, so wird man sich fast ohne Ausnahme eines rechtwinkligen Axensystems bedienen, und da es die Formeln vereinfacht, so wählt man in der Regel eine Ecke des Polygons als Ursprung und eine Seite als Abscissenaxe der Coordinaten.

A. Sind in dem geschlossenen Polygon (Fig. 84) die Seiten

$$A_1 A_2 = a_1,\ A_2 A_3 = a_2,\ A_3 A_4 = a_3 \text{ u. s. f. bis } A_n A_1 = a_n$$

und die inneren Polygonwinkel $A_1, A_2, A_3 \ldots\ldots A_n$ gemessen, so hat man zunächst zu untersuchen, ob die Summe dieser Winkel

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots\ldots + A_n = (n - 2)\,\pi \qquad (145)$$

ist. Ist sie grösser oder kleiner und liegt die Differenz innerhalb des Bereichs der unvermeidlichen Fehler, d. h. beträgt diese Differenz höchstens $n\,\delta$ Secunden wenn δ'' die Angabe des Nonius ist: so vertheilt man die Fehlersumme gleichheitlich auf alle Winkel.

Wir sehen nunmehr die Grössen $A_1, A_2, A_3 \ldots . A_n$ als die ausgeglichenen Winkelwerthe an und bestimmen hiermit die Neigungswinkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots . \alpha_n$ der Polygonseiten $a_1, a_2, a_3 \ldots . a_n$ gegen die Abscissenaxe (die Richtungswinkel) nach der bekannten Formel:

$$\alpha_m = A_m + \alpha_{m-1} - 180^0 \qquad (146)$$

Zu dieser Formel welche aus der Figur sehr leicht abzuleiten ist, muss bemerkt werden dass diejenigen Werthe α welche vom Anfangspunkte der betreffenden Polygonseite aus nach rechts zur Abscissenaxe oder einer ihr parallelen Richtung laufen, positiv, und jene α welche von dieser Richtung aus nach rechts zur Polygonseite gezählt werden, negativ sind.

Heissen die Coordinaten der aufeinanderfolgenden n Punkte

$$x_1\, y_1,\; x_2\, y_2,\; x_3\, y_3,\; x_4\, y_4 \,\ldots\ldots\, x_n\, y_n$$

und setzt man deren Bestandtheile

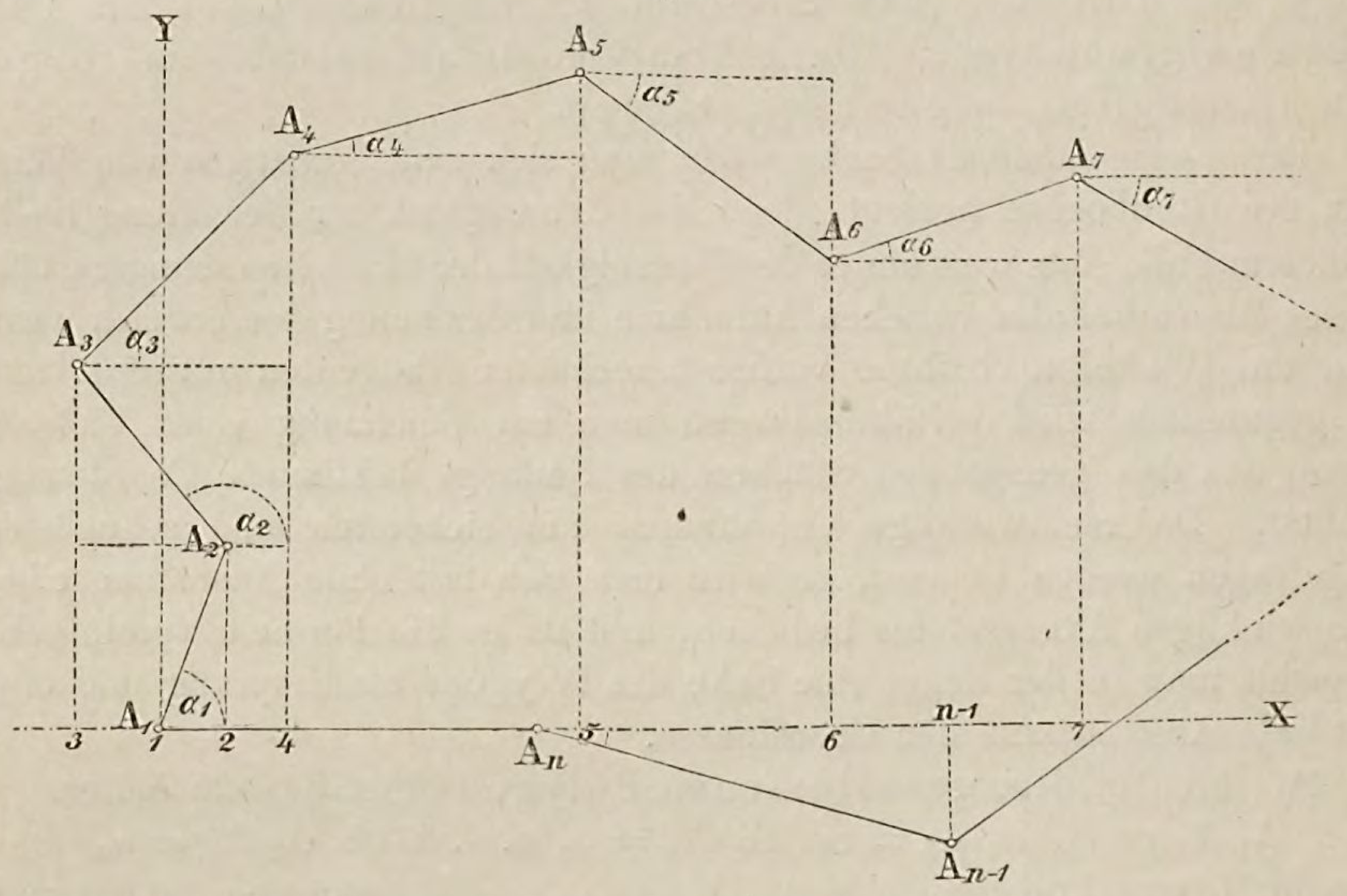
$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \Delta x_1,\; x_3 - x_2 = \Delta x_2 \ldots\ldots x_{\mu+1} - x_\mu = \Delta x_\mu \\ y_2 - y_1 &= \Delta y_1,\; y_3 - y_2 = \Delta y_2 \ldots\ldots y_{\mu+1} - y_\mu = \Delta y_\mu \end{aligned} \quad (147)$$

so ist nach der beigedruckten Figur:

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= a_1 \cos \alpha_1,\; \Delta x_2 = a_2 \cos \alpha_2 \ldots\ldots \Delta x_\mu = a_\mu \cos \alpha_\mu \\ \Delta y_1 &= a_1 \sin \alpha_1,\; \Delta y_2 = a_2 \sin \alpha_2 \ldots\ldots \Delta y_\mu = a_\mu \sin \alpha_\mu \end{aligned} \quad (148)$$

und nach den Relationen (147):

Fig. 84.



$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + \Delta x_1 \\ x_3 &= x_2 + \Delta x_2 = x_1 + \Delta x_1 + \Delta x_2 \\ x_4 &= x_3 + \Delta x_3 = x_1 + \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 \text{ u. s. w. bis} \\ x_{\mu+1} &= x_\mu + \Delta x_\mu = x_1 + \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \ldots\ldots + \Delta x_\mu \\ y_{\mu+1} &= y_\mu + \Delta y_\mu = y_1 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \ldots\ldots + \Delta y_\mu \end{aligned} \quad (149)$$

Setzt man hierin für die Coordinatentheile Δx_1, $\Delta x_2 \ldots \Delta y_1$, $\Delta y_2 \ldots$ ihre in den Formeln (148) angegebenen Werthe, so wird

$$\begin{aligned} x_{\mu+1} &= x_1 + a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + \ldots\ldots + a_\mu \cos \alpha_\mu \\ y_{\mu+1} &= y_1 + a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + \ldots\ldots + a_\mu \sin \alpha_\mu \end{aligned} \quad (150)$$

Dafür kann man nach den aus §. 4, Seite 7 dieses Bands bekannten Bezeichnungen auch schreiben:

$$x_{\mu+1} = x_1 + [a_\nu \cos \alpha_\nu] \quad (151)$$

$$y_{\mu+1} = y_1 + [a_\nu \sin \alpha_\nu] \quad (152)$$

wobei das zweite Glied rechter Hand in (151) die Summe der Cosinusproducte $a_1 \cos \alpha_1$, $a_2 \cos \alpha_2$, $a_3 \cos \alpha_3$ bis $a_\mu \cos \alpha_\mu$ (d. i. vom Index $\nu = 1$ bis zu $\nu = \mu$) und dasselbe Glied rechter Hand in (152) die Summe

der Sinusproducte $a_1 \sin \alpha_1$, $a_2 \sin \alpha_2$, $a_3 \sin \alpha_3$ bis $a_\mu \sin \alpha_\mu$ (d. i. vom Index $\nu = 1$ bis zu $\nu = \mu$) vorstellt.

Diese Ausdrücke gelten allgemein wenn x_1 und y_1 bestimmte Werthe haben, also die Axenecke nicht in A_1 und die Abscissenaxe nicht in $A_1 A_n$ liegt, und wenn weiter das Polygon nicht geschlossen ist. Soll dasselbe geschlossen sein und das Axensystem von A_1 und $A_1 A_n$ ausgehen, so werden erstens die Coordinaten x_1 und y_1 null, zweitens wird $x_n = a_n$ und $y_n = 0$, und drittens reicht in den allgemeinen Formeln der Index ν von 1 bis $n - 1$, so dass aus den letzteren hervorgeht:

$$x_n = a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + \ldots + a_{n-1} \cos \alpha_{n-1} = [a_\nu \cos \alpha_\nu] = a_n \quad (153)$$

$$y_n = a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + \ldots + a_{n-1} \sin \alpha_{n-1} = [a_\nu \sin \alpha_\nu] = 0 \quad (154)$$

Diese zwei Gleichungen gewähren ein Urtheil über die Güte der Polygonaufnahme und die Zuverlässigkeit der Rechnung: je näher nämlich der berechnete Werth von x_n dem gemessenen a_n und der berechnete Werth von y_n der Null kommt, desto besser werden dis ausgeführten geodätischen und rechnerischen Arbeiten sein. Auffallende Differenzen wird man zunächst der Rechnung zur Last legen und diese daher sorgfältig wiederholen; zeigt sich der Verdacht unbegründet, so können jene Differenzen nur von der Messung herrühren, und es müsste diese neu gemacht werden wenn eine Ausgleichung der Fehler nicht mehr gestattet wäre. Ein solcher Fall würde dann eintreten wenn trotz der sorgfältig gemessenen und controlirten Winkel die berechnete Polygonseite x_n (die man zur Abscissenaxe desshalb gewählt hat, weil sie eine der längsten Seiten des Vielecks ist) von der gemessenen a_n um so viel abwiche dass die Differenz $x_n - a_n = u$ grösser wäre als $m \,.\, a_n$, wobei m die relative Genauigkeit des Längenmessapparats (bei der Kette etwa $\frac{1}{1000}$, bei hölzernen Latten etwa $\frac{1}{5000}$) vorstellt. Ist aber $u < m \,.\, a_n$, so gleicht man die zufälligen Messungsfehler dadurch aus dass man jeden Abscissentheil Δx_1, $\Delta x_2 \ldots$ mit

$$\frac{x_n - a_n}{a_n} = m', \quad (155)$$

multiplicirt und um das erhaltene (positive oder negative) Product verbessert, so dass die neuen Abscissentheile $(1 + m') \Delta x_1$, $(1 + m') \Delta x_2 \ldots$ werden, aus deren Zusammensetzung sich jetzt $x_n = a_n$ ergibt. Die Ordinatentheile kann man mit dem Factor

$$\frac{y_n}{y_0} = m'' \quad (156)$$

der sich aus dem berechneten Werthe von y_n und der längsten Ordinate y_0 des Polygons ergibt, multipliciren und dadurch verbessern dass man jetzt $(1 + m'') \Delta y_1$, $(1 + m'') \Delta y_2 \ldots$ für Δy_1, $\Delta y_2 \ldots$ setzt. Dabei versteht es sich von selbst dass wenn der Werth von y_n nur sehr wenig von 0 oder der von x_n nur sehr wenig von a_n abweicht, die Verbesserung der Ordinaten und beziehungsweise der Abscissen auch unterlassen werden kann.

Ein anderes Verfahren der Ausgleichung besteht darin dass man den Abscissenunterschied $x_n - a_n = u$ auf die Abscissen und den Ordinaten-

werth y_n auf die Ordinaten der n — 1 Punkte $A_2, A_3, A_4 \ldots . A_n$ gleichheitlich vertheilt, wodurch freilich auch die Polygonwinkel $A_1, A_2, A_3 \ldots$ und die Richtungswinkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ kleine Aenderungen erleiden; in der Regel wird das erste Verfahren vorgezogen.

Fragt man, ob auf die Ausgleichung des vorliegenden Falls die Methode der kleinsten Quadrate nicht angewendet werden kann, und wenn ja, warum sie nicht angewendet wird, so ist darauf zu antworten dass es zwar nicht schwierig wäre dieses strengere Ausgleichungsverfahren hier zur Geltung zu bringen, dass man aber auf dessen Anwendung wegen der grossen Mühe die es verursacht, und der kleinen Vortheile die es gewährt, verzichtet und Zeit und Mühe lieber auf die Längen- und Winkelmessung verwendet, um diese so genau als möglich zu machen. Wer übrigens das Verfahren der Ausgleichung eines Polygonzugs nach der Methode der kleinsten Quadrate kennen lernen will, studire §. 103 des 1 Bands der Vermessungskunde von Jordan, Seite 300 u. ff.)

B. In einem offenen Polygon (einem polygonalen Zuge) ist das Messungs- und Rechnungsverfahren von dem vorstehend beschriebenen nicht verschieden, nur die Controle für die Genauigkeit der Winkelmessung welche in der theoretischen Winkelsumme des Polygons liegt, und in der Regel auch die der Längenmessung welche sich in den Coordinaten der Endpunkte eines geschlossenen Polygons ausspricht, fällt hier weg wenn nicht der offene Zug an zwei Punkte eines trigonometrischen Netzes anzuschliessen ist deren Coordinaten gegeben sind. Denn in diesem Falle schliesst die bekannte oder doch leicht zu berechnende Verbindungslinie der trigonometrischen Punkte das offene Polygon, und weicht die dann vorliegende Aufgabe nur noch ganz unbedeutend von der eben gelösten ab. Einiges Nachdenken fordert nur die Berechnung der Richtungswinkel der ersten und letzten Seite des Polygons. Sei desshalb in der nachstehenden Fig. 85 die Gerade $A_1 X$ die Verbindungslinie der Endpunkte des offenen Zugs welcher aus m Strecken bestehe. Die Winkel $A_2, A_3, A_4 \ldots A_{m-1}$ nebst den Seiten $A_1 A_2 = a_1$, $A_2 A_3 = a_2$, $A_3 A_4 = a_3 \ldots A_{m-1} A_m = a_{m-1}$ seien gemessen und $A_m A_1 = a_m$ aus den Coordinaten der Punkte A_1 und A_m bekannt. Wäre der Richtungswinkel α_1 bekannt, so erhielte man $\alpha_2 = {}$ $= A_2 + \alpha_1 - 180^0$, $\alpha_3 = A_3 + \alpha_2 - 180^0 = A_3 + A_2 + \alpha_1 - 2 \,.\, 180^0$ u. s. w. bis $\alpha_m = A_m + \alpha_{m-1} - 180^0$, und A_m fände sich aus der Gleichung welche die theoretische Winkelsumme des m Ecks vorstellt und worin $A_1 = \alpha_1$ gesetzt ist, nämlich aus

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_m = 180^0\,(m - 2) \qquad (157)$$

Nun ist aber nach Gleichung (154) die Ordinate in A_m oder $y_m = 0$, daher

$$a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + \ldots\ldots + a_{m-1} \sin \alpha_{m-1} = 0 \qquad (158)$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + A_2 - 180^0$$
$$\alpha_3 = \alpha_1 + A_2 + A_3 - 2 \,.\, 180^0$$
$$\alpha_4 = \alpha_1 + A_2 + A_3 + A_4 - 3 \,.\, 180^0 \text{ u. s. f. bis}$$
$$\alpha_{m-1} = \alpha_1 + A_2 + A_3 + \ldots\ldots + A_{m-1} - (m - 2)\, 180^0$$

folglich lassen sich alle α auf die Form $\alpha_1 + c$ bringen, so dass $\alpha_2 = \alpha_1 + c_2$, $\alpha_3 = \alpha_1 + c_3$, ... $\alpha_{m-1} = \alpha_1 + c_{m-1}$ wird. Es geht daher die Gl (158) in folgende über

$$a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin (\alpha_1 + c_2) + \ldots + a_{m-1} \sin (\alpha_1 + c_{m-1}) = 0 \quad (159)$$

und man erhält aus dieser durch Entwicklung der Sinusfactoren und Division mit $\cos \alpha_1$ die zur Berechnung von α_1 dienende Gleichung:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{-(a_2 \sin c_2 + a_3 \sin c_3 + \ldots + a_{m-1} \sin c_{m-1})}{a_1 + a_2 \cos c_2 + a_3 \cos c_3 + \ldots + a_{m-1} \cos c_{m-1}} \quad (160)$$

Hat man hieraus α_1 gefunden, so kann man die Richtigkeit dieses Werths dadurch prüfen dass man zusieht, ob er die Gleichung (153)

$$a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos (\alpha_1 + c_2) + \ldots + a_{m-1} \cos (\alpha_1 + c_{m-1}) = a_m \quad (161)$$

erfüllt. Es ist klar dass man auch diese Bedingungsgleichung zur Bestimmung von α_1 verwenden kann, wenn man die Auflösung einer ziemlich umfangreichen quadratischen Gleichung nicht scheut welche sich aus der Division der Gleichung mit $\cos \alpha_1$ ergibt. Hat man für α_1 aus den beiden Bedingungsgleichungen (160) und (161) zwei von einander etwas abweichende Werthe erhalten, so ist das arithmetische Mittel als derjenige Werth anzusehen welcher der Wahrheit am nächsten kommt, und daher für die weitere Rechnung zu verwenden ist.

§. 77. Aufgàbe. Es sei (als Beispiel zu §. 76) ein Zwölfeck mit hölzernen Messlatten und einem Theodolithen aus dem Umfange aufgenommen worden: man soll aus den in der nachstehenden Tabelle enthaltenen Winkeln und Seiten die zum Auftragen des Zwölfecks dienenden Coordinaten berechnen. (Fig. 85.)

A) Das Vieleck sei geschlossen. Da die Summe aller Polygonwinkel $(n-2)\,\pi = 10 \,.\, 180 = 1800^0$ betragen soll, in Wirklichkeit aber $1800^0\ 2'\ 12''$ beträgt (Spalte 2), so ist der Ueberschuss von 132″ auf sämmtliche 12 Winkel gleichheitlich zu vertheilen, d. h. es sind von jedem 11″ abzuziehen. Thut man dieses, so erhält man die in Spalte 3 vorgetragenen verbesserten Polygonwinkel.

Mit diesen kann man nach der Formel $\alpha_m = A_m + \alpha_{m-1} - 180^0$ die Richtungswinkel der Polygonseiten gegen die als Abscissenaxe angenommene Seite $A_1 A_{12} = A_1 X$ berechnen. Für die Seite

$a_1 = A_1 A_2$ ist der Neigungswinkel $\alpha_1 = A_1 = 97^0\ 32'\ 2''$; für

$a_2 = A_2 A_3$ ist $m = 2$ und daher

$\alpha_2 = 271^0\ 6'\ 34'' + 97^0\ 32'\ 2'' - 180^0 = 188^0\ 38'\ 36''$; für

$a_3 = A_3 A_4$ ist $m = 3$ und daher

$\alpha_3 = 92^0\ 3'\ 13'' + 188^0\ 38'\ 36'' - 180^0 = 100^0\ 41'\ 49''$; für

$a_4 = A_4 A_5$ ist $m = 4$ und daher

$\alpha_4 = 201^0\ 1'\ 53'' + 100^0\ 41'\ 49'' - 180^0 = 121^0\ 43'\ 42''$ u. s. w.

Sind auf diese Weise alle Neigungswinkel von α_1 bis α_{12}, wobei immer von der betreffenden Seite aus nach rechts bis zur Richtung der Abscissenaxe zu zählen ist, festgestellt, so kann man mit Hilfe derselben und der

in Spalte 6 enthaltenen Seitenlängen zuerst die Bestandtheile der Abscissen und Ordinaten (Δx_μ, Δy_μ) nach den Formeln (148) und hierauf die vollständigen Coordinaten nach den Formeln (149) berechnen. Es ist nämlich (alle Längen in Meter gedacht) für

A_2 der Theil $\Delta x_1 = a_1 \cos \alpha_1 = 26{,}80 \cos 97^0\,32'\,2'' = -\ 3{,}514$

$\Delta y_1 = a_1 \sin \alpha_1 = 26{,}80 \sin 97^0\,32'\,2'' = +\ 26{,}569$

A_3 der Theil $\Delta x_2 = a_2 \cos \alpha_2 = 118{,}27 \cos 188^0\,38'\,36'' = -\ 116{,}927$

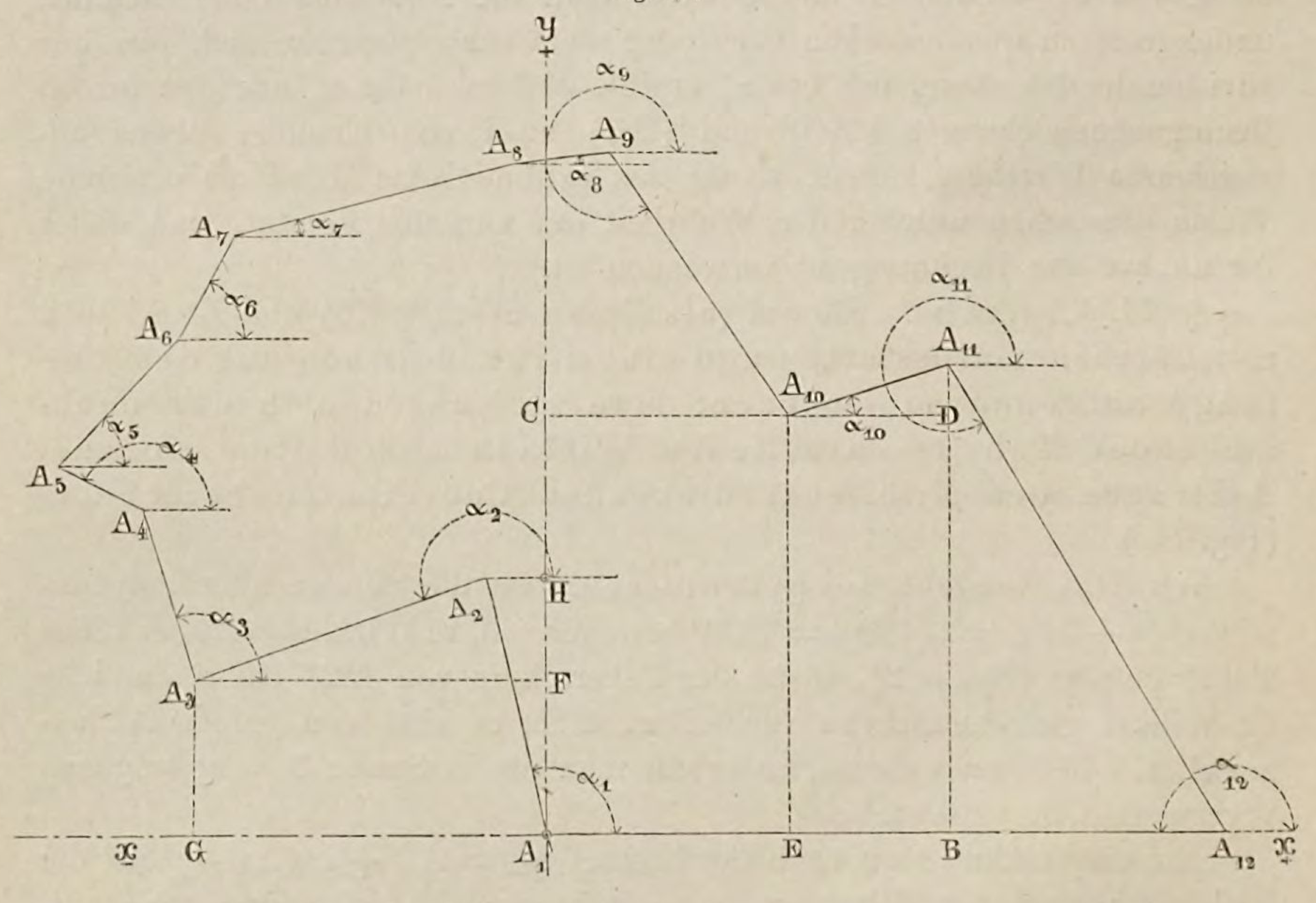
$\Delta y_2 = a_2 \sin \alpha_2 = 118{,}27 \sin 188^0\,38'\,36'' = -\ 17{,}774$

A_4 der Theil $\Delta x_3 = a_3 \cos \alpha_3 = 18{,}56 \cos 100^0\,41'\,49'' = -\ 3{,}445$

$\Delta y_3 = a_3 \sin \alpha_3 = 18{,}56 \sin 100^0\,41'\,49'' = +\ 18{,}237$

u. s. w. für A_5, A_6 A_{12}.

Fig. 85.



Setzt man diese Theile durch Addition zusammen, wie es die Formeln (153) und (154) verlangen, so findet man für den Punkt

A_1, der die Axenecke vorstellt, selbstverständlich $x_1 = 0$ und $y_1 = 0$; für

A_2 ist $x_2 = a_1 \cos \alpha_1 = -\ 3{,}514$ und $y_2 = a_1 \sin \alpha_1 = +\ 26{,}569$

A_3 ist $x_3 = a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 = -\ 3{,}514 - 116{,}927 = -\ 120{,}441$

$y_3 = a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 = +\ 26{,}569 - 17{,}774 = +\ 8{,}795$

A_4 ist $x_4 = a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + a_3 \cos \alpha_3 = -\ 123{,}886$

$y_4 = a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + a_3 \sin \alpha_3 = +\ 27{,}032$

u. s. w. für A_5, A_6 . . . bis schliesslich für

A_{12} ist $x_{12} = a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + \ldots . + a_{11} \cos \alpha_{11} = +\ 251{,}613$

$y_{12} = a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + \ldots . + a_{11} \sin \alpha_{11} = +\ 0{,}257$

während für diesen Punkt die Ordinate $y_{12} = 0$ und die Abscisse $x_{12} = 251{,}620$ sein sollte; der Schlussfehler beträgt also für die Ordinate 0,257 und für die Abscisse — 0,007. Den letzteren Fehler kann man übersehen, der erstere ist aber auf alle Ordinaten zu vertheilen, was in folgender Weise geschehen kann. Die zu A_{11} gehörige Ordinate ist nach der Tafel $y_{11} = 171{,}555$, also nach (156) der Factor

$$m'' = \frac{0{,}257}{171{,}555} = 0{,}0015;$$

da nun der positive Werth der letzten Ordinate 0,257 auf Null gebracht werden muss, so sind die an den einzelnen Ordinatenstücken anzubringenden Verbesserungen v_1 ihrer absoluten Grösse nach allerdings $= m''.\Delta y$, dem Vorzeichen nach aber sind sie negativ, und daher ist hier $1 + m'' = 1 - 0{,}0015 = 0{,}9985$. Multiplicirt man alle Ordinatenstücke in Spalte 7 mit dieser Zahl, so erhält man deren Verbesserungen in Spalte 11, und aus diesen die ausgeglichenen Ordinaten in Spalte 12, während die keiner Ausgleichung bedürfenden Abscissen in Spalte 10 enthalten sind. (Die Tabelle auf welche sich der vorstehende Text bezieht, ist der besseren Uebersicht wegen in zwei Theile zerlegt deren Spalten fortlaufend numerirt sind. Die darin vorkommenden Zahlen wurden dem Lehrbuche der praktischen Geometrie von Hunäus (2 Auflage, S. 314) entlehnt. (Weitere Anleitung zur Ausgleichung polygonometrischer Messungen in strenger und genäherter Form, und letztere auch durch ein Zahlenbeispiel erläutert, gibt die vom Verfasser mit einer Vorrede eingeführte Schrift von J. H. Franke „Die Dreiecksnetze vierter Ordnung", München 1871, S. 175 u. ff. und S. 204 u. ff.)

Erste Hälfte der Tabelle zu §. 77.

Eckpunkte.	Gemessene Polygonwinkel.	Verbesserte Polygonwinkel.	Richtungswinkel.	Polygonseiten.	Coordinatentheile: Abscissen.	Coordinatentheile: Ordinaten.
	A	A — v	α	a	Δx	Δy
A_1	97° 32′ 13″	97° 32′ 2″	97° 32′ 2″	26,80ᵐ	0ᵐ	0ᵐ
A_2	271 6 45	271 6 34	188 38 36	118,27	— 3,514	+ 26,569
A_3	92 3 24	92 3 13	100 41 49	18,56	— 116,927	— 17,774
A_4	201 2 4	201 1 53	121 43 42	6,45	— 3,445	+ 18,237
A_5	96 51 34	96 51 23	38 35 5	25,70	— 3,392	+ 5,486
A_6	196 20 47	196 20 36	54 55 41	78,73	+ 20,089	+ 16,029
A_7	135 35 29	135 35 18	10 30 59	49,96	+ 45,238	+ 64,435
A_8	170 1 14	170 1 3	0 32 2	21,20	+ 49,121	+ 9,118
A_9	138 5 19	138 5 8	318 37 10	67,10	+ 21,199	+ 0,197
A_{10}	271 2 17	271 2 6	49 39 16	122,83	+ 50,347	— 44,357
A_{11}	73 50 53	73 50 42	303 29 58	205,42	+ 79,520	+ 93,615
A_{12}	56 30 13	56 30 2	180 0 0	251,62	+ 113,377	— 171,298
[A]	1800 2 12	1800 0 0			— 251,620	0

Zweite Hälfte der Tabelle zu §. 77.

Eckpunkte.	Coordinaten: Abscissen. x	Coordinaten: Ordinaten. y	Verbesserte Theile der Abscissen. $(1+m')\Delta x$	Verbesserte Theile der Ordinaten. $(1+m'')\Delta y$	Verbesserte Abscissen. x	Verbesserte Ordinaten. y
A_1	0^m	0^m	0^m	0^m	0^m	0^m
A_2	— 3,514	+ 26,569	— 3,514	+ 26,529	— 3,514	+ 26,529
A_3	— 120,441	+ 8,795	— 116,927	— 17,747	— 120,441	+ 8,782
A_4	— 123,886	+ 27,032	— 3,445	+ 18,210	— 123,886	+ 26,992
A_5	— 127,278	+ 32,518	— 3,392	+ 5,478	— 127,278	+ 32,470
A_6	— 107,189	+ 48,547	+ 20,089	+ 16,005	— 107,189	+ 48,475
A_7	— 61,951	+ 112,982	+ 45,238	+ 64,338	— 61,951	+ 112,813
A_8	— 12,830	+ 122,100	+ 49,121	+ 9,104	— 12,830	+ 121,917
A_9	+ 8,369	+ 122,297	+ 21,199	+ 0,197	+ 8,369	+ 122,114
A_{10}	+ 58,716	+ 77,940	+ 50,347	— 44,291	+ 58,716	+ 77,823
A_{11}	+ 138,236	+ 171,555	+ 79,520	+ 93,475	+ 138,236	+ 171,298
A_{12}	+ 251,613	+ 0,257	+ 113,377	— 171,298	+ 251,613	0
A_1	— 0,007	+ 0,257	— 251,620	0	— 0,007	0

B. Das Vieleck sei nicht geschlossen. Um auch ein Rechnungsbeispiel für den Fall B zu geben, sei der Polygonalzug $A_1\,A_2\,A_3 \ldots A_{12}$ an die gegebene Seite $A_1\,A_{12} = 251{,}52\,m$, in der weder von A_1 noch von A_{12} aus visirt werden kann, anzuschliessen. Hier ist vor allen Dingen der Richtungswinkel α_1 zu suchen, und dazu dient die Gleichung (160). Da die in derselben vorkommenden Seiten $a_2, a_3, a_4 \ldots a_{m-1}$ bekannt sind, so brauchen nur die Winkel $c_2, c_3, c_4, \ldots c_{m-1}$ ausgedrückt zu werden. Nun ist aber

$$c_2 = A_2 - 180^0 = 271^0\,6'\,34'' - 180^0 = 91^0\,6'\,34''$$
$$c_3 = A_2 + A_3 - 2\,.\,180^0 = c_2 + (A_3 - 180^0) = 3^0\,9'\,47''$$
$$c_4 = A_2 + A_3 + A_4 - 3\,.\,180^0 = c_3 + (A_4 - 180^0) = 24^0\,11'\,37'' \text{ u. s. w.}$$

daher, wenn man in Gleichung (160) die betreffenden Werthe einsetzt:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{-(118{,}27\,.\,\sin 91^0\,6'\,34'' + \ldots + 205{,}42 \sin 154^0\,2'\,4'')}{26{,}80 + 118{,}27\,.\,\cos 91^0\,6'\,34'' + \ldots + 205{,}42 \cos 154^0\,2'\,4''}$$

Hieraus folgt $\alpha_1 = A_1 = 97^0\,32'\,2''$ und damit nach Gleichung (157)

$$A_{12} = 10\,.\,180^0 - (A_1 + A_2 + \ldots + A_{11}) = 56^0\,30'\,2''$$

womit die übrige Rechnung auf den vorigen Fall A zurückgeführt ist.

§. 78. Aufgabe. Eine Reihe auf dem Felde abgesteckter und nicht weit entfernter Punkte nach der Coordinatenmethode aufzunehmen.

Zur Lösung dieser bei Detailmessungen oft wiederkehrenden Aufgabe sind rechtwinklige Coordinaten anzunehmen, da sich die Richtungen der Ordinaten mit dem Prismenkreuze oder dem fünfseitigen Winkelprisma leicht abstecken lassen. Als Abscissenaxe wählt man eine der längsten Diagonalen, auf der sich Abscissen gut messen und wo möglich alle auf-

zunehmenden Punkte übersehen lassen. Stellt A B C D E F G (Fig. 86) die aufzunehmende Punktreihe vor, so mache man A zum Anfange der Coordinaten und A G zur Abscissenaxe, fälle von allen Eckpunkten Senkrechte

Fig. 86.

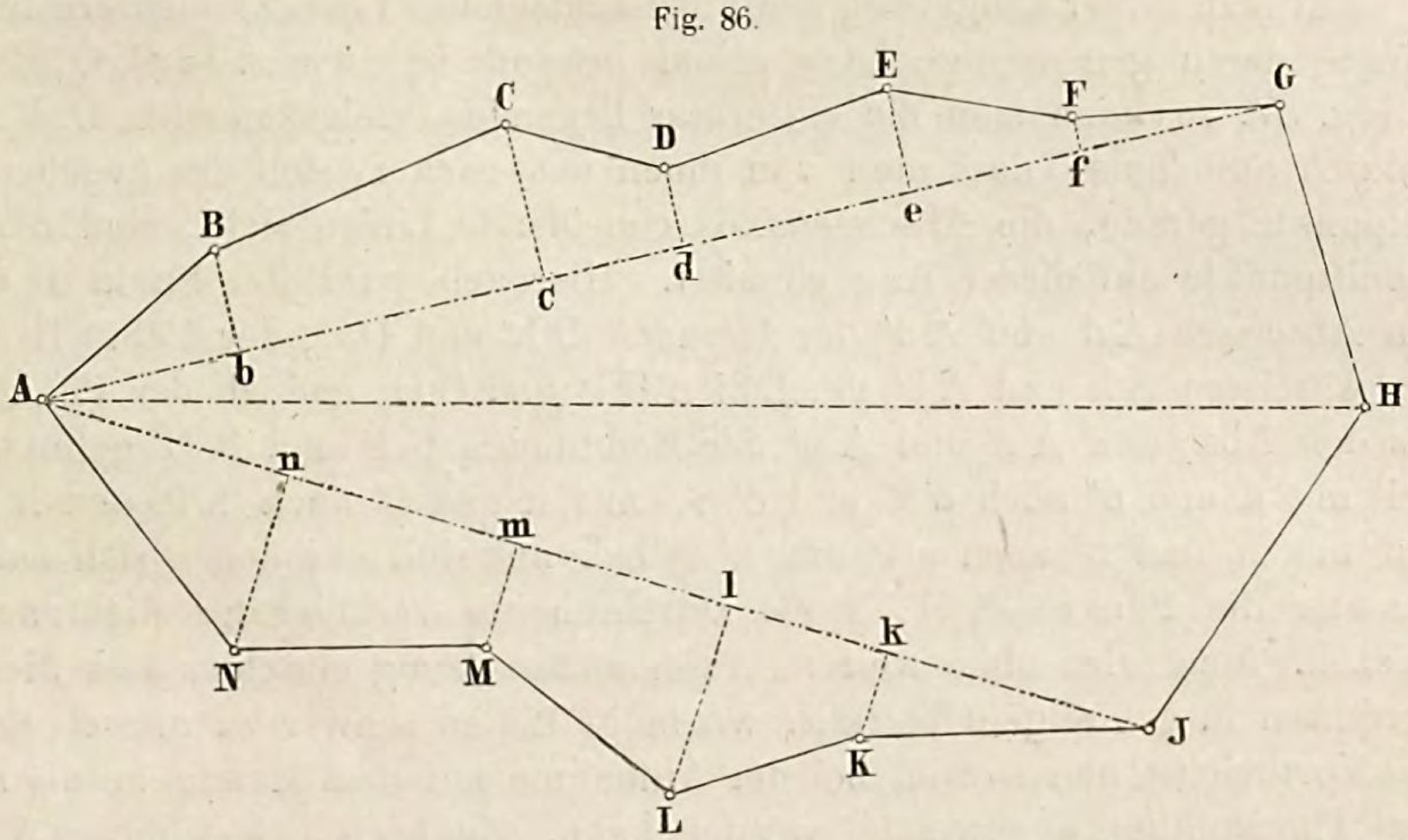
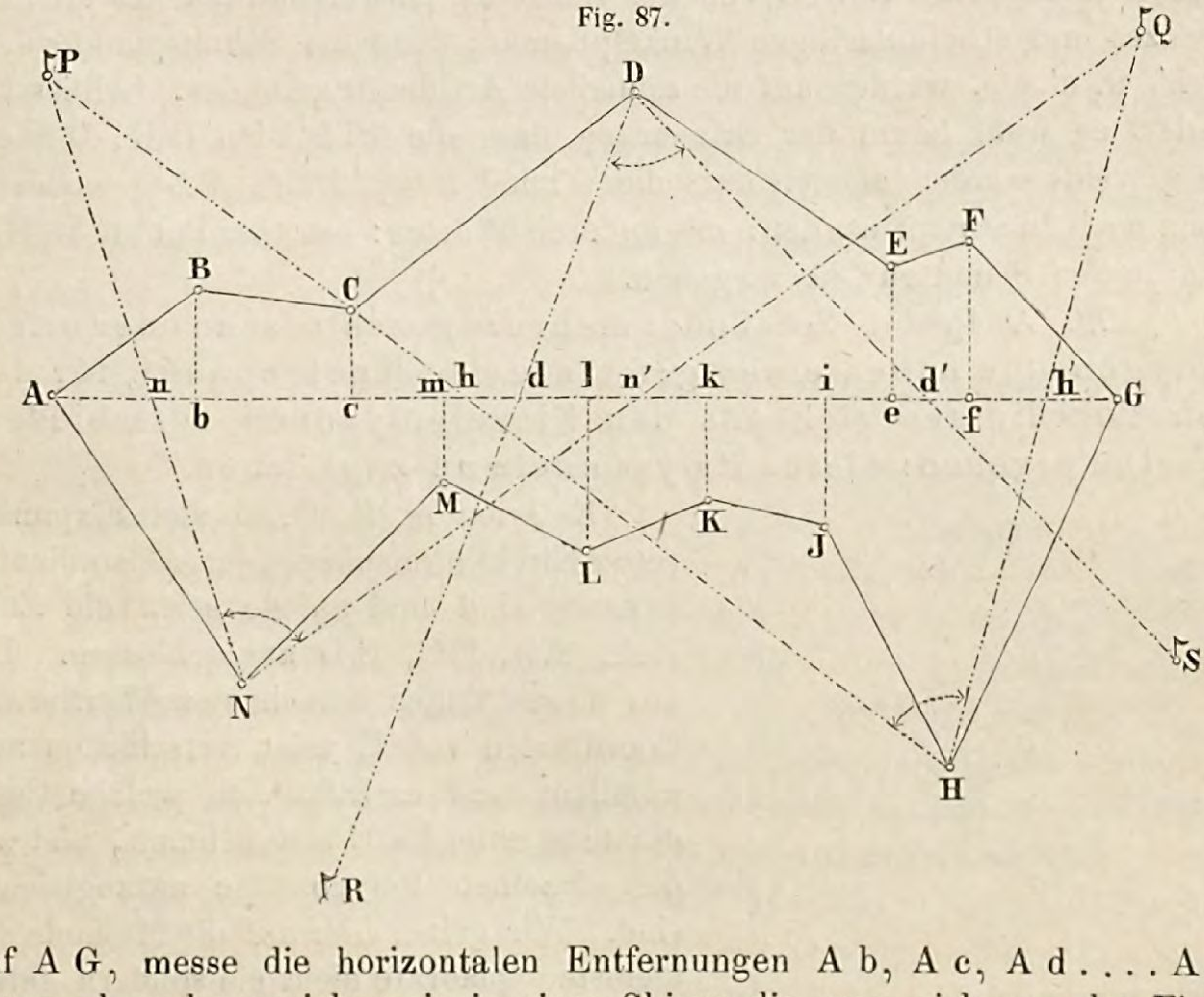


Fig. 87.



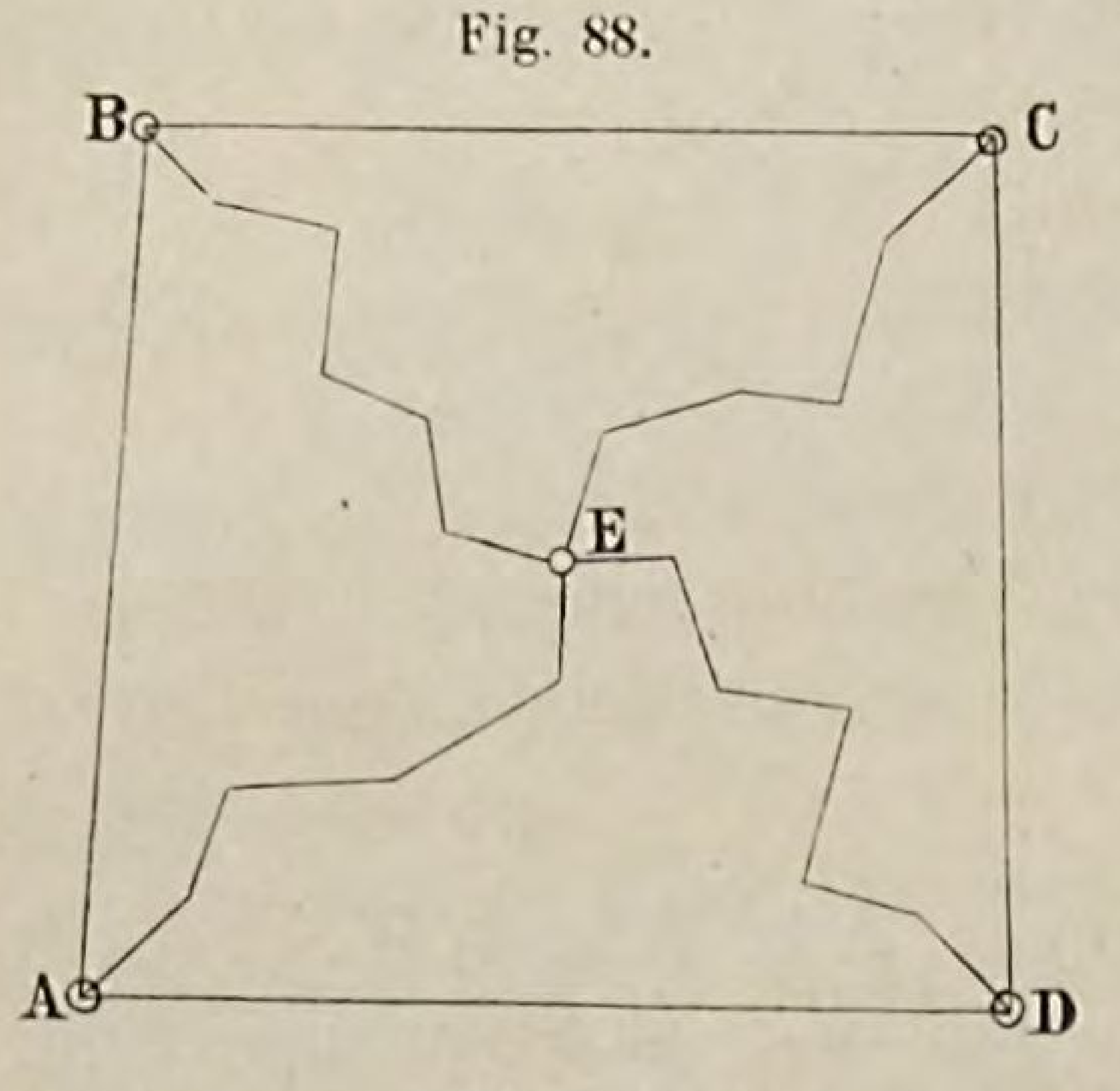
auf A G, messe die horizontalen Entfernungen A b, A c, A d A G genau ab und verzeichne sie in einer Skizze die man sich von der Figur macht. Hierauf messe man auch noch die Ordinaten B b, C c, D d ... F f und schreibe deren Längen ebenfalls genau auf. Die Punkte J K L M N

werden in gleicher Weise wie B C D E F mittels einer Abscissenaxe A J aufgenommen deren Winkel G A J $= \psi$ man nöthigenfalls noch besonders misst.

Hat man in der Umgebung des aufzunehmenden Vielecks mehrere feste Punkte deren gegenseitige Lage schon bekannt ist, wie z. B. P, Q, R, S in Fig. 87, so kann man die entfernter liegenden Vieleckspunkte D, H, N dadurch aufnehmen dass man von ihnen aus nach zweien der gegebenen Fixpunkte gerade, die Abscissenaxe schneidende Linien zieht, und deren Schnittpunkte auf dieser Axe einmisst. Hiernach wird der Punkt D aus den Abscissen A d und A d′ der Geraden D R und D S, der Punkt H aus den Abscissen A h und A h′ der Linien H P und H Q, endlich der Punkt N aus den Abscissen A n und A n′ der Richtungen N P und N Q gefunden, weil mit d und d′ auch d R und d′ S, mit h und h′ auch h P und h′ Q, und mit n und n′ auch n P und n′ Q bekannt sind aus denen sich nacheinander die Punkte D, H, N als Durchschnitte verlängerter Richtungen ergeben. Man wird ohne weitere Auseinandersetzung einsehen dass dieses Verfahren in gebirgigem Terrain, wo lange Linien schwer zu messen sind, von Vortheil ist und sowohl bei der Aufnahme mit dem Messtische als mit dem Theodolithen angewendet werden kann. Zugleich liefert dieses Verfahren einen neuen Beweis von der vielfachen Anwendbarkeit des Prismenkreuzes und des fünfseitigen Winkelprismas; denn die Schnittpunkte d, d′, h, h′, n, n′ etc. werden auf die schnellste Art damit gefunden. Schliesslich bedarf es wohl kaum der Erinnerung dass die Hilfslinien D R, D S etc. so gewählt werden müssen dass die Winkel R D S, P H Q, P N Q weder zu spitz noch zu stumpf werden, mit anderen Worten: dass die Punkte D, H, N aus „guten Schnitten“ hervorgehen.

§. 79. **Aufgabe.** Zwei oder mehrere geschlossene oder offene Polygonzüge haben einen gemeinsamen Knotenpunkt, für dessen Coordinaten sich aus den Einzelpolygonen verschiedene Werthe ergeben: dieses Polygonnetz auszugleichen.

Fig. 88.



Es seien A, B, C, D vier Fixpunkte (etwa Kirchthurmspitzen) deren Coordinaten bekannt sind und an sie seien die Züge E A, E B, E C, E D angeschlossen. Die aus diesen Zügen berechneten Werthe der Coordinaten von E seien verschieden ausgefallen, und es fragt sich welche Coordinatenwerthe für E anzunehmen, und wie die einzelnen Polygonzüge auszugleichen sind. Wir gehen hier auf die Methode der kleinsten Quadrate nicht ein sondern geben nur an, wie man eine in der Praxis zulässige Ausgleichung der unvermeidlichen Beobachtungsfehler herstellen kann. Es genügt nämlich schon für die Abscisse von E das Mittel aus allen dafür

berechneten Abscissen und für die Ordinate das Mittel aus allen Ordinatenwerthen zu nehmen und mit diesen Mittelwerthen nach §. 76 so zu verfahren als wären bloss die Polygonzüge A E, B E, C E, D E zu berechnen: es wird mit anderen Worten der Punkt E durch die mehrfache Bestimmung seiner Coordinaten zum Fixpunkt erhoben und dadurch der Widerspruch der Einzelmessungen in E auf sämmtliche dort zusammenlaufende Polygone übertragen.

Will man den Umstand berücksichtigen dass die Coordinatenwerthe welche aus den verschiedenen Zugsberechnungen sich ergeben, nicht einerlei Gewicht haben, so kann dieses in der Weise geschehen dass man statt des gewöhnlichen arithmetischen Mittels nach §. 13 und Gl 13 das die Gewichte berücksichtigende arithmetische Mittel im höheren Sinne nimmt. Man kann die Gewichte der Coordinatenwerthe $x_1\ y_1$, $x_2\ y_2$, $x_3\ y_3$, $x_4\ y_4$ umgekehrt proportional der Seitenzahl der Züge AE, BE, CE, DE nehmen, und daher, wenn diese Zahlen beziehungsweise $p_1\ p_2\ p_3\ p_4$ und somit die Gewichte $1 : p_1$, $1 : p_2$, $1 : p_3$, $1 : p_4$ sind, x und y aus folgenden zwei Gleichungen finden:

$$x = \frac{p_4 x_1 + p_3 x_2 + p_2 x_3 + p_1 x_4}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4}$$
$$y = \frac{p_4 y_1 + p_3 y_2 + p_2 y_3 + p_1 y_4}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4} \qquad (162)$$

Will man zur Berechnung der Mittelwerthe von x und y nicht die ganzen Coordinatenwerthe $x_1, y_1, x_2, y_2 \ldots$ benützen, so kann man auch mit Bruchtheilen derselben zum Ziele gelangen. Ist nämlich der Näherungswerth von $x = x'$ und jener von $y = y'$, so folgt aus den vorstehenden Gleichungen, wenn man auf beiden Seiten derselben beziehlich x' und y' abzieht:

$$x - x' = \frac{p_4(x_1 - x') + p_3(x_2 - x') + p_2(x_3 - x') + p_1(x_4 - x')}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4} = \xi$$
$$y - y' = \frac{p_4(y_1 - y') + p_3(y_2 - y') + p_2(y_3 - y') + p_1(y_4 - y')}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4} = \eta \qquad (163)$$

und daher $x = x' + \xi$ und $y = y' + \eta$. Wäre beispielsweise

$$\begin{array}{lll} x_1 = +\,2375{,}68\,\text{m} & y_1 = +\,984{,}37\,\text{m} & p_1 = 4 \\ x_2 = +\,2375{,}39 & y_2 = +\,984{,}53 & p_2 = 9 \\ x_3 = +\,2375{,}52 & y_3 = +\,984{,}62 & p_3 = 6 \\ x_4 = +\,2375{,}47 & y_4 = +\,984{,}42 & p_4 = 10 \end{array}$$

so würden die einfachen Mittel sein:

$$x = +\,2375{,}515\,\text{m} \qquad y = +\,984{,}485\,\text{m}$$

während sich die höheren Mittel unter der Annahme von $x' = 2375$ m, $y' = 984$ m und der Berechnung von ξ und η aus den Gleichungen

$$100\,\xi = \frac{10 \,.\, 68 + 6 \,.\, 39 + 9 \,.\, 52 + 4 \,.\, 47}{4 + 9 + 6 + 10} = 54{,}1$$
$$100\,\eta = \frac{10 \,.\, 37 + 6 \,.\, 53 + 9 \,.\, 62 + 4 \,.\, 42}{4 + 9 + 6 + 10} = 48{,}8$$

wie folgt ergeben:

$$x = +\,2375{,}541\,\text{m} \qquad y = +\,984{,}488\,\text{m}$$

§. 80. Genauigkeit und Fehlergrenzen der Zugmessungen. Die Genauigkeit der Aufnahme eines offenen oder geschlossenen Polygons oder überhaupt einer Zugmessung hängt von der Genauigkeit der Längen- und Winkelmessung und letztere von den Messinstrumenten und ihrer Handhabung ab. Bei der Winkelmessung sind namentlich Centrirungsfehler bei der Aufstellung des Theodolithen und der Signale zu vermeiden. Kennt man den mittleren Fehler μ des bei der Messung verwendeten Theodolithen und besitzt der Zug n Brechungspunkte, so kann man nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung einen Abschlusswiderspruch

$$\omega = \mu \sqrt{n}$$

erwarten, und umgekehrt darf man aus einem Widerspruche ω bei n Winkelmessungen auf einen mittleren Fehler der Winkelmessung

$$\mu = \frac{\omega}{\sqrt{n}}$$

schliessen. Man entnimmt hieraus dass ein Unterschied besteht zwischen der Verbesserung ξ jedes Winkels welche hier gleich $\omega : n$ ist und der Genauigkeit der Winkelmessung μ welche durch $\omega : \sqrt{n}$ ausgedrückt wird.

Was die Genauigkeit der Längenmessungen in Polygonzügen betrifft, so gilt hier was bereits in §. 41 über die Messung einzelner gerader Linien gesagt ist, dass nämlich, wenn der Fehler in der Messung einer Geraden von der Länge $L = \lambda$ ist, der mittlere Fehler in der Messung einer Längeneinheit $m = \lambda : \sqrt{L}$ beträgt. Kennt man den mittleren Fehler m des Massstabs, so weiss man umgekehrt dass auf die Länge L einer Seite ein Messungswiderspruch $\lambda = m \sqrt{L}$ zu erwarten ist. Wiche ein Polygonzug von n Seiten, jede von der Länge l, nicht viel von einer geraden Linie ab, und ginge dieser Zug nur von Einem Fixpunkte aus ohne an einen anderen anzuschliessen, so kann man die mittlere Seitenabweichung des letzten Punkts wie folgt annähernd bestimmen. Auf den letzten Punkt des Zugs wirken, da im Fixpunkte der erste Winkel mit einer gegebenen Seite zu messen ist, n Seiten und n Winkel ein; es ist desshalb die dem ersten Winkelfehler entsprechende mittlere Seitenabweichung des Endpunkts $= \pm n\, l\, \mu$ wenn μ den mittleren Winkelfehler der Messung vorstellt. Der zweite Winkel, vom Fixpunkt abgerechnet, bewirkt eine Seitenabweichung $\pm (n - 1)\, l\, \mu$, der dritte eine solche $= \pm (n - 2)\, l\, \mu$ und der letzte eine Abweichung $\pm \big(n - (n - 1)\big)\, l\, \mu = \pm\, l\, \mu$. Da nun alle Winkel von einander unabhängig sind, so ist nach §. 11, Bd. II die mittlere Seitenabweichung des Endpunkts:

$$\varDelta y = l\, \mu \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2} = 0{,}408\, l\, \mu \sqrt{n + 3\, n^2 + 2\, n^3} \quad (164)$$

und hieraus ist das rasche Wachsen der Abweichung $\varDelta y$ mit der Seitenanzahl leicht zu entnehmen.

Ueber die Fehlergrenzen in Polygonzügen bestehen in den verschiedenen Ländern ebenso wenig als über die erlaubten Fehler bei Längenmessungen gleichmässige Bestimmungen. So sind bei einem Zug von n

Winkelpunkten in Baden n Minuten, in Preussen $\frac{1}{2}$ n Minuten alter Theilung und in der Schweiz $4\sqrt{n}$ Minuten neuer Theilung Winkelabschlussfehler gestattet; ferner dürfen die Widersprüche in den Coordinatendifferenzen (die aus gemessenen Winkeln und Seiten hervorgehen, also auch beide Arten von Fehlern enthalten) in Baden $\frac{1}{400}$ der absoluten Summe der Coordinatendifferenzen betragen, während in Preussen ein linearer Anschlussfehler von $\frac{1}{700}$ der geraden Entfernung des An- und Abschlusspunkts gestattet und in der Schweiz bestimmt ist dass die Fehler der Coordinatenunterschiede eines Polygonzugs zwischen zwei trigonometrisch bestimmten Punkten bei Hauptzügen nicht über $\frac{1}{8}$ Procent und bei Nebenzügen nicht über $\frac{1}{4}$ Procent der absoluten Summe der Coordinatendifferenzen betragen sollen, es sei denn im Gebirge, wo die Grenzen auf $\frac{3}{16}$ und beziehungsweise $\frac{3}{8}$ Procent festgesetzt sind. Wer in die Lage kommt über die erlaubten Fehlergrenzen in Polygonzügen Bestimmungen zu treffen, sollte mindestens berücksichtigen dass der Winkelabschlussfehler nach Gl (11a, Bd II) der Quadratwurzel aus der Anzahl der Winkelpunkte proportional sein muss.

D. Messung kleiner Dreiecksnetze.

§. 81. Mit diesem Ausdrucke bezeichnen wir die Bestimmung der gegenseitigen Lage von Punkten mittels kleiner oder ebener Dreiecke die zu einem der Detail- oder Stückmessung eines Flurbezirks zu Grunde liegenden Vielecke verbunden sind. Die Beiwörter „klein" und „eben" besagen dass der ganze Dreiecksverband auf die scheinbare Horizontalebene des Bezirks projicirt und in das sphärische Netz einer Landesvermessung eingeflochten ist, wenn ein solches Netz besteht. Die sphärische Triangulation wird in der Lehre von der Landesvermessung behandelt und liefert Dreiecke erster zweiter und dritter Ordnung: die Dreiecke welche hier betrachtet werden, sind kleiner und gehören der vierten oder einer noch niederen Ordnung an. Unter einem Dreieck vierter Ordnung darf man sich höchstens ein solches geodätisches Dreieck denken welches einen verschwindend kleinen sphärischen Excess hat und daher ein ebenes Dreieck ist. Beachtet man einen sphärischen Excess von 0,01 Secunde nicht mehr, so würde die Seite des Dreiecks von 1 Kilometer Länge noch als eben gelten, wie aus der Formel (117) für den sphärischen Excess eines geodätischen Dreiecks hervorgeht. Eine solche Seitenlänge wäre dann als die grösste anzusehen welche ein hier zu behandelndes Dreieck haben sollte.

Die Dreiecke vierter Ordnung stehen mit denen dritter Ordnung insoferne in Verbindung, als die Bestimmung der Punkte vierter Ordnung entweder durch Vorwärtseinschneiden von den Seiten dritter Ordnung aus, oder aber durch Rückwärtseinschneiden auf Punkte dritter Ordnung erfolgt. Es gehören also hieher die Aufgaben welche bezwecken: erstens die Bestimmung eines Standorts aus der gegebenen Lage dreier oder mehrerer Punkte, und

zwar durch Winkelmessung entweder auf dem Standorte oder in den durch ihre Coordinaten gegebenen Punkten; zweitens die Bestimmung zweier Standorte aus der gegebenen Lage zweier oder mehrerer Punkte, und zwar durch Winkelmessung in den Standorten; und drittens die Bestimmung der gegenseitigen Lage von Punkten eines aus wenigen ebenen Dreiecken bestehenden Netzes, in dem eine oder zwei Dreieckseiten gegeben sind und alle Winkel gemessen werden. Diese Aufgaben könnten auch in dem Abschnitte über Landesvermessungen behandelt werden; da sie aber auch unabhängig von solchen Messungen häufig zu lösen sind, namentlich bei den Aufnahmen von Flurmarkungen, so lassen wir sie der Lehre von den Landesvermessungen vorausgehen, wie in den folgenden Paragraphen geschieht.

§. 82. Aufgabe. Mit Hilfe des Messtisches aus der bekannten Lage dreier unzugänglichen Punkte die unbekannte Lage eines vierten auf dem Felde gegebenen Punkts durch blosse Winkelmessung zu bestimmen.

Dieses auch unter dem Namen „Pothenot'sche Aufgabe" oder „Rückwärtseinschneiden auf drei Punkte" bekannte Problem führt die erste Bezeichnung mit Unrecht; denn nicht Pothenot, der französische Akademiker welcher im Jahre 1692 ein Mémoire über dieses Problem schrieb, ist sein Erfinder sondern Willebrord Snellius, der niederländische Mathematiker welcher es bereits im Jahre 1614 aufstellte, löste und veröffentlichte. Wenn wir gleichwohl den einmal üblichen Namen für die vorliegende Aufgabe welche der praktische Geometer bei der Aufnahme von Flurmarkungen häufig zu lösen hat, beibehalten, so geschieht es nur weil er sich in der Literatur und Praxis der Geodäsie zu sehr eingebürgert hat als dass er so leicht zu verdrängen wäre, und nebenbei hat Pothenot doch auch seine Verdienste um die nach ihm benannte Aufgabe. Zur Lösung derselben kann sich der praktische Geometer entweder der Rechnung oder der geometrischen und mechanischen Construction bedienen; wir werden zunächst bloss die Zeichnung und einen besonderen kleinen Apparat (den Einschneidezirkel) als Hilfsmittel anwenden.

Die drei bekannten Punkte sollen auf dem Felde mit A, B, C und auf dem Messtische mit a, b, c bezeichnet sein: das Bilddreieck a b c ist selbstverständlich dem Felddreiecke A B C ähnlich, und beide hat man sich auf eine horizontale Ebene, wofür man die des richtig gestellten Messtischblatts ansehen kann, projicirt zu denken. Der vierte auf dem Felde gegebene Punkt heisse D und sein auf dem Messtische gesuchtes Bild d. Unsere Aufgabe verlangt nun: dass von D aus durch blosse Winkelmessung und Zeichnung der Punkt d so bestimmt werde dass das Viereck a b c d dem Vierecke A B C D völlig ähnlich sei.

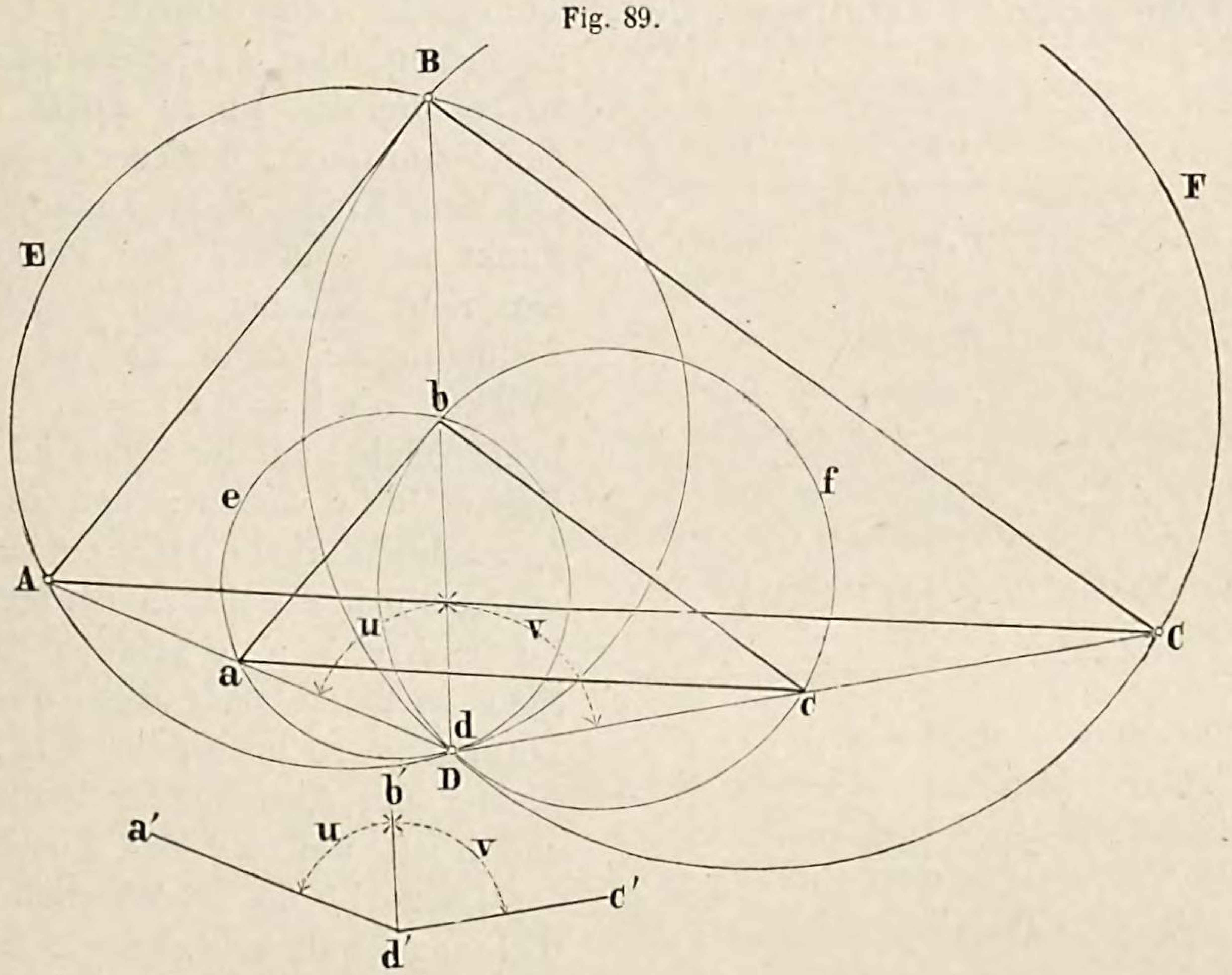
Es gibt verschiedene graphische Auflösungen dieser Aufgabe: die einen geben den gesuchten Punkt d direct durch Construction, die anderen indirect durch Probiren. Das indirecte Verfahren führt schneller zum Ziele als das directe, wesshalb es auch meist angewendet wird. Wir werden beide

Verfahrungsweisen erörtern und denselben eine mechanische Lösung beifügen.

A. Directe Auflösungen der Pothenot'schen Aufgabe.

§. 83. Denkt man sich von dem Punkte D aus die Horizontalwinkel u und v unter welchen die Dreieckseiten A B und C B gesehen werden, bestimmt und über A B einen Kreis A E B beschrieben welcher in der Richtung nach D auf dem Bogen A E B den Peripheriewinkel u fasst, so muss dieser Kreis offenbar durch D gehen, weil der Winkel A D B = u ist. Denkt man sich eben so über B C einen Kreis beschrieben der auf dieser Sehne und gegen D hin einen Peripheriewinkel v fasst, so muss dieser Kreis ebenfalls durch D gehen, weil der Winkel B D C = v ist. Was nun

Fig. 89.

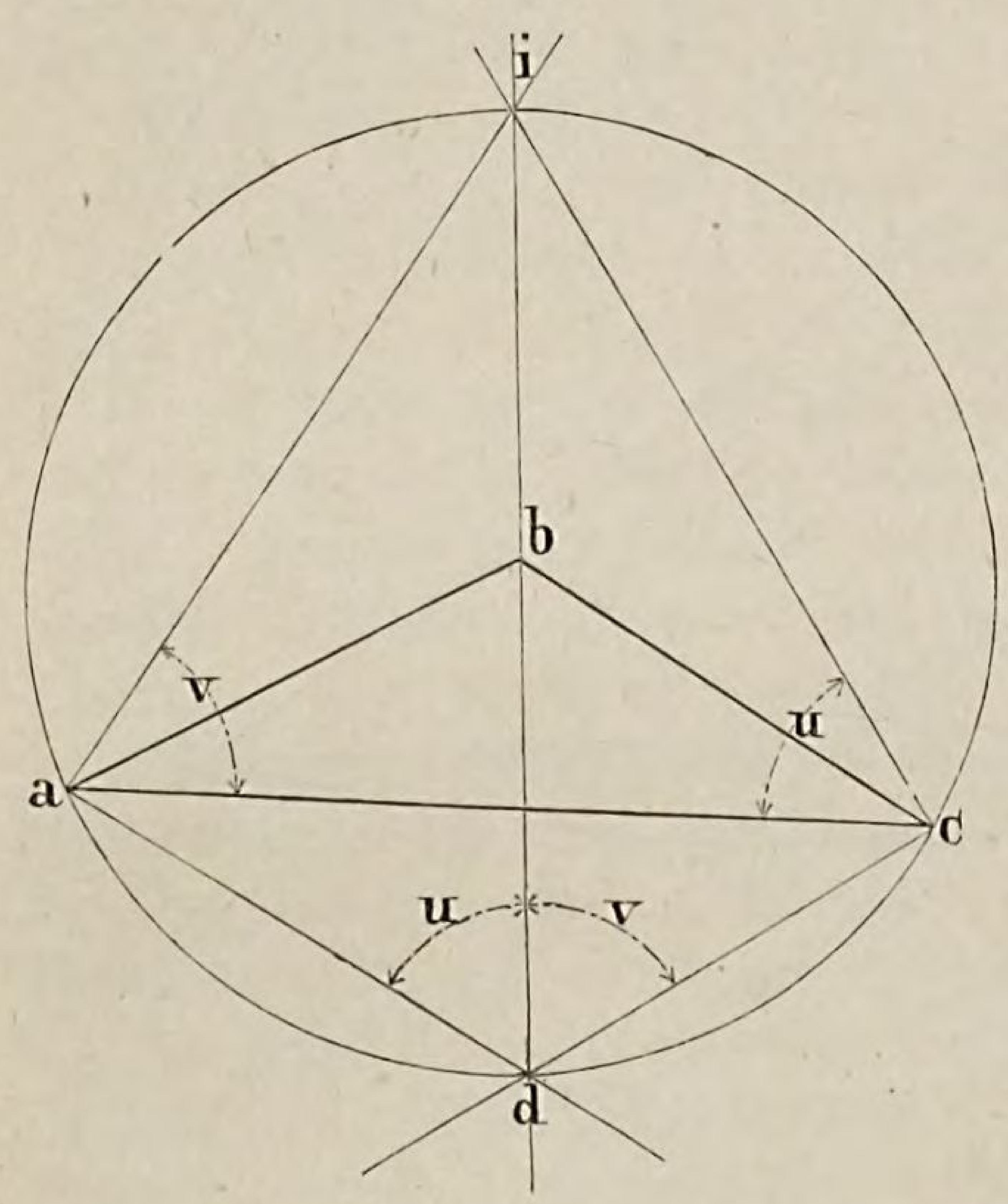


von dem Vierecke A B C D gilt, muss offenbar auch für das Viereck a b c d gelten, weil dieses jenem ähnlich ist: d. h. der Punkt d liegt gleichzeitig auf dem Kreise a e b welcher rechts der Sehne a b und auf ihr den Peripheriewinkel u fasst, und auf dem Kreise b f c welcher über der Sehne b c so beschrieben ist dass er links von ihr und auf ihr den Peripheriewinkel v liefert; der Punkt d kann folglich nur in dem Schnittpunkte der beiden Kreise liegen. Dieses directe Verfahren erfordert also Nichts als die Messung der Winkel u, v und die Construction der eben beschriebenen zwei Kreise a e b, b f c welche die „Schickard'schen Kreise" heissen. Diese Kreise fallen in einen zusammen wenn der Punkt D entweder auf dem Kreise A B C liegt, oder wenn die drei Punkte A, B, C eine Gerade bilden welche durch D geht. In dem ersteren Falle liefert jeder Punkt des Kreises

A B C D die Peripheriewinkel u und v, wodurch D unbestimmt bleibt; und in dem letzteren Falle hätte man es eigentlich mit einem Kreise von unendlichem Halbmesser und mit Winkeln u und v welche beziehungsweise = 0 und 180⁰ wären, zu thun; D bleibt also auch hier unbestimmt. Diese zwei Fälle (welche im Grunde nur einen bilden) ausgenommen, erhält man durch die Messung der Winkel u, v und die Construction der Kreise a e b, b f c stets den gesuchten Punkt d. Bei den folgenden Betrachtungen sind diese Fälle stillschweigend ausgeschlossen.

§. 84. Eine zweite directe Auflösung der Pothenot'schen Aufgabe besteht darin, die Winkel u und v zu messen und, wie Fig. 90 zeigt, u an die Linie a c und die Ecke c = a c i, v aber an dieselbe Linie a c und die Ecke a = c a i anzutragen, den Schnittpunkt i der Schenkel c i, a i zu suchen, über a, i, c einen Kreis zu beschreiben, i b zu ziehen und den Schnittpunkt d dieser Geraden mit dem Kreise als den gesuchten Punkt zu nehmen. Der Punkt d entspricht offenbar den gestellten Bedingungen: denn es ist der Winkel a d b = a c i = u, weil beide Winkel auf der Sehne a i des Kreises a i c stehen; und es ist ferner der Winkel c d b = c a i = v, weil c d b und c a i zu der Sehne i c des Kreises a i c gehören. Man sieht leicht ein dass diese directe Lösung um so unsicherer wird, je kleiner der Abstand der Punkte i und b ist, weil mit der Abnahme der Länge i b die Unsicherheit der Richtung i b d, in welcher d liegt, wächst. Dieser Umstand und die Schwierigkeit, auf dem Messtische Kreise zu construiren welche durch drei gegebene Punkte gehen, bewirken dass diese zweite directe Lösung fast so wenig als die erste angewendet wird.

Fig. 90.



§. 85. Das von Bohnenberger angegebene Verfahren einen Punkt auf drei andere rückwärts einzuschneiden, unterscheidet sich von dem vorhergehenden nur dadurch dass man die Winkel u und v sofort bei der Aufnahme an die Seite a c legt und die Construction des Kreises a i c erspart. Denkt man sich nämlich den Punkt a über D gestellt und a c nach D C gerichtet, so wird die Kippregel, wenn sie an a liegt und auf B eingestellt ist, den Winkel c a i = v geben; denkt man sich dann ferner den Punkt c über D und die Seite c a in die Richtung D A gebracht, so liefert die an c liegende und auf B gerichtete Kippregel den Winkel a c i = u, und den Schnittpunkt i welcher nach der vorigen Figur mit dem Punkte b

in der Richtung B D liegen muss; denkt man sich endlich den Messtisch so gestellt dass die auf ihm gezogene Linie b i durch B geht und der zu erwartende Punkt d nahezu in das Loth von D fällt, so braucht man schliesslich nur noch die Kippregel an a oder c zu legen und auf A oder

Fig. 91.

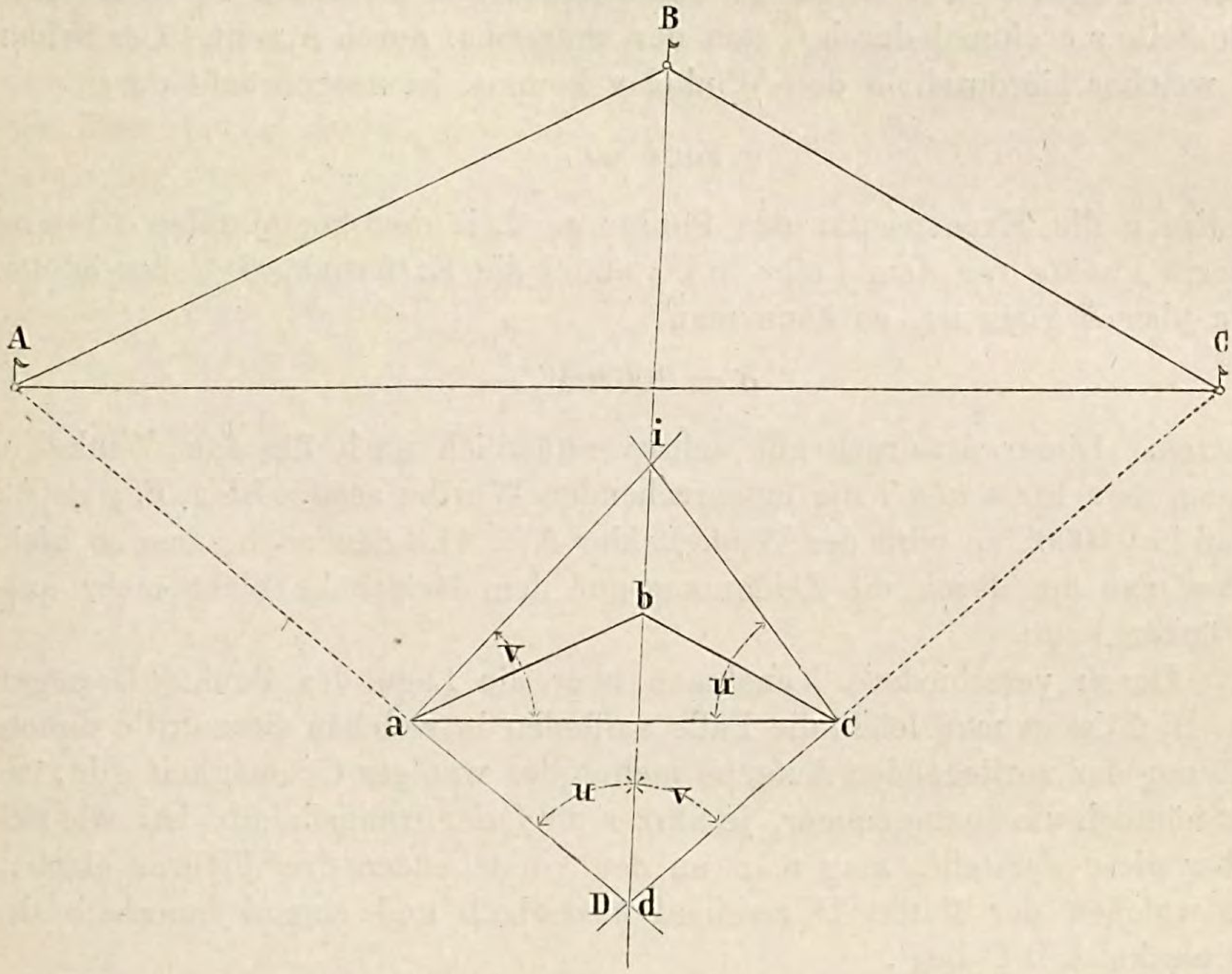


Fig. 92.

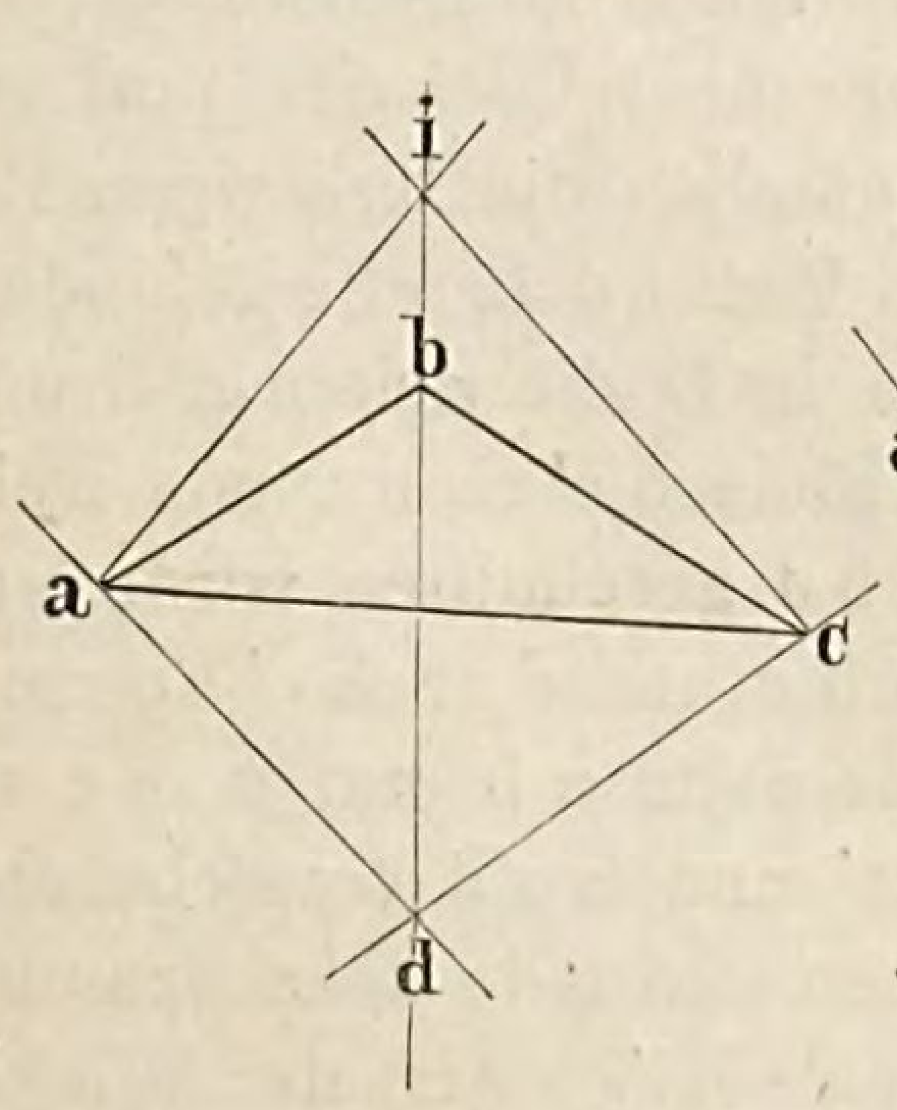


Fig. 93.

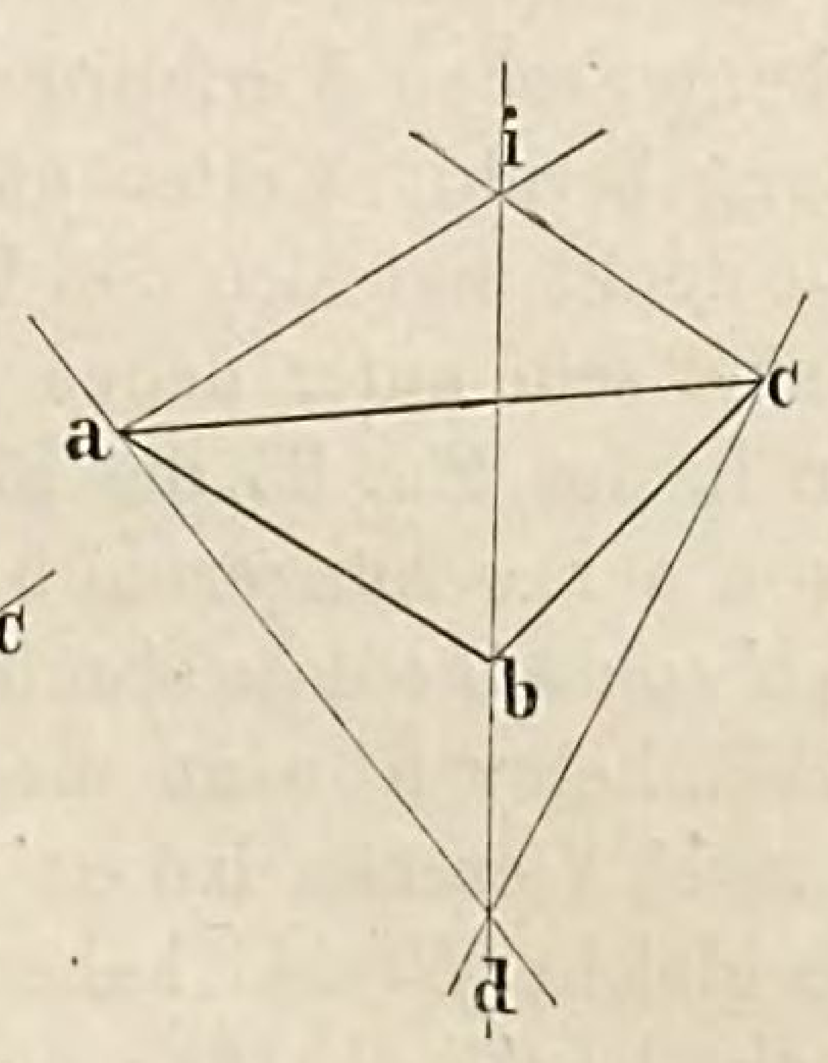
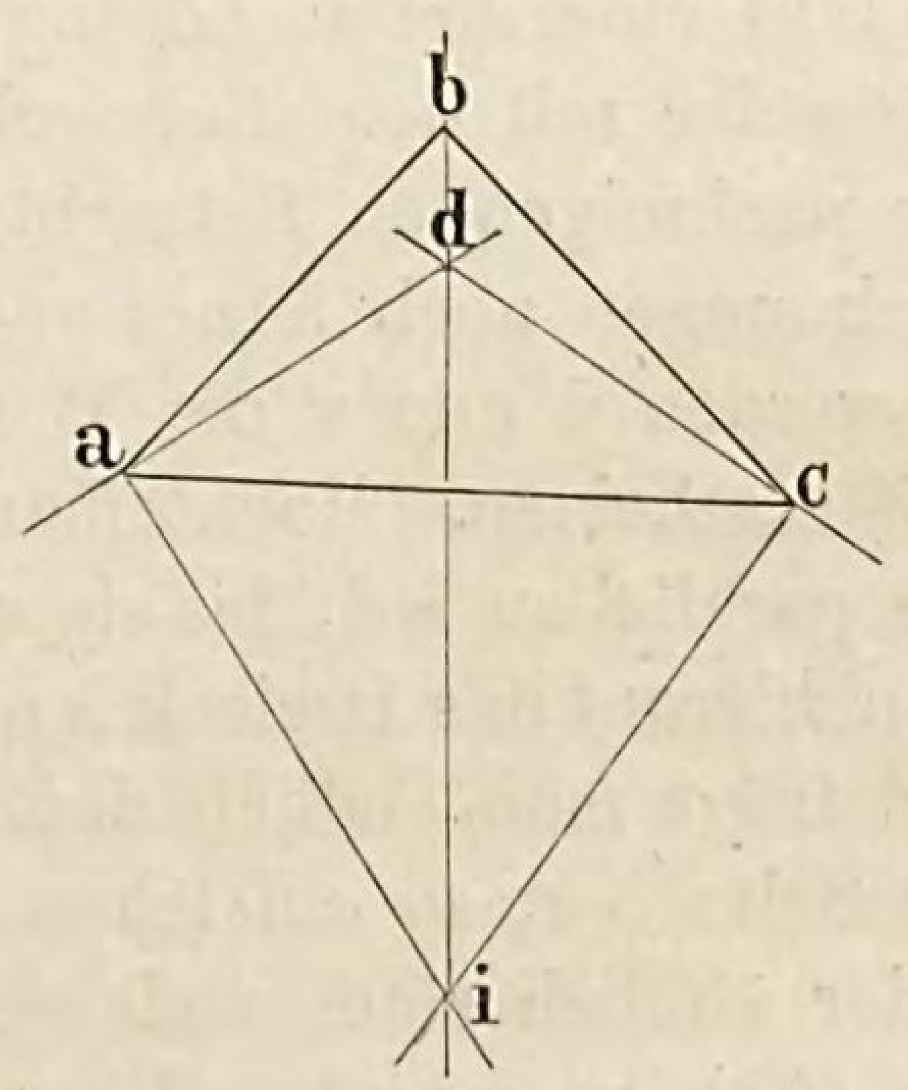


Fig. 94.



C einzustellen, um den Schnitt d mit b i zu finden. Stellt man nacheinander auf beide Punkte A und C ein, so sollen sich die drei Visirlinien a A, c C, b B in einem und demselben Punkte d schneiden; geschieht es nicht so ist die Arbeit mehrmals zu wiederholen und zu verbessern, bis jene

Forderung erfüllt ist. Es würde zu mühsam sein wenn man den Messtisch dreimal so stellen wollte dass a, c und der muthmassliche Punkt d genau über D kommen; es ist aber auch diese dreimalige Aufstellung nicht nöthig wenn man überlegt dass die Winkel u und v auch dann genau genug erhalten werden wenn man bloss den vorläufig angenommenen Punkt d über D bringt und hierauf den Messtisch so dreht dass die Seite a c einmal durch C und das anderemal durch A geht. Der Fehler δ welcher hierdurch in den Winkel v kommt, ist ausgedrückt durch

$$\sin \delta = \frac{e}{l}$$

wobei e die Excentricität des Punkts a, d. i. den horizontalen Abstand dieses Punkts von dem Lothe in D, und l die Entfernung D C bezeichnet. Da aber δ klein ist, so kann man

$$\delta = 206265'' \frac{e}{l}$$

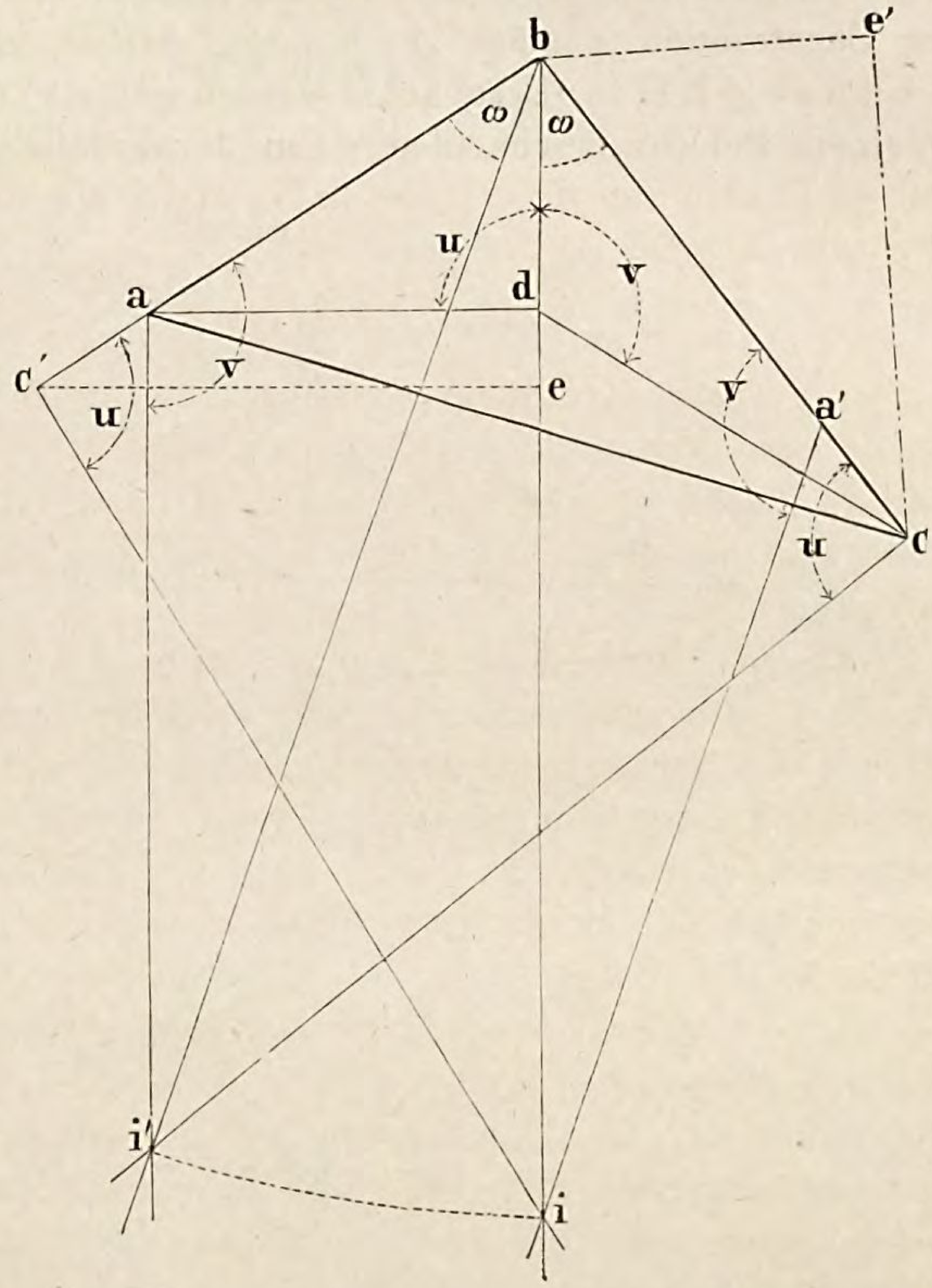
setzen. Dieser Ausdruck gilt selbstverständlich auch für den Winkel u wenn man für e und l die entsprechenden Werthe setzt. Ist z. B. $e = 0',2$ und $l = 1000'$, so wird der Winkelfehler $\delta = 41,3$ Secunden, also so klein dass man ihn durch die Zeichnung auf dem Messtische nicht mehr ausdrücken kann.

Durch verschiedene Annahmen über die Lage des Punkts D gegen A, B, C kann man leicht die Fälle auffinden in welchen diese dritte directe Lösung der vorliegenden Aufgabe mehr oder weniger Genauigkeit gibt: sie ist nämlich um so ungenauer, je kürzer die Orientirungslinie b i ist; wie sich aber diese darstellt, mag man an den vorstehenden drei Figuren ersehen in welchen der Punkt D zweimal ausserhalb und einmal innerhalb des Dreiecks A B C liegt.

§. 86. In Schumacher's astronomischen Nachrichten Bd 3, S. 194 hat Bessel eine directe Lösung der Pothenot'schen Aufgabe mitgetheilt welche theilweise mit dem Bohnenberger'schen Verfahren übereinstimmt und auf der nachfolgenden Betrachtung beruht. Gelten nämlich die bisherigen Bezeichnungen noch ferner und denkt man sich den Punkt d bereits gefunden, so werden u und v die Winkel sein unter denen in D die Seiten A B und B C erscheinen. Macht man in der Fig. 95 die Linie b c' = b c und zieht c' e parallel zu a d, bis sie von der verlängerten b d geschnitten wird; legt man hierauf das Dreieck b e c' so an b c dass c' auf c und e nach e' kommt; und trägt man endlich den Winkel v in a an die Seite a b und u in c an die Seite b c, so entstehen zwei Vierecke b d c e' und b a i' c welche einander ähnlich sind, weil sie gleiche Winkel haben und b d : b e' = b a : b c ist. Zieht man in dem Vierecke b a i' c die Diagonale b i', so ist der Winkel d b c = a b i' = ω; man kann also durch die Diagonale b i' welche lediglich aus den Winkeln u und v hervorgeht, den Winkel ω bestimmen der seinerseits, wenn er an b c getragen wird, die Richtung b e angibt in welcher der gesuchte Punkt d liegen muss und die zugleich zur Orientirung des

Dreiecks a b c dient; denn legt man die Kippregel an b e an und dreht die Tischplatte bis das Fernrohr auf B einsteht, so sind die Seiten des Dreiecks a b c den Seiten des Dreiecks A B C parallel, und zieht man dann noch die Visirlinien a A und c C, so ergibt sich der Punkt d welcher einem Standpunkte D entspricht der sich lothrecht unter ihm befindet. Will man sich die Mühe ersparen, den Winkel ω von a b nach b c überzutragen, so kann man dem Vierecke b a i'c sofort die Lage b c' i a' geben in welcher dessen Diagonale b i mit der Orientirungslinie b d e zusammenfällt; man braucht zu dem Ende nur b a' = b a, b c' i = u und b a' i = v zu machen. Es versteht sich von selbst dass man die Winkel u und v unmittelbar bei ihrer Aufnahme an die Punkte c' und a' der Seiten c' b und a' b anträgt, indem man zuerst die Seite b a in die Richtung D A bringt und von c' nach B visirt, und hierauf b c in die Richtung D C dreht und von a' aus wieder auf B einstellt. Hinsichtlich der Genauigkeit der Bestimmung des Punkts d und der Orientirung des Messtisches gelten dieselben Bemerkungen welche auf S. 170 über das Bohnenberger'sche Verfahren gemacht wurden.

Fig. 95.



B. Indirecte Auflösungen der Pothenot'schen Aufgabe.

§. 87. Die vorausgehenden Betrachtungen über die Lage des Standpunkts D, d gegen die Dreieckspunkte A, a, B, b, C, c haben die nachstehend weiter entwickelten Sätze bereits vorbereitet, nämlich:

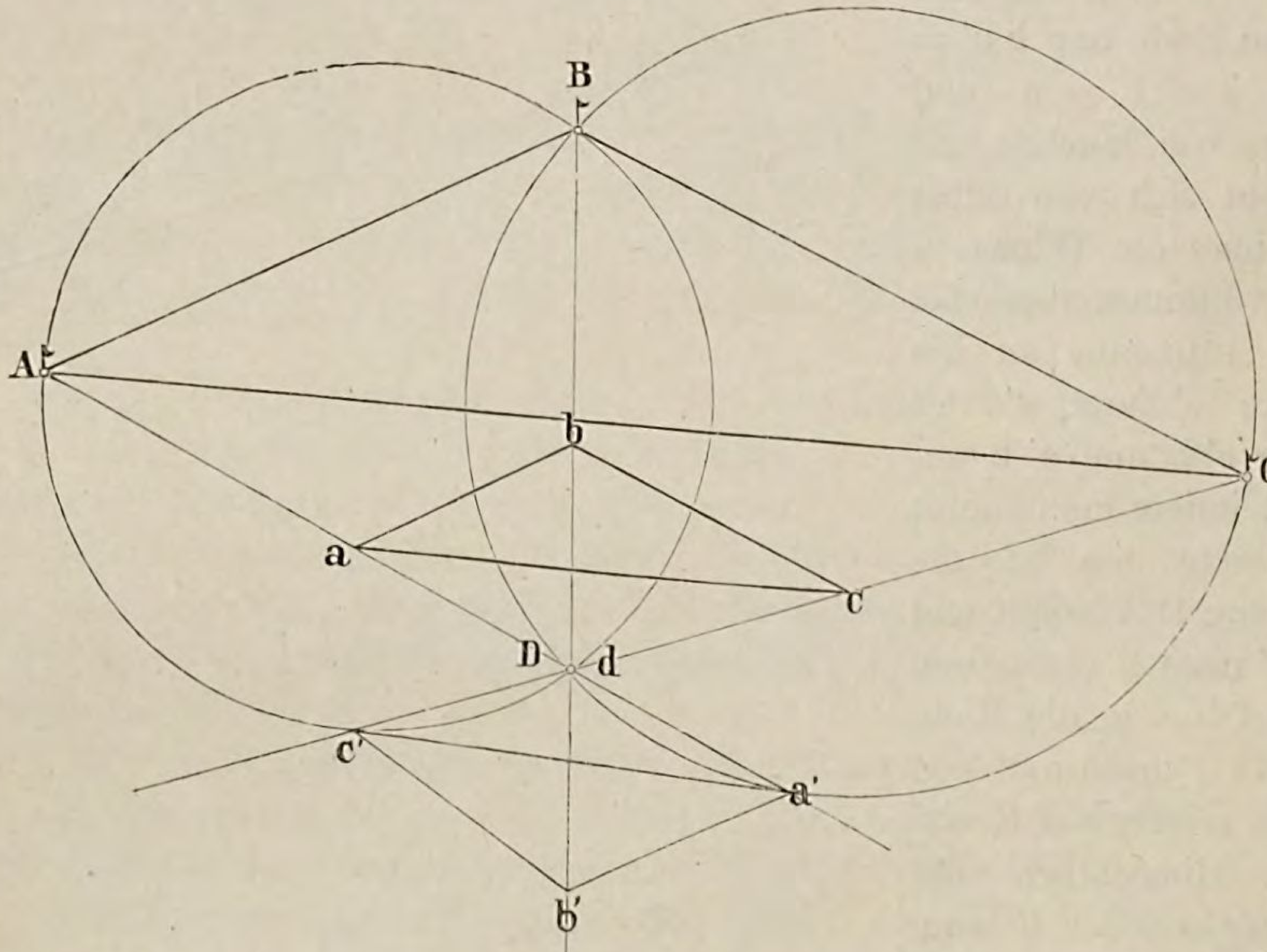
a) wenn der Messtisch für das Dreieck a b c orientirt oder so gerichtet ist dass a b mit A B, a c mit A C und b c mit B C parallel läuft, und wenn der Punkt D nicht auf dem Kreise A B C liegt: so schneiden sich die Visirlinien A a, B b, C c in einem einzigen Punkte d;

b) wenn der Messtisch nicht orientirt oder das Dreieck a b c gegen A B C

so gestellt ist dass die gleichnamigen Seiten beider Dreiecke nicht parallel laufen, und wenn der Punkt D nicht auf dem Kreise A B C liegt: so schneiden sich die Visirlinien A a, B b, C c in drei Punkten und bilden hierdurch ein fehlerzeigendes Dreieck.

Zu a. (Fig. 96.) Legt man die nach §. 83 der Seite 167 construirte Figur a b c d auf die ihr ähnliche A B C D so dass der Punkt d auf D, der Winkel a d b = u auf A D B und Winkel b d c = v auf B D C fällt: so ist offenbar a b parallel A B, a c parallel A C, b c parallel B C, weil der Construction gemäss $\varDelta$ a b d $\backsim$ $\varDelta$ A B D, $\varDelta$ a c d $\backsim$ $\varDelta$ A C D und $\varDelta$ b d c $\backsim$ $\varDelta$ B D C. Umgekehrt werden sich also die Linien A a, B b, C c in einem Punkte d schneiden wenn der Parallelismus der gleichnamigen

Fig. 96.

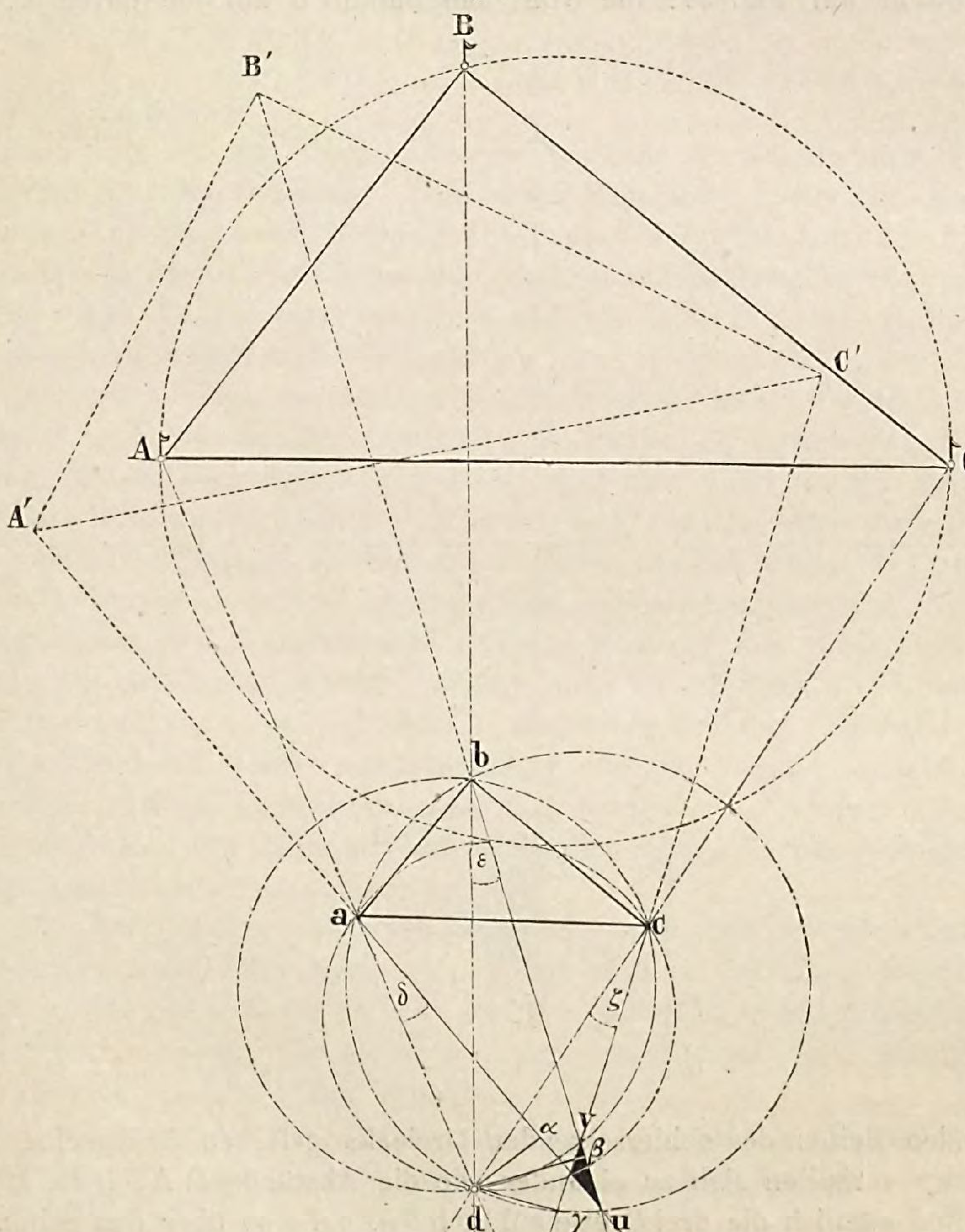


Dreieckseiten vorausgesetzt wird; und dieses ist auch dann noch der Fall wenn das Dreieck a b c die Lage a′ b′ c′ hat, also um 180⁰ falsch orientirt ist. Aus dem gemeinsamen Schnitte der drei Linien A a, B b, C c würde demnach noch nicht mit Sicherheit die richtige Lage des Dreiecks a b c folgen, wenn die zweite um 180^0 fehlerhafte Stellung auf dem Felde nicht sofort zu erkennen und zu beseitigen wäre. Eine Unsicherheit kann somit nur in dem Falle eintreten, wo D auf dem Kreise A B C, also d auf dem Kreise a b c liegt. Ob aber dieser Fall gegeben ist, erkennt man leicht aus der ersten Bestimmung von d: denn legt man durch a, b, c einen Kreis und er geht durch d, so liegt auch D auf dem Kreise A B C, und es ist unter diesen Umständen die indirecte Lösung der Aufgabe durch Rückwärtseinschneiden ebenso unmöglich als die directe. Selbst wenn d

nur nahezu auf dem Kreise a b c liegt, ist es gut, sich eine Controle über die Bestimmung von d dadurch zu verschaffen dass man das Bild d' eines anderen Standorts D' welcher sicher vom Kreise A B C entfernt liegt, aufsucht und dessen Lage gegen d mit der von D' gegen D vergleicht.

Zu b. Der zweite Satz ist eigentlich eine Folge des ersten; denn

Fig. 97.

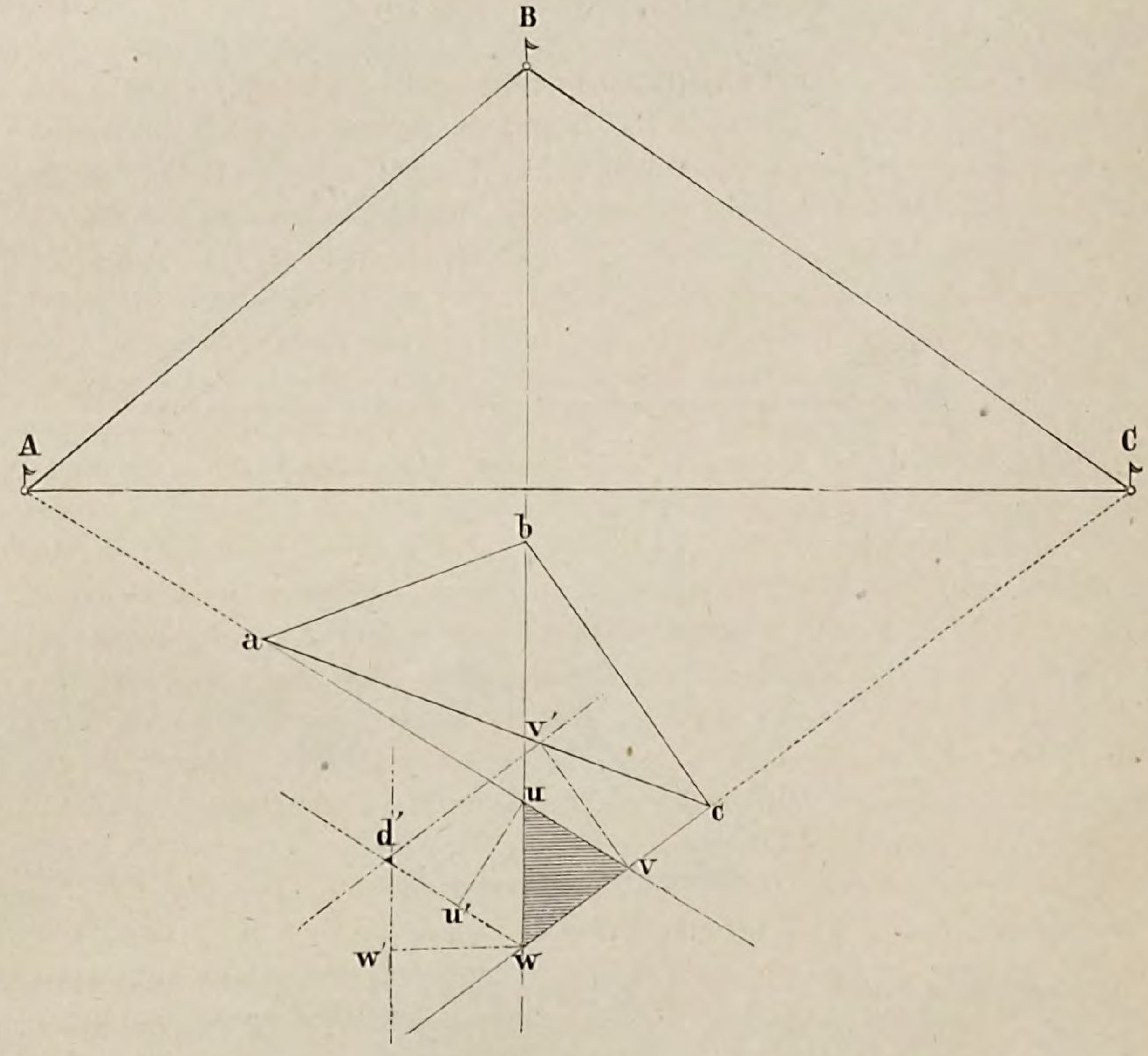


wenn sich die Visirlinien (den unbestimmbaren Fall, wo D auf dem Kreise A B C liegt, ausgenommen) nur dann in einem Punkte schneiden können wenn die gleichnamigen Seiten der Dreiecke a b c und A B C einander parallel laufen, so müssen sie sich in jedem anderen Falle in drei Punkten schneiden und dadurch ein Dreieck bilden welches die unrichtige Lage des Dreiecks a b c zu erkennen gibt.

§. 88. Die Regel von Lehmann das fehlerzeigende Dreieck zur richtigen Aufstellung des Messtisches über einem gegebenen Standpunkte zu benützen, beruht auf dem folgenden Satze:

c) Die senkrechten Abstände des Standpunktbilds von den verlängerten Seiten des fehlerzeigenden Dreiecks verhalten sich wie die Entfernungen des wirklichen Standpunkts von den drei Ecken des Felddreiecks; oder, mit Bezug auf Fig. 97: die von dem Punkte d auf die durch a, b, c

Fig. 98.



gehenden Seiten des fehlerzeigenden Dreiecks gefällten Senkrechten d α, d β, d γ verhalten sich zu einander wie die Abstände D A, D B, D C.

Sind nämlich die drei Kreise a d b, b d c, a d c so über den Seiten a b, b c, a c des Dreiecks a b c construirt dass sie nach einander in den gegen d hin gelegenen Abschnitten die Peripheriewinkel u, v, $u + v = w$ fassen: so ist klar dass sich die durch a und b gehenden Seiten des fehlerzeigenden Dreiecks auf dem Kreise a d b, die zu b und c gehörigen Seiten auf dem Kreise b d c, und die durch a und c gelegten auf dem Kreise a d c schneiden und somit die Eckpunkte u, v, w des fehlerzeigenden Dreiecks auf diesen drei Kreisen liegen müssen. Auf dem Bogen d u des Kreises a d b stehen

die Peripheriewinkel δ und ε: sie sind folglich einander gleich; ε steht aber auch mit ζ auf dem Bogen d v des Kreises b d c: folglich ist auch $\varepsilon = \zeta = \delta$. Nun ist

$$\sin\delta = \frac{d\,\alpha}{d\,a},\ \sin\varepsilon = \frac{d\,\beta}{d\,b},\ \sin\zeta = \frac{d\,\gamma}{d\,c}$$

folglich auch $d\,\alpha : d\,\beta : d\,\gamma = d\,a : d\,b : d\,c$, und da wegen der Aehnlichkeit der Vierecke d a b c und D A B C die Proportion stattfindet: $d\,a : d\,b : d\,c = D\,A : D\,B : D\,C$, schliesslich:

$$d\,\alpha : d\,\beta : d\,\gamma = D\,A : D\,B : D\,C \qquad (165)$$

was zu beweisen war.

Kennt man nun das Verhältniss der Abstände des Standpunkts D von den Eckpunkten des Dreiecks A B C durch Schätzung nach dem Augenmasse, so kann man auch die beiläufige Lage des Punkts d finden, indem man nach Fig. 98 auf den Seiten des fehlerzeigenden Dreiecks Senkrechte errichtet deren Längen u u′, w w′, v v′ sich wie D A : D B : D C verhalten, und indem man weiter durch deren Köpfe u′, v′, w′ Parallele zu den durch a, b, c gehenden Seiten des fehlerzeigenden Dreiecks zieht, bis sie sich bei d′ schneiden. Dieser Schnitt ist entweder ein Punkt, oder wie in der Figur, ein sehr kleines Dreieckchen das man selbst als einen Punkt ansehen kann. Mit Hilfe dieses Punkts d′ orientirt man den Messtisch aufs Neue, indem man die Kippregel an eine der Geraden d′ a, d′ b oder d′ c anlegt und die Tischplatte horizontal so weit dreht, bis beziehungsweise A, B oder C vom Fadenkreuze des Fernrohrs gedeckt wird. Findet diese Deckung in Bezug auf den Punkt A statt, so lege man weiter noch die Kippregel an b und c und visire nach B und C: schneiden sich die rückwärts verlängerten Visirlinien wieder nicht in einem einzigen Punkte, so wird das zweite fehlerzeigende Dreieck welches nun entsteht, viel kleiner als das vorige sein, und eine Wiederholung des eben beschriebenen Verfahrens wird den gesuchten Punkt d liefern.

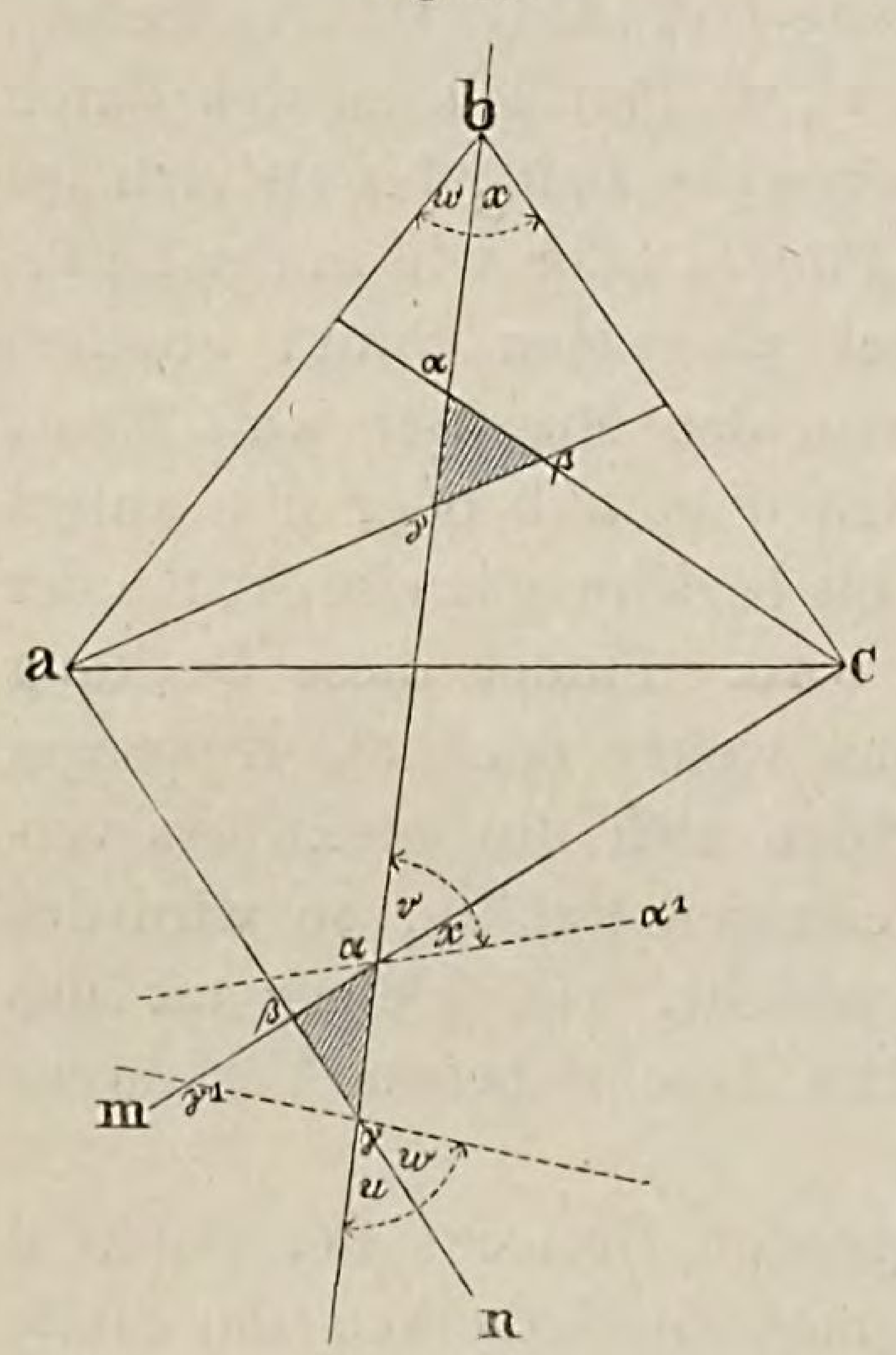
§. 89. Auf welcher Seite des fehlerzeigenden Dreiecks der Punkt d zu suchen ist, kann man beurtheilen wenn man in Gedanken die Stelle aufsucht in welcher sich die zu a b, b c, a c gehörigen Bestimmungskreise schneiden würden wenn man sie zöge; Lehmann hat aber hiefür besondere Sätze aufgestellt welche folgendermassen lauten:

d) Je nachdem der Standpunkt ausser- oder innerhalb des gegebenen Felddreiecks liegt, befindet sich auch das Bild des Standpunkts ausser- oder innerhalb des fehlerzeigenden Dreiecks.

e) Das Bild des Standpunkts und das fehlerzeigende Dreieck werden durch die mittlere Visirlinie (b $\alpha\,\gamma$ der Fig. 99) getrennt, wenn der Punkt d entweder einer Seite des Dreiecks a b c gegenüber und innerhalb des Grundkreises a b c, oder einem Winkel des Dreiecks a b c gegenüber liegt; dagegen befinden sich der Punkt d und das fehlerzeigende Dreieck auf ein und derselben Seite der mittleren Visirlinie, wenn d einer Seite des Dreiecks a b c gegenüber und ausserhalb des Grundkreises a b c liegt.

Für diese Sätze hat Professor T. Freuchen zu Kopenhagen im 6 Bande S. 276 der Zeitschrift für Vermessungswesen folgenden einfachen Beweis geliefert: In der Fig. 99 sei a b c das auf dem Messtisch gegebene Bilddreieck des Naturdreiecks A B C und d das gesuchte Bild des gegebenen Standpunkts D; ferner sollen $\alpha\,\beta\,\gamma$ zwei fehlerzeigende Dreiecke vorstellen wovon das eine innerhalb, das andere ausserhalb des Dreiecks a b c liegt; endlich dürfen die Winkel a γ b, b α c, a β c als genau und gleich den Winkeln A D B = u, B D C = v, A D C = u + v vorausgesetzt werden. Da nun der gesuchte Punkt d auf dem durch die Punkte a, β, c gehenden Kreise liegt, so kann er weder im Winkelraume a β c noch in dessen Scheitelwinkelraume liegen, und aus gleichem Grunde sind die Winkelräume a γ b, b α c und deren Scheitelwinkelräume ausgeschlossen. Daraus folgt erstens dass wenn der Punkt D innerhalb des Dreiecks A B C liegt, der Punkt d auch in das fehlerzeigende Dreieck $\alpha\,\beta\,\gamma$ fällt, und zweitens dass wenn der Punkt D ausserhalb des Dreiecks A B C liegt, so befindet sich auch d ausserhalb des fehlerzeigenden Dreiecks, und zwar entweder in dessen Winkelraume a β m oder im Seitenraume c $\alpha\,\gamma$ n. Die zwei durch die Punkte b, α, γ und a, γ, b gehenden Kreise und ihre durch α und γ gezogenen Tangenten $\alpha\,\alpha'$ und $\gamma\,\gamma'$ schneiden sich auf ein und derselben Seite der Linie $\alpha\,\gamma$ und es ist Winkel $\alpha'\,\alpha$ c = α b c = x und Winkel $\gamma'\,\gamma$ a = γ b a = w. Da a γ b = u und b α c = v, so erkennt man leicht: erstens dass der Schnittpunkt der Tangenten und folglich auch der gesuchte Punkt d im Winkelraume m β a liegt wenn $(u + v + w + x) < 180^0$ ist, d. h. wenn d einer Seite des Dreiecks a b c gegenüber und ausserhalb des diesem Dreiecke umschriebenen Kreises liegt, und zweitens dass der Schnittpunkt der Tangenten und folglich auch d im Seitenraume n $\gamma\,\alpha$ c sich befindet wenn $(u + v + w + x) > 180^0$ ist, d. h. wenn d entweder einer Seite des Dreiecks a b c gegenüber und innerhalb des Kreises oder einem Winkel desselben Dreiecks gegenüber liegt.

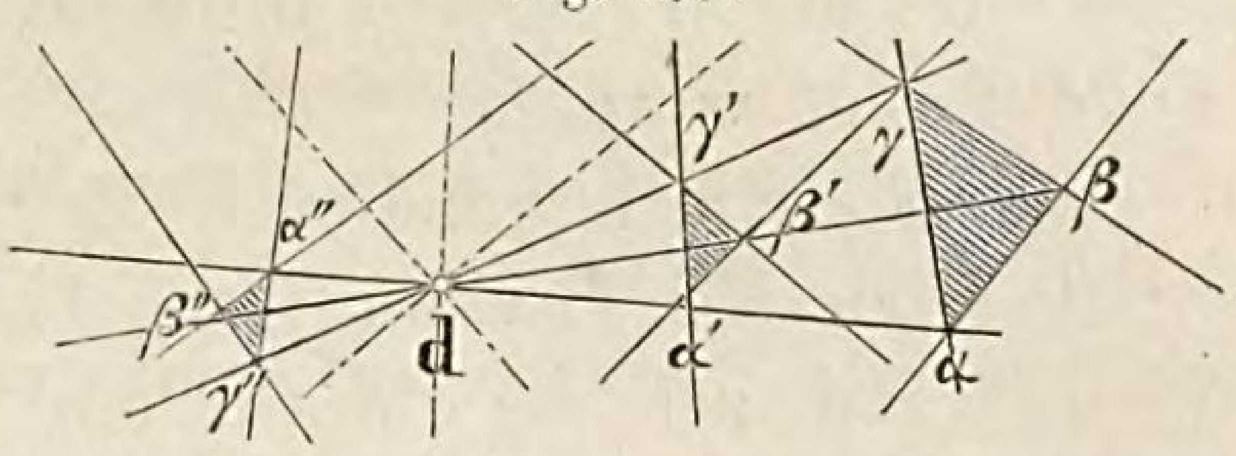
Fig. 99.



§. 90. Ein von Bohnenberger herrührendes Verfahren, das Bild d aus zwei fehlerzeigenden Dreiecken zu finden, besteht darin dass man, nachdem ein solches Dreieck ($\alpha\,\beta\,\gamma$, Fig. 100) vorhanden ist, den Tisch durch eine kleine Drehung etwas besser orientirt als vorher, und ein zweites Fehlerdreieck ($\alpha'\,\beta'\,\gamma'$) bestimmt welches eine ähnliche Lage hat wie das erste und durch Verbindung der auf gleichen Bestimmungskreisen liegenden Punkte α, α', β, β', γ, γ' einen Schnittpunkt gibt der den

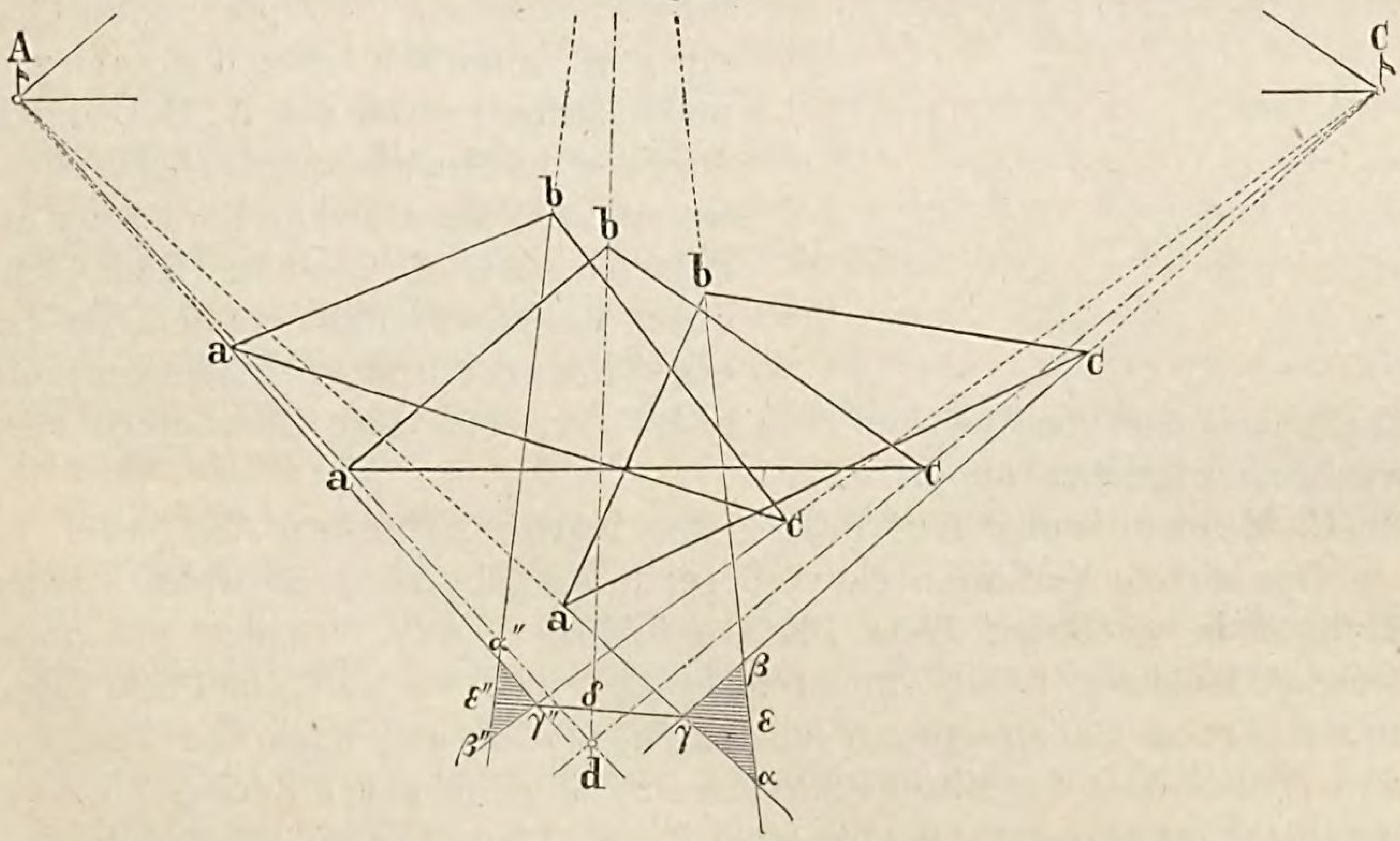
gesuchten Punkt so genau finden lässt dass eine weitere Verbesserung desselben nicht mehr nöthig ist. Der Schnittpunkt wird nämlich um so weniger von dem gesuchten Bildpunkte d abweichen, je näher die Hilfslinien $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ mit den Bestimmungskreisen des Standpunktbilds zusammenfallen, und dieses ist um so mehr der Fall, je kleiner die fehlerzeigenden Dreiecke sind. Sollte das zweite fehlerzeigende Dreieck die entgegengesetzte Lage ($\alpha''\beta''\gamma''$) des ersten ($\alpha\beta\gamma$) erhalten, so wäre dieses ein Zeichen dass man bei der Verbesserung der Orientirung das Messtischblatt zu weit gedreht hat; gleichwohl können aber auch diese zwei Dreiecke zur annähernden Bestimmung von d führen, indem man α mit α'' und γ mit γ'' verbindet und die Linien $\alpha\alpha''$, $\gamma\gamma''$ so weit verlängert, bis sie sich in d schneiden.

Fig. 100.



3) Eine von Netto herrührende Lösung der Pothenot'schen Aufgabe hat grosse Aehnlichkeit mit der von Bohnenberger, insofern sie auch auf der Benützung zweier fehlerzeigenden Dreiecke beruht. Hat man nämlich aus zwei Orientirungen des Messtisches zwei solche Dreiecke erhalten welche eine entgegengesetzte Lage haben, also auf zwei verschiedenen Seiten der mittleren Visirlinie liegen, wie in Fig. 101, so verbinde man die mittleren Eckpunkte γ, γ'' der Fehlerdreiecke und suche auf der Verbindungslinie $\gamma\gamma''$ den Punkt δ welcher diese Linie nach dem Verhältniss $\gamma\varepsilon : \gamma''\varepsilon''$ in zwei Theile $\gamma\delta$ und $\gamma''\delta$ theilt; hierauf lege man die Kippregel an δ und b, orientire den Tisch nach B und ziehe die Visirlinien a A und c C welche den auf der mittleren Visirlinie δ b liegenden gesuchten Punkt d

Fig. 101.

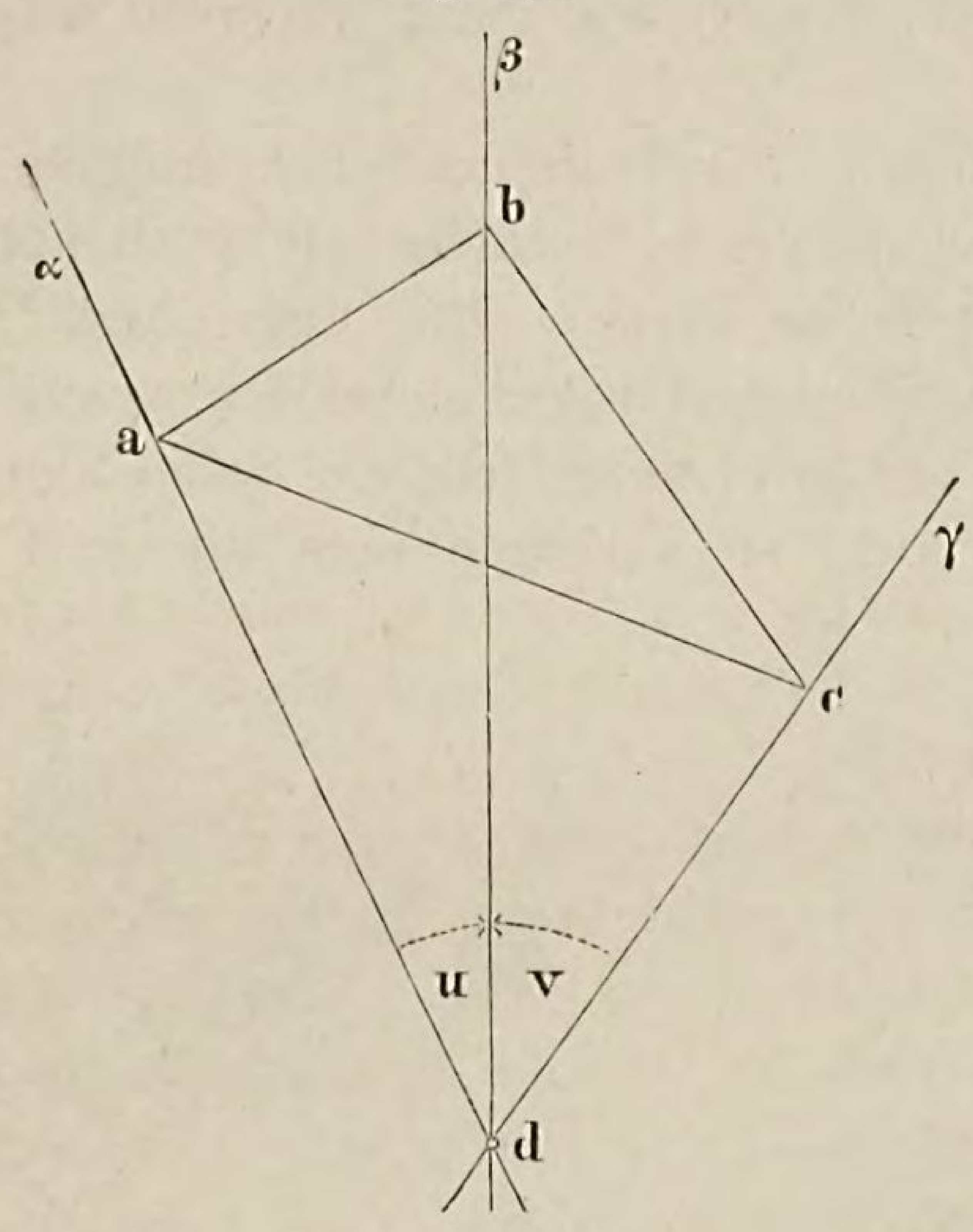


geben. Eine Visirlinie a A oder c C würde zwar auch hinreichen, d zu erhalten; man zieht aber der Controle wegen alle beide. Den Beweis für dieses Verfahren mag der Leser selbst führen.

§. 91. Ausser den drei vorhergehenden Verfahren kann auch das folgende, durch seine Unmittelbarkeit sich empfehlende, Näherungsverfahren angewendet werden.

Man stelle nämlich den Messtisch über dem Punkte D horizontal auf, breite über die Tischplatte ein hinreichend grosses Stück Bauspapier aus, messe und zeichne darauf die Winkel u, v (Fig. 102) unter welchen man die Dreieckseiten A B, B C von d aus erblickt, ziehe die Winkelschenkel d α, d β, d γ so lang und so fein als möglich, und schiebe hierauf das Bauspapier so lange auf dem Messtischblatte hin und her, bis gleichzeitig die Winkelschenkel d α, d β durch die Endpunkte a, b der Seite a b und die Schenkel d β, d γ durch die Endpunkte b, c der Seite b c des Bilddreiecks a b c gehen: der Scheitel d der beiden Winkel u, v gibt alsdann die Lage des Punkts d gegen a b c an und es ist folglich der erste Theil der Aufgabe gelöst. Will man weiter noch das Messtischblatt orientiren, so braucht man nur die Kippregel an eine der drei Seiten d a, d b, d c zu legen und beziehungsweise auf A, B, C durch Drehung des Messtischblatts einzustellen, womit auch diese zweite Forderung erfüllt ist. Der Beweis der Richtigkeit dieses Verfahrens fällt mit dem für das erste directe Verfahren zusammen; die Einfachheit desselben leuchtet von selbst ein, und seine Genauigkeit lässt wenig zu wünschen übrig.

Fig. 102.



C. Mechanische Auflösung der Pothenot'schen Aufgabe.

Das directe Verfahren die vorliegende Aufgabe zu lösen welches unter Abth. A in §. 83 auf Seite 167 beschrieben wurde, wenden die praktischen Geometer in der Regel nicht an, weil sie auf dem Felde keine umständlichen Constructionen ausführen wollen und auch der Fall eintreten kann dass der Mittelpunkt eines zu beschreibenden Kreises über das Messtischblatt hinausfällt wodurch das Ziehen dieses Kreises unmöglich wird. Der Verfasser hat es versucht dieser wohlbegründeten Abneigung zu begegnen, indem er einen einfachen Apparat, den Einschneidezirkel, erfand welcher ohne jede Construction Kreise zu ziehen gestattet die entweder durch drei gegebene Punkte gehen oder über einer gegebenen Sehne einen bestimmten Peripheriewinkel fassen. (Vergleiche des Verfassers Abhand-

lung: „Ein Apparat zur mechanischen Lösung der nach Pothenot, Hansen u. A. benannten geodätischen Aufgaben“ in den Denkschriften der k. bayerischen Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1871, und in Grunert's Archiv der Mathematik und Physik von demselben Jahre.)

§. 92. Der Einschneidezirkel. Die Erfindung dieses Apparats beruht auf der Umkehrung des geometrischen Satzes, dass in einem Kreise alle auf dem nämlichen Bogen stehenden Peripheriewinkel einander gleich sind. Es wird demnach auch der Scheitel eines festen Winkels dessen Schenkel an den Endpunkten einer Sehne hingleiten, einen Kreis beschreiben, und da wenn drei Punkte gegeben sind, immer einer als Scheitel dieses Winkels angesehen werden kann, während die Verbindung der beiden anderen als Sehne erscheint, so folgt von selbst dass die Lösung der Aufgabe, durch drei gegebene Punkte einen Kreis zu legen, leicht darauf zurückgeführt werden kann: über einer gegebenen Sehne einen Kreisbogen zu beschreiben welcher einen bestimmten Peripheriewinkel fasst.

Aus dieser Idee der Erfindung ergibt sich dass der in Rede stehende Apparat im Allgemeinen die Gestalt eines Zirkels haben muss dessen Schenkel sich auf jeden Winkel einstellen lassen und der nicht, wie der gewöhnliche Zirkel, in verticaler Stellung sondern in horizontaler Lage gebraucht wird. Und da dieser Zirkel zunächst für die Lösung der Pothenot'schen Aufgabe oder des „Rückwärtseinschneidens auf drei Punkte“ erfunden wurde und zur Lösung aller geodätischen Aufgaben dient welche unter den Begriff des Einschneidens fallen, so kann man ihn füglich „Einschneidezirkel“ nennen, wie hier geschieht.

Dieser Zirkel ist nach dem für das geodätische Institut der Münchener Polytechnischen Schule aus Stahl hergestellten Exemplare in Fig. 103 perspectivisch abgebildet. Die beiden Schenkel A und B bewegen sich in dem Gewinde C wie die Schenkel eines gewöhnlichen Zirkels und können nach Auslösung der unendlichen Schraube s durch grobe Drehung in alle möglichen Lagen zwischen 0 und 250⁰ gebracht werden. Ist durch diese Drehung die erforderliche gegenseitige Neigung der Winkelschenkel nahezu erreicht, so kann man mit der nunmehr wieder eingreifenden Schraube s den Schenkel B gegen A fein bewegen und so den Zirkel auf einen gegebenen Winkel genau einstellen.

Die erwähnte Auslösungsvorrichtung ist sehr einfach. Auf der mit dem Schenkel B fest verbundenen Platte a e (Fig. 103) befinden sich nämlich zwei Drehpunkte: einer (a) für die Schraube, ein anderer (b) für den Hebel c, und ausserdem zwei Federn: eine (d) um den Hebel in der Auslösungsstellung mittels einer Nase zurückzuhalten und eine andere (e) zum Andrücken der Schraube gegen den mit einem entsprechenden Gewinde versehenen Rand des Zirkelkopfes bei der Einlösungsstellung. Die Wirkungsweise dieser Vorrichtung wird noch anschaulicher durch die schematische Figur 104. In derselben stellen die ausgezogenen Linien die durch Anziehen des Hebels c gegen den Zirkelkopf bewirkte Auslösung und die

Fig. 103.

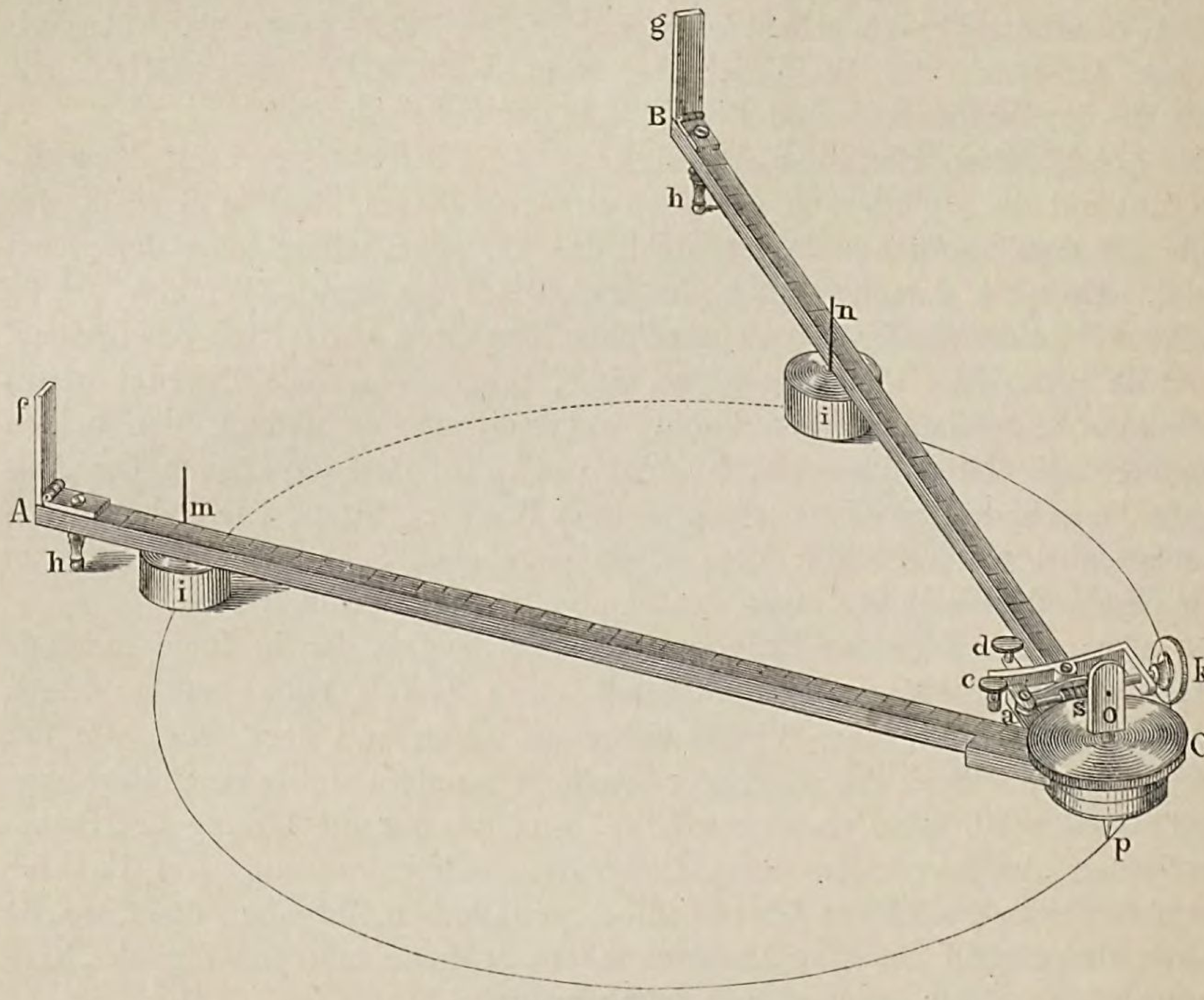
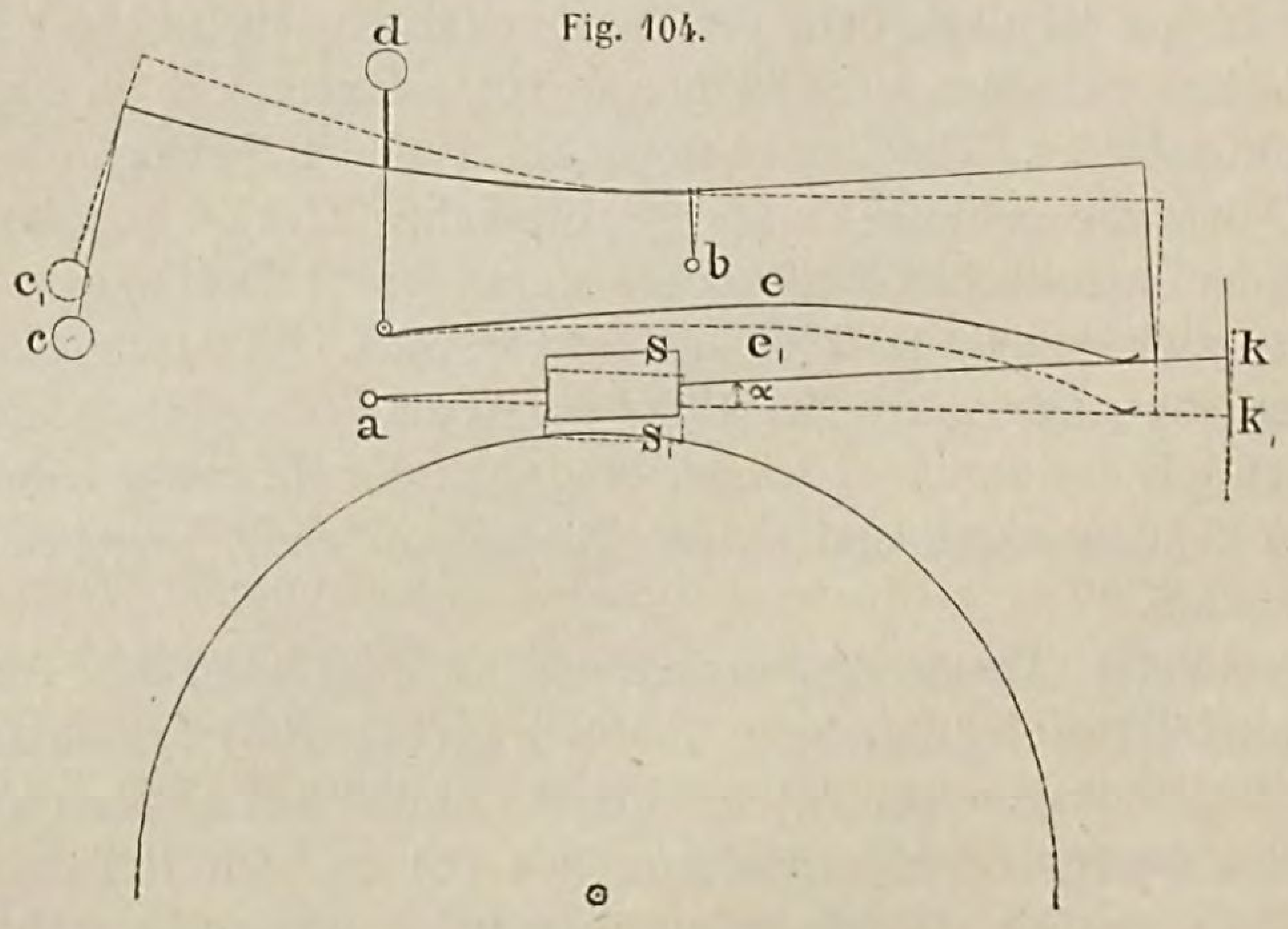


Fig. 104.



punktirten Linien die durch Niederdrücken der Feder d hervorgerufene Einrückung der Schraube s vor: bei der Auslösung bewegt sich die Schraube um den Winkel k a $k_1 = \alpha$ vom Kopfrande weg, und bei der Einrückung kommt sie diesem Rande um gleichviel wieder näher, um in dessen Gewind einzugreifen.

Damit man auf dem Felde den Zirkel sofort auf einen durch Signale bezeichneten Winkel genau einstellen kann, befindet sich auf jedem Schenkel ein Diopter. Diese Absehen haben das Ocular o welches entweder ein kleines Loch oder eine scharfe Kante ist, gemeinsam. Die Kante o welche nur bei stark geneigtem Boden zum Visiren benützt wird, und ebenso der Mittelpunkt des kreisrunden Oculars fallen selbstverständlich mit der Zirkelaxe zusammen, und das letztere Ocular muss jedesmal in die Richtung gedreht werden, nach der visirt werden soll; zuerst also in die Richtung des Schenkels A mit dem Diopterflügel f, und dann in die des Schenkels B mit dem Diopterflügel g. Die Visirebenen o f und o g schneiden sich beide in der Axe des unten in eine feine Spitze p ausgehenden Zirkelgewinds, und jede läuft in dem Abstande einer halben Nadeldicke der anliegenden inneren genau abgeschliffenen Seitenfläche eines der Schenkel A und B parallel. (Nach gemachtem Gebrauche werden die Diopterflügel auf diese Schenkel niedergeklappt.)

Eine für den Einschneidezirkel unentbehrliche Hilfsvorrichtung sind die Anschlagnadeln (m, n) welche in den Endpunkten der Sehne, worüber ein Kreis mit gegebenem Peripheriewinkel (m p n) zu beschreiben ist, senkrecht auf das Zeichnungsbrett gestellt werden müssen, damit an ihnen die Zirkelschenkel hingleiten und sich drehen können. Diese Nadeln (feinste englische Nähnadeln) stecken in kleinen senkrechten Messingcylindern (i, i) und ragen unten etwa 3, oben 10 Millimeter über deren Grundflächen hervor. Auf den oberen Grundflächen ruhen die Zirkelschenkel wenn ein Kreis beschrieben wird. Aus der Bedingung dass diese Schenkel sowohl bei diesem Geschäfte als bei der Winkelaufnahme der Zeichnungstafel parallel sein müssen, ergibt sich die Forderung gleicher Höhe der Cylinder i, der elfenbeinernen Füsse h und des den Kreis beschreibenden Stiftes p. (Der Verfasser hat in neuester Zeit eine Abänderung in der Unterstützung der Winkelschenkel ausführen lassen welche darin besteht dass diese Schenkel auf den unteren Seiten durchweg mit Elfenbein belegt sind und die kleinen Messingcylinder i, i nur dazu benützt werden, die Anschlagnadeln m, n senkrecht auf das Messtischblatt zu stellen. Zu dem Ende steckt man die hinreichend weit gebohrten Cylinder über die genannten Nadeln, um diese in der vorgeschriebenen Richtung einschlagen zu können. Wer den Nadeln die senkrechte Stellung aus freier Hand zu geben vermag, bedarf der Cylinder i, i gar nicht mehr. Diese Abänderung hat den Vorzug dass die Stetigkeit in der Bewegung des Zirkels nicht unterbrochen wird wenn die Füsse h, h über das Messtischblatt hinausgeschoben werden. Die auf den Winkelschenkeln angebrachte Theilung derselben in halbe Centimeter soll nur zur annäherungsweisen Messung der Länge von Winkelschenkeln dienen, deren man manchmal bei der Aufstellung des Messtisches (Bd I, S. 213) bedarf; diese Eintheilung hängt also mit dem vorliegenden Zwecke nicht zusammen.)

Der Einschneidezirkel ist in ein Gehäus eingeschlossen das dem eines

gewöhnlichen Zirkels gleicht: für den hier beschriebenen Apparat ist es 26 cm lang, 5 cm breit und 3 cm dick; es lässt sich also leicht verpacken und transportiren. Die Kosten eines stählernen Einschneidezirkels mit Etui berechnet der früher am geodätischen Institute und nunmehr beim Conservatorium der mathematisch-physikalischen Sammlung des Staats in München verwendete Mechaniker Heinrich Mayer mit 40 Mark.

Die Prüfung des Einschneidezirkels umfasst folgende Punkte:

1) ob die inneren Wände der Winkelschenkel genau eben und senkrecht zu den oberen Wänden sind;
2) ob die durch die oberen Schenkelflächen gebildete Instrumentenebene der durch die Füsse und den Zeichenstift bestimmten Unterlagsebene parallel ist;
3) ob die Visirebenen zur Instrumentenebene senkrecht stehen und den anliegenden inneren Zirkelwänden parallel laufen;
4) ob das Ocular des Diopters in der Axe des Zirkelgewinds liegt;
5) ob die Anschlagnadeln auf ihren Cylindern senkrecht stehen und diese die richtige Höhe haben.

Was die erste dieser fünf Untersuchungen betrifft, so kann sie mit bekannten mechanischen Hilfsmitteln leicht ausgeführt werden; es wird sich aber kaum jemals ein erheblicher Fehler in dieser Beziehung ergeben, da die Herstellung von parallelepipedischen Stäben zu den elementarsten und am meisten geübten Arbeiten des Mechanikers gehört.

Die zweite Untersuchung führt man in derselben Weise mit Hilfe von Diopterm auf einem Messtischblatte aus, wie die Prüfung des Spiegelsextanten in Bezug auf die Forderung dass die Visirlinie des Fernrohrs der Sextantenebene parallel sein soll. Ein allenfallsiger Fehler würde sich durch Abschleifen der Stützen des untersuchten Instruments beseitigen lassen.

Die dritte Untersuchung zerfällt in zwei Theile, von denen der erste (ob die Visirebenen senkrecht zur Instrumentenebene stehen) von der gleichnamigen Prüfung eines Diopters sich nicht unterscheidet, während der zweite Theil (ob die Visirebenen den anliegenden inneren Schenkelflächen parallel laufen) sich in genügender Weise dadurch erledigen lässt dass man die Schenkel des Zirkels, soweit es die Diopterflügel gestatten, aneinander legt und zusieht, ob erstens die inneren Schenkelflächen überall gleichweit (um die Nadeldicke) von einander abstehen, und ob zweitens die vereinigten Visirebenen der Diopter den Schlitz zwischen den Zirkelschenkeln halbiren. Ein durch diese Untersuchungen festgestellter Fehler wird an den Diopterflügeln verbessert.

Ob viertens das Diopter-Ocular in der Axe des Zirkelgewinds liegt, d. h. ob keine Excentricität der Visirlinie stattfindet, kann man wie folgt untersuchen. Es sei F in Fig. 105 das Objectiv eines Diopters, O dessen Ocular, A die Axe des Zirkelgewinds und O F G die Visirlinie nach einem Gegenstande G. Die Spitze A werde in das Papier des Messtisches gedrückt. Dreht man das Ocular O in der Axe A um 180^0, so kommt es zunächst

nach O′; stellt man aber damit auf G ein, so muss es um den Winkel O′ F O = 2 δ gedreht werden, wodurch die Spitze A nach A′ kommt. Wird dieser Punkt wieder markirt, so zeigt der Abstand A A′ die doppelte Excentricität e = A O an. Eine solche Excentricität lässt sich nur durch ein neues Ocular verbessern, ihr Einfluss aber sofort aus dem Dreiecke A O F berechnen, worin die eine Seite A O die Excentricität e des Oculars und die andere A F die Länge l des Diopters ist. Für $e = \frac{1}{4}$ mm und $l = 25$ cm $= 250$ mm wäre $\delta = 206'' = 3' \, 26''$; ein solcher grober Fehler wird aber wohl von keinem Mechaniker begangen werden.

Die fünfte Anforderung kann in der Praxis ebenfalls sehr leicht erfüllt werden; ob es geschehen, wird theils nach Nr 2, theils dadurch untersucht

Fig. 105.

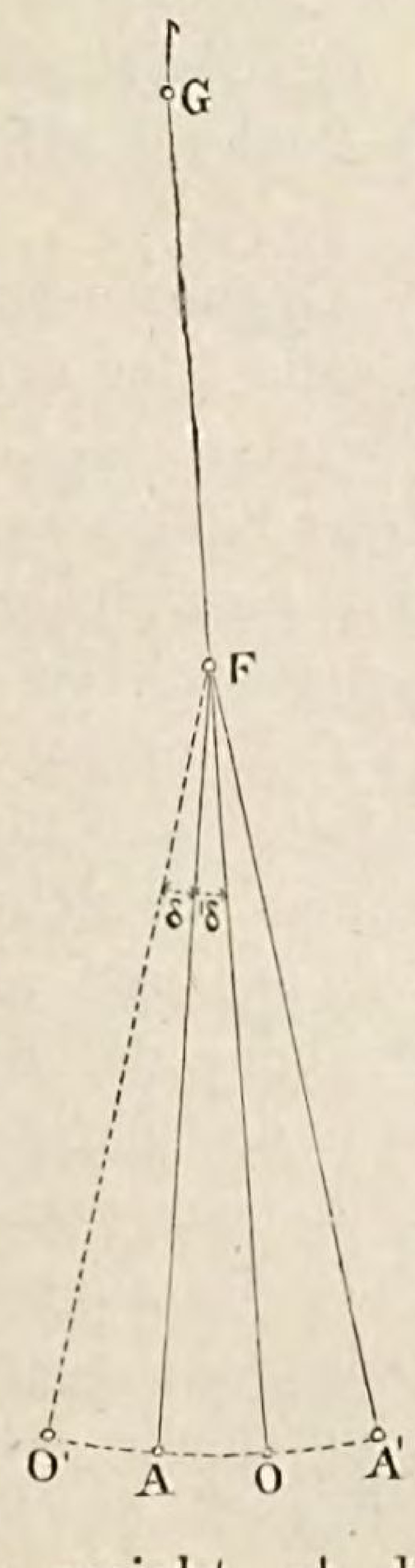
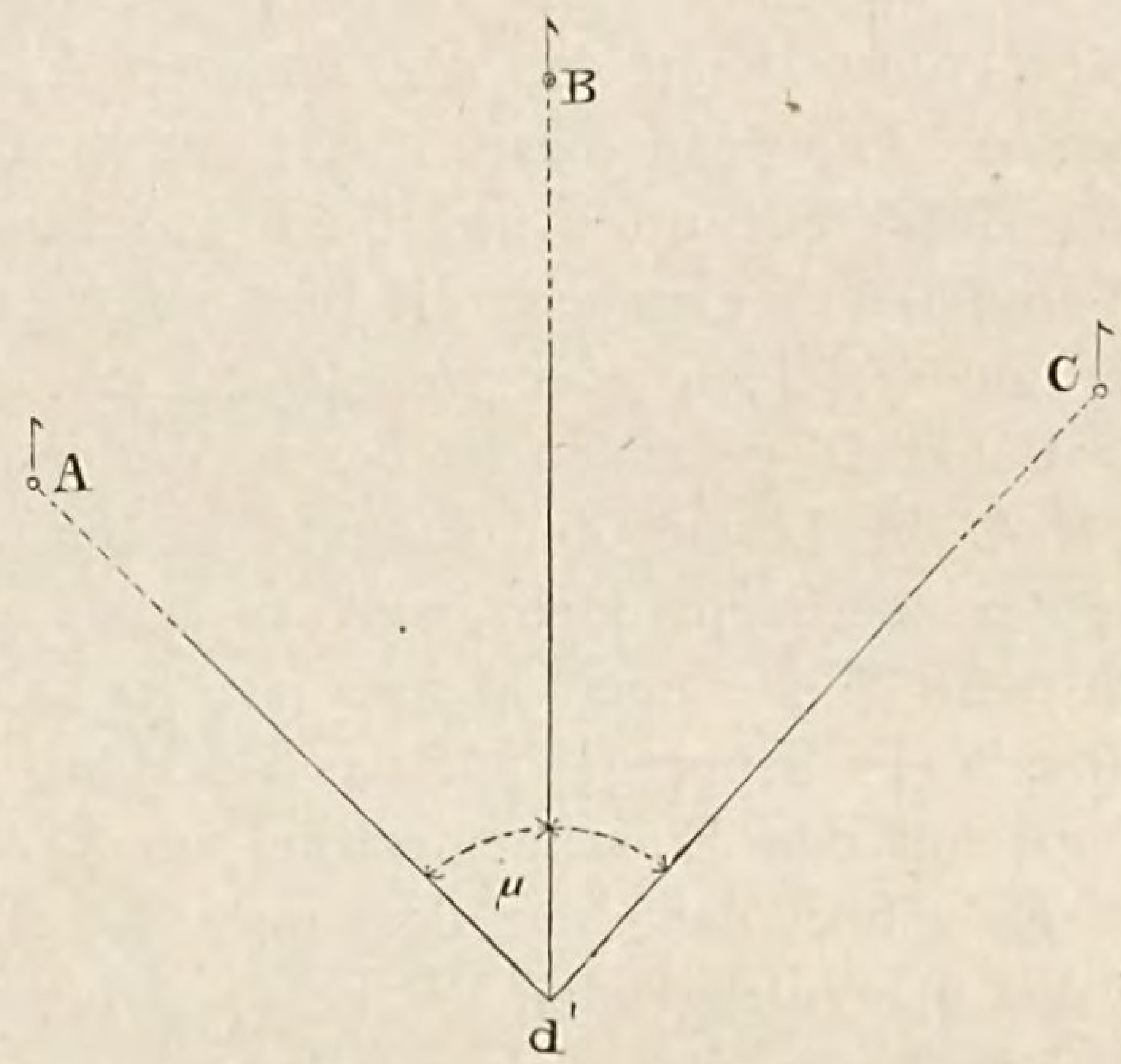


Fig. 106.



dass man zusieht, ob die Nadel mit ihrem durch die obere Cylinder-Endfläche erzeugten Spiegelbilde in einer Geraden liegt oder nicht. Ein geneigtes Spiegelbild würde auf eine schiefe Stellung der Nadel deuten und deren erneute verbesserte Einsetzung in den Metallcylinder fordern.

Der Gebrauch des Einschneidezirkels ist folgender: Es sei der Messtisch welcher das dem Dreiecke A B C (Fig. 106) ähnliche Bilddreieck a b c enthält, über dem Punkte D horizontal aufgestellt und auf ihn dieser Punkt mit der Lothgabel nach d′ projicirt. Auf diesen Punkt d′ stelle man die Zirkelspitze p, öffne den Zirkel mittels der groben Drehung nahezu um den Winkel A D B und stelle mit der Schraube die Diopter genau auf A und B ein. Damit ist also der Winkel μ gemessen. Befestigt man nun

in a und b die Anschlagnadeln, so kann man mit dem Zirkel, indem man die Schenkel sanft an a und b andrückt, den Kreis a d b beschreiben. Misst man hierauf in gleicher Weise den Winkel ν = B D C und beschreibt über b c den Kreis b d c, so gibt der Schnitt dieses Kreises mit a d b den gesuchten Punkt d und damit das Viereck a b c d welches dem A B C D ähnlich ist.

Will man nun auch den Messtisch in Bezug auf D centriren und nach A B C orientiren, so braucht man nur den eben gefundenen Punkt d in das Loth von D und irgend eine der Richtungen d a, d b, d c in die entsprechende Verticalebene D A, D B, D C zu bringen, was auf die weiter unten anzugebende Weise systematisch und leicht geschehen kann.

Wäre der Punkt D auf dem Felde nur annähernd gegeben und seine endgültige Festsetzung dem Geometer überlassen, so würde dieser nach der Bestimmung von d die Kippregel an d a legen, den Messtisch drehen, bis d a mit D A zusammenfällt, und schliesslich den Punkt d auf das Feld hinablothen und dort mit einem Pfahle bezeichnen.

Läge der Punkt D mit den drei anderen A, B, C ganz oder nahezu in einem Kreise, so würde dieses sofort durch die volle oder annähernde Deckung der Hilfskreise a b d und b c d angezeigt werden, und es wäre hierdurch Veranlassung gegeben, die Bestimmung dieses Punkts aus A, B, C nicht weiter zu verfolgen oder wenigstens erst dann vorzunehmen wenn ein anderer Punkt D' gefunden ist der in Verbindung mit zweien der drei Punkte A, B, C die Lösung der Aufgabe in Bezug auf D zulässt.

Da Diopter überhaupt nicht weit zu sehen gestatten und für minder gute Augen diese Weite noch kleiner ist, so kann man die Sehwinkel μ und ν auch mit der Kippregel auf das Tischblatt zeichnen und von dieser Zeichnung aus mit dem Einschneidezirkel zur Beschreibung der Hilfskreise abnehmen. Es gehört dazu nur dass man die Axe p des Zirkels in den Scheitel d' des überzutragenden Winkels μ bringt und, nach vorausgegangener grober Drehung, den linken Schenkel mit Hilfe des elfenbeinernen Fusses h der scharf nach der Innenfläche dieses Schenkels begrenzt ist, auf die Linie d' A stellt und den rechten Schenkel durch die Schraube k in die Richtung d' B so dreht dass diese von dem Fusse h des Schenkels gedeckt wird.

Die Genauigkeit des Einschneidezirkels kann entweder in Hinsicht auf die Beschreibung von Kreisen allein oder in Bezug hierauf und die Aufnahme der Peripheriewinkel geprüft werden; in dem letzteren Falle setzt sich der Ausdruck für die Genauigkeit aus denen für Winkelmessung und Kreisbeschreibung zusammen. Der Verfasser hat über beide Fälle Beobachtungen angestellt, beziehungsweise anstellen lassen.

Mit welcher Genauigkeit man Kreise beschreiben kann, von welchen entweder eine Sehne und ein Peripheriewinkel oder drei Punkte (also auch wieder Sehne und Peripheriewinkel) gegeben sind, erfährt man am besten dadurch dass man die mit dem Einschneidezirkel und auf gewöhnliche

Weise beschriebenen Kreise miteinander vergleicht, wobei es gleich ist, ob man zu dem vom Einschneidezirkel gelieferten Bogen den Mittelpunkt sucht und von diesem aus den Weg des Einschneidezirkels mit dem gewöhnlichen Zirkel prüft, oder ob man mit letzterem im Voraus einen Kreis beschreibt, den Einschneidezirkel auf drei Punkte desselben einstellt und zusieht, ob oder wie weit der von der Axe des Einschneidezirkels beschriebene Bogen mit dem voraus gezogenen Kreise zusammenfällt. Nach längerer Uebung, namentlich im sanften Andrücken der Winkelschenkel an die Einsatznadeln, ist jeder in geometrischen oder graphischen Arbeiten nur einigermassen Geübte im Stande, mit dem Einschneidezirkel Kreise zu beschreiben welche sich von den auf gewöhnliche Weise erzeugten nicht mehr unterscheiden, als zwei mit einem Stockzirkel aus Einem Mittelpunkte beschriebene Kreise welche gleiche Halbmesser haben: der Einschneidezirkel gewährt somit als Kreisbeschreiber volle Befriedigung, und dasselbe ist mit seiner Gesammtleistung der Fall.

Die Zeitersparniss welche das mechanische Verfahren dem geometrischen gegenüber gewährt, ist namentlich dann bedeutend wenn lediglich die Bestimmung der Standpunkte in Betracht kommt, also auf die Orientirung des Messtisches verzichtet werden darf: in diesem Falle kann die Pothenot'sche Aufgabe in der halben Zeit welche zur Ausführung des Lehmann'schen Verfahrens nothwendig ist, gelöst werden. Näheres hierüber, sowie über die Genauigkeit der mechanischen Lösung der Pothenot'schen und der nachfolgenden Hansen'schen Aufgabe findet man in des Verfassers oben (S. 179) genannter Abhandlung über den Einschneidezirkel und dessen Gebrauch in der praktischen Geometrie.

§. 93. Aufgabe. Man soll den Messtisch, auf welchem das Bild einer unzugänglichen Geraden gegeben ist, in einem annähernd gegebenen Punkte orientiren.

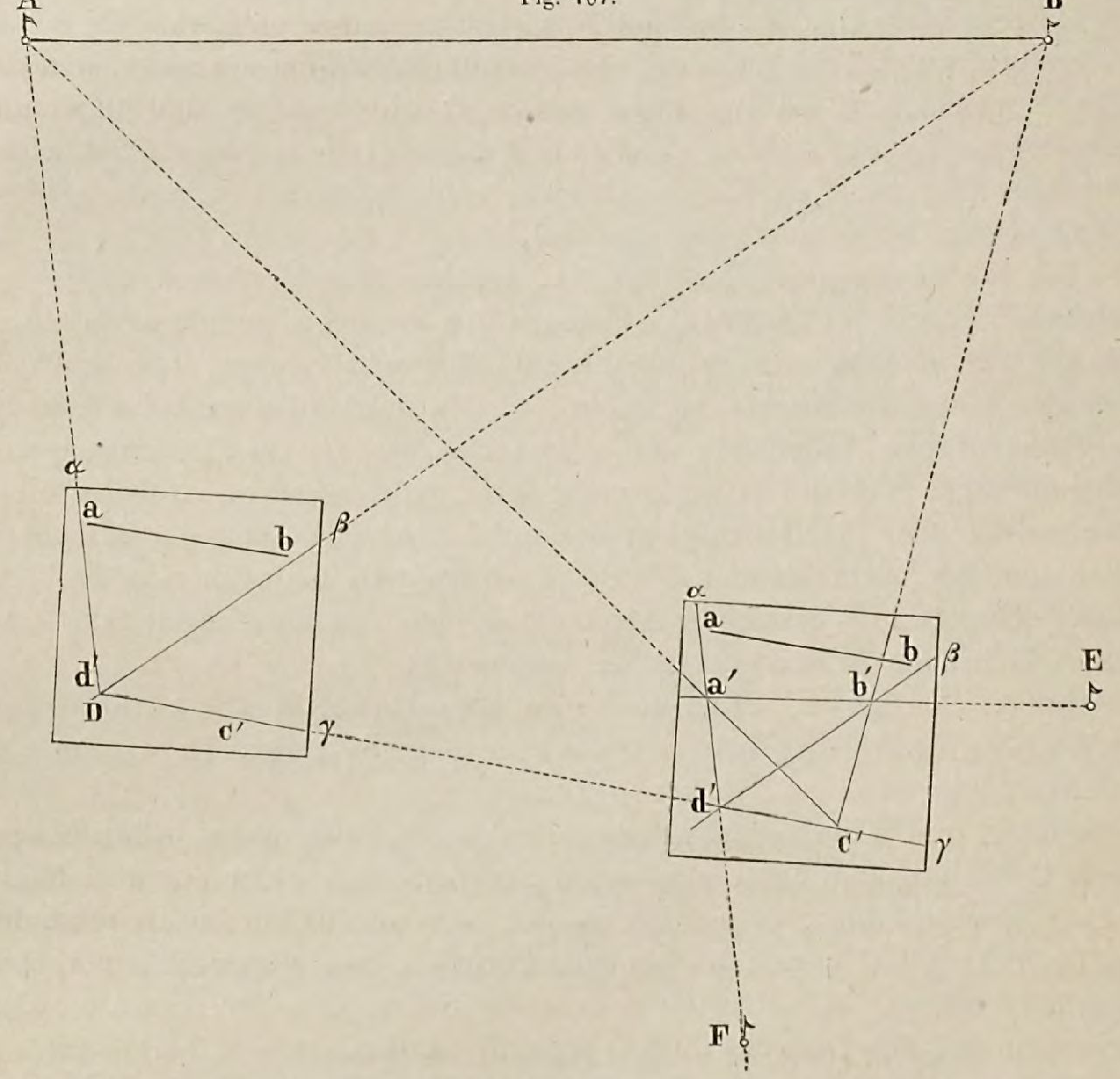
Sind A und B die unzugänglichen Punkte des Felds und a, b ihre Bilder, sowie C der auf dem Felde annähernd gegebene und c der auf dem Messtische gesuchte Punkt, so handelt es sich hier sowohl um die Bestimmung des Dreiecks A B C durch das ähnliche Dreieck a b c, als auch darum, den Messtisch über C so aufzustellen dass die Seiten des Dreiecks a b c den gleichnamigen des Dreiecks A B C parallel werden.

Stellt man nun zunächst in einem beliebigen Punkte D des Felds den Messtisch so auf dass a b dem Augenmasse nach zu A B parallel ist; visirt man ferner von dem auf den Tisch projicirten Bildpunkte d' die Punkte A, B, C an und zieht die Visirlinien d' α, d' β, d' γ; versetzt man hierauf den Messtisch nach C und zwar so dass das nach dem Augenmasse angenommene Bild c' d' von C D in die Verticalebene C D fällt, während c' lothrecht über C liegt; und schneidet man endlich die Punkte A und B von c' aus ein: so entsteht das Viereck a' b' c' d' welches dem Vierecke A B C D ähnlich und parallel ist. Die Lage welche der Messtisch jetzt hat, muss nun dazu benützt werden: erstens a b parallel zu A B zu machen, und

zweitens über a b ein den Vierecken A B C D und a′ b′ c′ d′ ähnliches zu beschreiben.

Zu dem Ende lege man die Kippregel an a′ b′ so genau als möglich und stelle in grosser Entfernung einen Stab oder ein Signal E in die Visirlinie; ebenso verfahre man mit der Richtung a′ d′, indem man das Signal F bestimmt, und schliesslich senkele man den Punkt a′ auf das Feld und bezeichne seine Projection mit einem Pfahle G. Ist dieses bei unveränderter Lage des Messtisches geschehen, so verändere man jetzt diese Lage so dass

Fig. 107.



der Punkt a über G und die Linie a b in die Richtung G E kommt; alsdann schneide man c durch die Visirlinien a A, b B und d durch c D, a F ab, senkele c auf das Feld und bestimme hierdurch die definitive Lage von C. Hiermit ist die Aufgabe gelöst.

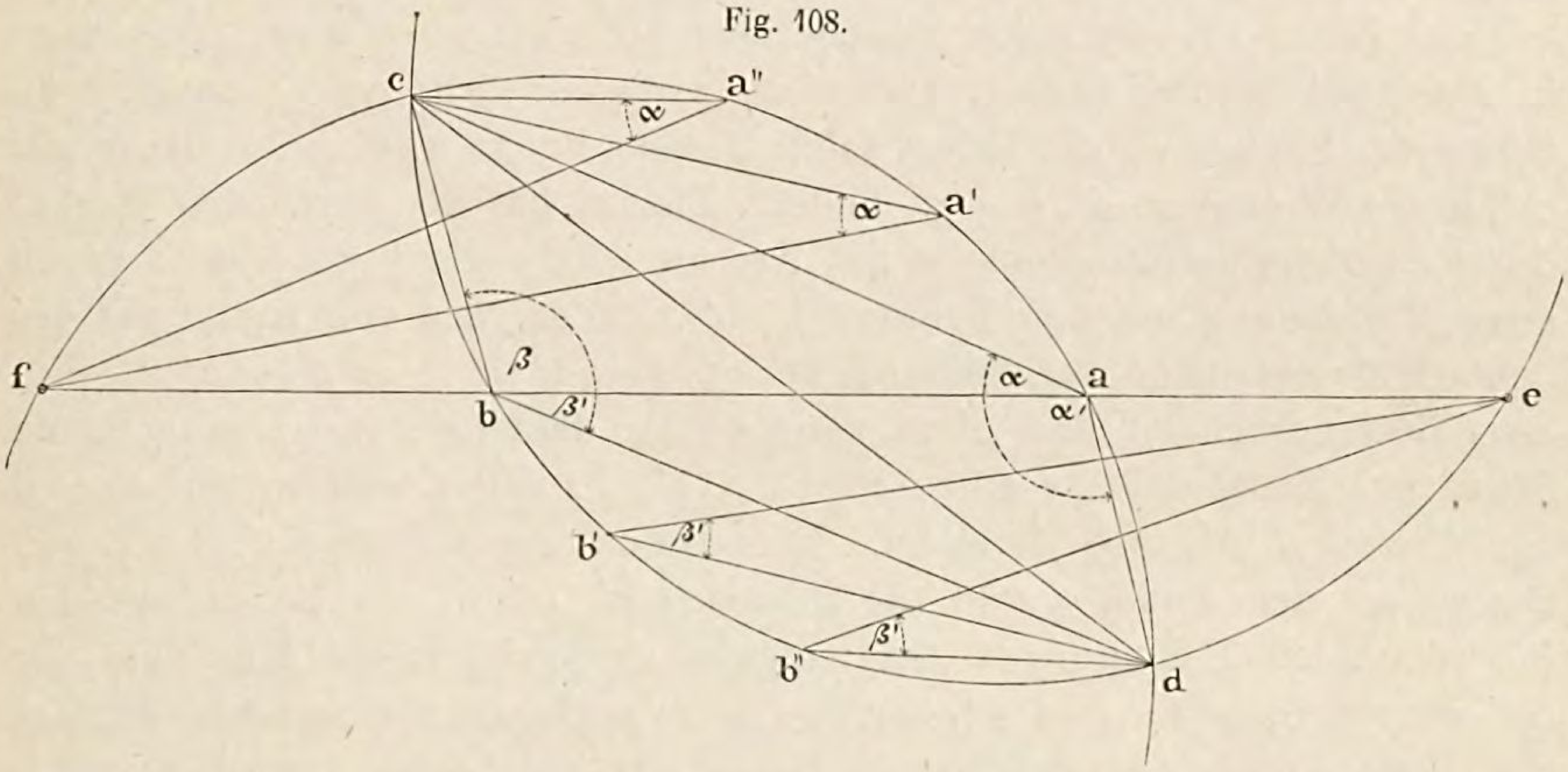
§. 94. Aufgabe. Mit Hilfe des Messtisches aus der bekannten Lage zweier unzugänglichen Punkte die Lage zweier anderen auf dem Felde gegebenen Punkte durch blosse Winkelmessung auf diesen Punkten zu bestimmen.

Die vorliegende Aufgabe führt den Namen des verstorbenen Geheimraths

Hansen in Gotha, weil sie dieser gelehrte Astronom und Geodät in Nr 419 der Astronomischen Nachrichten trigonometrisch aufgelöst und irrthümlich als neu bezeichnet hat. Da jedoch schon lange vor Hansen geometrische und trigonometrische Lösungen der in Rede stehenden Aufgabe veröffentlicht waren, so ist ihre Bezeichnung nach Hansen nicht mehr berechtigt und wir werden (bei der Unsicherheit die über den Namen des Erfinders herrscht) gut thun sie lediglich sachlich als „Aufgabe des unzugänglichen Abstands" zu bezeichnen. Hier haben wir es lediglich mit der geometrischen und mechanischen Lösung dieser Aufgabe zu thun. Wir wollen zuerst die mechanische und dann die geometrische Lösung näher erörtern.

a) Mechanische Lösung. Es handelt sich darum auf mechanischem und graphischem Wege die Lage zweier Standorte A, B (Fig. 108) des Messtisches aus den daselbst gemessenen scheinbaren Grössen α, α', β, β'

Fig. 108.



der Verbindungslinien dieser Orte mit zwei anderen gegebenen Punkten C, D zu bestimmen, oder aber auf dem Messtische ein Viereck a b c d aus einer Diagonale c d und den an der anderen Diagonale a b liegenden Winkeln α, α', β, β' so zu verzeichnen dass es dem Vierecke A B C D in der Natur ähnlich ist.

Stellt man nämlich den Messtisch über dem Punkte A horizontal auf, projicirt diesen Punkt auf das Blatt und stellt den Einschneidezirkel auf den Winkel C A D $= \alpha + \alpha'$ ein, so kann man mit dieser Einstellung über der Sehne c d sofort den Kreis c a d f beschreiben. Nimmt man dann ferner den Winkel C A B $= \alpha$ in den Zirkel und legt den einen Schenkel desselben an c und seinen Scheitel in a' auf den eben beschriebenen Kreis, so schneidet der zweite Schenkel diesen Kreis in dem Punkte f. Wird hierauf der Messtisch nach B versetzt und horizontal aufgestellt, der Punkt B auf das Blatt projicirt und der Winkel C B D $= \beta + \beta'$ mit dem Einschneidezirkel aufgenommen, so lässt sich mit diesem über der Sehne c d der Kreis c b d e beschreiben.

Misst man endlich den Winkel A B D = β' und legt ihn so auf den eben beschriebenen Kreis dass der Scheitel irgend einen Punkt b′ deckt und der Schenkel b′ d an dem Endpunkte d anliegt, so schneidet der andere Schenkel des Zirkels (b′ e) den Kreis c b d e in dem Punkte e. Verbindet man nun die Schnittpunkte e und f durch eine gerade Linie, so schneidet diese die zwei Kreise c a d f und c b d e in zwei Punkten a und b welches die gesuchten Punkte sind.

Der Beweis für die Richtigkeit dieses Verfahrens ist sehr einfach. Die Lage des Punkts a ist offenbar durch die scheinbaren Grössen α, α' und $\alpha + \alpha'$, die des Punkts b durch β, β' und $\beta + \beta'$ bestimmt, also muss der Kreis c a d f ein geometrischer Ort von a und der Kreis c b d e ein geometrischer Ort von b sein. Dadurch dass man c a′ f = α und folglich d a′ f = α' macht, bestimmt man einen Punkt f der die Eigenschaft hat, durch seine Verbindung mit den Punkten a, a′ . . . des Orts von a alle auf der Sehne c d stehenden Peripheriewinkel c a d = c a′ d = . . . = $\alpha + \alpha'$ in ihre zwei Bestandtheile α und α' zu zerlegen: jede von f ausgehende Sehne des Kreises c a d f liefert folglich einen Punkt a, a′ . . . welcher mit c, f, d die Winkel α, α', $\alpha + \alpha'$ bildet. Ebenso hat der durch den Winkel d b′ e = β' bestimmte Punkt e des Kreises c b d e die Eigenschaft, durch seine Verbindung mit den Punkten b, b′ . . . des Orts von b alle auf der Sehne c d stehenden Peripheriewinkel c b d, c b′ d . . . = $\beta + \beta'$ in ihre zwei Bestandtheile β und β' zu zerlegen, so dass jede von e ausgehende Sehne des Kreises c b d e einen Punkt b, b′ . . . liefert welcher mit c, e, d die Winkel β, β', $\beta + \beta'$ bildet. Wenn nun die Sehnen f a′, f a . . . in Bezug auf den Punkt a und die Sehnen e b′, e b . . . in Bezug auf den Punkt b allen Bedingungen der Aufgabe genügen, so ist klar dass nur die zwei Sehnen f a und e b welche in eine Gerade f e zusammenfallen, den Bedingungen der Aufgabe in Bezug auf die beiden Punkte a und b genügen können. In der That liegen gleichzeitig nur an den Enden der Geraden a b einerseits die scheinbaren Grössen α, α' der Seiten B C, B D und andererseits die scheinbaren Grössen β, β' der Seiten A C, A D, während jene Enden selbst auf den Kreisen ruhen welche durch die Gesichtswinkel $\alpha + \alpha'$ und $\beta + \beta'$ der Geraden C D bestimmt sind.

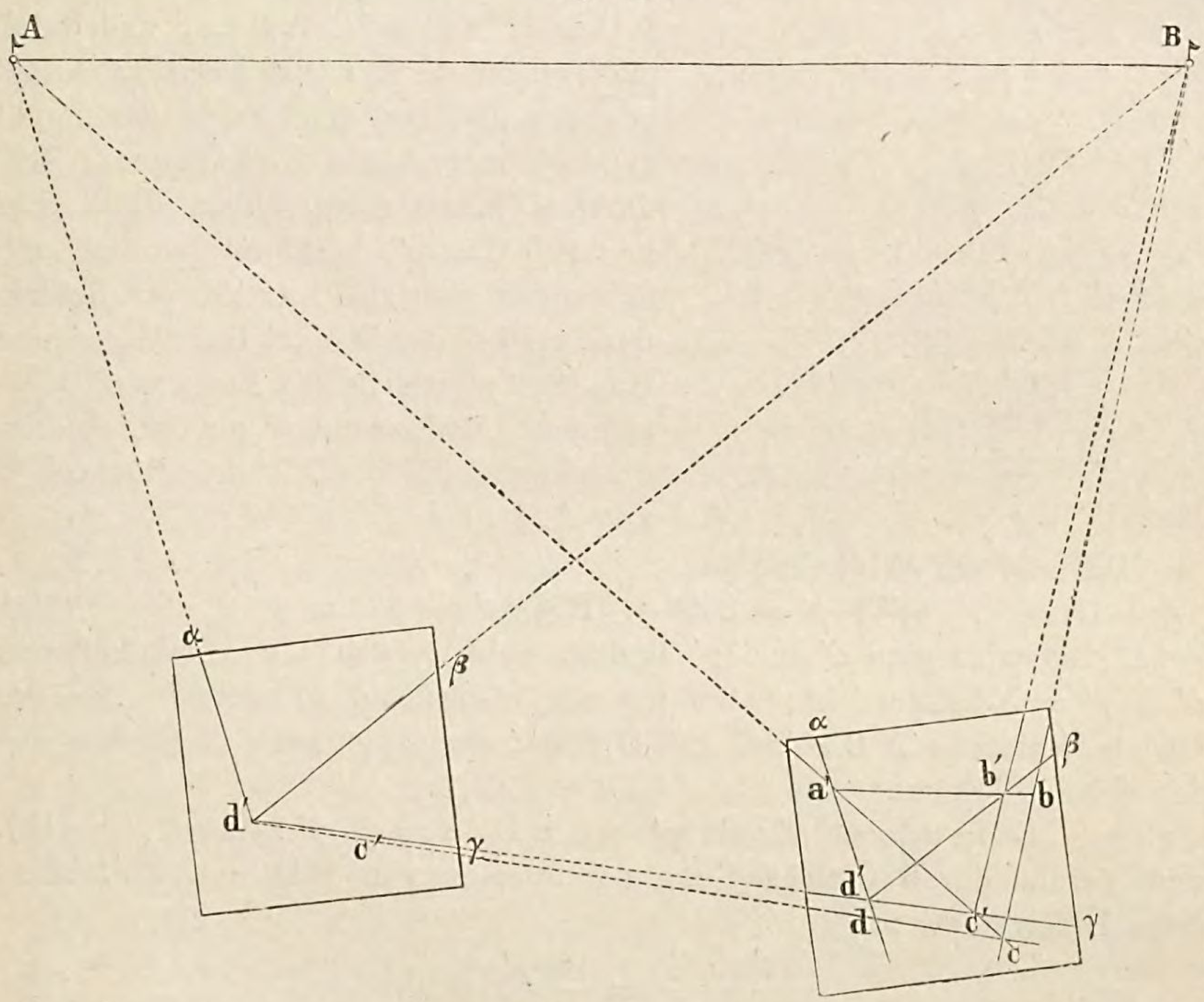
Wollte man die Kreise c a d und c b d nicht ganz ausziehen um die Punkte f und e als deren Schnitte mit den Geraden a′ f und b′ e zu erhalten, so dürfte man nur auf dem Kreise c a d noch einmal den Winkel α = c a″ f und auf dem Kreise c b d den Winkel β' = d b″ e antragen und die Schnitte der Schenkel a′ f, a″ f, beziehungsweise b′ e, b″ e suchen welche mit den Kreisschnitten f und e übereinstimmen müssen. Jedenfalls gewähren die eben genannten Winkelschenkel a″ f und b″ e eine Controle für die Genauigkeit der Arbeit wenn diese nach der ersten Vorschrift ausgeführt wurde.

Sind die Punkte a und b auf dem Messtische gefunden, so versteht es sich von selbst, wie derselbe für diese Punkte zu centriren und nach den Richtungen a c, a d und beziehungsweise b c, b d zu orientiren ist; auch

bedarf es wohl kaum der Erinnerung dass meine Lösung der vorgelegenen Aufgabe eine rein geometrische Bedeutung hat, indem sie zeigt, wie auf einfachste Weise ein Viereck a b c d zu construiren ist, von dem man eine Diagonale (c d) und die vier Winkel an der anderen Diagonale (α, α' β, β') kennt.

b) Geometrische Lösung. Durch Aufstellen des Messtisches über D und C bilde man wie in dem vorhergehenden Falle ein dem Vierecke A B C D ähnliches und parallel liegendes Viereck a′ b′ c′ d′ (Fig. 109); trage auf a′ b′ von a′ aus das verjüngte Mass von A B = a′ b ab und bestimme

Fig. 109.



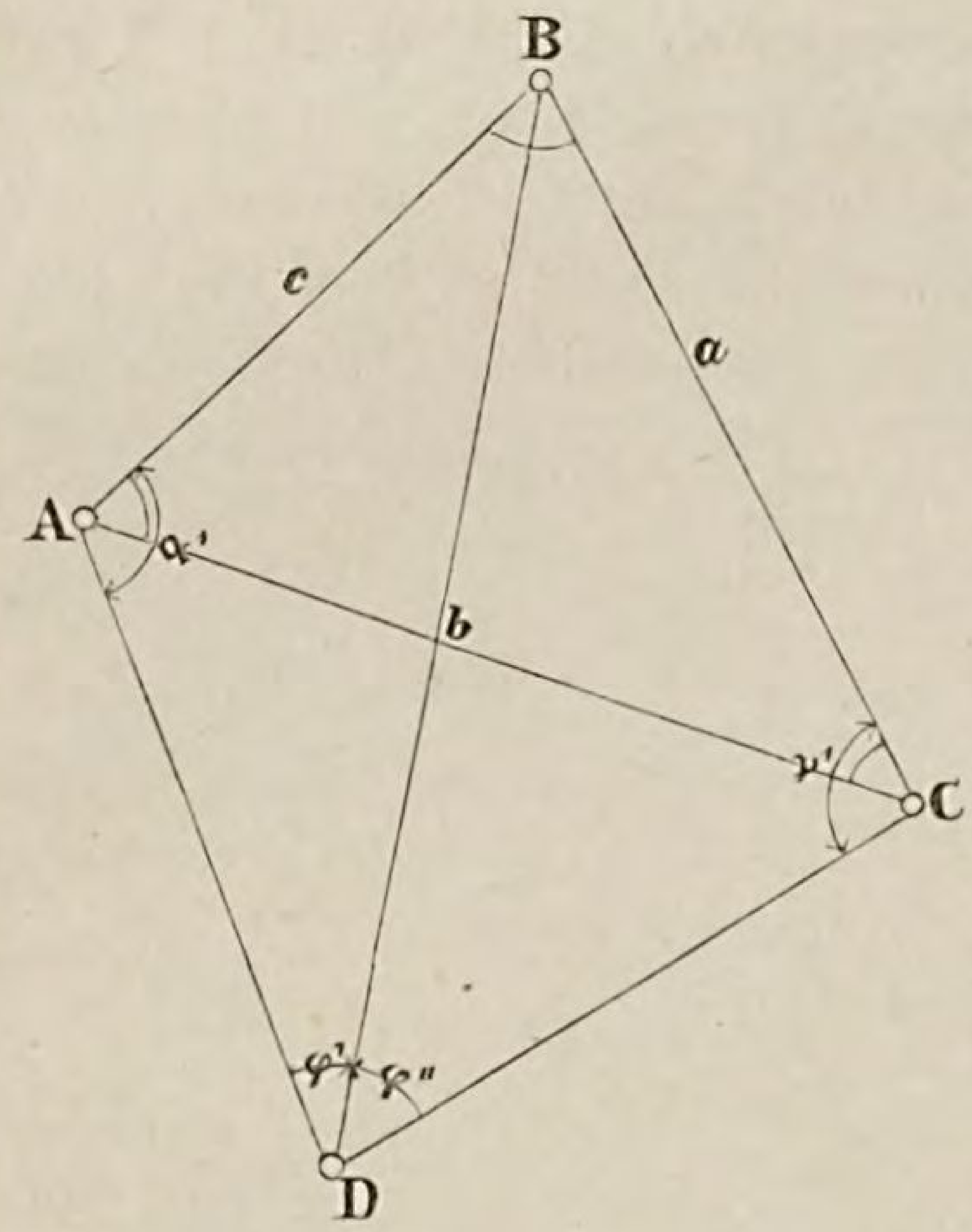
den Punkt c durch Rückwärtseinschneiden auf A und B. Senkelt man c auf das Feld, so ergibt sich die definitive Lage des Punkts C und der Tisch ist über diesem Punkte orientirt. Um noch die richtige Lage des Bilds von D zu finden, darf man nur von c nach D visiren und den Schnitt d mit der verlängerten a′ d′ bestimmen welcher das gesuchte Bild ist. Man hat somit durch ein einfaches Verfahren die Lage zweier unbekannten Punkte gegen zwei andere gefunden, von denen man bloss ihren horizontalen Abstand kennt; ein Ergebniss das vielfältig benützt werden kann.

§. 95. Aufgabe. Mit Hilfe des Theodolithen aus der bekannten Lage von drei unzugänglichen Punkten die unbekannte

Lage eines vierten auf dem Felde gegebenen Punkts durch blosse Winkelmessung zu bestimmen.

Wie diese sogenannte „Pothenot'sche Aufgabe" mit Hilfe des Messtisches graphisch und mit dem Einschneidezirkel mechanisch gelöst wird, haben wir in §. 83 bis 92, Seite 167 bis 185 kennen gelernt; nunmehr beschäftigt uns die analytische Lösung dieser Aufgabe oder die „pothenotische Bestimmung" von Punkten durch Winkelmessung und Rechnung.

Fig. 110.



Es seien die drei Punkte A, B, C durch ihre gegenseitigen Entfernungen B C = a, A C = b, A B = c und durch die Winkel A, B, C des Dreiecks A B C gegeben und auf dem Felde der Punkt D bezeichnet dessen Lage gegen A B C durch die Messung der Winkel A D B = φ' und B D C = φ'' bestimmt werden soll: es handelt sich also hier um die Berechnung erstens der Winkel B A D = α' und B C D = γ' welche die Lage von D bestimmen, und zweitens um die Entfernungen D A, D B, D C des Punktes D von A, B, C.

Da man die Winkelsumme

$$\alpha' + \gamma' = 360^0 - (B + \varphi' + \varphi'') = \sigma \qquad (166)$$

kennt, so wird man α' und γ' finden, sobald auch die Winkeldifferenz $\alpha' - \gamma' = \delta$ bekannt ist; man hat also zunächst δ zu suchen. Aus den beiden Dreiecken A B D und C B D findet man aber nach dem Sinussatze der ebenen Trigonometrie

$$B\,D : c = \sin \alpha' : \sin \varphi' \text{ und } B\,D : a = \sin \gamma' : \sin \varphi'' \qquad (167)$$

und hieraus durch Gleichstellung der Werthe von B D und Einführung eines Hilfswinkels ν:

$$\frac{c \sin \varphi''}{a \sin \varphi'} = \frac{\sin \gamma'}{\sin \alpha'} = \operatorname{tg} \nu \qquad (168)$$

Hat man aus a, c, φ', φ'' den Winkel ν berechnet, so ist nach bekannten Formeln der ebenen Trigonometrie und Algebra:

$$\frac{1 + \operatorname{tg} \nu}{1 - \operatorname{tg} \nu} = \frac{\sin \alpha' + \sin \gamma'}{\sin \alpha' - \sin \gamma'} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} (\alpha' + \gamma') \cos \frac{1}{2} (\alpha' - \gamma')}{2 \cos \frac{1}{2} (\alpha' + \gamma') \sin \frac{1}{2} (\alpha' - \gamma')}$$

$$\frac{1 + \operatorname{tg} \nu}{1 - \operatorname{tg} \nu} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\alpha' + \gamma') \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} (\alpha' - \gamma') = \operatorname{tg} (45^0 + \nu)$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\alpha' - \gamma') = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\alpha' + \gamma') \operatorname{cotg} (45^0 + \nu) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \delta \qquad (169)$$

$$\alpha' = \tfrac{1}{2} (\sigma + \delta) \text{ und } \gamma' = \tfrac{1}{2} (\sigma - \delta) \qquad (170)$$

Mit α' und γ' liefern die Gleichungen (167) zwei Werthe für B D, wovon einer die Probe für den anderen ist, und weiter sind mit α' und γ' auch

die Winkel $A B D = \varepsilon'$ und $C B D = \varepsilon''$ deren Summe B ist, bekannt. Mit diesen Winkeln findet man den Abstand

$$D A = \frac{c \sin \varepsilon'}{\sin \varphi'} = \frac{c \sin (\alpha' + \varphi')}{\sin \varphi'}$$

$$\text{und } D C = \frac{a \sin \varepsilon''}{\sin \varphi''} = \frac{a \sin (\gamma' + \varphi'')}{\sin \varphi''} \qquad (171)$$

und damit ist die vorliegende Aufgabe im Allgemeinen gelöst; im Besonderen können sich aber verschiedene Schwierigkeiten ergeben die wir noch zu erörtern und durch feste Regeln zu beseitigen haben.

Vor allen Dingen ist der Hilfswinkel ν durch die Gl (168) zweideutig bestimmt, weil ausser einem Werthe ν auch die Werthe $\nu \pm 180^0$ jener Gleichung genügen. Dieser Umstand könnte Verlegenheit bereiten wenn sich der Werth von $\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha' - \gamma')$ ändern würde, je nachdem man $\pm 180^0$ zu ν hinzufügt. Diese Aenderung tritt jedoch nicht ein, weil $\operatorname{cotg} (45^0 + \gamma')$ ebensowohl gleich $\operatorname{cotg} (45^0 + \nu + 180^0)$ als gleich $\operatorname{cotg} (45^0 + \nu - 180^0)$ ist. Wir können somit zwischen den Winkeln ν, $\nu + 180^0$ und $\nu - 180^0$ beliebig wählen. Da nun auch die Gesichtswinkel φ' und φ'' einzeln jeder kleiner als 180^0 ist und die Seiten a, b, c des Dreiecks A B C stets als positive Grössen zu nehmen sind, so können wir den Hilfswinkel ν jederzeit als einen positiven spitzen Winkel in die Rechnung einführen.

Der Werth $\frac{1}{2} \delta = \frac{1}{2} (\alpha' - \gamma')$ behält nach Gl (168) auch dann noch eine Zweideutigkeit wenn ν als positiver spitzer Winkel in dieselbe eingeführt ist, denn es ist $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = \operatorname{tg} (\frac{1}{2} \delta + 180^0)$ und $= \operatorname{tg} (\frac{1}{2} \delta - 180^0)$. Berücksichtigt man jedoch dass $\alpha' = 180^0 - (\beta' + \varphi')$ und $\gamma' = 180^0 - (\beta'' + \varphi'')$ und folglich jeder dieser Dreieckswinkel kleiner als 180^0 ist, so muss auch ebensowohl $\frac{1}{2} \alpha'$ als $\frac{1}{2} \gamma'$ kleiner als 90^0 und $\frac{1}{2} (\alpha' - \gamma')$ ein positiver oder negativer spitzer Winkel sein; d. h. der Werth $\frac{1}{2} \delta = \frac{1}{2} (\alpha' - \gamma')$ liegt im ersten oder vierten Quadranten. Hieraus und aus der vorhergehenden Betrachtung über den Hilfswinkel ergibt sich zur Beseitigung der oben erwähnten Schwierigkeiten die Regel: der Hilfswinkel ist stets als positiver spitzer Winkel und der Winkel $\frac{1}{2} \delta$ als positiver spitzer oder als negativer spitzer Winkel zu nehmen, je nachdem $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta$ positiv oder negativ ist.

Der Ausdruck für $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta$ oder $\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha' - \gamma')$ in Gl (169) nimmt die unbestimmte Form $0 \cdot \infty$ an wenn $\alpha' + \gamma' = 180^0$ und gleichzeitig $\nu = 45^0$ wird. Beides ist aber nur dann der Fall wenn der Punkt D auf dem Grundkreise A B C liegt, weil unter dieser Voraussetzung die Schickard'schen Kreise mit dem Grundkreise zusammenfallen und der Durchmesser des gemeinschaftlichen Kreises

$$d = c \frac{\sin \alpha'}{\sin \varphi'} = a \frac{\sin \gamma'}{\sin \varphi''}$$

und $\alpha' + \gamma' = 180^0$ ist, woraus sofort folgt, was zu beweisen war, nämlich

$$\frac{c \sin \varphi''}{a \sin \varphi'} = \frac{\sin \gamma'}{\sin \alpha'} = \operatorname{tg} \nu = \operatorname{tg} 45^0$$

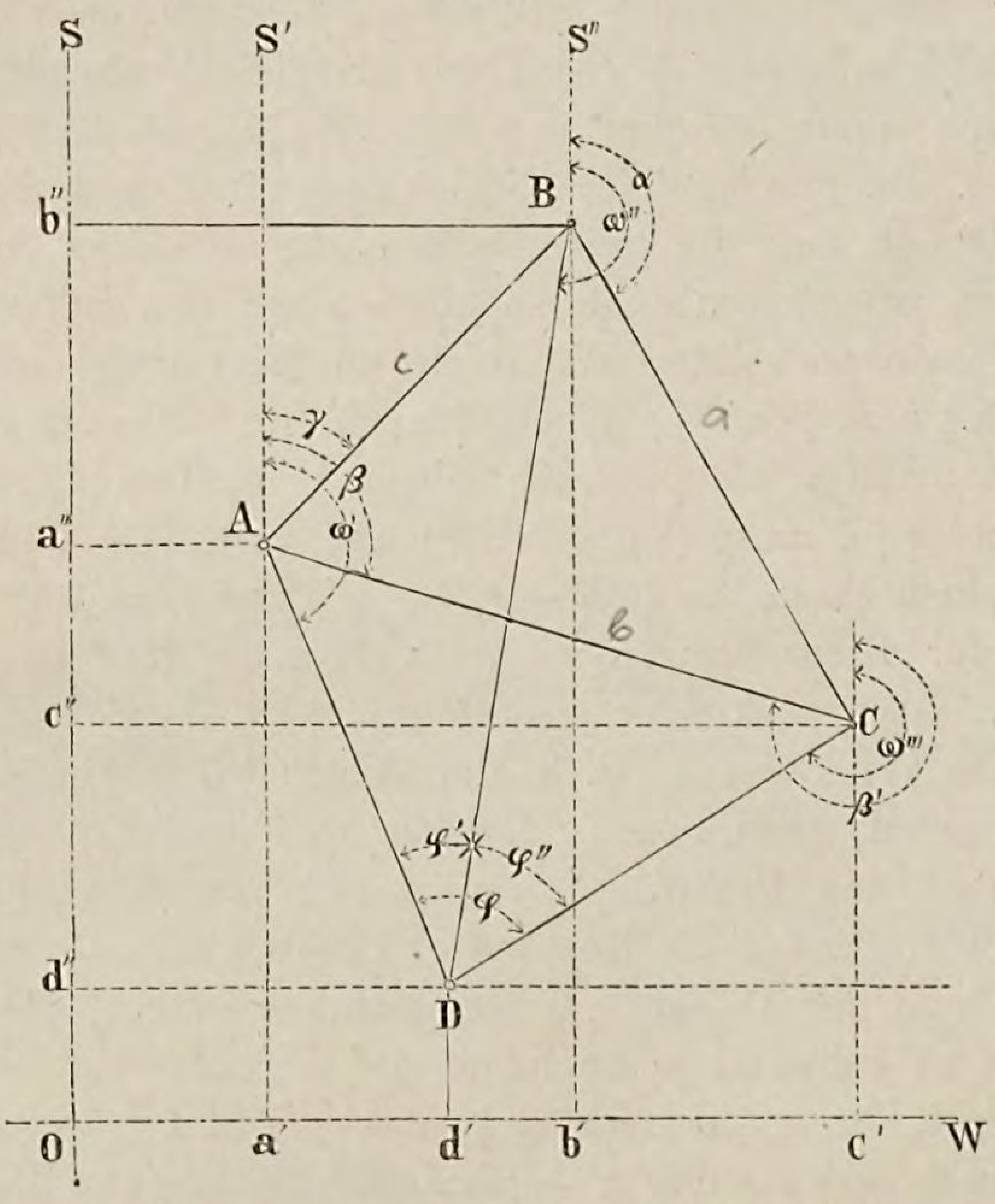
Dieselbe Unbestimmtheit des Ausdrucks für $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta$ tritt ein wenn $\alpha' = 0$,

$\gamma' = 180^0$, $\varphi' = \varphi'' = 0$ ist, d. h. wenn der Punkt mit A, B, C auf der Geraden A B C liegt, wie man aus der Gl (169) leicht selber findet.

§. 96. Aufgabe. Die Coordinaten eines pothenotisch bestimmten Punkts aus den gemessenen Winkeln und den Coordinaten der drei gegebenen Punkte zu berechnen.

Bezeichnet man in Fig. 111 die drei durch ihre rechtwinkeligen Coordinaten $O\,a'' = x_1$, $O\,b'' = x_2$, $O\,c'' = x_3$ und $O\,a' = y_1$, $O\,b' = y_2$, $O\,c' = y_3$ gegebenen Punkte mit A, B, C und den Punkt dessen Coordinaten $O\,d'' = x$ und $O\,d' = y$ gesucht werden, mit D, so lassen sich zunächst nach den Regeln der analytischen Geometrie die in der vorigen Aufgabe als bekannt vorausgesetzten Seiten $B\,C = a$, $C\,A = b$, $A\,B = c$ und die Winkel A, B, C des Dreiecks A B C, dann aber auch die Neigungs-

Fig. 111.



winkel der Seiten a, b, c gegen die Abscissenaxe O S und die Ordinatenaxe O W berechnen; es sind nämlich die Neigungswinkel α, β, γ der Seiten a, b, c gegen die Abscissenaxe zu finden aus den Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}, \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

hiemit die Winkel des Dreiecks A B C, deren Summe 180^0 sein muss:

$$A = \beta - \gamma, \qquad B = 180^0 - (\alpha - \gamma) \qquad C = \alpha - \beta$$

und die Seiten desselben Dreiecks mit Benützung der Winkel α, β, γ:

$$a = \frac{y_3 - y_2}{\sin\alpha}, \qquad b = \frac{y_3 - y_1}{\sin\beta}, \qquad c = \frac{y_2 - y_1}{\sin\gamma}$$

Mit diesen Grössen kann man nach dem vorhergehenden Paragraph die Winkel B A D $= \alpha'$, B C D $= \gamma'$, sowie die Entfernungen A D $= d_1$, B D $= d_2$, C D $= d_3$, nämlich

$$d_1 = c \frac{\sin(\alpha' + \varphi')}{\sin \varphi'}, \quad d_2 = c \frac{\sin \alpha'}{\sin \varphi'}, \quad d_3 = a \frac{\sin(\gamma' + \varphi'')}{\sin \varphi''}$$

berechnen, und hiemit, wenn man weiter noch die Neigungswinkel der Seiten D A, D B, D C gegen die Abscissenaxe beziehlich $\omega', \omega'', \omega'''$ nennt, die Coordinaten von D bestimmen, nämlich

$$x = x_1 + d_1 \cos \omega' = x_2 + d_2 \cos \omega'' = x_3 + d_3 \cos \omega'''$$
$$y = y_1 + d_1 \sin \omega' = y_2 + d_2 \sin \omega'' = y_3 + d_3 \sin \omega'''$$

Um auf die Wichtigkeit der richtigen Bestimmung der Winkel und Vorzeichen aufmerksam zu werden, ist es am besten ein Zahlenbeispiel zu rechnen das zu diesem Zwecke hier folgt.

Es seien gegeben, die Längen in Meter, die Winkel in alter Theilung:

für A	die Abscisse	$x_1 =$	4053,6	und die Ordinate $y_1 =$	1348,2
„ B	„ „	$x_2 =$	6325,3	„ „ „ $y_2 =$	3516,4
„ C	„ „	$x_3 =$	2804,5	„ „ „ $y_3 =$	5493,7
„ D	der Winkel	$\varphi' =$	$31^0\, 30'\, 20''$	und der Winkel $\varphi'' =$	$48^0\, 16'\, 50''$

Man sucht zuerst die Neigungswinkel α, β, γ der Dreiecksseiten gegen die Abscissenaxe. (Diese Winkel werden gemessen durch Bögen welche von der Abscissenaxe ausgehen und bis zur betreffenden Dreiecksseite von links nach rechts fortschreiten, und sie werden zu Azimuthen der Dreiecksseiten wenn die Abscissenaxe in der Mittagslinie liegt.) Nach den oben angegebenen Formeln ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{+1977{,}3}{-3520{,}8}; \quad \log \operatorname{tg} \alpha = 3{,}29607 - 3{,}54664 = 9{,}74943_n$$
$$\alpha = 150^0\, 40'\, 52'' \quad ; \log \sin \alpha = 9{,}68990$$
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{+4145{,}5}{-1249{,}1}; \quad \log \operatorname{tg} \beta = 3{,}61758 - 3{,}09660 = 0{,}52098_n$$
$$\beta = 106^0\, 46'\, 6'' \quad ; \log \sin \beta = 9{,}98113$$
$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{+2168{,}2}{+2271{,}7}; \quad \log \operatorname{tg} \gamma = 3{,}33610 - 3{,}35635 = 9{,}97975_p$$
$$\gamma = 43^0\, 39'\, 52'' \quad ; \log \sin \gamma = 9{,}83912$$

Aus α, β, γ findet man die Winkel des Dreiecks A B C:

$$A = \beta - \gamma = 63^0\, 6'\, 14''$$
$$B = 180^0 + \gamma - \alpha = 72\;\, 59\;\, 0$$
$$C = \alpha - \beta = 43\;\, 54\;\, 46$$
$$A + B + C = 180^0\, 0'\, 0''$$

Das Azimuth von C A in C ist $= \beta' = 180^0 + \beta = 206^0\, 46'\, 6''$ und

$$a = \frac{y_3 - y_2}{\sin \alpha} = 4038{,}4; \quad \log a = 3{,}60617$$

$$b = \frac{y_3 - y_1}{\sin \beta} = 4329{,}6; \quad \log b = 3{,}63645$$

$$c = \frac{y_2 - y_1}{\sin \gamma} = 3140,3; \ \log c = 3,49698$$

Die Hilfsgrössen ν, α', γ', $\sigma = \alpha' + \gamma'$, $\delta = \alpha' - \gamma'$ berechnen sich wie folgt:

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{c \sin \varphi''}{a \sin \varphi'}; \ \log \operatorname{tg} \nu = 3,3699562 - 3,3243241 = 0,0456321$$

$$\nu = 48^0\ 0'\ 16''; \ 45^0 + \nu = 93^0\ 0'\ 16''; \ \log \operatorname{cotg} (45^0 + \nu) = 8,72004$$

$$\sigma = \alpha' + \gamma' = 360^0 - (B + \varphi' + \varphi'') = 207^0\ 13'\ 50''; \ \tfrac{1}{2}\sigma = 103^0\ 36'\ 55''$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\alpha' - \gamma') = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \delta = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \sigma \,.\, \operatorname{cotg} (45^0 + \nu)$$

$$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \delta = 0,61581 + 8,72004 = 9,33585; \ \tfrac{1}{2} \delta = 12^0\ 13'\ 36''$$

$$\alpha' = \tfrac{1}{2} (\sigma + \delta) = 115^0\ 50'\ 31''; \ \gamma' = \tfrac{1}{2} (\sigma - \delta) = 91^0\ 23'\ 12''$$

Nun kann man die Abstände d_1, d_2, d_3 und ihre Neigungswinkel ω', ω'', ω''' gegen die Abscissenaxe, damit aber ihre Projectionen auf beide Axen und hiemit die Coordinaten x, y von D folgendermassen bestimmen:

$$d_1 = \frac{c \sin (a' + \varphi')}{\sin \varphi'} = 3242,2; \ \log d_1 = 3,51085$$

$$d_2 = \frac{c \sin \alpha'}{\sin \varphi'} = 5408,4; \ \log d_2 = 3,73307$$

$$d_3 = \frac{a \sin (\gamma' + \varphi'')}{\sin \varphi''} = 3501,3; \ \log d_3 = 3,54423$$

$$\omega' = \alpha' + \gamma = 159^0\ 30'\ 23''$$

$$\omega'' = \omega' + \varphi' = 191^0\ 0'\ 43''$$

$$\omega''' = \omega'' + \varphi'' = 239^0\ 17'\ 33''$$

$$a''d'' = d_1 \cos \omega' = -3037,1; \ \log d_1 \cos \omega' = 3,48246_n$$

$$a'\ d' = d_1 \sin \omega' = +1135,1; \ \log d_1 \sin \omega' = 3,05504$$

$$b''\ d'' = d_2 \cos \omega'' = -5308,9; \ \log d_2 \cos \omega'' = 3,72500_n$$

$$b'\ d' = d_2 \sin \omega'' = -1033,1; \ \log d_2 \sin \omega'' = 3,01413_n$$

$$c''\ d'' = d_3 \cos \omega''' = -1788,0; \ \log d_3 \cos \omega''' = 3,25236_n$$

$$c'\ d' = d_3 \sin \omega''' = -3010,4; \ \log d_3 \sin \omega''' = 3,47862_n$$

$$x = x_1 - 3037,1 = x_2 - 5308,9 = x_3 - 1788,0 = +1016,5$$

$$y = y_1 + 1135,1 = y_2 - 1033,1 = y_3 - 3010,4 = +2483,3$$

Von den beiden Winkeln φ' und φ'' ist angenommen dass sie mit der direct gemessenen Summe φ in der Art ausgeglichen wurden dass $\varphi' + \varphi'' = \varphi$ ist. Wären in einem anderen Falle drei Winkel φ', φ'', φ''' zu messen gewesen, so würde man dieselben auf 360^0 auszugleichen gehabt haben, was bei gleich genauen Winkelmessungen durch gleichheitliche Vertheilung des Gesammtfehlers auf alle drei Winkel geschehen wäre. Eine andere Ausgleichung als diese gibt es bei der Pothenot'schen Aufgabe so lange nicht, als der Punkt D nur aus 3 Punkten und 2 Winkeln zu bestimmen ist wie hier.

§. 97. Es sind mehr als drei Punkte gegeben auf welche ein bestimmter Standort auf dem Felde rückwärts eingeschnitten werden kann; man soll den besten Werth der Coordinaten des Standorts durch die Ausgleichungsrechnung bestimmen.

Wir wollen nunmehr den zu bestimmenden Punkt P und die m durch ihre Coordinaten gegebenen Punkte $P_1\ P_2\ P_3 \ldots P_m$ nennen und voraussetzen dass sämmtliche Azimuthe $\omega_1\ \omega_2\ \omega_3 \ldots \omega_m$ der Abstände $d_1\ d_2\ d_3 \ldots d_m$ des Punkts P von $P_1\ P_2\ P_3 \ldots P_m$ in Bezug auf eine durch den Punkt P parallel zur Abscissenaxe oder Mittagslinie gelegte Gerade aus den gegebenen Coordinaten und den gemessenen und ausgeglichenen Richtungswinkeln $\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3 \ldots \varphi_m$ nach dem vorhergehenden Paragraphen berechnet sind. Die Werthe $\omega_1\ \omega_2\ \omega_3 \ldots$ sind selbstverständlich nur diejenigen Werthe welche je drei beliebig gewählten Punkten und Richtungen entsprechen, sie können daher in Bezug auf den durch Ausgleichung festzusetzenden Punkt P nur als Näherungswerthe betrachtet werden, die alle noch gewisser Verbesserungen $d\,\omega_1$, $d\,\omega_2$, $d\,\omega_3 \ldots d\,\omega_m$ bedürfen, so dass schliesslich die richtigen Azimuthe $\omega_1 + d\omega_1$, $\omega_2 + d\omega_2$, $\omega_3 + d\omega_3 \ldots \omega_m + d\omega_m$ werden. Ebenso werden die nach den Formeln des §. 96 berechneten Abstände $d_1\ d_2\ d_3 \ldots d_m$ Verbesserungen erleiden wenn die Azimuthe und die Coordinaten x, y des Punkts P (letztere um $d\,x$ und $d\,y$) verbessert sind.

Für die Azimuthe ω und die Abstände d bestehen folgende Beziehungen:

$$\operatorname{tg}\omega_1 = \frac{y_1 - y}{x_1 - x};\ d_1 = \frac{x_1 - x}{\cos\omega_1} = \frac{y_1 - y}{\sin\omega_1} = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}$$

$$\operatorname{tg}\omega_2 = \frac{y_2 - y}{x_2 - x};\ d_2 = \frac{x_2 - x}{\cos\omega_2} = \frac{y_2 - y}{\sin\omega_2} = \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

und es ist anzunehmen dass die Verbesserungen $d\,x$, $d\,y$ der vorläufig annähernd bestimmten Coordinatenwerthe x, y im Vergleich zu $x_1 - x$, $y_1 - y$ ausserordentlich klein sind. Desshalb darf man auch den Unterschied $\operatorname{tg}(\omega + d\,\omega) - \operatorname{tg}\omega = d\operatorname{tg}\omega$ setzen, d. h. diesen Unterschied durch Differentiiren von $\operatorname{tg}\omega$ finden. Wir erhalten somit

$$d\operatorname{tg}\omega_1 = \frac{d\,\omega_1}{\cos^2\omega_1} = \frac{-(x_1 - x)\,d\,y + (y_1 - y)\,d\,x}{(x_1 - x)^2}$$

und wenn man von nun an erstens unter $d\,\omega$ nicht Bogenmass sondern Secunden versteht, also $d\,\omega \,.\, \sin 1''$ für $d\,\omega$ setzt, und zweitens die Coordinatenunterschiede $x_1 - x$ und $y_1 - y$ durch die entsprechenden Producte $d_1 \cos\omega_1$ und $d_1 \sin\omega_1$ ausdrückt, so gelangt man zu der Gleichung

$$d_1 \,.\, d\,\omega_1 \,.\, \sin 1'' = \sin\omega_1 \,.\, d\,x - \cos\omega_1 \,.\, d\,y$$

welche in derselben Form auch für ω_2, $\omega_3 \ldots \omega_m$ und d_2, $d_3 \ldots d_m$ gilt. Aus der vorstehenden Gleichung findet man

$$d\,\omega_1 = \frac{\sin\omega_1}{d_1 \sin 1''}\,d\,x - \frac{\cos\omega_1}{d_1 \sin 1''}\,d\,y = \mu_1\,d\,x + \nu_1\,d\,y \qquad (172)$$

wobei die Coefficienten von $d\,x$ und $d\,y$ folgende Werthe in Secunden haben:

$$\mu_1 = \frac{\sin\omega_1}{d_1 \sin 1''} \text{ und } \nu_1 = -\frac{\cos\omega_1}{d_1 \sin 1''} \qquad (173)$$

Hiemit werden die richtigen Azimuthe der Linien $d_1\ d_2\ d_3 \ldots d_m$

$$\begin{aligned}
\omega' &= \omega_1 + d\,\omega_1 = \omega_1 + \mu_1\,dx + \nu_1\,dy \\
\omega'' &= \omega_2 + d\,\omega_2 = \omega_2 + \mu_2\,dx + \nu_2\,dy \\
\omega''' &= \omega_3 + d\,\omega_3 = \omega_3 + \mu_3\,dx + \nu_3\,dy \\
&\vdots
\end{aligned}$$

und wenn man in diese Azimuthe die aus den Richtungen berechneten Winkel $P_1\,P\,P_2 = o_2 = \varphi_2 - \varphi_1$, $P_1\,P\,P_3 = o_3 = \varphi_3 - \varphi_1$, $P_1\,P\,P_4 = = o_4 = \varphi_4 - \varphi_1 \ldots.$ einführt, so werden die Ausdrücke für die richtigen Azimuthe folgende:

$$\omega'' = \omega' + o_2; \quad \omega''' = \omega'' + o_3 - o_2; \quad \omega'''' = \omega''' + o_4 - o_3; \ldots.$$

und hieraus gehen die Ausdrücke hervor welche bei vollkommen fehlerfreien Messungen alle einander und gleich ω' wären, nämlich

$$\omega' = \omega'' - o_2 = \omega''' - o_3 = \omega'''' - o_4 = \ldots.$$

Setzt man für ω', ω'', ω'''.... ihre obigen Werthe ein, so müssten folglich die nachstehenden Werthe einander gleich sein:

$$\omega_1 + \mu_1\,dx + \nu_1\,dy; \quad \omega_2 + \mu_2\,dx + \nu_2\,dy - o_2; \quad \omega_3 + \mu_3\,dx + \nu_3\,dy - o_3;$$

u. s. w.

sie sind es aber wegen der zufälligen Fehler nicht, es besitzen vielmehr die Unterschiede zwischen je zweien gewisse bekannte Werthe, die wir wie folgt bezeichnen wollen:

$$\omega_2 - (\omega_1 + o_2) = n; \quad \omega_3 - (\omega_1 + o_3) = n'; \quad \omega_4 - (\omega_1 + o_4) = n'' \text{ u. s. w.}$$

$$\begin{aligned}
\mu_2 - \mu_1 &= a & \mu_3 - \mu_1 &= a' & \mu_4 - \mu_1 &= a'' \\
\nu_2 - \nu_1 &= b & \nu_3 - \nu_1 &= b' & \nu_4 - \nu_1 &= b''
\end{aligned}$$

Nach der Methode der kleinsten Quadrate müssen nun die Unterschiede $\omega_2 - (\omega_1 + o_2) + (\mu_2 - \mu_1)\,dx + (\nu_2 - \nu_1)\,dy = n + a\,dx + b\,dy$ u. s. w alle einzeln null werden; daher ergeben sich folgende $m - 1$ Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der Unbekannten dx und dy:

$$\begin{aligned}
0 &= n + a\,dx + b\,dy \\
0 &= n' + a'\,dx + b'\,dy \\
0 &= n'' + a''\,dx + b''\,dy \\
&\vdots
\end{aligned} \qquad (174)$$

Um dx und dy zu finden, multiplicirt man die vorstehenden Gleichungen zuerst alle nacheinander mit den Coefficienten a, a', a''... von dx und dann mit den Coefficienten b, b', b''... von dy; dadurch ergeben sich (m — 1) Gleichungen von der Gruppe a und eben so viele von der Gruppe b, nämlich

$$\begin{aligned}
0 &= a\,n + a\,a\,.\,dx + a\,b\,.\,dy \\
0 &= a'\,n' + a'\,a'\,.\,dx + a'\,b'\,.\,dy \\
&\vdots \\
0 &= b\,n + a\,b\,.\,dx + b\,b\,.\,dy \\
0 &= b'\,n' + a'\,b'\,.\,dx + b'\,b'\,.\,dy \\
&\vdots
\end{aligned} \qquad (175)$$

und wenn man nun jede Gruppe für sich addirt und die bekannten Summenzeichen [] anwendet, so findet man die beiden Normalgleichungen welche mit dem Gleichungssystem (48) Seite 29 des II Bands übereinstimmen, sobald für die dortigen Unbekannten x und y die hiesigen d x und d y gesetzt werden, nämlich:

$$\begin{aligned} 0 &= [a\,n] + [a\,a]\,d\,x + [a\,b]\,d\,y \\ 0 &= [b\,n] + [a\,b]\,d\,x + [b\,b]\,d\,y \end{aligned} \qquad (176)$$

Diese zwei Gleichungen kann man nach der gewöhnlichen Art oder nach der Anleitung des §. 26 im zweiten Bande auflösen. Beide Lösungen führen unter Anwendung der in den Formeln (50) Seite 29 erklärten Gauss'schen Bezeichnungen zu den gleichen Werthen:

$$d\,y = -\frac{[b\,n\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]} \qquad d\,x = -\frac{[a\,n\,.\,1]}{[a\,a\,.\,1]} \qquad (177)$$

§. 98. **Aufgabe.** Auf einem Punkte P dessen Coordinaten x, y in Bezug auf die Axen der Landesvermessung zu bestimmen sind, wurden fünf durch ihre Coordinaten $x_1\,y_1$, $x_2\,y_2$... $x_5\,y_5$ gegebene Punkte $P_1\,P_2\,P_3\,P_4\,P_5$ eingeschnitten: Man soll die Coordinaten von P so berechnen dass den zufälligen Beobachtungsfehlern ihr geringster Einfluss auf x und y gestattet wird.

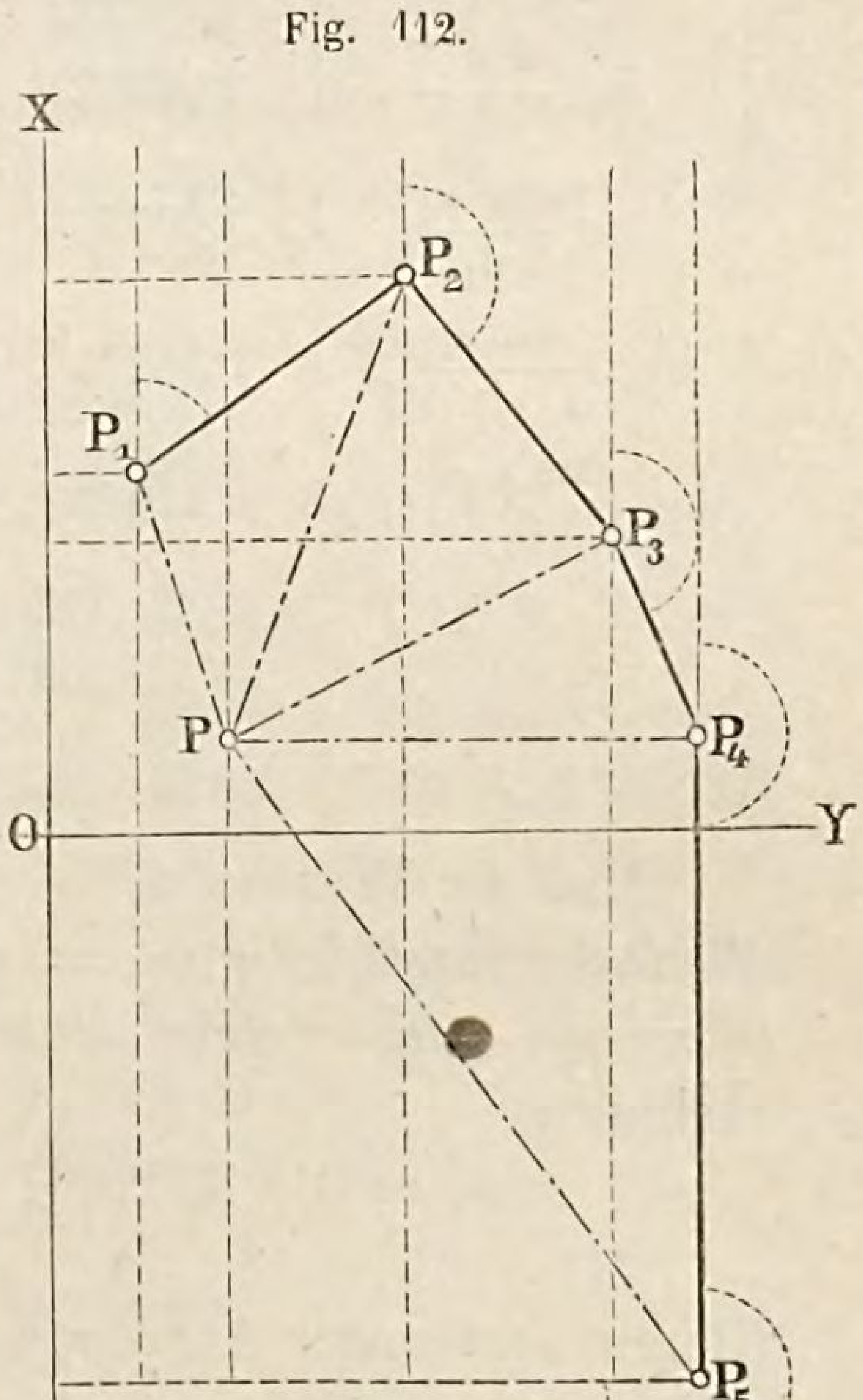
Das Einschneiden hat folgende unter sich schon ausgeglichene Richtungswinkel geliefert:

$$\begin{aligned} &\text{in } P_1 : \varphi_1 = 27^0\,10'\,25'' \\ &\;\;„\;\; P_2 : \varphi_2 = 58\;\;40\;\;45 \\ &\;\;„\;\; P_3 : \varphi_3 = 106\;\;57\;\;35 \\ &\;\;„\;\; P_4 : \varphi_4 = 135\;\;44\;\;51 \\ &\;\;„\;\; P_5 : \varphi_5 = 193\;\;\;7\;\;35 \end{aligned}$$

Die in Meter gegebenen Coordinaten sind folgende:

$$\begin{aligned} &\text{für } P_1:\; x_1 = +\,4053{,}6 \text{ und } y_1 = +\,1348{,}2 \\ &\;\;„\;\; P_2:\; x_2 = +\,6325{,}3 \;\;„\;\; y_2 = +\,3516{,}4 \\ &\;\;„\;\; P_3:\; x_3 = +\,2804{,}5 \;\;„\;\; y_3 = +\,5493{,}7 \\ &\;\;„\;\; P_4:\; x_4 = +\,1172{,}3 \;\;„\;\; y_4 = +\,7125{,}9 \\ &\;\;„\;\; P_5:\; x_5 = -\,5728{,}6 \;\;„\;\; y_5 = +\,7125{,}9 \end{aligned}$$

Fig. 112.



Die Lösung der vorliegenden Aufgabe verlangt zunächst dass man genäherte Werthe für x und y bestimme. Hiezu können wir sofort die drei ersten Punkte 1, 2, 3 oder A, B, C benützen, und da deren Coordinatenwerthe, wie ein Blick auf die vorstehenden Zahlen lehrt, genau mit denen des §. 96 übereinstimmen und auch die Winkel φ' und φ'', unter denen man von P aus die Seiten A B = c und B C = a erblickt, hier genau dieselben wie in §. 96

sind, so findet man durch das bereits berechnete Zahlenbeispiel nach Seite 194:

$$x = + 1016,5 \quad \text{und} \quad y = + 2483,3$$

und es sind nach jener Rechnung weiter noch folgende Werthe bekannt. Wollen wir also die vorstehenden Werthe von x und y als genäherte Coordinaten von P annehmen und hiezu die Verbesserungen d x und d y nach der vorausgehenden Anleitung suchen, so müssen wir zunächst die Coefficienten μ und ν für alle Azimuthe ω bestimmen und hiezu folgende Zahlenrechnung nach dem in der ersten Spalte enthaltenen Schema durchführen.

Schema	$A = P_1$	$B = P_2$	$C = P_3$	$D = P_4$	$E = P_5$
$y_1 - y$	$-1135,1$	$+1033,1$	$+3010,4$	$+4642,6$	$+4642,6$
$x_1 - x$	$+3037,1$	$+5308,8$	$+1788,0$	$+155,8$	$-6745,1$
$\log(y_1 - y)$	$3,05503_n$	$3,01414$	$3,47862$	$3,66676$	$3,66676$
$\log(x_1 - x)$	$3,48246$	$3,72500$	$3,25236$	$2,19257$	$3,82899_n$
$\log \operatorname{tg} \omega_1$	$9,57257_n$	$9,28914_n$	$0,22626$	$1,47419$	$9,83777_n$
ω_1	$159^0\, 30'\, 23''$	$191^0\, 0'\, 43''$	$239^0\, 17'\, 33''$	$268^0\, 4'\, 41''$	$325^0\, 27'\, 40''$
$\log \sin \omega_1$	$9,54417$	$9,28106_n$	$9,93439_n$	$9,99975_n$	$9,75172_n$
$\log \cos \omega_1$	$9,97161_n$	$9,99193_n$	$9,70812_n$	$8,52457_n$	$9,91666$
$\log d_1$	$3,51085$	$3,73307$	$3,54423$	$3,66700$	$3,91320$
$\log \frac{\sin \omega_1}{d_1}$	$6,03332$	$5,54799_n$	$6,39016_n$	$6,33275_n$	$5,83852_n$
$\log \frac{\cos \omega_1}{d_1}$	$6,46076_n$	$6,25886_n$	$6,16389_n$	$4,85757_n$	$6,00346$
$\log \frac{\sin \omega_1}{d_1 \sin 1''}$	$1,34775$	$0,86242_n$	$1,70459_n$	$1,64718_n$	$1,15295_n$
$\log \frac{\cos \omega_1}{d_1 \sin 1''}(n)$	$1,77519_n$	$1,57329$	$1,47832$	$0,17200_n$	$1,31789$
μ	$+22,272$	$-7,285$	$-50,651$	$-44,380$	$-14,222$
ν	$-59,593$	$+37,436$	$+30,083$	$-1,486$	$+20,792$

Um die Werthe n, n', n''... zu bilden, bedarf man der beobachteten Winkelunterschiede $o_2 = \varphi_2 - \varphi_1$; $o_3 = \varphi_3 - \varphi_1$; $o_4 = \varphi_4 - \varphi_1$; $o_5 = \varphi_5 - \varphi_1$ welche sich aus den gegebenen Richtungen wie folgt berechnen:

$$o_2 = 31^0\, 30'\, 20''; \; o_3 = 79^0\, 47'\, 10''; \; o_4 = 108^0\, 34'\, 26'';$$
$$o_5 = 165^0\, 57'\, 10''$$

Hiemit und unter Anwendung der im vorigen Paragraph aufgestellten Formeln erhält man für n, n', n''... a, a', a''... b, b', b''... folgende Werthe:

$n = 0$	$n' = 0$	$n'' = -8$	$n''' = +7$
$a = -29,56$	$a' = -72,92$	$a'' = -66,65$	$a''' = -36,49$
$b = +52,31$	$b' = +89,68$	$b'' = +58,11$	$b''' = +80,39$

Durch Einsetzung dieser Zahlen in das Gleichungssystem (174) werden die Bedingungsgleichungen des vorliegenden Falls:

$$0 = \quad - 29{,}56\, dx + 52{,}31\, dy$$
$$0 = \quad - 72{,}92\, dx + 89{,}68\, dy$$
$$0 = - 8 - 66{,}65\, dx + 58{,}11\, dy$$
$$0 = + 7 - 36{,}49\, dx + 80{,}39\, dy$$

Multiplicirt man zuerst jede dieser Gleichungen mit dem ihr zugehörigen Coefficienten von d x, also Nr 1 mit — 29,56 und Nr 2 mit — 72,92 u. s. w. und alsdann jede dieser vier Gleichungen mit dem ihr zukommenden Coefficienten von d y, also Nr 1 mit + 52,31 und Nr 2 mit + 89,68 u. s. w. so entstehen folgende zwei Gruppen von Gleichungen:

$$0 = \quad + 873{,}8\, dx - 1546{,}3\, dy$$
$$0 = \quad + 5317{,}5\, dx - 6539{,}6\, dy$$
$$0 = + 533{,}2 + 4442{,}3\, dx - 3873{,}1\, dy$$
$$0 = - 255{,}4 + 1331{,}5\, dx - 2933{,}4\, dy$$

.

$$0 = \quad - 1546{,}3\, dx + 2736{,}3\, dy$$
$$0 = \quad - 6539{,}6\, dx + 8042{,}7\, dy$$
$$0 = - 464{,}9 - 3873{,}1\, dx + 3376{,}8\, dy$$
$$0 = + 562{,}7 - 2933{,}4\, dx + 6462{,}5\, dy$$

Addirt man jede dieser Gleichungsgruppen für sich, so entstehen nach der Methode der kleinsten Quadrate die beiden Normalgleichungen

$$0 = + 277{,}8 + 11965{,}1\, dx - 14892{,}4\, dy$$
$$0 = + 97{,}8 - 14892{,}4\, dx + 20618{,}3\, dy$$

aus denen sich die beiden Unbekannten wie folgt ergeben:

$$dx = - 0{,}29 \qquad dy = - 0{,}21$$

Hiemit werden die verbesserten Coordinaten

$$x = 1016{,}50 - 0{,}29 = + 1016{,}21$$
$$y = 2483{,}30 - 0{,}21 = + 2483{,}09$$

damit die verbesserten Azimuthe:

$$\omega' = \omega_1 + 6'',05 = 159^0\, 30'\, 29'',1$$
$$\omega'' = \omega_2 + 9\,,97 = 191 \quad 0 \quad 53\,,0$$
$$\omega''' = \omega_3 + 8\,,35 = 239 \quad 17 \quad 41\,,4$$
$$\omega'''' = \omega_4 + 13\,,19 = 268 \quad 4 \quad 54\,,2$$
$$\omega''''' = \omega_5 - 0\,,25 = 325 \quad 27 \quad 39\,,7$$

und hiemit die verbesserten Richtungswinkel:

$$\varphi' = \varphi_1 + 0'',0 = 27^0\, 10'\, 25'',0$$
$$\varphi'' = \varphi_2 + 3\,,9 = 58 \quad 40 \quad 48\,,9$$
$$\varphi''' = \varphi_3 + 2\,,3 = 106 \quad 57 \quad 37\,,3$$
$$\varphi'''' = \varphi_4 - 0\,,9 = 135 \quad 44 \quad 50\,,1$$
$$\varphi''''' = \varphi_5 + 0\,,6 = 193 \quad 7 \quad 35\,,6$$

In dem hier behandelten Falle ergeben sich nur geringe Aenderungen der Richtungswinkel, und man könnte sie desshalb bei einer Triangulation dritter oder vierter Ordnung vernachlässigen wenn man sich nur erst über-

zeugt hätte dass sie wirklich so klein wie hier sind. Diese Ueberzeugung kann man sich jedoch nur durch eine Ausgleichungsrechnung verschaffen welche zunächst die Verbesserungen d x und d y der Coordinaten des Punkts P und hiemit die Verbesserungen der Azimuthe und Richtungswinkel liefert. Zwar liessen sich auch Näherungswerthe für d x und d y dadurch finden dass man die Pothenot'sche Aufgabe für verschiedene Combinationen der fünf Punkte zu dreien löst und aus den gefundenen Coordinaten Mittelwerthe nimmt; aber diese wiederholten Lösungen verursachen eben so viel Mühe als die systematische Ausgleichungsrechnung ohne dass sie dem Geometer eine wissenschaftliche Befriedigung mit seiner Arbeit gewähren. Wer die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate scheut, wird sich auch mit der zweimaligen Berechnung eines jeden der Werthe x und y aus je drei verschiedenen Punkten begnügen; diese doppelte Berechnung ist jedoch nicht zu umgehen, um eine Probe für die erste Rechnung zu haben: aus beiden Werthen von x kann man das Mittel als gesuchte Abscisse, aus beiden Werthen von y das Mittel als gesuchte Ordinate gelten lassen.

§. 99. Aufgabe. Ein Punkt P ist von 4 durch ihre Coordinaten $x_1\, y_1$, $x_2\, y_2$, $x_3\, y_3$, $x_4\, y_4$ gegebenen Punkten $P_1\, P_2\, P_3\, P_4$ aus angeschnitten worden und es haben sich hiebei die auf die Mittagslinie als Abscissenaxe bezogenen und bereits ausgeglichenen Richtungswinkel oder Azimuthe $\varphi_1\, \varphi_2\, \varphi_3\, \varphi_4$ ergeben. Man soll aus diesen überschüssigen Beobachtungen die wahrscheinlichsten Werthe der Coordinaten x, y des Punkts P bestimmen.

Aus den gegebenen Coordinaten kann man zunächst die Neigungswinkel der Seiten $P_1\, P_2$, $P_2\, P_3$, $P_3\, P_4$, $P_4\, P_1$ gegen die Abscissenaxe oder deren Azimuthe $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \alpha_4$, und die Längen dieser Seiten (1, 2), (2, 3) (3, 4), (4, 1) ableiten, indem

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2},\ \operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3},\ \operatorname{tg}\alpha_4 = \frac{y_1 - y_4}{x_1 - x_4}$$

$$(1,2) = \frac{y_2 - y_1}{\sin\alpha_1},\ (2,3) = \frac{y_3 - y_2}{\sin\alpha_2},\ (3,4) = \frac{y_4 - y_3}{\sin\alpha_3},\ (4,1) = \frac{y_1 - y_4}{\sin\alpha_4}$$

Hiemit lassen sich aus einem beliebigen Dreiecke, etwa $P\, P_1\, P_2$, die diesem Dreiecke entsprechenden Coordinaten x', y' des Punkts P finden, da in diesem Dreiecke eine Seite und die zwei anliegenden Winkel (hier $P\, P_1\, P_2 = \alpha_1 - \varphi_1$ und $P_1\, P_2\, P = 180^0 - (\alpha_1 - \varphi_2)$ bekannt sind. Wir wollen diese leicht zu findenden Werthe jetzt als bekannte Näherungswerthe der Coordinaten x, y ansehen und mit ihnen die Näherungswerthe $\varphi'\, \varphi''\, \varphi'''\, \varphi''''$ der Azimuthe von $P_1\, P$, $P_2\, P$, $P_3\, P$, $P_4\, P$ berechnen aus

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{y_1 - y'}{x_1 - x'},\ \operatorname{tg}\varphi'' = \frac{y_2 - y'}{x_2 - x'},\ \operatorname{tg}\varphi''' = \frac{y_3 - y'}{x_3 - x'},\ \operatorname{tg}\varphi'''' = \frac{y_4 - y'}{x_4 - x'}$$

Mit diesen Azimuthen lassen sich die Abstände d' d'' d''' d'''' der Punkte $P_1\, P_2\, P_3\, P_4$ von P näherungsweise bestimmen, nämlich

$$d' = \frac{(1,2)\sin(\alpha_1 - \varphi'')}{\sin(\varphi' - \varphi'')},\ d'' = \frac{(2,3)\sin(\alpha_2 - \varphi''')}{\sin(\varphi'' - \varphi''')}\ \text{u. s. w.}$$

und hiemit kann man die Coefficienten μ und ν berechnen welche nach §. 97 in den Formeln zur Verbesserung der Azimuthe, nämlich in den Ausdrücken vorkommen:

$$d\,\varphi' = \mu\, d\,x + \nu\, d\,y = \frac{\sin\varphi'}{d'\sin 1''}\, d\,x - \frac{\cos\varphi'}{d'\sin 1''}\, d\,y$$

Hiemit aber lassen sich wieder die Bestimmungsgleichungen (174) anschreiben welche mittels der auf Seite 196 erklärten Multiplicationen in zwei Gruppen (175) getrennt werden können, so dass die Summe der Gleichungen einer jeden Gruppe eine Normalgleichung zur Bestimmung von d x und d y liefert.

Wir wollen diese allgemeine Lösung der vorliegenden Aufgabe an einem von Franke berechneten Zahlenbeispiele (Dreiecksnetze vierter Ordnung, S. 198) erläutern.

Es seien folgende Coordinaten und Azimuthe gegeben:

$x_1 = + 6000{,}00$ $y_1 = - 4510{,}12$ $\varphi_1 = 225^0\ 0'\ 0''$

$x_2 = + 6000{,}00$ $y_2 = - 5110{,}24$ $\varphi_2 = 180\ \ 0\ 24$

$x_3 = + 4799{,}76$ $y_3 = - 5710{,}36$ $\varphi_3 = 44\ 59\ 30$

$x_4 = + 4799{,}76$ $y_4 = - 4510{,}12$ $\varphi_4 = 315\ \ 0\ 36$

In dem Dreiecke $P_1\ P\ P_4$ ist die Seite $P_1\ P_4 = x_1 - x_4 = 1200{,}24$ und die Winkel an dieser Seite sind $P\,P_1\,P_4 = 45^0$ und $P_1\,P_4\,P = 44^0\,59'\,24''$; folglich wird $P\,P_1 = d'$ aus der Proportion $d' : x_1 - x_4 = \sin 44^0\,59'\,24'' : \sin 90^0\,0'\,36''$ gefunden welche $\log d' = 2{,}92869$ und hiemit die Näherungswerthe

$$x' = + 5399{,}97 \text{ und } y' = - 5110{,}15$$

liefert. Mit diesen Werthen findet man die genäherten Azimuthe der Strahlen $P_1\,P$, $P_2\,P$, $P_3\,P$, $P_4\,P$ und die Coefficienten μ und ν aus folgender Rechnung:

Schema	P_1	P_2	P_3	P_4
$y_1 - y'$	$-600{,}03$	$+\ 0{,}09$	$+600{,}21$	$-600{,}03$
$x_1 - x'$	$-600{,}03$	$-600{,}03$	$+600{,}21$	$+600{,}21$
$\log(y_1 - y')$	$2{,}77817_n$	$8{,}95424$	$2{,}77830$	$2{,}77817_n$
$\log(x_1 - x')$	$2{,}77817_n$	$2{,}77817_n$	$2{,}77830$	$2{,}77830$
$\log \operatorname{tg} \varphi'$	0	$6{,}17607_n$	0	$9{,}99987_n$
φ'	$225^0\ 0'\ 0''$	$179^0\ 59'\ 29''$	$45^0\ 0'\ 0''$	$315^0\ 0'\ 31''$
$\log \sin \varphi'$	$9{,}84949_n$	$6{,}17607$	$9{,}84949$	$9{,}84942_n$
$\log \cos \varphi'$	$9{,}84949_n$	0	$9{,}84949$	$9{,}84955$
$\log d'$	$2{,}92869$	$2{,}77817$	$2{,}92882$	$2{,}92875$
$\log \cos \varphi' - \log d'$	$6{,}92080_n$	$7{,}22183_n$	$6{,}92067$	$6{,}92080$
$\log \sin \varphi' - \log d'$	$6{,}92080_n$	$3{,}39790$	$6{,}92067$	$6{,}92067_n$
$\log \cos \varphi' - \log d' \sin 1''$	$2{,}23523_n$	$2{,}53626_n$	$2{,}23510$	$2{,}23523$
$\log \sin \varphi' - \log d' \sin 1''$	$2{,}23523_n$	$8{,}71233_n$	$2{,}23510_n$	$2{,}23510$
μ	$-171{,}88$	$-343{,}76$	$+171{,}83$	$+171{,}88$
ν	$+171{,}88$	$-\ 0{,}05$	$-171{,}83$	$+171{,}83$

Auf Grund der Formeln zu §. 97 und der vorstehenden Tafel ergeben sich folgende Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= -\,171{,}88\, dy + 171{,}88\, dx \\ +\,54{,}9 &= -\,343{,}76\, dy - \;\;0{,}05\, dx \\ -\,30{,}0 &= +\,171{,}83\, dy - 171{,}83\, dx \\ +\;\;5{,}1 &= +\,171{,}88\, dy - 171{,}83\, dx \end{aligned}$$

und aus diesen durch Abziehen der ersten von jeder der folgenden die nachstehenden drei anderen Gleichungen:

$$\begin{aligned} +\,54{,}9 &= -\,171{,}88\, dy - 171{,}93\, dx \\ -\,30{,}0 &= +\,343{,}71\, dy - 343{,}71\, dx \\ +\;\;5{,}1 &= +\,343{,}76\, dy - 343{,}71\, dx \end{aligned}$$

Multiplicirt man jede derselben zuerst mit dem ihr zugehörigen Coefficienten von d y und dann mit dem ihr zugehörigen Coefficienten von d x, so erhält man zweimal drei Gleichungen, von denen jede Gruppe durch Addition aller ihrer Theile eine Normalgleichung liefert; die beiden Normalgleichungen werden somit

$$\begin{aligned} -\,17994{,}3 &= +\,265851{,}4\, dy - 206737{,}8\, dx \\ +\;\;119{,}4 &= -\,206737{,}8\, dy + 265830{,}2\, dx \end{aligned}$$

und geben durch folgende Berechnung die Unbekannten d x und d y.

a n	a a	a b	b n	b b
— 17994,3	+ 265851,4	— 206737,8	+ 119,4	+ 265830,2
$4,25514_n$	5,42464	$5,31542_n$	— 13993,2	— 160768,4
$8,83050_n$		$9,89078_n$	— 13873,8	+ 105061,8
— 0,0677		$9,12075_n$	$4,14220_n$	5,02144
— 0,1027		9,01153	$9,12075_n$	= log d x
d y = — 0,1704			d x = — 0,1321	

Es werden somit die verbesserten Coordinaten von P:

$$\begin{aligned} x &= x' - 0{,}13 = +\,5399{,}84 \\ y &= y' - 0{,}17 = -\,5110{,}32 \end{aligned}$$

und die Verbesserungen der beobachteten Richtungen $\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3\ \varphi_4$ nach der Formel $d\varphi' = \mu\, dx + \nu\, dy$ (172):

+ 29,29″	+ 58,57	— 29,28	— 29,29
— 22,71	+ 0,01	+ 22,70	— 22,70
$d\varphi' = +\ 6{,}58''$	$d\varphi'' = +\,58{,}58''$	$d\varphi''' = -\ 6{,}58''$	$d\varphi'''' = -\,51{,}99''$

Hieraus ergeben sich die abgeschlossenen Azimuthe wie folgt:

$$\begin{aligned} \varphi' &= 225^0\ 0'\ 0'' + 6'',58 = 225^0\ 0'\ 7'' \\ \varphi'' &= 179\ 59\ 29 + 58,58 = 180\ 0\ 28 \\ \varphi''' &= 45\ 0\ 0 - 6,58 = 44\ 59\ 53 \\ \varphi'''' &= 315\ 0\ 31 - 51,99 = 314\ 59\ 39 \end{aligned}$$

und diese weichen von den beobachteten Werthen $\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3\ \varphi_4$ nacheinander ab um

$$+7'',\quad +4'',\quad +23'',\quad -57''$$

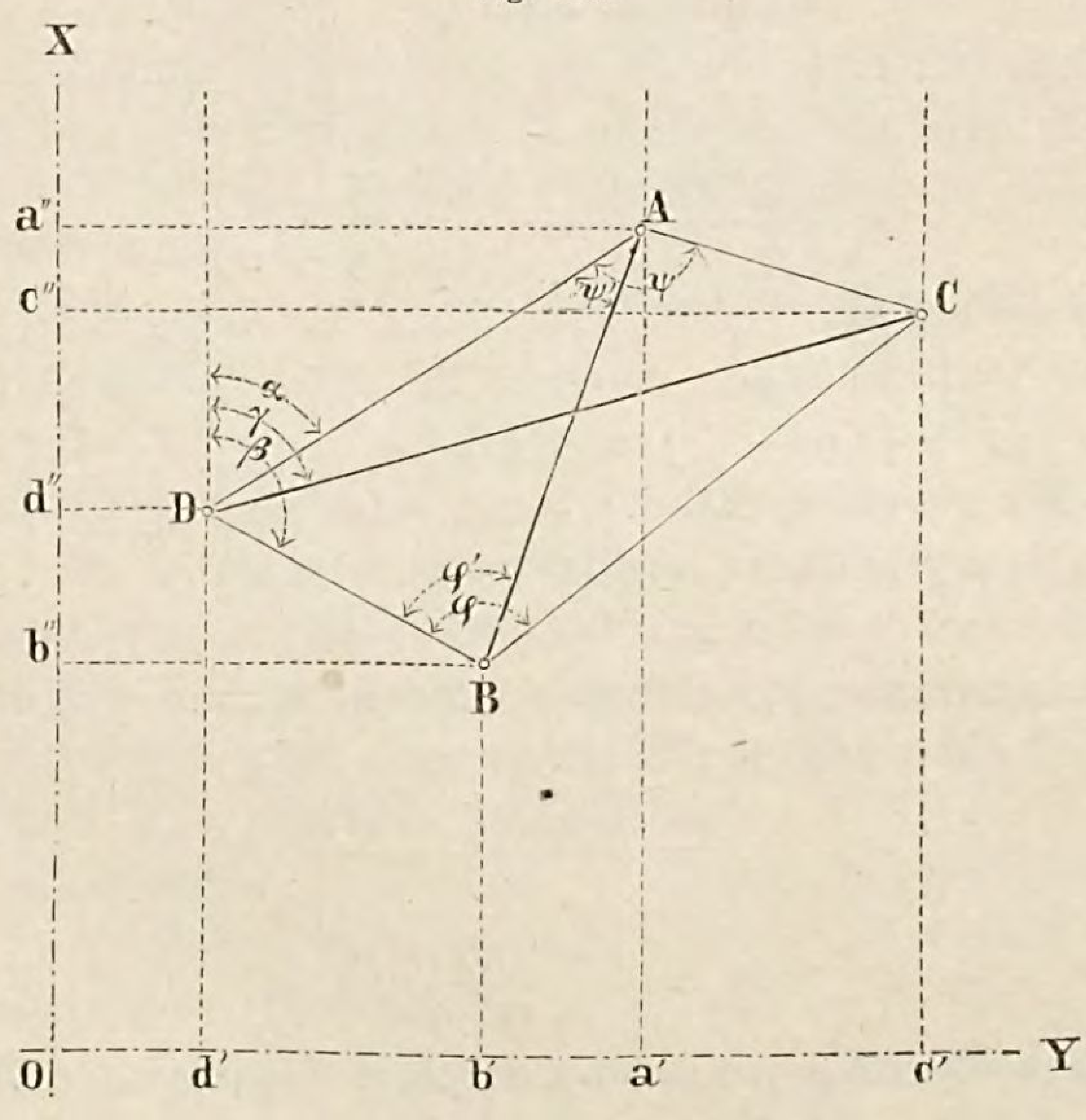
woraus zu entnehmen ist dass die Werthe φ_3 und φ_4 nicht mit gleicher Sorgfalt beobachtet worden sind wie φ_1 und φ_2.

§. 100. Aufgabe. Von zwei unzugänglichen Punkten des Felds kennt man die Coordinaten, und zwei andere Punkte sind auf dem Felde gegeben; man soll deren Lage durch blosse Winkelmessung bestimmen.

Der Nutzen der vorliegenden Aufgabe über deren unrichtige Bezeichnung nach Hansen bereits der §. 94 Aufklärung gibt, ist vielleicht nicht minder gross als jener der Pothenot'schen Aufgabe, da sie aus der bekannten Lage von nur zwei unzugänglichen Punkten die unbekannte Lage von zwei zugänglichen finden lehrt. Sie heisst desshalb die „Aufgabe der zwei unzugänglichen Punkte oder des unzugänglichen Abstands."

Bezeichnen in Fig. 113 die Buchstaben C, D die bekannten, A, B die

Fig. 113.



unbekannten Punkte; sind ferner die Coordinaten von A, B, C, D der Reihe nach x_1, x_2, x_3, x_4 und y_1, y_2, y_3, y_4; setzt man die Längen der Linien $AD = a$, $BD = b$, $CD = c$ und ihre Neigungswinkel gegen die Axe der x in dem Punkte D nach einander $= \alpha, \beta, \gamma$, und heissen endlich die in A und B beobachteten und in der Figur angedeuteten Horizontalwinkel φ, φ' und ψ, ψ': so ergeben sich aus den drei Dreiecken A C D, C B D, A B D folgende vier Gleichungen:

$$a \sin \psi = c \sin (\psi + \gamma - \alpha)$$
$$b \sin \varphi = c \sin (\varphi + \beta - \gamma)$$
$$a \sin \psi' = b \sin \varphi'$$
$$\beta - \alpha = 180^0 - (\varphi' + \psi')$$

welche gerade hinreichen, die vier unbekannten Grössen a, b, α, β zu bestimmen. Hat man aber diese, so ist für die Punkte A und B

$$x_1 = x_4 + a \cos \alpha, \quad y_1 = y_4 + a \sin \alpha \qquad (178)$$
$$x_2 = x_4 + b \cos \beta, \quad y_2 = y_4 + b \sin \beta \qquad (179)$$

und folglich Alles gefunden, was man sucht.

Setzt man die bekannte Differenz $\beta - \alpha = 2\,\delta$ und die noch unbekannte Summe $\beta + \alpha = 2\,\sigma$, so findet man hieraus

$$\alpha = \sigma - \delta \text{ und } \beta = \sigma + \delta$$

und setzt man ferner die bekannten Winkel

$$\psi + \gamma + \delta = \zeta \text{ und } \varphi - \gamma + \delta = \eta$$

so nehmen die zur Bestimmung der noch übrigen drei unbekannten Grössen a, b, σ dienenden drei Gleichungen folgende Form an:

$$a \sin \psi = c \sin (\zeta - \sigma)$$
$$b \sin \varphi = c \sin (\eta + \sigma) \qquad (180)$$
$$a \sin \psi' = b \sin \varphi'$$

Dividirt man die erste durch die zweite und nimmt den Werth von a : b aus der dritten, so fallen alle Entfernungen weg und man erhält:

$$\frac{\sin \varphi' \sin \psi}{\sin \varphi \sin \psi'} = \frac{\sin (\zeta - \sigma)}{\sin (\eta + \sigma)}$$

Setzt man die bekannte erste Seite dieser Gleichung $= \operatorname{tg} \mu$, so gibt das bei Lösung der Pothenot'schen Aufgabe befolgte Verfahren (§. 95)

$$\operatorname{tg} [\sigma + \tfrac{1}{2} (\eta - \zeta)] = \operatorname{tg} (45^0 - \mu) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\eta + \zeta)$$

woraus σ gefunden werden kann. Denn setzt man $\operatorname{tg} [\sigma + \frac{1}{2} (\eta - \zeta)] = \operatorname{tg} \omega$, so ist ω als bekannt anzusehen und daher

$$\sigma = \omega + \tfrac{1}{2} (\zeta - \eta) \qquad (181)$$

Mit σ sind aber auch α und β gefunden, indem $\alpha = \sigma - \delta$ und $\beta = \sigma + \delta$ ist; weiter folgt dann aus den Gleichungen (180)

$$a = \frac{c \sin (\zeta - \sigma)}{\sin \psi} \qquad (182)$$

$$b = \frac{c \sin (\eta + \sigma)}{\sin \varphi} \qquad (183)$$

Führt man diese Werthe von a, b, α, β in Gleichung (178) und (179) ein, so ergeben sich leicht die gesuchten Coordinaten x_1, y_1, x_2, y_2.

Der oben benützte Ausdruck für $\operatorname{tg} \mu$ nimmt die Form $\frac{0}{0}$ an wenn die zwei Punkte A und B gleichzeitig auf der Linie C D liegen; denn in diesem Falle ist der Winkel $\psi = \varphi = 180^0$ und folglich $\sin \psi = 0$. Man muss also zu vermeiden suchen dass A und B auf C D oder auch nur sehr nahe an C D liegen. Liegt jedoch nur einer der unbekannten Punkte auf der Linie C D, so geben die entwickelten Formeln ohne Anstand die Lage der beiden Punkte A und B. Es versteht sich von selbst dass man aus

den Coordinaten von A und B die Länge A B berechnen und diese Coordinaten wieder als gegeben ansehen kann, um zwei andere unbekannte Punkte daraus zu bestimmen.

Da aus vorstehender Darstellung unserer Lösung der vorliegenden Aufgabe sich entnehmen lässt dass die Berechnung eines Zahlenbeispiels nicht schwierig ist, so überlassen wir die Durchführung eines solchen dem eifrigen Leser selbst, uns begnügend die Aufgabe zu stellen und die Ergebnisse von deren Lösung beizufügen wie sie J. H. Franke (Seite 191 seiner Schrift über Dreiecksnetze) erhalten hat.

Auf den Standpunkten 1 und 2 (A und B) sind zwei durch ihre Coordinaten gegebene Punkte 3 und 4 (D und C) eingeschnitten worden, wobei sich folgende schon ausgeglichene Richtungswinkel ergeben haben:

Standpunkt 1:	Standpunkt 2:
$(4) = 205^0\ 0'\ 0''$	$(3) = 80^0\ 5'\ 18''$
$(2) = 274\ 55\ 48$	$(1) = 120\ 16\ 24$
$(3) = 325\ 0\ 6$	$(4) = 196\ 51\ 0$

Die Coordinaten und der Abstand c der Punkte 3 und 4 sind wie folgt in Meter gegeben:

$$x_3 = +2000 \qquad y_3 = -4000$$
$$x_4 = +2000 \qquad y_4 = -6000$$
$$c = +2000 \qquad \log c = 3{,}30103$$

Man soll die Coordinaten $x_1\ y_1$ und $x_2\ y_2$ der Punkte 1 und 2 nebst der Länge (1, 2) bestimmen.

Die Ergebnisse der nach den vorstehenden Formeln durchgeführten Rechnungen sind folgende:

$$x_1 = +1577{,}31 \qquad y_1 = -4422{,}73$$
$$x_2 = +2500{,}12 \qquad y_2 = -4504{,}58$$
$$(1, 2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 926{,}44\,\text{m}$$

Franke hat an dem angegebenen Orte auch eine Ausgleichungsrechnung für die Aufgabe des unzugänglichen Abstands durchgeführt. Dieser Rechnung liegen die vorstehenden Daten mit Hinzufügung der Richtungswinkel nach einem Punkt 5 zu Grunde, nämlich für

Standpunkt 1:	Standpunkt 2:
$(5) = 231^0\ 41'\ 43''$	$(5) = 228^0\ 34'\ 6''$

Wenn die vorstehenden Werthe von $x_1\ y_1$ und $x_2\ y_2$ als genäherte Coordinaten der Punkte 1 und 2 angesehen und deren Verbesserungen mit $d\,x_1$ $d\,y_1$, $d\,x_2$, $d\,y_2$ bezeichnet werden, so findet Franke auf Seite 196 seiner Schrift:

$$d\,x_1 = +0{,}0197;\ d\,y_1 = +0{,}0094;\ d\,x_2 = +0{,}0571;\ d\,y_2 = +0{,}0733$$
$$x' = x_1 + d\,x_1 = +1577{,}33 \qquad x'' = x_2 + d\,x_2 = +2500{,}18$$
$$y' = y_1 + d\,y_1 = -4422{,}72 \qquad y'' = y_2 + d\,y_2 = -4504{,}51$$
$$(1, 2)' = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2} = 926{,}46$$

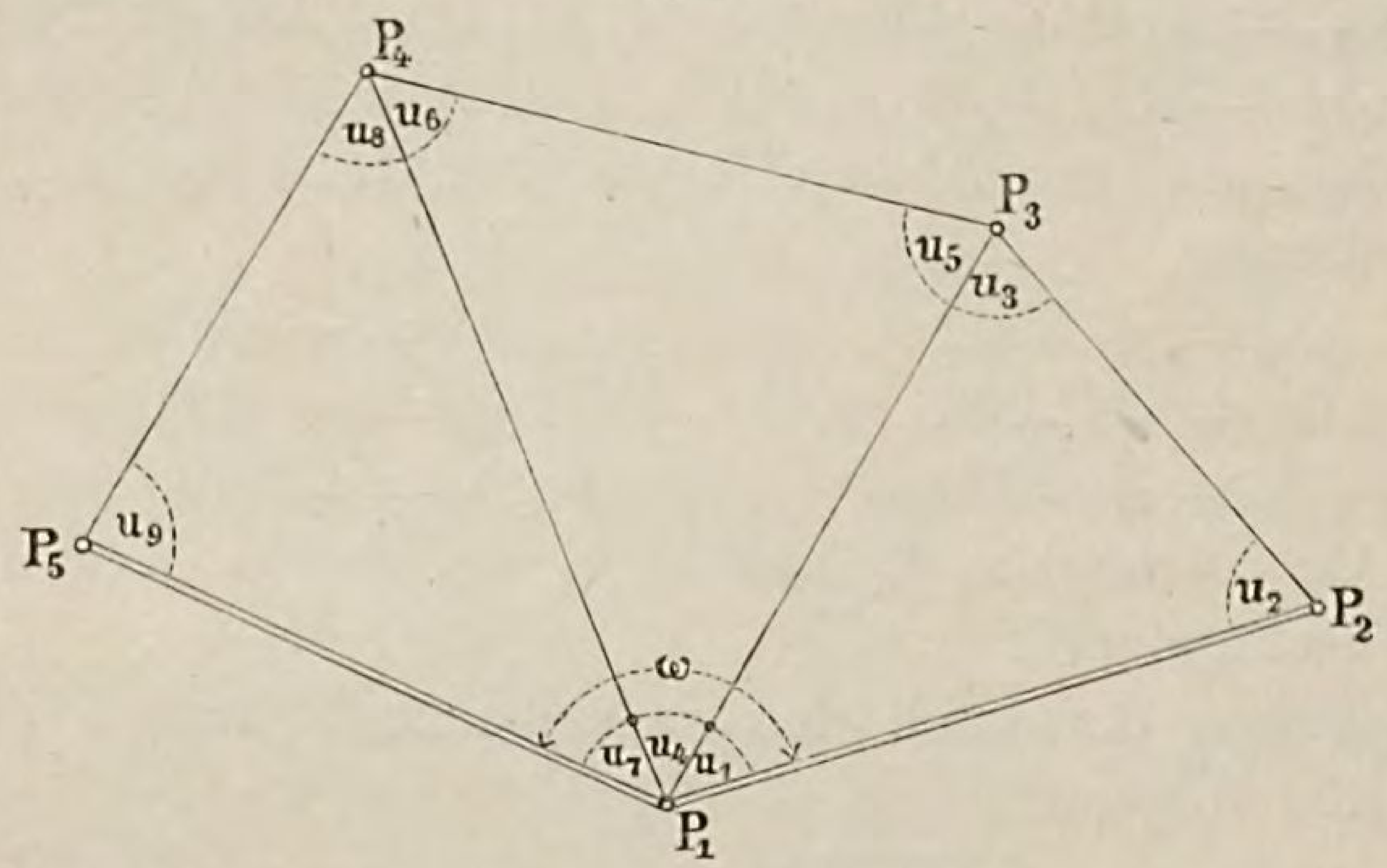
Die Berechnung unzugänglicher Abstände aus den an je zwei Punkten vollzogenen Winkelmessungen verdient häufigere Anwendung als bei Detail-

oder Kleintriangulationen zur Zeit noch der Fall ist, weil sie ohne viel Zeitaufwand zu fordern mehrfache Proben der Messung und Rechnung und hiedurch eine grössere Sicherheit und Genauigkeit des anzulegenden Netzes niederster Ordnung gewährt.

§. 101. In einem aus drei Dreiecken bestehenden Fünfecke sind zwei aneinanderstossende Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel als unabänderliche Grössen gegeben und sämmtliche neun Winkel nach Richtungen gemessen: man soll diese Winkel so ausgleichen dass die Berechnung des Netzes für alle Stücke desselben die gleichen Werthe ergibt, von welcher der gegebenen Seiten man auch ausgehen mag.

Das Fünfeck heisse $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$, die gegebenen Seiten seien $P_1 P_2 = a$ und $P_5 P_1 = b$, der gegebene Winkel sei $P_5 P_1 P_2 = \omega$. Die Aufgabe ver-

Fig. 114.



langt dass, wenn man die 3 Dreiecke $P_1 P_2 P_3 = I$, $P_1 P_3 P_4 = II$, $P_1 P_4 P_5 = III$ von der Seite a aus in der hier angegebenen Folge berechnet, die Seite b, und wenn man von b aus die Dreiecke in umgekehrter Folge berechnet die Seite a erhalten werde, und jedesmal auch die gleichen Werthe für die übrigen Seiten. Wenn wir, wie es hiemit geschieht, voraussetzen dass alle Winkel mit gleicher Genauigkeit gemessen sind, so liegt hier die Aufgabe der „Ausgleichung bedingter Beobachtungen von gleicher Genauigkeit" vor, und wir werden uns desshalb bei ihrer Lösung an die Lehren des §. 20 und §. 21 (Seite 24 bis 26) dieses Bands zu halten haben.

Hienach ist unser erstes Geschäft (a) das Aufsuchen der Bedingungsgleichungen. Heissen die richtigen Winkel der drei Dreiecke $u_1\, u_2\, u_3 \ldots u_9$ so bestehen folgende Forderungen:

$$\left.\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 - 180^0 &= 0 \\ u_4 + u_5 + u_6 - 180^0 &= 0 \\ u_7 + u_8 + u_9 - 180^0 &= 0 \\ u_1 + u_4 + u_7 - \quad \omega \;\; &= 0 \\ \frac{a \sin u_2 \sin u_5 \sin u_8}{b \sin u_3 \sin u_6 \sin u_9} &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (184)$$

Setzen wir statt der richtigen Winkel u_1 u_2 u_3 ... die beobachteten o_1 o_2 o_3 ... so werden die rechten Seiten dieser Gleichungen nicht null, und beziehungsweise 1, sondern erhalten kleine positive oder negative Werthe w_1 w_2 w_3 ... oder Widersprüche welche zu berechnen und auszugleichen sind:

$$\left.\begin{aligned} o_1 + o_2 + o_3 - 180^0 + w_1 &= 0 \\ o_4 + o_5 + o_6 - 180^0 + w_2 &= 0 \\ o_7 + o_8 + o_9 - 180^0 + w_3 &= 0 \\ o_1 + o_4 + o_7 - \omega + w_4 &= 0 \\ \frac{a \sin o_2 \sin o_5 \sin o_8}{b \sin o_3 \sin o_6 \sin o_9} &= 1 \pm e = w_5 \end{aligned}\right\} \quad (185)$$

Die letzten Gleichungen beider vorstehenden Systeme (184) und (185), die Seitengleichungen, kann man auch logarithmisch anschreiben, so dass dieselben folgende Formen annehmen:

$$\log a + \log \sin u_2 + \log \sin u_5 + \log \sin u_8 = \log b + \log \sin u_3 + \\ + \log \sin u_6 + \log \sin u_9$$

$$\log a + \log \sin o_2 + \log \sin o_5 + \log \sin o_8 = \log b + \log \sin o_3 + \\ + \log \sin o_6 + \log \sin o_9 + \log w_5$$

Zieht man die zweite Gleichung von der ersten ab und bezeichnet die Unterschiede zwischen den wahren Werthen u und den beobachteten falschen o mit v, so dass $u_1 - o_1 = v_1$, $u_2 - o_2 = v_2$, $u_3 - o_3 = v_3$ u. s. w. so ergibt sich folgende Gleichung:

$$\log \sin (o_2 + v_2) - \log \sin o_2 + \log \sin (o_5 + v_5) - \log \sin o_5 + \log \sin (o_8 + v_8) - \log \sin o_8 = \log \sin (o_3 + v_3) - \log \sin o_3 + \log \sin (o_6 + v_6) - \\ - \log \sin o_6 + \log \sin (o_9 + v_9) - \log \sin o_9 + \log w_5$$

Nun stellen die Buchstaben v_1 v_2 v_3 ... v_9 gegenüber o_1 o_2 o_3 ... o_9 nur sehr kleine Winkel vor, so dass es erlaubt ist für $\sin (o_1 + v_1)$ zu setzen $\sin o_1 + \Delta_1 v_1$, wobei Δ_1 die in den Logarithmentafeln stehende Differenz für 1 Secunde bedeutet wenn v in Secunden ausgedrückt ist; es wird demnach $\log \sin (o_1 + v_1) - \log \sin o_1 = \log \sin o_1 + \Delta_1 v_1 - \log \sin o_1 = \Delta_1 v_1$ und $\log \sin (o_2 + v_2) - \log \sin o_2 = \Delta_2 v_2$ u. s. w. Die vorstehende Gleichung lässt sich somit ganz kurz folgendermassen schreiben und es stellt in derselben nunmehr w_5 ebenfalls Secunden vor wenn die v Secunden bedeuten:

$$\Delta_2 v_2 + \Delta_5 v_5 + \Delta_8 v_8 - (\Delta_3 v_3 + \Delta_6 v_6 + \Delta_9 v_9) = w_5 \quad (186)$$

Zieht man in gleicher Weise die erste, zweite, dritte, vierte Gleichung des Systems (185) von der ersten, zweiten, dritten, vierten Gleichung des Systems (184) ab, so kommen zu der vorstehenden noch folgende 4 Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 &= w_1 \\ v_4 + v_5 + v_6 &= w_2 \\ v_7 + v_8 + v_9 &= w_3 \\ v_1 + v_4 + v_7 &= w_4 \end{aligned}\right\} \quad (187)$$

Ausser diesen 5 Bedingungen ist auch noch die ganz allgemeine zu befriedigen:

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 + \ldots\ldots + \nu_9^2 = \text{minimum} \qquad (188)$$

Multiplicirt man die 4 Gleichungen (187) nacheinander mit den willkührlichen Constanten k_1 k_2 k_3 k_4 und die Gleichung (186) mit k_5, so ergeben sich durch Differentiiren der genannten Gleichungen und der Function (188) die Correlatengleichungen:

$$\begin{array}{lll} \nu_1 = + k_1 + k_4 & \nu_4 = + k_2 + k_4 & \nu_7 = + k_3 + k_4 \\ \nu_2 = + k_1 + \Delta_2 k_5 & \nu_5 = + k_2 + \Delta_5 k_5 & \nu_8 = + k_3 + \Delta_8 k_5 \\ \nu_3 = + k_1 - \Delta_3 k_5 & \nu_6 = + k_2 - \Delta_6 k_5 & \nu_9 = + k_3 - \Delta_9 k_5 \end{array} \qquad (189)$$

und durch Einsetzen dieser Werthe von ν_1 bis ν_9 in die Bedingungsgleichungen (187) und (186) die 5 Normalgleichungen zur Bestimmung der Correlaten k_1 bis k_5:

$$\begin{array}{llllll} w_1 = & +3k_1 & & & + k_4 & + (\Delta_2 - \Delta_3) k_5 \\ w_2 = & & +3k_2 & & + k_4 & + (\Delta_5 - \Delta_6) k_5 \\ w_3 = & & & +3k_3 & + k_4 & + (\Delta_8 - \Delta_9) k_5 \\ w_4 = & + k_1 & + k_2 & + k_3 & + 3k_4 & \\ \log w_5 = & + (\Delta_2 - \Delta_3) k_1 & + (\Delta_5 - \Delta_6) k_2 & + (\Delta_8 - \Delta_9) k_3 & & + (\Delta_2^2 \ldots \Delta_9^2) k_5 \end{array}$$

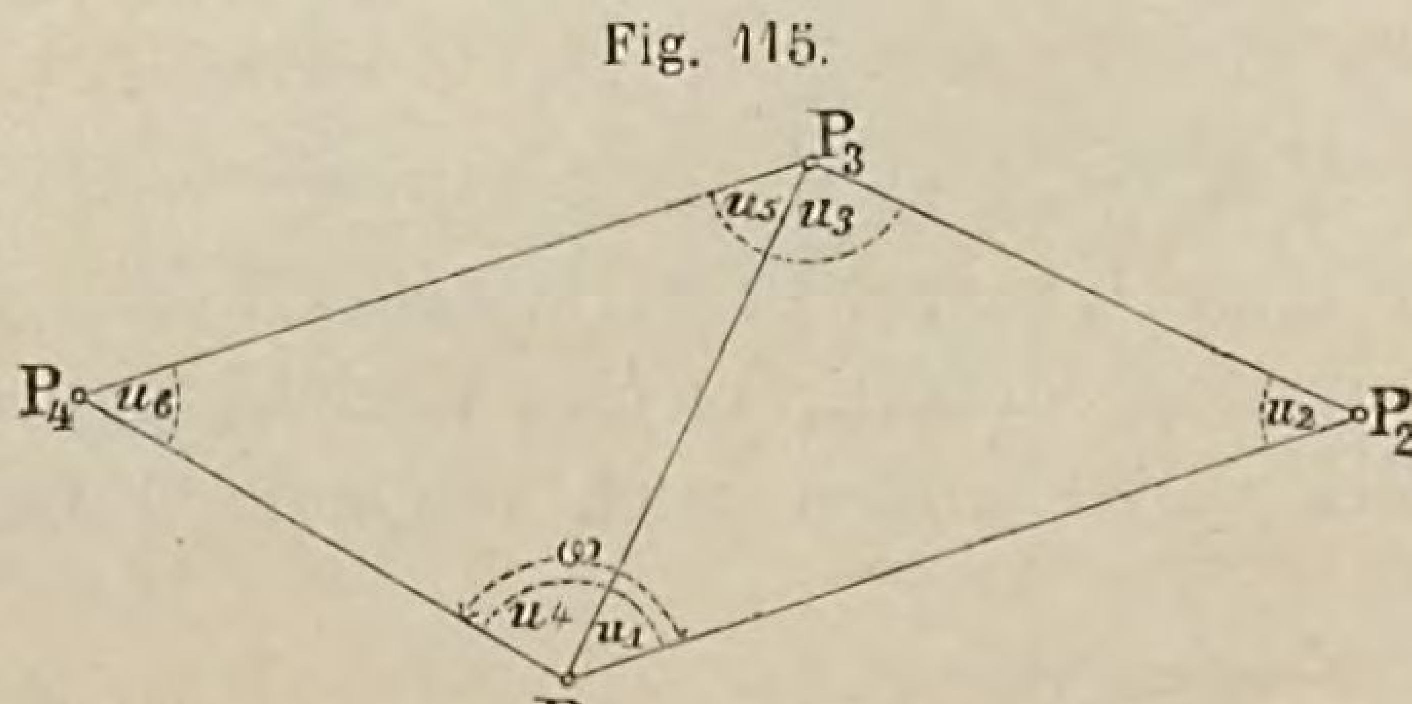
wobei $[\Delta_2^2 \ldots \Delta_9^2]$ für $(\Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \Delta_5^2 + \Delta_6^2 + \Delta_8^2 + \Delta_9^2)$ geschrieben ist.

Will man diese Normalgleichungen auf die Form (48) des §. 26 dieses Bands bringen um sie nach den daraus abgeleiteten Formeln auflösen zu können, so ist zu setzen:

$$\begin{array}{llll} [a\,a] = +3 & [b\,b] = +3 & [c\,d] = +1 & [a\,e] = (\Delta_2 - \Delta_3) \\ [a\,b] = 0 & [b\,c] = 0 & [c\,n] = -w_3 & [b\,e] = (\Delta_5 - \Delta_6) \\ [a\,c] = 0 & [b\,d] = +1 & [d\,d] = +3 & [c\,e] = (\Delta_8 - \Delta_9) \\ [a\,d] = +1 & [b\,n] = -w_2 & [d\,e] = 0 & [e\,e] = (\Delta_2^2 \ldots \Delta_9^2) \\ [a\,n] = -w_1 & [c\,c] = +3 & [d\,n] = -w_4 & [e\,n] = -\log w_5 \end{array}$$

Hiemit würden sich die Unbekannten nach den Formeln (55) ergeben wenn man dieselben zuvor für 5 Unbekannte umgestaltet hätte, was nach den Auseinandersetzungen des §. 26 nicht schwierig wäre. Da wir aber die vorliegende Aufgabe nur an dem Zahlenbeispiel erläutern wollen welches Franke a. a. O. Seite 200 berechnet hat, und dieses Beispiel die Lösung von nur 4 Normalgleichungen fordert, so können wir uns mit den Formeln (55) begnügen.

Fig. 115.



Es bestehe also das Netz aus nur zwei Dreiecken, P_1 P_2 P_3 und P_3 P_1 P_4, und in dem dadurch gebildeten Vierecke P_1 P_2 P_3 P_4 seien die Coordinaten von drei Punkten wie folgt in Meter gegeben:

$P_1: \quad x_1 = +2000{,}00 \qquad y_1 = -4000{,}00$

$P_2: \quad x_2 = +2000{,}00 \qquad y_2 = -4600{,}00$

$P_4: \quad x_4 = +1890{,}19 \qquad y_4 = -3590{,}19$

und auf den Eckpunkten des Vierecks habe man folgende Richtungen beobachtet:

Auf P_1:	Auf P_3:
Nach $P_2 = 184^0\,59'\,42''$	Nach $P_1 = 90^0\,0'\,0''$
„ $P_3 = 139\;\;59\;\;54$	„ $P_2 = 0\;\;0\;\;0$
„ $P_4 = 20\;\;0\;\;0$	„ $P_4 = 120\;\;0\;\;6$
Auf P_2:	Auf P_4:
Nach $P_1 = 40^0\,2'\,24''$	Nach $P_1 = 55^0\,0'\,24''$
„ $P_3 = 85\;\;2\;\;6$	„ $P_3 = 25\;\;0\;\;6$

Die beiden Dreiecke haben somit folgende beobachtete Winkel:

$P_1\,P_2\,P_3 = \text{I}$:	$P_3\,P_1\,P_4 = \text{II}$:
$o_1 = 44^0\,59'\,48''$	$o_4 = 119^0\,59'\,54''$
$o_2 = 44\;\;59\;\;42$	$o_5 = 30\;\;0\;\;6$
$o_3 = 90\;\;0\;\;0$	$o_6 = 30\;\;0\;\;18$
$179^0\,59'\,30''$	$180^0\;\;0'\,18''$

Aus den gegebenen Coordinaten von P_1, P_2, P_4 findet man

$$P_1\,P_2 = a = 600\,\text{m},\; P_1\,P_4 = b = 424{,}27\,\text{m},\; P_4\,P_1\,P_2 = \omega = 165^0\,0'\,0''$$

während aus den Beobachtungen folgt:

$$o_1 + o_4 = 44^0\,59'\,48'' + 119^0\,59'\,54'' = 164^0\,59'\,42''$$

Es werden folglich zunächst die Widersprüche:

$$w_1 = -(o_1 + o_2 + o_3 - 180^0) = +30'' = v_1 + v_2 + v_3$$

$$w_2 = -(o_4 + o_5 + o_6 - 180^0) = -18'' = v_4 + v_5 + v_6$$

$$w_3 = -\quad(o_1 + o_4 - 165^0) \quad = +18'' = v_1 + v_4$$

$$w_4 = 1 - \frac{a \sin o_2 \sin o_5}{b \sin o_3 \sin o_6} = +9'' = 0{,}22\,v_2 - 0{,}00\,v_3 + 0{,}37\,v_5 - 0{,}37\,v_6$$

und hierauf die Correlatengleichungen:

$$\begin{aligned} v_1 &= k_1 + k_3 & v_4 &= k_2 + k_3 \\ v_2 &= k_1 + 0{,}22\,k_4 & v_5 &= k_2 + 0{,}37\,k_4 \\ v_3 &= k_1 - 0{,}00\,k_4 & v_6 &= k_2 - 0{,}37\,k_4 \end{aligned} \qquad (189)$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in die obenstehenden Bedingungsgleichungen werden die vier Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= +\;3\,.\,k_1 + 0\,.\,k_2 + 1\,.\,k_3 + 0{,}22\,.\,k_4 - 30 \\ 0 &= \;\;0\,.\,k_1 + 3\,.\,k_2 + 1\,.\,k_3 + \;\;0\,.\,k_4 + 18 \\ 0 &= \;\;1\,.\,k_1 + 1\,.\,k_2 + 2\,.\,k_3 + \;\;0\,.\,k_4 - 18 \\ 0 &= +0{,}22\,.\,k_1 + 0\,.\,k_2 + 0\,.\,k_3 + 0{,}33\,.\,k_4 - \;\;9 \end{aligned}$$

Zur Lösung dieser 4 Gleichungen kann man das Gleichungssystem (55) Seite 30 benützen, nachdem man in der Gleichung für z die falschen Nenner [d d . 2] der beiden letzten Glieder in die richtigen [c c . 2] umgewandelt hat. Hiezu ist nöthig dass man die Zahlencoefficienten der oben

stehenden 4 Normalgleichungen ihren allgemeinen Zeichen gleich setzt, nämlich

[a a] = 3	[b b] = 3	[c c] = 2
[a b] = 0	[b c] = 1	[c d] = 0
[a c] = 1	[b d] = 0	[c n] = — 18
[a d] = 0,22	[b n] = 18	[d d] = 0,33
[a n] = — 30		[d n] = — 9

Mit diesen Werthen findet man nach Anleitung des §. 26 leicht die Zahlenwerthe der Coefficienten in den 4 Gleichungen (55) jenes Paragraphen und damit die Unbekannten

$u = k_4 = +24{,}611''$; $z = k_3 = +11{,}734''$; $y = k_2 = -9{,}911''$; $x = k_1 = +4{,}284''$

Setzt man diese Correlatenwerthe in das Gleichungssystem (189) so werden die einzelnen Verbesserungen folgende:

$$v_1 = +16{,}018'' \qquad v_4 = +1{,}823''$$
$$v_2 = +9{,}698 \qquad v_5 = -0{,}805$$
$$v_3 = +4{,}284 \qquad v_6 = -19{,}017$$

und hiemit berechnen sich die ausgeglichenen Winkel in den Dreiecken wie folgt:

Im Dreieck I:	Im Dreieck II:
$u_1 = o_1 + v_1 = 45^0\ 0'\ 4''$	$u_4 = o_4 + v_4 = 119^0\ 59'\ 56''$
$u_2 = o_2 + v_2 = 44\ \ 59\ \ 52$	$u_5 = o_5 + v_5 = 30\ \ 0\ \ 5$
$u_3 = o_3 + v_3 = 90\ \ 0\ \ 4$	$u_6 = o_6 + v_6 = 29\ \ 59\ \ 59$
$180^0\ 0'\ 0''$	$180^0\ 0'\ 0''$

Die Summe der beiden Winkel am Punkte P_1 wird $u_1 + u_4 = 165^0 = \omega =$ dem gegebenen festen Winkel der Seiten a und b.

Will man die Ergebnisse vorstehender Ausgleichungsrechnung auch dazu benützen die beobachteten Richtungen zu verbessern, so kann dieses wie folgt geschehen. Es kommt nur darauf an, an jeder Richtung die zugehörige Verbesserung anzubringen. Wenn aber in den vier Ecken des Vierecks $P_1\,P_4\,P_3\,P_2$ die sämmtlichen Richtungen gemessen sind, so findet man die Verbesserungen wie folgt: In P_1 sei die Richtung $P_4 = 0$, so ist die Richtung

$$P_4 = 20^0\ 0'\ 0'' \qquad\qquad = 20^0\ 0'\ 0''$$
$$P_3 = 139\ 59\ 54\ + v_4 \qquad = 139\ 59\ 56$$
$$P_2 = 184\ 59\ 42\ + v_4 + v_1 = 185\ \ 0\ \ 0$$

In P_2 sei die Richtung P_1 die Nullrichtung, so ist die Richtung

$$P_1 = 40^0\ 2'\ 24'' \qquad = 40^0\ 2'\ 24''$$
$$P_3 = 85\ \ 2\ \ 6\ + v_2 \qquad = 85\ \ 2\ \ 16$$

In P_3 sei die Richtung P_2 die Nullrichtung, so ist die Richtung

$$P_2 = 0^0\ 0'\ 0'' \qquad = 0^0\ 0'\ 0''$$
$$P_1 = 90\ \ 0\ \ 0\ + v_3 \qquad = 90\ \ 0\ \ 4$$
$$P_4 = 120\ \ 0\ \ 6\ + v_3 + v_5 = 120\ \ 0\ \ 9$$

In P_4 sei die Richtung P_3 die Nullrichtung, so ist die Richtung

$$P_3 = 25^0\ 0'\ 6'' \qquad = 25^0\ 0'\ 6''$$
$$P_1 = 55\ \ 0\ \ 24\ + v_6 \qquad = 55\ \ 0\ \ 5$$

Für die Seitengleichung findet man jetzt, wie es sein muss, $a \sin(o_2 + \nu_2) \sin(o_5 + \nu_5) = b \sin(o_3 + \nu_3) \sin(o_6 + \nu_6)$, indem

$\log a$	$= 2{,}77815$	$\log b$	$= 2{,}62764$
$\log \sin(o_2 + \nu_2)$	$= 9{,}84947$	$\log \sin(o_3 + \nu_3)$	$= 0{,}00000$
$\log \sin(o_5 + \nu_5)$	$= 9{,}69899$	$\log \sin(o_6 + \nu_6)$	$= 9{,}69897$
	$2{,}32661$		$2{,}32661$

Hiemit ist auch bewiesen dass man für den Punkt P_3 die gleichen Coordinaten und für die von dort ausgehenden Seiten die gleichen Azimuthe erhält, ob man die Berechnung von $P_1 P_2$ gegen $P_1 P_4$ hin oder in umgekehrter Richtung ausführt.

E. Aufnahme eines Verbands von Grundstücken.

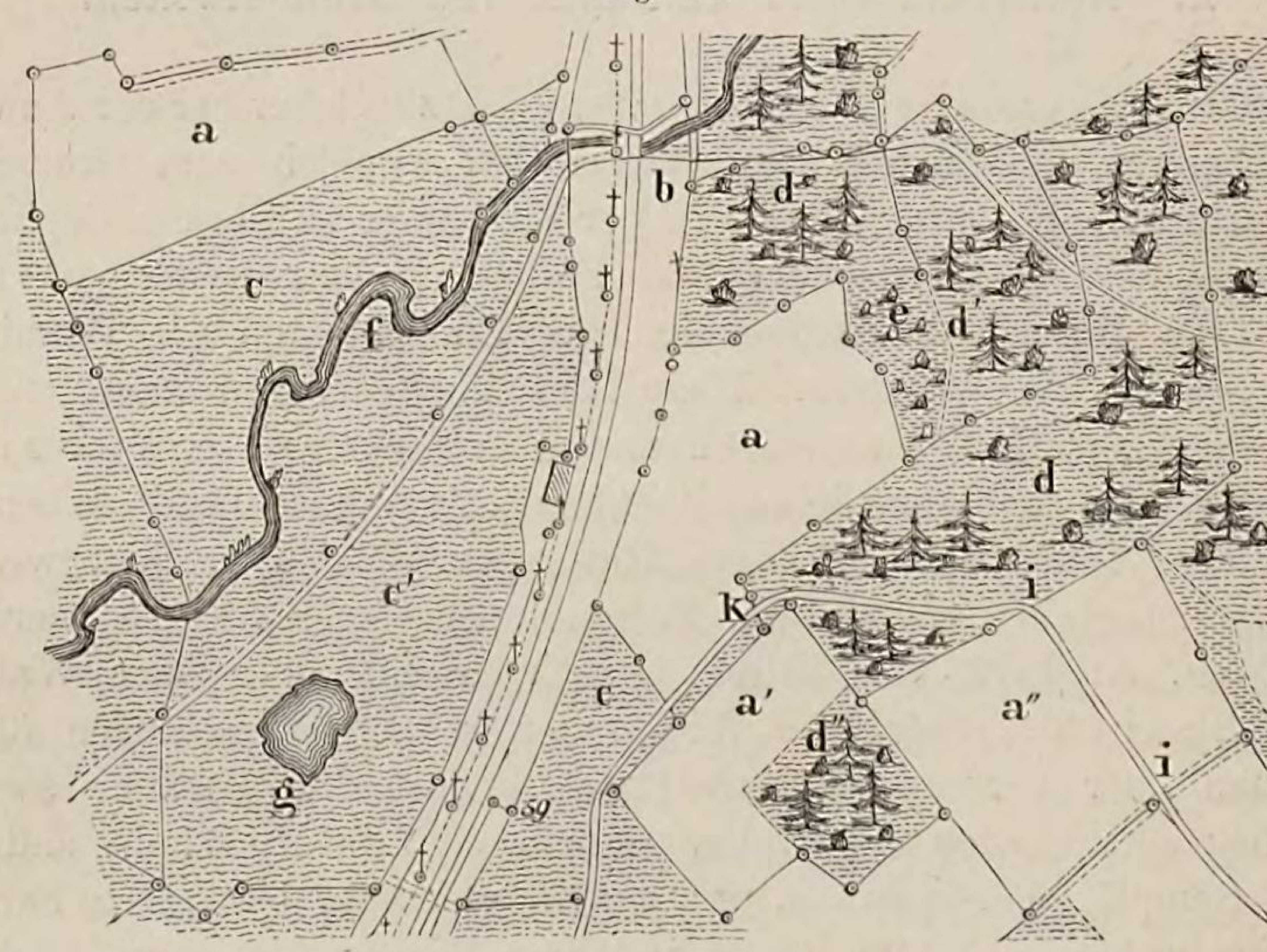
§. 102. Allgemeines. Der Hauptgrundsatz welcher bei der Aufnahme einer grösseren Bodenfläche zu befolgen ist, nämlich vom Grossen in's Kleine zu arbeiten, wurde bereits in der Einleitung zu diesem Capitel ausgesprochen, und es ist darunter das Festlegen einer Reihe von Hauptpunkten, an die sich das Aufnehmen der Einzelnheiten des Terrains anschliessen kann, zu verstehen. Diese Einzelnheiten nennt man, wenn sie für sich begrenzt sind, Parzellen und unterscheidet sie nach ihrer staats-, land- oder forstwirthschaftlichen Benützung. So heissen dieselben Bau- Weg- Fluss- Teich- Feld- Wiesen- Hut- oder Wald-Parzellen, wenn sie der Reihe nach ein Gebäude mit Hofraum, ein Stück Strasse oder Fluss, einen Teich, ein Feld, eine Wiese, eine Viehweide oder einen Wald umfassen. Besteht das Feld, die Wiese, der Wald aus mehreren für sich begrenzten oder verschiedenen Besitzern gehörenden Theilen, so bildet jeder Theil eine besondere Parzelle. Steinbrüche, Lehm- Thon- und Sandgruben, Sümpfe, Torfmoore u. dgl. bilden ebenfalls besondere Parzellen. Die Raine welche sich sehr häufig zwischen Feldern hinziehen, sind keine besonderen Parzellen, sondern werden zu den Feldern gerechnet welchen sie angehören. Gehört ein Rain zwei Besitzern zugleich, so wird zu jedem Felde die Hälfte oder ein durch die Eigenthumsverhältnisse bestimmter Theil gerechnet. Fig. 116, S. 212 stellt einen Verband von mehreren Parzellen vor: a, a sind Feldparzellen, b ist eine Bahnparzelle, c, c sind Wiesen-, d, d Waldparzellen, e ist eine zu d′ gehörige Hutparzelle, f eine Flussparzelle, g ist eine zu c′ gehörige Teichparzelle; die Waldparzelle d″ gehört zur Feldparzelle a′, die Wegparzelle i, i zum Felde a″ u. s. w.

Wenn es sich bei der Aufnahme einer Flurmarkung um Besitzverhältnisse handelt, so müssen alle Parzellen genau dargestellt werden; will man aber bloss ein Bild der natürlichen und künstlichen Bildungen des Bodens, so kann man alle aneinander stossenden Felder als eine einzige Parzelle behandeln, ebenso alle aneinander stossenden Wiesentheile als eine einzige Wiesen-

parzelle und alle zusammenhängenden Waldtheile als eine einzige Waldparzelle. In diesem letzteren Falle nimmt man das Gelände bloss nach Culturgattungen auf.

Die Grenzen der aufzunehmenden Parzellen sind entweder durch Marksteine, Raine, Hecken, Zäune, Mauern, Einfriedigungen etc. gegeben und werden dem Geometer durch eine orts- und sachkundige Person vorgezeigt, von der er zugleich die Namen der Besitzer erfährt. Von diesem Vorzeiger begleitet vollzieht der Geometer oder dessen Gehilfe die Abpflockung der einzelnen Parzellengrenzen, wobei die Bd I, Seite 137 beschriebenen Markpflöcke zur Anwendung kommen. Diese Pflöcke sind in solchen Entfernungen in den Boden zu stecken dass die geraden Verbindungslinien zwischen je zwei aufeinander folgenden genau genug mit den Parzellen-

Fig. 116.

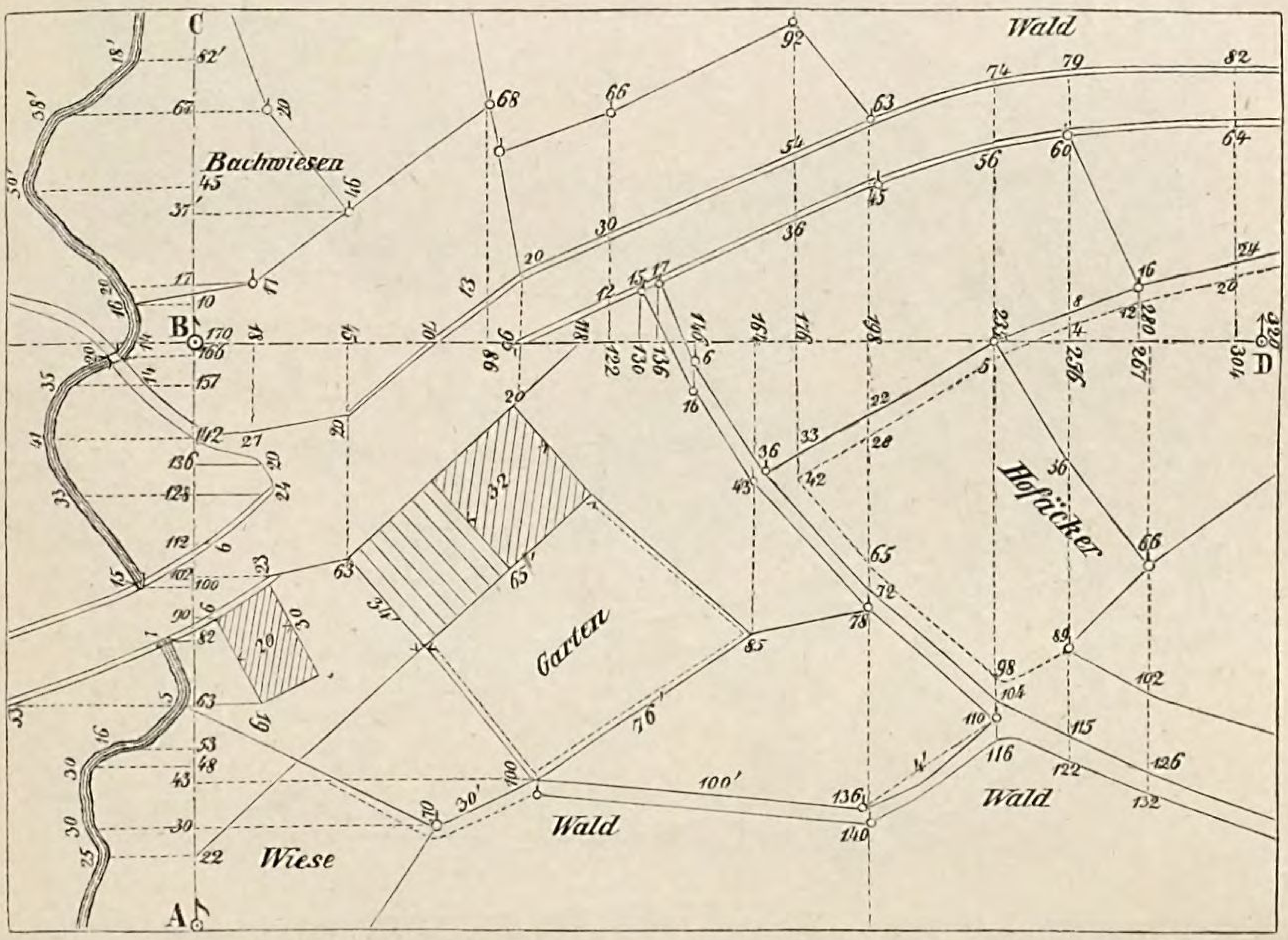


grenzen zusammenfallen. Ein praktischer Blick wird entscheiden, was in gegebenen Fällen unter „genau genug“ zu verstehen ist: bei guten Gärten, Feldern und Wiesen bedeutet es offenbar etwas Anderes als bei Viehweiden, Torfmooren u. dgl. Gebäude werden in der Regel nur mit zwei Pflöcken an der Langseite bezeichnet, weil sich mit Hilfe der dadurch bestimmten Geraden der Grundriss dieser Parzellen leicht bestimmen lässt.

§. 103. Handriss der Flur. Während des Abflockens der Parzellen fertigt der Geometer einen Handriss der ganzen Flurmarkung mit allen davon aufzunehmenden Parzellen an. Dieser Handriss wird so naturgetreu gemacht, als es das Augenmass zulässt, und man schreibt in denselben alle Pflocknummern, Culturgattungen, Eigenthümer etc. ein; Brücken, Stege, Wehre, Baumgruppen, Gebäude, Signale u. s. w. werden so bezeichnet, wie es bei Situationszeichnungen gebräuchlich und aus Fig. 117

welche ein Stück eines Handrisses vorstellt, theilweise zu ersehen ist. Ein solcher Riss erleichtert die Aufnahme ausserordentlich, wesshalb er niemals weggelassen werden darf und in möglichst grossem Massstabe mit Sorgfalt anzufertigen ist. Derselbe liefert auch in Verbindung mit der bei seiner Aufnahme erworbenen Ortskenntniss das beste Mittel zur Bestimmung des Vielecks, an das sich die Detail- oder Stückmessung anzuschliessen hat und welches nebst den Bindelinien die man von einem Eck- oder Zwischenpunkte zu einem anderen zieht (z. B. A F C in Fig. 77, S. 146), in den Handriss eingezeichnet wird. Wie das Vieleck selbst zu legen ist, hängt zum Theil von den anzuwendenden Aufnahmsmethoden, grössten-

Fig. 117.

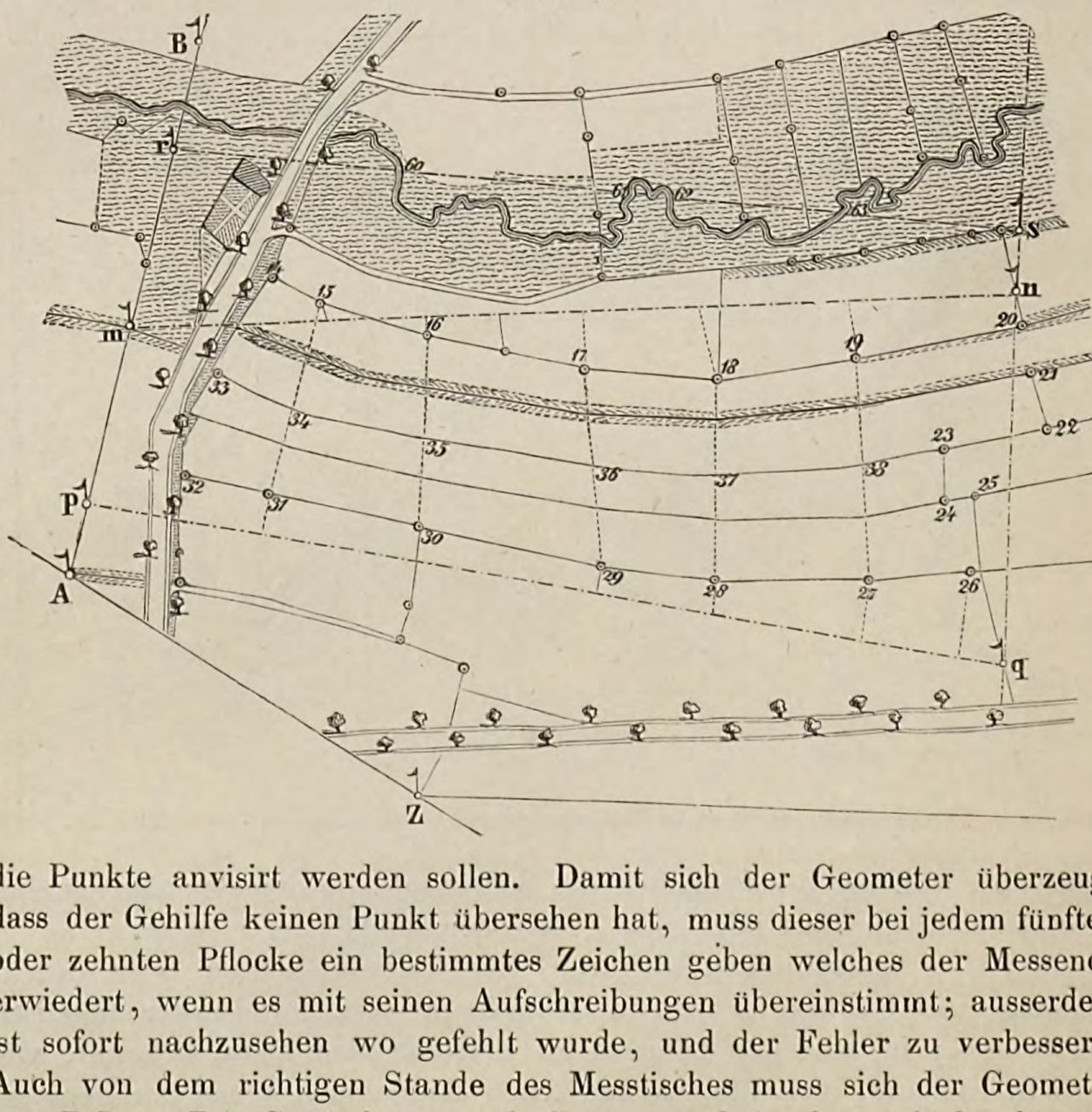


theils aber von der Beschaffenheit des Bodens ab: ob derselbe nämlich eine freie Aussicht gewährt oder nicht, fest oder sumpfig ist u. s. w.

§. 104. Messtischaufnahme. Zur Detailaufnahme oder Stückmessung eines Flurbezirks wird in Deutschland vorzugsweise der Messtisch angewendet; in manchen Ländern ist derselbe aber kaum bekannt, wie z. B. in England, wo alle geometrischen Aufnahmen ohne ihn gemacht werden. Es lässt sich nicht läugnen dass der Messtisch, namentlich in Verbindung mit dem Reichenbach'schen Distanzmesser, ein bequemes und rasches Arbeiten gestattet und für alle rechnungsscheuen Geometer ein vortrefflicher Aufnahmeapparat ist. Dagegen muss der Detailmessung mit dem Theodolithen in Verbindung mit Kette oder Latte und Winkelprisma (Coordinatenapparat), wenn sie auch mehr Umsicht und Arbeit fordert, der

Vorzug grösserer Genauigkeit und der Vortheil zuerkannt werden dass man einen schadhaft gewordenen Plan aus den ursprünglich aufgenommenen Massen (den Naturmassen) wiederherstellen oder einen neuen Plan in beliebigem Massstabe anfertigen kann. Da übrigens jede Methode ihre Licht- und Schattenseiten hat und beide für untergeordnete Aufnahmen recht gut neben einander bestehen können und sollen, so folgen hier zu beiden Aufnahmsmethoden die erforderlichen weiteren Erläuterungen. Bei der Aufnahme mit dem Messtische gibt man dem Gehilfen welcher eine Latte oder Fahne auf den anzuvisirenden Punkten aufzustellen und zu halten hat, ein Verzeichniss mit, aus dem er sieht, in welcher Reihenfolge

Fig. 118.

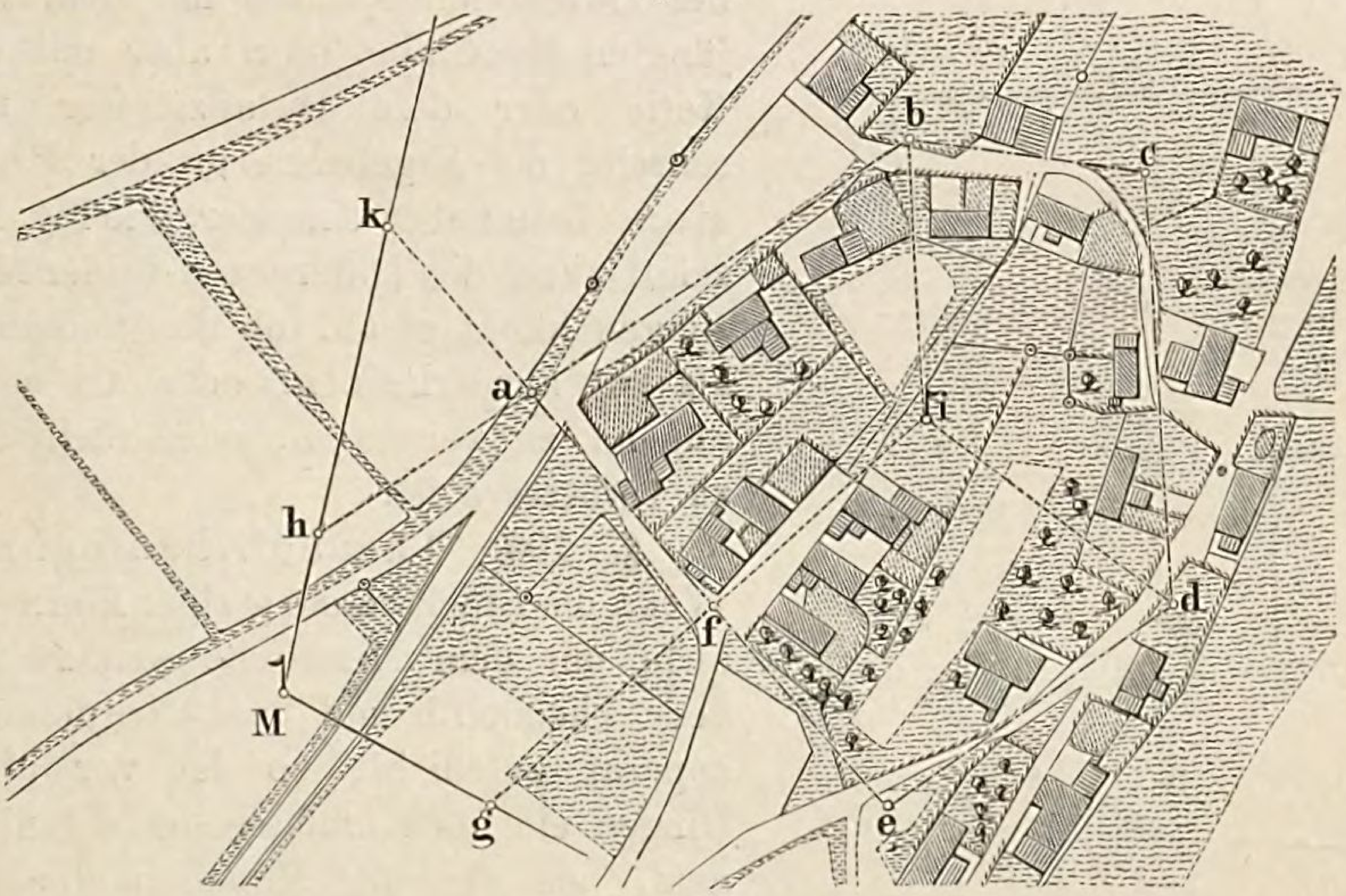


die Punkte anvisirt werden sollen. Damit sich der Geometer überzeugt dass der Gehilfe keinen Punkt übersehen hat, muss dieser bei jedem fünften oder zehnten Pflocke ein bestimmtes Zeichen geben welches der Messende erwiedert, wenn es mit seinen Aufschreibungen übereinstimmt; ausserdem ist sofort nachzusehen wo gefehlt wurde, und der Fehler zu verbessern. Auch von dem richtigen Stande des Messtisches muss sich der Geometer von Zeit zu Zeit Gewissheit verschaffen, was dadurch geschieht dass er die Linealkante der Kippregel an die Orientirungslinie legt und zusieht, ob das betreffende Signal von dem Fadenkreuze gedeckt wird. Sollte sich eine Abweichung ergeben, so ist nicht nur der Tisch zu berichtigen, sondern auch jeder Pfahl nochmals anzuvisiren welcher seit der letzten Versicherung aufgenommen wurde.

Ist die Uebersicht eines Flurtheils durch Häuser oder Bäume sehr erschwert, so geht man vor Allem darauf aus, diesen Theil mit einem kleineren Vielecke zu umziehen das mit dem Hauptvieleck fest verknüpft ist, und benützt die Seiten dieses kleineren Vielecks als Abscissenlinien bei der weiteren Aufnahme der Coordinaten. In Fig. 119 stellt a b c d e f ein solches Hilfsvieleck vor welches mit dem bei M vorüberziehenden Hauptvieleck in Verbindung steht. Gestattet das Terrain, einen Punkt i im Innern des Vielecks zwei- oder dreimal anzuschneiden, so wird man dieses nicht unterlassen, um daselbst einen neuen gut bestimmten Standpunkt für den Messtisch oder Theodolithen zu gewinnen. Besitzt man einen Distanzmesser, so lassen sich von i aus eine grosse Anzahl Punkte mit geringer Mühe erhalten.

Der Geometer muss während der Anfnahme eines Flurbezirks stets

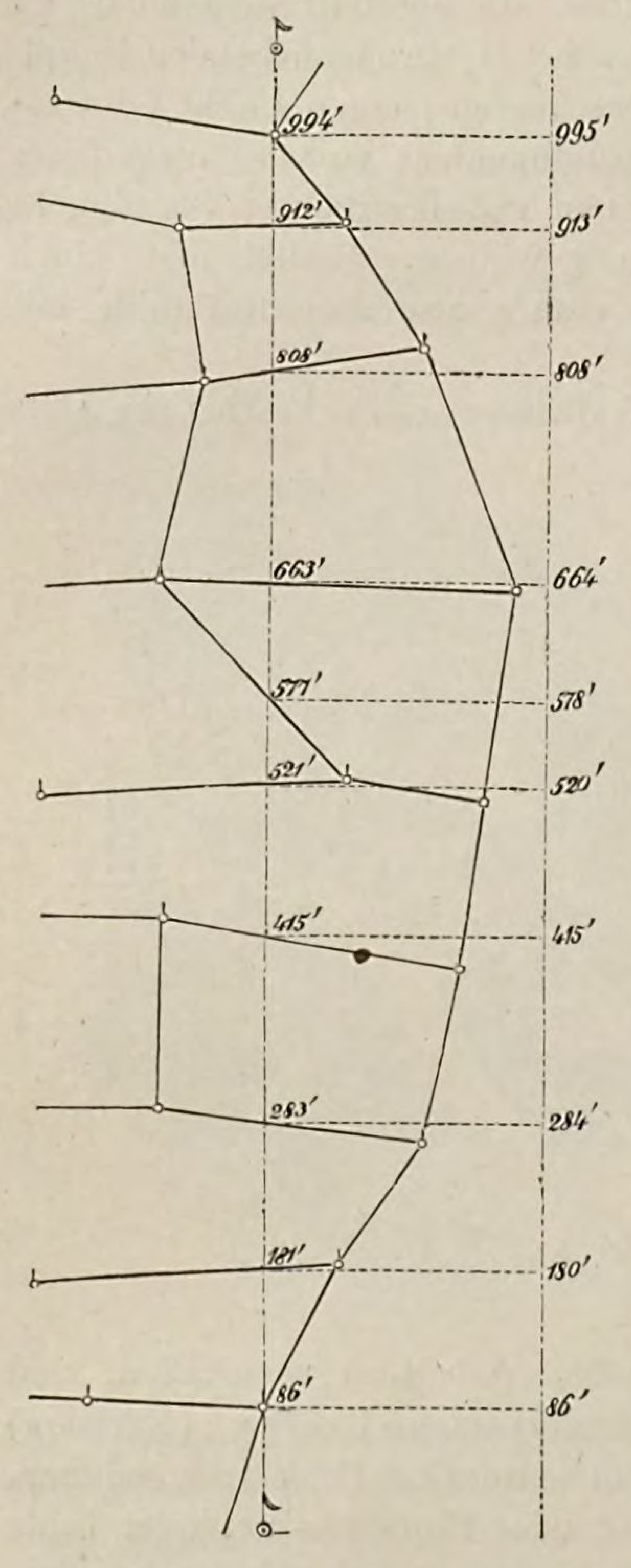
Fig. 119.



darauf bedacht sein, sich eine Controle seiner Arbeit zu verschaffen, und nach dem Schlusse derselben hat er noch eine besondere Prüfung (Revision) der graphisch dargestellten Messungsergebnisse auf dem Felde vorzunehmen. Hierbei kann er entweder Probemessungen oder Probeschnitte, oder beide Prüfungsmethoden zugleich anwenden. Wählt er nämlich aus dem gezeichneten Plane zwei beliebige Punkte aus und misst deren Entfernung im Bilde und auf dem Felde, so bedient er sich der Probemessung: bringt er aber einen Punkt des Messtisches über einen gleichnamigen Punkt des Felds und visirt er, nach gehöriger Orientirung des Blatts, beliebige Punkte an, um zu sehen ob sie mit ihren Bildern in einerlei Visirebenen liegen, so wendet er den Probeschnitt an. Es bedarf wohl kaum der Erinnerung dass diese letztere Prüfungsmethode ebenso wie erstere auch für die Aufnahme mit dem Theodolithen ihre Anwendung findet, und dass in diesem

Falle die Horizontalwinkel von einer bestimmten, im Plane und auf dem Felde festgelegten geraden Linie aus gezählt werden müssen. Mit dem Reichenbach'schen Distanzmesser kann man den Probeschnitt und die Probemessung gleichzeitig ausführen, wesshalb er zur Revision der Aufnahme besonders geeignet ist.

Fig. 120.



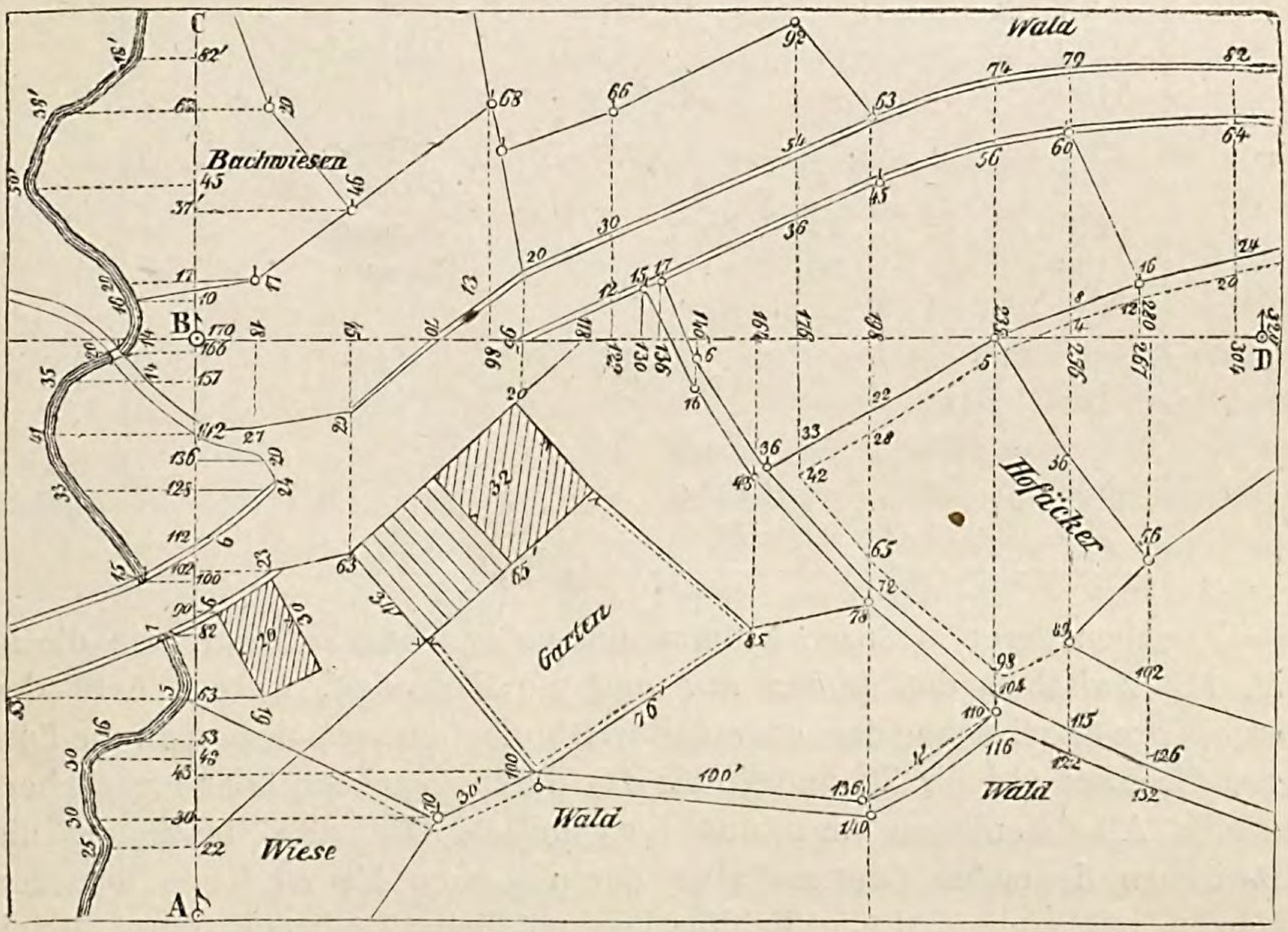
Probemessungen macht man selbstverständlich nicht bloss zwischen je zwei, sondern sogleich zwischen mehreren Punkten welche einer viele Grenzen durchschneidenden Diagonale angehören. Diese Diagonale wird auf dem Felde abgesteckt und auf dem Plane ausgezogen: hier misst man die Abscissen der Durchschnittspunkte mit dem verjüngten Massstabe, dort aber mit der Kette oder dem Distanzmesser und schreibt die Ergebnisse an der Revisionslinie neben einander, wie Fig. 120 zeigt. Von den Differenzen beider Messungen hängt es ab, ob die Aufnahme als gut anzuerkennen, oder als ungenügend zu verwerfen, oder theilweise zu verbessern ist.

§. 105. Theodolithaufnahme. Wenn die Stückmessung einer Flurmark nicht mit dem Messtische sondern mit dem Theodolith und dem Coordinatenapparat geschieht, so ist vor allen Dingen ein noch umfassenderes Liniennetz, als für die Messtischaufnahme nöthig war, herzustellen, und dieses geschieht dadurch dass man die gegebenen Dreiecks- oder Vieleckspunkte welche mit dem Theodolithen gewonnen wurden, und von denen 2 bis 4 auf einer Fläche von 1 Quadratkilometer liegen sollen, durch Querlinien verbindet. Hiedurch ergeben sich Schnittpunkte mit den Dreiecks- und Vielecksseiten die man auf dem Felde bezeichnen und nach den Coordinaten der gegebenen Punkte auch in den Plan eintragen kann. Diese Schnittpunkte kann man wieder mit passenden Zwischenpunkten der bereits festgelegten Netzlinien verbinden und so eine grosse Zahl Abscissenlinien schaffen welche gestatten die Grenzen der Grundstücke mittels kurzer senkrechter Abstände (Ordinaten) einzumessen.

Bei der Auswahl der Abscissenaxen sind in erster Linie die geradlinigen durch Marksteine bestimmten Grenzen regelmässiger Feldlagen ins Auge zu fassen, und dann weiter diejenigen Geraden welche bei der späteren Flächenberechnung der Parzellen eine ausgiebige Benützung der auf dem Felde gemessenen Entfernungen (der sogenannten Naturmasse) gestatten. Der Sicherheit wegen müssen alle als Abscissenaxen dienenden Netzlinien nachgemessen und mit den berechneten Längen dieser Axen verglichen werden; von dieser Berechnung ausgenommen sind nur kurze Bindelinien und Verlängerungen von Dreiecks- und Vielecksseiten welche dagegen doppelt gemessen werden müssen.

Ist eine hinreichende Anzahl Abscissenaxen bestimmt, so werden auf

Fig. 121.



denselben die rechtwinkeligen Coordinaten abgesteckt und gemessen. Die Ergebnisse dieser Messungen schreibt man entweder in den oben (§. 103) erwähnten Handriss oder in den während der Theodolithaufnahme anzufertigenden vorläufigen Plan, oder aber in eine Tabelle von nachstehender Beschaffenheit ein. Diese Tabelle bezieht sich auf den Handriss (Fig. 121) und es ist dazu nur zu bemerken dass sich linke und rechte Seite der Abscissenlinie durch die Aufeinanderfolge der Buchstaben A und B, womit sie bezeichnet ist, bestimmen. Denkt man sich nämlich so gestellt dass man vom Punkte A nach B sieht, so ist die Seite der Abscissenlinie welche zur Rechten des Beobachters liegt, die rechte und die entgegengesetzte die linke. In die Rubrik „Bemerkungen“ stellt man kurze Andeutungen über die Beschaffenheit und die Verbindung der eingemessenen Punkte ein.

Abscissenlinie A B

Abscissen	Ordinaten		Bemerkungen	
	links	rechts		
22′	25′	—	Bach	
30	30	70	Bach	Markstein
43	—	100		Gartenecke
48	30	—	Bach	
53	16	—	Bach	
63	5 53	19	Bach Strasse	Gebäude
82	7	—	O. Brücke	
90	—	6		Gebäude
100	15	—	U. Brücke	
102	—	23		Strasse
112	—	6		Strasse
128	33	24	Bach	Strasse
136	—	20		Strasse
142	41	—	Bach	
151	14 18	—	Feldweg	
	35	—	Bach	
166	20	—	Steg	
170	14	—	Bach	

Parzellen deren Grenzen krumm und nahezu parallel sind, wie die in Fig. 118 zwischen den Linien m n und p q liegenden, werden entweder durch Vorwärtseinschneiden oder dadurch aufgenommen dass man die äusseren Grenzen (14 bis 20 und 26 bis 32) durch gegebene oder eigens hergestellte Abscissenlinien (m n und p q) mittels Ordinaten bestimmt, die dazwischen liegenden Grenzen aber durch gerade bis zu jenen äusseren Grenzen reichende und die Feldfurchen möglichst senkrecht durchschneidende Querlinien verbindet, und die Schnittpunkte von den Endpunkten dieser Querlinien aus einmisst.

Die Lage eines Punkts durch Einkreuzen d. h. dadurch zu bestimmen dass seine Abstände von den zwei Endpunkten einer Geraden gemessen und mit diesen Abständen ein Bogenschnitt gemacht wird, ist gestattet, wenn zu dieser Punktbestimmung noch eine Versicherung kommt, etwa durch Messen eines dritten Abstands des fraglichen Punkts von einem anderen auf dem Felde und in dem Plan gegebenen Punkte. Sind die Ordinaten wegen schlechter Bodenbeschaffenheit (bestehe diese nun in häufigen Durchschneidungen mittels trockener und nasser Gräben, oder in sumpfigen und moorigen Stellen) nicht direct zu messen, so kann man sie mittels Winkeln von 45° die durch das unsymmetrische vierseitige Bauernfeind'sche

Winkelprisma (Bd I, Seite 196 der Vermessungskunde) abzustecken sind, in die Abscissenaxe umlegen und dort messen. Ordinaten von mehr als 50m Länge in der Ebene und von mehr als 25m in Gebirgsgegenden sind überhaupt nicht zulässig, in keinem Falle aber ohne eine Versicherungsmessung, wie sie beispielsweise das Mass einer Hypotenuse gewährt.

Während der Theodolithaufnahme wird ein vorläufiger Plan des zu messenden Bezirks angefertigt welcher sich von dem der Gesammtmessung vorangehenden Handrisse hauptsächlich dadurch unterscheidet dass er in einem grösseren Massstabe, auf grösserem Papier (30 auf 50 Centimeter Seite) und mit grösserer Sorgfalt angefertigt wird. Zu dem Ende wird das Papier auf ein kleines Zeichenbrett aufgespannt und dieses auf einem Stockstative nahezu in die wagrechte Lage und die richtige Orientirung gebracht. Da es die später folgende „Kartirung“ (besser „Planzeichnung“) erleichtert, wenn die vorläufigen Pläne in bestimmter Weise orientirt und gezeichnet sind, so kann man festhalten dass die Nordrichtung welche durch einen Compass bestimmt werden kann, falls sie nicht aus der Triangulirung bekannt wäre, stets oben, und die Ostrichtung rechts vom Beschauer des Plans sich befinde. Auch sollen die Richtung und Längen mit einem Massstablineale eingetragen werden, damit man schon bei der Aufnahme ein annähernd richtiges Bild der aufzunehmenden Gegend erhält. In dem vorläufigen Plane sind alle durch die Dreiecks- und Vielecksmessung gegebenen Punkte und Linien, sowie alle durch unmittelbare Messung erhaltenen Zahlen mit schwarzer Tinte einzutragen, die aus den Naturmassen erst zu construirenden Grenzlinien aber nur mit Blei anzugeben. Die einzelnen Blätter des vorläufigen Plans sollen nach natürlichen Grenzen abschliessen. Diese Blätter sind gehörig zu numeriren, so dass man sofort ihren Zusammenhang erkennen kann. Die verschiedenen Culturarten sind nach der Längenrichtung des Blatts mit lateinischer Currentschrift und abgekürzt einzuschreiben, z. B. A für Ackerland, W für Wiese, G für Gemüsegarten, GG für Grasgarten u. s. w., wenn man nicht vorzieht diese Culturarten nebst den Wohnhäusern, Nebengebäuden, Strassen, Flüssen u. s. w. in bestimmter Weise zu coloriren.

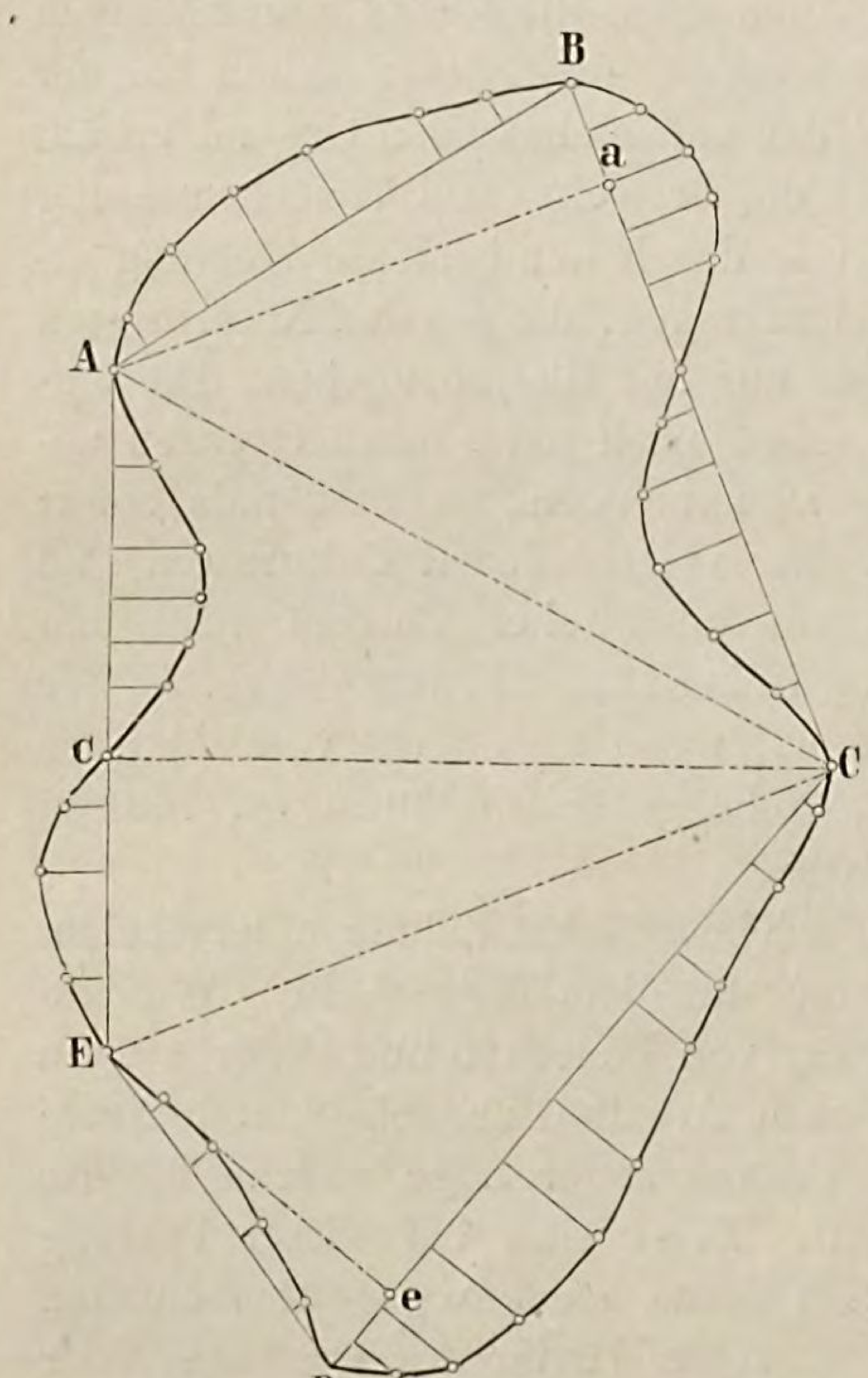
Die Prüfung oder Revision einer Theodolithaufnahme unterscheidet sich wesentlich von der einer Aufnahme mit dem Messstische. Was zunächst die Triangulirung und die Messung von Vielecken und Polygonzügen betrifft, so werden die hierauf bezüglichen Arbeiten zunächst durch Nachrechnung, dann aber auch durch Einschalten neuer Züge welche die des Trigonometers durchschneiden, geprüft. Zeigt sich bei dieser Prüfung dass letzterer die ihm gestattete Fehlergrenze stellenweise überschritten hat, so ist man hiedurch veranlasst, einzelne Theile des Dreiecks- oder Vielecksnetzes ganz nachzumessen, um Gewissheit darüber zu erlangen, ob die Triangulation vierter Ordnung beibehalten werden kann oder nicht. Die Stückmessung lässt sich in folgender Weise prüfen: Erstens durch einige Probelinien welche das betreffende Blatt des vorläufigen Plans dia-

gonal und die Parzellengrenzen möglichst senkrecht durchschneiden. Diese Probelinien gehen stets von Dreiecks- oder Vieleckspunkten aus und schliessen an solchen an; bei ihrer Messung werden alle Durchschnitte mit Parzellengrenzen aufgeschrieben, auch hie und da Richtungswinkel nach seitwärts liegenden Gegenständen der Aufnahme bestimmt. Weiter kann man die Stückmessung prüfen indem man mehrere Parzellen die bei der Aufnahme gesondert gemessen wurden, zusammenfasst und in Einem misst; sowie endlich dadurch dass man geradezu einzelne Theile der Aufnahme aufs Neue misst und mit der zu prüfenden Arbeit vergleicht.

F. Flächenbestimmung der Grundstücke.

§. 106. Methoden der Flächenbestimmung. Der Flächeninhalt eines Grundstücks oder eines Verbands von Parzellen kann entweder aus den auf dem Felde gemessenen Stücken (Natur- oder Kettenmass), oder aus den auf dem Plane abgegriffenen Abständen (Grundlinien und Höhen), oder endlich auf mechanischem Wege durch ein besonderes Flächenmessinstrument oder einen Planimeter bestimmt werden.

Fig. 122.

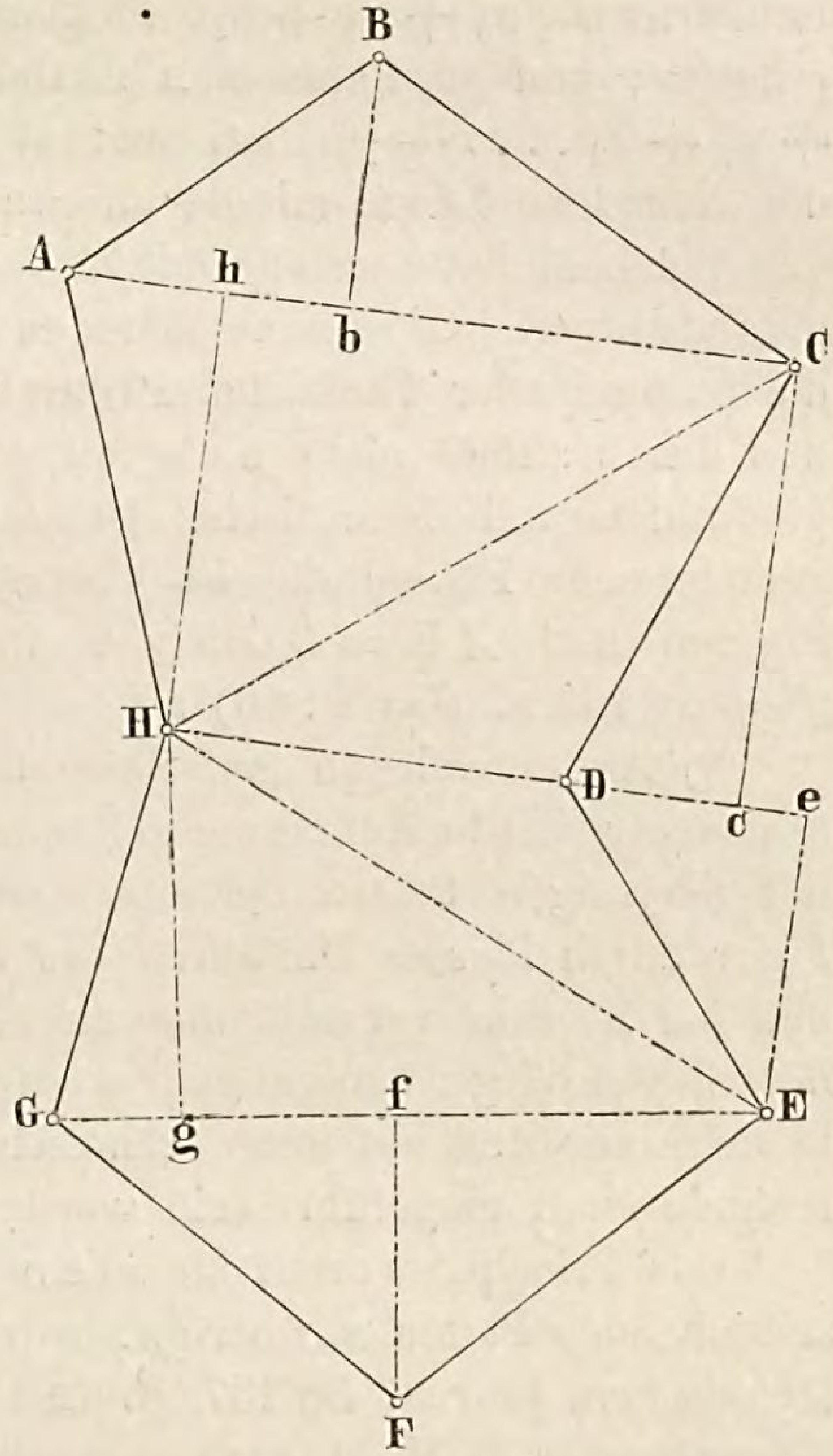


1) Die Bestimmung des Flächeninhalts aus dem Naturmasse besteht darin dass man das auszumessende und im Allgemeinen als Vieleck sich darstellende Grundstück auf dem Felde in Dreiecke zerlegt und in jedem Grundlinie und Höhe misst, wobei der Fusspunkt der letzteren durch das Prismenkreuz oder das fünfseitige Winkelprisma bestimmt wird. Ist das Grundstück von vielen kleinen Seiten oder krummen Linien begrenzt, so legt man in oder um dasselbe ein Vieleck, misst und berechnet zuerst dieses, und fügt alsdann die aus Abscissen und Ordinaten bestimmten Flächeninhalte der an dem Vielecke liegenden Abschnitte der Figur als positive oder negative Grössen hinzu (Fig. 122).

Man sieht diese Flächenbestimmungen als hinreichend genau an, wenn sie mit einer zweiten nach einer anderen Zerlegung vorgenommenen Messung

und Berechnung bis auf $\frac{1}{200}$ oder $\frac{1}{300}$ des gefundenen Inhalts übereinstimmen. Hat man viele zusammenhängende Parzellen zu messen, so ist eine Controle der Messung dadurch gegeben dass man den ganzen Verband durch ein Vieleck einschliesst, den Gesammtinhalt wie vorhin mit Bezug auf Fig. 123 bestimmt, und schliesslich diesen Inhalt mit der Summe aller Flächengehalte der Parzellen vergleicht: beträgt die Abweichung dieser Summen nur 0,3 bis 0,5 Procent der Gesammtfläche von mehr als 100 Ar, so kann man mit dem Ergebnisse vollständig zufrieden sein. Eine allgemein gültige Bestimmung über die Fehlergrenze der Flächenberechnung aus dem Latten- oder Kettenmasse gibt es nicht, die Anforderungen in dieser Beziehung sind vielmehr in den einzelnen Ländern sehr verschieden. Mit Recht macht man auch die relative Grenze von dem Flächeninhalte F des gemessenen Grundstücks abhängig, und es dürfte sich empfehlen diese Grenze auf 3 Procent bei 1 Ar, 2 Procent bei 5 Ar, 1 Procent bei 10 Ar, $\frac{1}{2}$ Procent bei 100 Ar, $\frac{1}{3}$ Procent bei 1000 Ar festzusetzen.

Fig. 123.



2) Sind Flächeninhalte aus Zeichnungen durch Zirkel, Massstab und Rechnung zu bestimmen, so ahmt man gewöhnlich das auf dem Felde anzuwendende Verfahren nach, indem man die zu berechnenden Figuren in Dreiecke oder in ein Vieleck und kleine Segmente zerlegt und diese aus den der Zeichnung entnommenen Dimensionen berechnet; krummlinige Figuren zerlegt man indessen zweckmässiger in parallele Streifen von gleicher Breite, weil sich diese als Paralleltrapeze betrachten und schnell berechnen lassen. Denn sind $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ die Längen der $n+1$ parallelen Seiten welche n Streifen von der Breite b bilden, so sind die Flächeninhalte der einzelnen Trapeze:

$$\tfrac{1}{2} b (a_0 + a_1),\ \tfrac{1}{2} b (a_1 + a_2),\ \tfrac{1}{2} b (a_2 + a_3) \ldots . \tfrac{1}{2} b (a_{n-1} + a_n)$$

und folglich wird ihre Summe oder der Flächeninhalt der ganzen Figur

$$F = b\ (\tfrac{1}{2} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \ldots . + a_{n-1} + \tfrac{1}{2} a_n) \qquad (190)$$

Da in den meisten Fällen a_0 und a_n null sein werden, so besteht der zweite Factor des die Fläche darstellenden Products bloss aus der Summe der Ordinaten welche die Figur theilen. Dieser zweite zu b gehörige Factor

lässt sich, auch wenn a_0 und a_n nicht null sind, leicht mit Zirkel und Massstab bestimmen. Denn setzt man $\frac{1}{2} a_0$ mit dem Zirkel an das untere Ende von a_1 an und öffnet jenen bis zum oberen Ende, so ist die Oeffnung $= \frac{1}{2} a_0 + a_1$; setzt man ferner diese Länge an die Ordinate a_2 an und öffnet den Zirkel bis zum anderen Endpunkte dieser Ordinate, so erhält man $\frac{1}{2} a_0 + a_1 + a_2$; in gleicher Weise wird $\frac{1}{2} a_0 + a_1 + a_2 + a_3$ erhalten; und so kann man fortfahren, bis die Zirkelöffnung $= \frac{1}{2} a_0 + + a_1 + a_2 \ldots . + \frac{1}{2} a_n$ ist, worauf sie auf dem Massstabe gemessen und die gefundene Länge mit der Breite b multiplicirt wird.

Flächeninhalte welche mit Zirkel und Massstab bestimmt werden, sieht man als hinreichend genau gefunden an, wenn bei zweimaliger Bestimmung die Summe aller Theile bei Plänen von 1 : 5000 nicht mehr als 1 Procent und bei 1 : 2500 nicht mehr als $\frac{1}{2}$ Procent abweichen. Professor Jordan gibt auf Grund theoretischer Betrachtung bei im Massstabe 1 : 1500 aufgenommenen Plänen die Fehlergrenze $\Delta F = 0{,}283 \sqrt{F}$ für quadratische Figuren und $\Delta F = 0{,}636 \sqrt{F}$ für langgestreckte rechteckige Figuren (Seitenverhältniss = 1 : 10) an.

3) Am schnellsten und sichersten werden gezeichnete Figuren mit den in neuerer Zeit in Aufnahme gekommenen Planimetern gemessen, und zwar mit derjenigen Classe derselben welche den Flächeninhalt einer ebenen Figur durch blosses Umfahren des Umfangs angibt. Diese merkwürdigen und bereits sehr vervollkommneten Instrumente können hier um so weniger mit Stillschweigen umgangen werden, als zu erwarten steht dass sie in nicht ferner Zeit auf allen technischen Bureaux, wo viele Flächen zu berechnen sind, eingeführt sein werden.

Das Princip, worauf die allein brauchbare Classe der die Figur umschreibenden Planimeter beruht, wurde, wie der Verfasser in Dingler's polytechnischem Journal Bd 137, S. 82 nachgewiesen hat, von dem bayerischen Trigonometer J. M. Hermann (geboren am 22 Juli 1785 in Pfronten bei Füssen, gestorben am 25 März 1841 als Trigonometer in München) bereits im Jahre 1814 erfunden und 1817 angewendet, seine Erfindung ist aber, da er sie nicht veröffentlichte sondern bloss seiner vorgesetzten Stelle vorlegte, nicht gehörig beachtet worden und scheint bereits vergessen gewesen zu sein, als der italienische Professor T. Gonnella zu Florenz im Jahre 1824 und der schweizerische Ingenieur Oppikofer aus Untereppikon im Jahre 1827 auf gleicher Grundlage zwei von dem Hermann'schen Instrumente wenig abweichende Planimeter construirten. Der Mechaniker Ernst in Paris brachte an dem Oppikofer'schen Planimeter mehrere Veränderungen an die zum Theil Verbesserungen waren, so dass die abgeänderten Planimeter in Frankreich nach ihm benannt wurden. Ein wesentliches Verdienst um diese Instrumente gebührt dem Ingenieur Wetli in Zürich desshalb, weil er den Kegel des Hermann'schen Planimeters durch eine flache Scheibe ersetzte und dadurch die Genauigkeit der Messung wesentlich erhöhte. Einige kleine Verbesserungen der Wetli'schen Construction

verdankt man dem Astronomen Hansen in Gotha und dem Mechaniker L. G. Starke in Wien.

Der von Wetli verbesserte Hermann'sche Linearplanimeter leistet in Bezug auf Genauigkeit und Zeitersparniss fast Unglaubliches, an Einfachheit und Wohlfeilheit wird er jedoch von dem Polarplanimeter des Professors Amsler in Schaffhausen übertroffen. Indem wir diese beide Arten von Planimetern nach den dieselben behandelnden Schriften und nach des Verfassers eigenen Abhandlungen mittheilen, finden wir uns zu der Bemerkung veranlasst dass die völlige Uebereinstimmung der Fig. 124 mit der Fig. 4 Tafel 15 der Messkunde von Barfuss (Weimar 1854) bloss davon herrührt dass letztere bis auf die Buchstaben eine Copie unserer Zeichnung vom Jahre 1853 ist. (Vergl. Bauernfeind, die Planimeter von Ernst, Wetli und Hansen. München, 1853.)

Der Hermann-Wetli'sche Linearplanimeter.

§. 107. Princip. Dieser Planimeter unterscheidet sich von der ursprünglichen Einrichtung des umschreibenden Planimeters von Hermann im Grunde nur durch eine bessere mechanische Ausführung und die Vertauschung des von dem Erfinder angewendeten drehbaren Kegels mit einer horizontalen Scheibe. In der Einführung dieser Scheibe besteht Wetli's grosses Verdienst um die Vervollkommnung des auf rechtwinklige Coordinaten gegründeten Planimeters welchen wir zunächst betrachten und der Kürze halber (zum Unterschiede von dem Polarplanimeter) Linearplanimeter nennen wollen.

Man kann die diesem Instrumente zu Grunde liegende Idee kaum besser und einfacher ausdrücken, als dieses ihr Erfinder in den nachfolgenden von uns in Dingler's Journal Bd 137, Heft 2 mitgetheilten Worten that:

„Der Flächeninhalt zweier Dreiecke oder Parallelogramme welche eine und dieselbe Grundlinie haben, steht im geraden Verhältniss zu ihren Höhen. Denkt man sich nun einen Kreis dessen Peripherie gleich einer solchen gemeinschaftlichen Grundlinie ist, und diesen Kreis mit etwas Anderem so in Verbindung dass, wenn man mit dem Letzteren längs dieser Linie hinfährt, er sich gerade einmal um seine Axe dreht, wenn die Höhe der Figur = 1 ist; denkt man sich ferner dass, wenn die Höhe der Figur = 2 ist, sich der Kreis vermittels seiner Verbindung, während längs der Grundlinie hingefahren wird, zweimal um seine Axe dreht; denkt man sich endlich dass die Revolutionen des Kreises wie die Zahlen der Höhen zunehmen, und würde die Zahl dieser Revolutionen an irgend Etwas bemerkt werden können, so hätte man mit einem so verbundenen Kreise eine Art mechanischen Flächenmessers. Wollte man nun ohne Zahlenrechnung den Inhalt geometrischer Figuren durch eine Maschine finden, so dürfte bloss die Art aufgesucht werden, wie die Kreisrevolutionen in dem obigen Verhältniss bewirkt werden könnten, und die Maschine wäre erfunden.“

Nach der jetzigen Einrichtung des Linearplanimeters ist der vorgenannte Kreis ein ungezahntes Rädchen das auf einer horizontalen Scheibe senkrecht steht und um eine mit dieser Scheibe parallele Axe drehbar ist. Die Scheibe selbst dreht sich um eine verticale Axe und bringt dadurch das auf ihr ruhende Rädchen in Folge der stattfindenden Reibung in Bewegung. Ist der Abstand des Berührungspunkts des Rädchens vom Mittelpunkte der Scheibe gleich dem Halbmesser des Rädchens, so wird dieses eine ganze Umdrehung machen wenn die Scheibe eine macht, und eine halbe wenn diese sich nur zur Hälfte dreht; allgemein wird sich das Rädchen so vielmal mehr drehen als die Scheibe, als sein Halbmesser in dem Abstande seines Berührungspunkts vom Mittelpunkte der Scheibe enthalten ist. Die Verschiedenheit dieses Abstands erfordert eine Bewegung der Scheibe längs der unverrückbar gedachten Drehaxe des Rädchens, oder längs der mit ihr parallelen Höhe des zu messenden Rechtecks; die Drehung der Scheibe muss dagegen durch die Abwickelung eines um ihre Welle geschlungenen Fadens geschehen welcher der Grundlinie jenes Rechtecks parallel ist. Schliesslich ist an dem Apparate noch eine Vorrichtung anzubringen durch welche die Drehungen des Rädchens gezählt werden können. Nach dieser Vorbereitung wird man den Zusammenhang der in der nachfolgenden Abbildung und Beschreibung näher bezeichneten Theile des Hansen'schen Planimeters leicht begreifen.

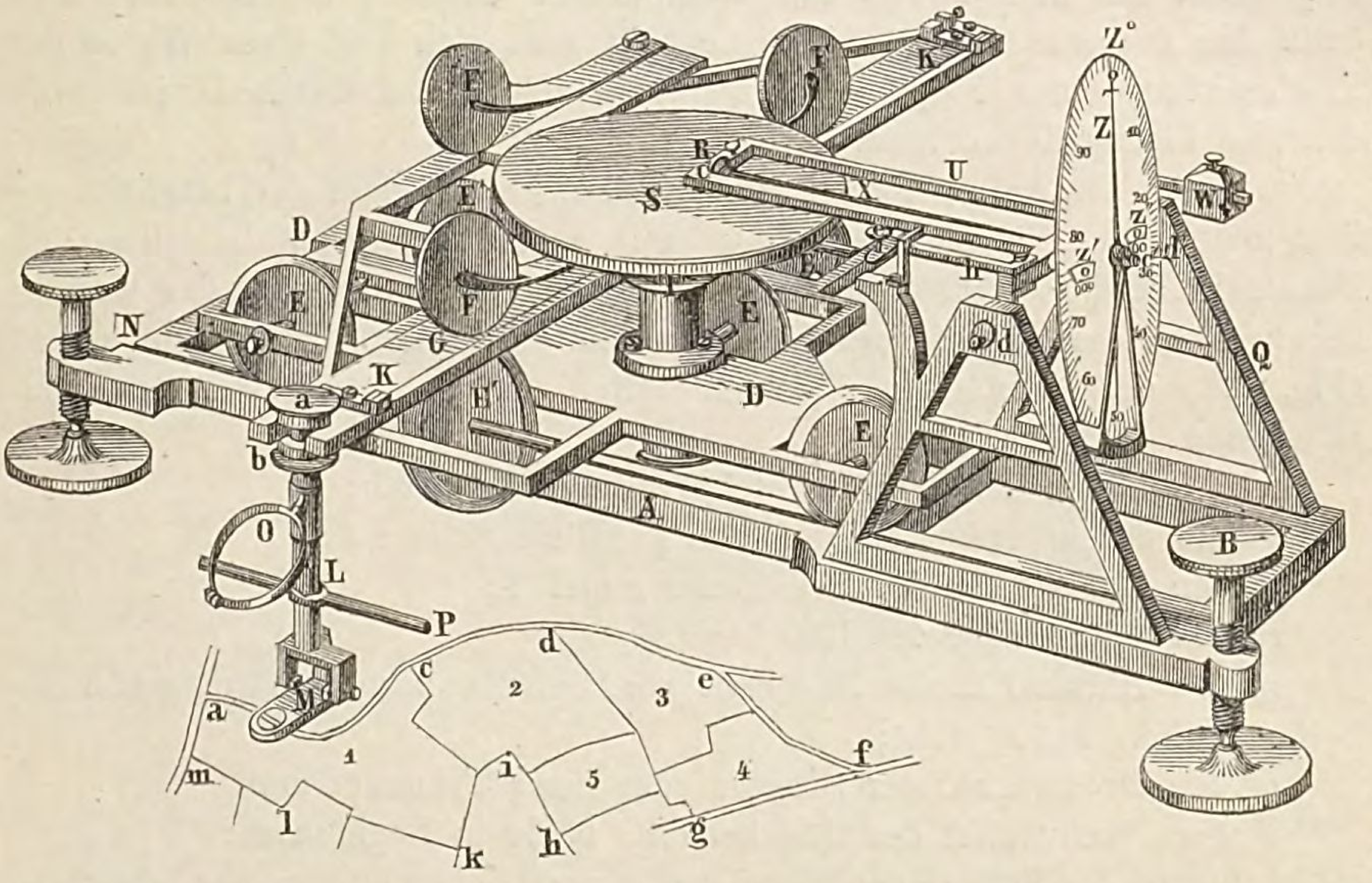
§. 108. Beschreibung. Das Instrument welches hier beschrieben wird, ist aus dem mechanischen Institute von Hermann Ausfeld in Gotha bezogen und besitzt die Hansen'sche Einrichtung des Führungsstifts. Sehr gute Linearplanimeter nach Starke liefert die mechanische Werkstätte von Ott & Coradi in Kempten (Bayern); wir erachten es jedoch nicht für nothwendig unsere Zeichnung des Hermann'schen Planimeters (Fig. 124) mit einer anderen zu vertauschen, da sich die Planimeter von Starke und von Ott & Coradi principiell von dem Hermann-Wetli'schen Planimeter nicht unterscheiden.

Jeder Linearplanimeter erfordert zwei auf einander senkrechte (den Axen parallele) Grundbewegungen: die eine geschieht durch den unteren Schlitten nach der Langseite des Messingrahmens A welcher mit den Stellschrauben B das Fussgestell bildet; die andere aber durch den oberen Schlitten G, auf dem ein Silberdraht ausgespannt ist der sich um die Trommel T der Scheibe S schlingt. (Man kann sich die Axe der x diesem Drahte und die Axe der y der Langseite des Rahmens A parallel denken.)

An dem Schlitten G befindet sich der Führer L welcher zum Umschreiben der auszumessenden Figur dient. Der Fahrstift des Hermann-Wetli'schen Planimeters ist von Hansen durch ein Glas M mit einer kreisförmigen Marke ersetzt worden welche auf dem Umfange fortgeführt wird. Damit dieses genauer als mit dem Stifte geschehen könne, ist über M eine Lupe O angebracht welche Marke und Umfang vergrössert. Die Drehungen des auf der Scheibe S stehenden Rädchens R werden durch den Zeiger Z

auf dem Zifferblatte Z^0 gemessen, und dieses ruht auf den mit dem Fussgestelle festverbundenen Trägern Q, Q. Die Eintheilung des Zifferblatts welches in neuerer Zeit auf der Langseite des Gestells angebracht wird, kann den zu wählenden Masseinheiten und ihren Unterabtheilungen angepasst werden: an unserem Instrumente ist sie so getroffen dass man bei Z′ Tausende, bei Z″ Hunderte und am Umfange ganze und Theile von Flächeneinheiten ablesen kann. Alle übrigen Theile, namentlich Laufrollen, Federn, Schrauben und das Gegengewicht W, dienen bloss zur Erzeugung genauer Bewegungen und zur Berichtigung des Instruments.

Fig. 124.



§. 109. Der Gebrauch des fehlerfreien Planimeters ist äusserst einfach. Steht derselbe nämlich auf einer festen ebenen Unterlage, einem Tische oder Zeichenbrette, so bringe man ihn zunächst durch die Fussschrauben in eine nahehin wagrechte Lage. Diese Lage erkennt man daran dass jeder der beiden Schlitten an der Stelle ruhig verharrt, in die man ihn schiebt. Hierauf lege man die auszumessende ebene Figur so unter den Führer L dass dieser ungefähr über deren Mitte steht wenn sich bei etwas ausgezogenen Schlitten das Rädchen R am Mittelpunkte der Scheibe S befindet. Diese Stellung ist jedoch wie die horizontale Lage des Instruments nur annähernd herbei zu führen. Nun bezeichne man auf dem Umfange einen Punkt, von dem der Führer ausgeht und bis zu dem er wieder zurückkehrt. Für die Verminderung der zufälligen Fehler ist es gut, diesen Punkt so zu wählen dass der Berührungspunkt des Rädchens R noch nahe am Scheibenmittelpunkte steht, oder so dass die erste Bewegung des Führers der Langseite des Instruments nahezu parallel ist. Hierauf hebe man durch

das Schräubchen e das Rädchen R ein wenig in die Höhe, drehe alle Zeiger auf Null zurück und stelle die Marke M genau auf den Anfangspunkt des Umfangs, was dann der Fall ist wenn die Mitte der Marke diesen Punkt deckt. Ist dieses geschehen, so lasse man durch Rückwärtsdrehen des Schräubchens e das Rädchen R auf die Scheibe S herab, bis sich beide dicht berühren, führe die Marke M auf der auszumessenden Figur von links nach rechts (wie den Zeiger einer Uhr) vorsichtig herum und lese, sobald der Ausgangspunkt erreicht ist, auf dem Zifferblatte die Fläche ab, wie bereits angegeben. Will man die Figur sogleich zum zweitenmale messen, so fahre man lediglich, wenn man im Anfangspunkte angekommen ist, weiter bis man diesen zum zweitenmale erreicht, die Ablesung gibt dann die doppelte Fläche. Man begreift dass sich auf diese Weise der Flächeninhalt einer Figur beliebig vervielfachen und durch Division die einfache Fläche finden lässt.

§. 110. Theorie. Sobald man eingesehen hat dass der beschriebene Planimeter den Flächeninhalt eines mit seinen Axen parallel liegenden Rechtecks angibt wenn dieses rechtsinnig umfahren wird, ist der wesentlichste Theil der Theorie des Linearplanimeters erfasst. Stellt nun a b c d (Fig. 125) ein Rechteck vor dessen Seiten den Schlittenbewegungen parallel sind, und bezeichnet

x die Länge der dem Drahte parallelen Seite a b;
y die der unteren Schlittenbahn parallele Seite a d;
r den Halbmesser der Scheibentrommel T;
r_1 den Halbmesser des Rädchens R;
r_0 den Abstand dieses Rädchens vom Scheibenmittelpunkte, wenn der Führer auf a steht;
φ den Drehwinkel der Scheibe oder ihrer Trommel und
v den Drehwinkel des Rädchens R beide in Bogenmass:

so ist, wenn der Führer den Weg von a nach b beschrieben hat, die Seite $x = r\,\varphi$ und, da sich während dieser Bewegung der Abstand r_0 nicht ändert, $r_0\,\varphi = r_1\,v$, oder

$$r_0\,x = r\,r_1\,v \tag{191}$$

Geht der Führer von b nach c, so erfolgt keine Abwickelung des Drahtes, folglich auch keine Drehung der beiden Scheiben; aber es ändert sich der Abstand r_0 in $r_0 \pm y$ um. In c ist die Ablesung der in b gleich. Bewegt man jetzt den Führer von c nach d, so entsteht eine der vorigen entgegengesetzte aber gleiche Drehung der grossen Scheibe welche durch $-x = -r\,\varphi$ ausgedrückt ist; und auf dem Rädchen R oder der kleinen Scheibe wickelt sich ein Bogen von der Länge $(r_0 \pm y)\,\varphi = r_1\,v_1$ ab welcher der Lage nach dem vorigen $r_1\,v$ entgegengesetzt ist. Es ergibt sich somit die zweite Gleichung:

$$-(r_0 \pm y)\,x = -\,r\,r_1\,v_1 \tag{192}$$

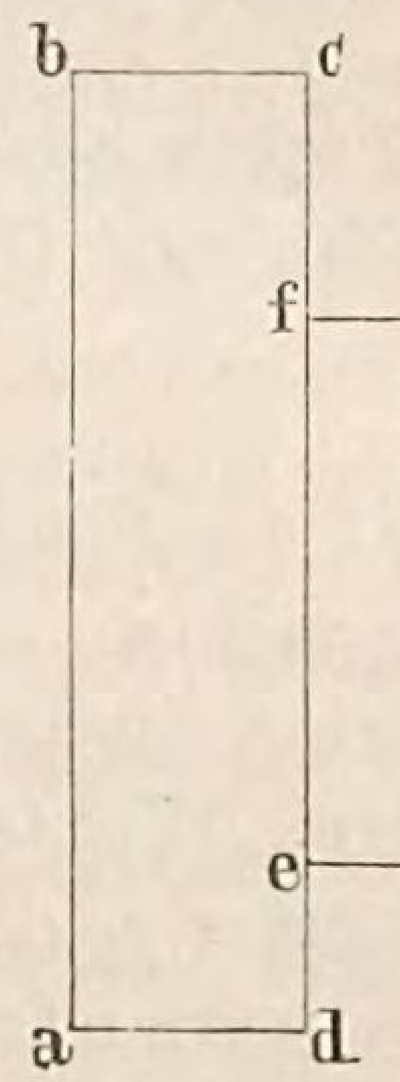
Fährt man schliesslich von d nach a, so erfolgt wie von b nach c keine Drehung, der Abstand $r_0 \pm y$ wird jedoch wie im Anfange $= r_0$. Die

Ablesung in a ist der in d gleich und entspricht dem Bogenunterschied $v - v_1$. Dieser Unterschied zeigt aber die Fläche des Rechtecks a b c d an; denn addirt man die Gleichung (192) zu der (191), so kommt

$$\pm y x = r r_1 (v - v_1) \tag{193}$$

d. h. die Fläche des Rechtecks a b c d $= x y$ ist der algebraischen Summe der Drehungen des Rädchens proportional, was zu beweisen war.

Fig. 125.



Denkt man sich nun an das Rechteck a b c d ein zweites e f g h angefügt, wie Fig. 125 zeigt, und jedes dieser Rechtecke umfahren, so gibt der Planimeter offenbar die Summe beider Flächen an. Bei diesem Umfahren wurde aber die Linie e f, an der sich beide Rechtecke berühren, zweimal und zwar in entgegengesetzten Richtungen umfahren. Die damit verbundenen Drehungen des Rädchens R heben sich folglich auf, da jedesmal der Abstand des Berührungspunkts $r_0 \pm y$ war, und man kann also die Beschreibung der Linie e f ganz weglassen; thut man dieses aber, so bleibt bloss der Umfang a b c f g h e d a der Fig. 125 zu umfahren übrig, um die Fläche dieser Figur zu finden. Dasselbe findet statt, wie viele Rechtecke man auch aneinander legt. Da man nun jede Figur in Rechtecke so zerlegen kann dass deren Flächensumme der gegebenen Figur gleich ist, und da die Lage der Rechtecke willkürlich ist, so kann man dieselben auch so einlegen dass ihre Seiten den Bewegungsrichtungen der Schlitten des Planimeters beziehlich parallel sind. Zufolge des vorhergehenden Satzes braucht man, um die Fläche der ganzen Figur zu ermitteln, nur die treppenförmige Umfangslinie b c f g b welche die Rechtecke begrenzt, zu umfahren. Da aber die Breite der Rechtecke beliebig ist und demnach auch unendlich klein angenommen werden kann, so wird die Treppenlinie mit der Umfangslinie der gegebenen Figur zusammenfallen, und deren Inhalt durch das Umfahren ihres Umfangs gefunden werden.

Es kommt also, wenn der Zählapparat unmittelbar den Inhalt der Fläche statt der Drehungen des Rädchens angeben soll, nur darauf an die Flächeneinheit auszumitteln welche ein Theil des Zifferblatts vorstellt. Diese Ausmittelung ist sehr einfach. Denn stellt F die Fläche vor welche einer ganzen Umdrehung des Zeigers Z entspricht, so muss in diesem Falle die Summe aller Drehungen $= 2\pi$ und daher

$$F = 2 r r_1 \pi$$

sein. Ist nun das Zifferblatt in n gleiche Theile getheilt, so stellt jeder Theil eine Fläche $f = \frac{1}{n} F$ vor und es drückt alsdann

$$n f = 2 r r_1 \pi$$

die Abhängigkeit der Halbmesser der Trommel T und des Rädchens R von der Flächeneinheit f aus. Ist demnach z. B. der Trommelhalbmesser $r = 3{,}485$

Dec. Linien und soll einer von den 100 Theilen des Zifferblatts eine Quadrat-Decimallinie vorstellen, so muss der Halbmesser des Rädchens

$$r_1 = \frac{n\,f}{2\,r\,\pi} = \frac{100}{2\,.\,3{,}485\,\pi} = 4{,}567'''$$

sein. Wäre die zu messende Fläche im Massstabe von 1 : 2500 gezeichnet und sollte 1 Theil des in 100 Theile getheilten Zifferblatts den hundertsten Theil eines Tagwerks (in Bayern „Decimale" genannt und = 400 □') vorstellen, so fänden die Gleichungen statt:

$$F = 100\,.\,f = 64\,\square''' = 2\,r\,r_1\,\pi = 2\,\pi\,.\,3{,}485\,.\,r_1$$

und hieraus erhielte man den der Bedingung entsprechenden Halbmesser des Rädchens R, d. i.

$$r_1 = \frac{64}{2\,\pi\,.\,3{,}485} = 2{,}9228'''$$

Ist die Flächeneinheit von 1 Quadratmillimeter für 1 Theil des Zifferblatts zu klein und die von 1 Quadratcentimeter zu gross, so kann man auch eine Zusammensetzung von Quadratmillimetern, z. B. 10, als Einheit ansehen. Wollte man nun zu einem Trommelhalbmesser $r = 12{,}5$ mm den Halbmesser r_1 des Rädchens R berechnen welches eine Angabe von 10 qmm hat, so wäre $n\,f = 1000 = 2\,r\,r_1\,\pi = 25\,r_1\,\pi$ zu setzen, woraus $r_1 = 12{,}732$ mm folgt. Auf einem Plane von 1 : 1000 Verjüngung würden somit ein Theil des Zifferblatts von 10 qmm eine Fläche von 10 qm oder 0,1 Ar und der ganze Umfang des Zifferblatts 100 . 0,1 = 10 Ar vorstellen.

§. 111. Die Prüfung des Planimeters würde sehr umständlich sein, wenn alle wesentlichen Theile einzeln untersucht werden müssten, ob sie ihre Bestimmung mit der erforderlichen Genauigkeit erfüllen. Diese Einzeluntersuchung ist jedoch nicht nöthig, sobald man sich durch ein summarisches Verfahren überzeugt hat dass der Flächeninhalt von genau berechneten Versuchsfiguren richtig angegeben wird. Am besten sind hierzu regelmässige Figuren, wie Kreise, Quadrate, gleichseitige Dreiecke u. s. w. geeignet, weil sie sich am schärfsten zeichnen und berechnen lassen. Man kann sie entweder auf angespanntem Papiere fein ausziehen oder in ebene Metallplatten graviren. Ihre Abmessungen müssen mit der grössten Genauigkeit bestimmt sein. Es ist gut wenn man zu diesen Probefiguren auch solche nimmt welche, wie z. B. Rechtecke, erfordern dass die beiden Schlitten ihre grösstmöglichen Bewegungen machen, weil nur dann wenn auch der Inhalt dieser Flächen richtig angegeben wird, angenommen werden darf dass alle Theile des Apparats ihre Schuldigkeit thun.

Bei diesen Versuchen kann sich zeigen dass alle abgelesenen Flächeninhalte gegen die berechneten nur um äusserst wenig (etwa $\frac{1}{1000}$) bald zu gross, bald zu klein sind: in diesem Falle ist das Instrument in Ordnung. Oder es zeigt sich dass alle Inhalte um etwas zu gross gefunden werden; dann ist auch das Rädchen etwas zu gross und desshalb sein Durchmesser um eine Kleinigkeit zu verringern. Oder man findet alle Flächen etwas zu klein; dann ist auch der Durchmesser des Rädchens zu klein. Da der-

selbe aber nicht vergrössert werden kann, so ist oft damit zu helfen dass man den Draht etwas dicker nimmt, denn dadurch wird der Halbmesser r der Trommel grösser und es kann so das Product $r r_1$ auf die erforderliche constante Grösse gebracht werden, sowie auch im vorhergehenden Falle durch Anwendung eines dünneren Drahtes das Abdrehen des Rädchens oft erspart wird. Oder endlich es zeigt sich dass die Abweichungen von dem wahren Flächeninhalte bald positiv bald negativ, jedenfalls aber grösser sind als sie sein dürfen; dann wird der Fehler entweder von der Unachtsamkeit des Messenden, oder von der Unebenheit der Scheibe S, oder von der gleitenden Bewegung des Rädchens R herrühren.

Was die erste dieser drei Fehlerquellen betrifft, so wirkt sie um so schwächer, je besser das Instrument aufgestellt ist und je gleichmässiger und vorsichtiger der Umfang der Figur umfahren wird. Die zweite Quelle liegt meistens in dem Papiere womit die Metallscheibe überzogen ist; man muss desshalb den Ueberzug nach allen Richtungen mit einem genauen Lineale untersuchen, ob er eben ist, und ihn verbessern wenn er es nicht sein sollte. Am gefährlichsten kann die dritte Fehlerquelle werden welche theils in einer schwerfälligen Bewegung der Axe des Rädchens R, theils in zu grossem oder zu geringem Drucke dieses Rädchens auf die Scheibe S liegen kann. Die Bewegung der genannten Axe lässt sich durch die auf ihre Lager wirkenden Schräubchen bei e und e', der Druck des Rädchens aber durch das Gegengewicht W reguliren. Statt der gezeichneten oder gravirten Probefiguren kann man auch den in §. 114 beschriebenen und von Dennert & Pape in Hamburg zu beziehenden, aus einem beweglichen Lineale mit bestimmten Halbmessern bestehenden Hilfsapparat benützen welcher Kreise von gegebenem Inhalt zu beschreiben gestattet.

§. 112. Die **Genauigkeit** des Linearplanimeters hat der Verfasser durch vielfache Versuche festgestellt, wovon ein Theil in seiner oben angeführten Schrift (S. 33 bis 37) mitgetheilt ist. Aus allen diesen Versuchen geht mit Entschiedenheit hervor dass jenes Instrument eine viel grössere Genauigkeit gewährt, als man für irgend einen praktischen oder wissenschaftlichen Zweck nöthig hat, und dass die Genauigkeit bei kleinen Flächen etwas geringer ist als bei grossen. Bei nur einiger Uebung wird man Flächen von ungefähr 20□cm Inhalt sicher bis auf $\frac{1}{1000}$ ihres Inhalts richtig finden, und, wie diese auch umgrenzt sein mögen, mit einem Zeitaufwande von nur 1 bis 3 Minuten.

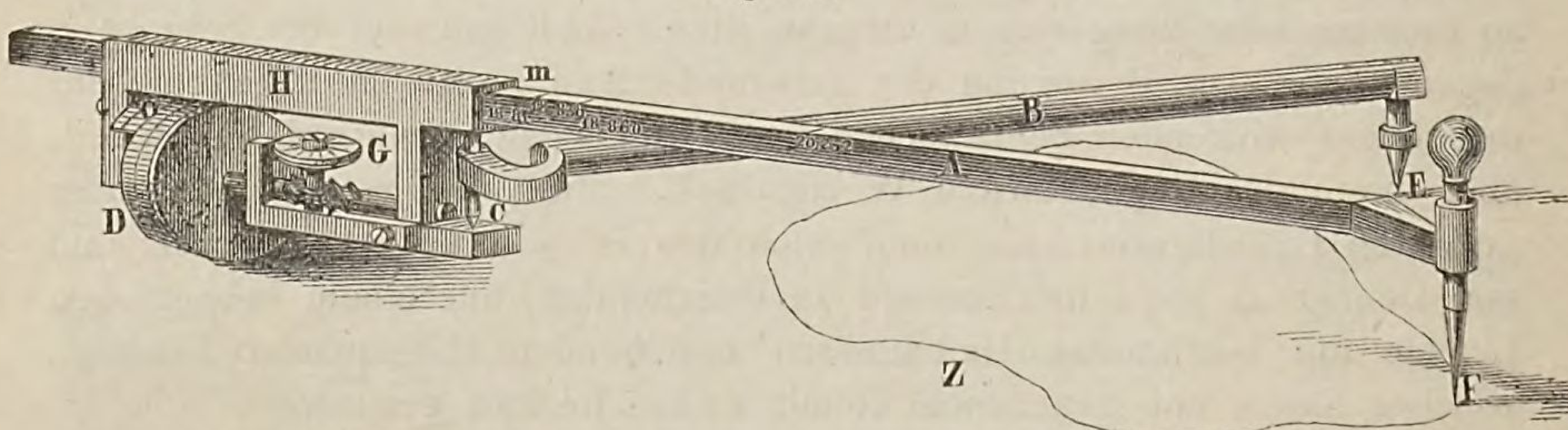
Die Genauigkeit der Linearplanimeter ist so gross dass sie denjenigen welche das erste Mal damit arbeiten oder welche bloss Berichte über ausgeführte Arbeiten lesen, auffällt. Sie kann auch wohl nur dadurch erklärt werden dass man annimmt, die mit der Bewegung verbundenen kleinen Unregelmässigkeiten gleichen sich ungefähr in derselben Weise grösstentheils aus wie die kleinen Beobachtungsfehler beim Nivelliren. Da man sich in der Praxis mit einer viel kleineren Genauigkeit begnügt als die Linearplanimeter gewähren, und da der nachfolgend zu beschreibende Polar-

planimeter trotz seiner knappen Form und Wohlfeilheit doch eine für praktische Zwecke hinreichende Genauigkeit besitzt, so erklärt es sich sehr einfach dass der Linearplanimeter fast nur mehr für geodätische und mathematische Sammlungen angeschafft, der Polarplanimeter aber in den Ingenieur- und Katasterbureaux fast allein angewendet wird.

Der Amsler'sche Polarplanimeter.

§. 113. Beschreibung. Die Bezeichnung Polarplanimeter ist desshalb gewählt, weil sich das Instrument beim Gebrauche um einen festen Punkt (den Pol) dreht. Dieser Punkt ist in unserer (etwas verkürzten) Zeichnung Fig. 126 mit E bezeichnet und wird entweder wie hier durch eine feine Nadel oder wohl auch (wie an den Starke'schen und den Ott'schen Planimetern) durch die Axe eines schweren auf der Zeichnung ruhenden Metallcylinders, worin sich das kugelförmige Ende des Arms B drehen kann, vorgestellt. Die Nadel E ist dem Arm B eingesetzt der seinerseits mit den übrigen beiden Haupttheilen, dem Stabe A und der

Fig. 126.



Laufrolle D, durch die Hülse H zusammenhängt. Sowie der Arm B den Nadeleinsatz E, trägt der Stab A an einem Ende den Fahrstift F, während das andere Ende in der Hülse H durch Reibung festgehalten wird. Die Hülse ist an den Enden aufgeschnitten, damit die dadurch entstehenden Lappen, als Federn wirkend, die Reibung vermehren und gleichmässiger machen. Mit dieser Hülse ist der Arm B durch die verticale Axe C verbunden. Denkt man sich durch diese Axe und die Mitte des Fahrstifts eine Ebene gelegt, so bekommt man die Richtung welcher die Axe der stählernen Laufrolle D parallel ist. Der äusserste Rand dieser Rolle ist abgerundet und polirt, ihr cylindrischer Limbus aber in 100 oder 200 Grade getheilt welche mittels des Nonius o bis auf Zehntelsgrade abgelesen werden können. Die ganzen Umdrehungen der Rolle werden durch das Rädchen G gezählt das von einer an der Axe jener Rolle befindlichen unendlichen Schraube bewegt wird. Der Stab A hat während jeder Messung eine unveränderliche Stellung gegen die Hülse, und es wird dieselbe nur geändert wenn man der Messung eine andere Flächeneinheit zu Grunde legen will. Wie weit man ihn zu verschieben hat, sieht man an der Theilung auf

seiner oberen Fläche, für welche eine in die Verlängerung der Axe C fallende Kante m der Hülse H als Zeiger dient. (In neuerer Zeit werden in der mechanischen Werkstätte Amsler-Laffon in Schaffhausen Polarplanimeter in verschiedenen Formen und Grössen angefertigt, im Princip stimmen jedoch alle mit den hier beschriebenen überein. Wir unterlassen es daher umsomehr die constructiven Verschiedenheiten besonders zu beschreiben als sie an den Instrumenten selbst oder aus den von der Werkstätte beigefügten Zeichnungen und Erklärungen leicht zu erkennen und zu würdigen sind.)

§. 114. Gebrauch. Soll der Flächeninhalt einer gezeichneten ebenen Figur (Z) gefunden werden, so stelle man vor Allem den Stab A so dass die Fläche in der Einheit ausgedrückt wird welche man wünscht, z. B. in Quadratdecimetern. Dieses ist der Fall wenn der auf der Theilung mit 1 Quadratdecimeter bezeichnete Theilstrich bis an die Kante m der Hülse H vorgeschoben ist. Hierauf setze man das Instrument nach Fig. 126 so auf die Zeichnung dass die Rolle D, die Nadel E und der Stift F genau aufliegen und der Stift F an jeden Punkt der zu messenden Figur gelangen kann. Hat man die Nadel E etwas in das Papier gedrückt und den Stift auf den beliebig gewählten Anfangspunkt F des Umfangs der Figur eingestellt, so lese man den Stand der Rolle D an dem Rädchen G und dem Nonius o ab und schreibe ihn auf. Alsdann umfahre man die Figur von links nach rechts bis zu dem Ausgangspunkte, lese den Stand der Rolle D wieder ab und subtrahire die erste Ablesung von der zweiten. Die erhaltene Differenz sei $= \varDelta$. Liegt nun die Spitze oder der Pol E ausserhalb der umfahrenen Figur, so ist der Unterschied $\varDelta$ geradezu der gesuchte Flächeninhalt in der Einheit, auf welche der Stab A eingestellt wurde, hier in Quadratdecimetern; befindet sich aber der Pol E innerhalb der umfahrenen Figur, so ist der Differenz $\varDelta$ eine constante Zahl beizufügen welche für jede Masseinheit des Planimeters auf der Seitenfläche des Stabs A und zwar da angemerkt ist, wo sich der einzustellende Theilstrich befindet. Hätte man also die Spitze E innerhalb der Figur befestigt und mit der Einstellung auf Quadratdecimeter z. B. die Differenz $\varDelta = 4{,}567$ erhalten, so wäre, da die Constante hier $= 18{,}81$ ist, der Inhalt der umfahrenen Fläche $= 18{,}81 + 4{,}567 = 23{,}377$ □ Decimeter. Um diese Reductionen zu ersparen, wird man, so oft es die Ausdehnung der auszumessenden Figur erlaubt, die Spitze E ausserhalb des Umfangs anbringen. Befindet sich die Figur auf einem Reissbrette welches zu klein ist, um der Rolle D den nöthigen Spielraum zu gewähren, so müsste man in gleicher Höhenlage ein zweites Blatt anfügen und die Stossfuge eben zudecken. Ist dagegen die Figur auf ein zu kleines abgeschnittenes Blatt gezeichnet, so braucht man dieses lediglich auf einen grösseren Zeichnungsbogen zu legen, beide mit Strohpapier zu überdecken und die Laufrolle über dieses wegzuführen. Bei der Lage des Pols innerhalb der Figur kann es sich treffen dass die Differenz $\varDelta$ (durch Subtraction der ersten Ablesung von der zweiten entstanden)

negativ wird: dieses Vorzeichen ist bei der Reduction gehörig zu berücksichtigen.

Die Prüfung des Polarplanimeters erfordert ebenso wie der Linearplanimeter genau begrenzte Flächen von bestimmtem Inhalt. Die Erfahrung lehrt nun dass sich ausser den gezeichneten oder gravirten regelmässigen Figuren auch das folgende in der preussischen Vermessungsanweisung empfohlene Verfahren eignet, zu dessen Ausführung von Dennert & Pape in Hamburg ein einfacher Apparat geliefert wird. Es ist nämlich ein kleines Lineal von gehärtetem Messing mit Löchern versehen deren Entfernung von einander genau dem Halbmesser eines Kreises von dem Flächengehalte der Probefigur entspricht. Dieses Lineal wird mittels einer kurzen durch eines seiner Löcher gesteckten feinen Nadel auf dem Reissbrette befestigt und mittels des in das andere Loch gesetzten Fahrstifts um die Nadel bewegt, so dass dieser Stift genau einen Kreis vom verlangten Flächeninhalt umfährt wenn die Bewegung in einem genau markirten Anfangspunkt beginnt und endigt. Die Abstände der Löcher in dem Lineale betragen für 1000 und 10000 qmm Flächeninhalt beziehungsweise 17,84124 und 56,41896 mm. Will man von diesem mechanischen Hilfsmittel keinen Gebrauch machen sondern gezeichnete Probefiguren verwenden, so sind von den in §. 111 genannten regelmässigen Figuren besonders die gleichseitigen Dreiecke zu wählen, da sie am genauesten gezeichnet werden können. Den Flächeninhalten 1000 und 10000 qmm entprechen dann Seiten von 48,05623 und 151,96713 mm Länge.

§. 115. Theorie. Sowie der §. 110 nur einen Theil der Theorie des Linearplanimeters enthält, so folgt auch hier nur so viel von der Theorie des Polarplanimeters, als nöthig ist dessen Wirkungsweise einzusehen. Wir halten uns hierbei ganz an die von Amsler gegebene Darstellung.

In den Fig. 127 und 128 bezeichne F die Spitze des Fahrstifts, E die Nadelspitze oder den Pol, C die Horizontalprojection der Axe des Arms B, D den Berührungspunkt der Laufrolle, r die während einer Messung constante Entfernung des Stifts F von der Axe C und R die gleichfalls unveränderliche Entfernung dieser Axe vom Pole E.

Liegt dieser Pol ausserhalb einer geschlossenen Curve Z, wie in Fig. 127, und man führt den Stift F auf ihr herum, so beschreibt der Punkt C bloss einen Kreisbogen, befindet sich aber E innerhalb der Curve Z, wie in Fig. 128, so beschreibt der Punkt C einen ganzen Kreis. Diese beiden Fälle sind besonders zu untersuchen.

Hat F den ganzen Umfang durchlaufen, so befindet sich die Gerade C F wieder in ihrer Anfangslage und hat während ihrer Bewegung jeden innerhalb der Curve Z liegenden Punkt einmal oder 3, 5, 7 . . . mal getroffen, jeden äusseren Punkt dagegen entweder gar nicht oder 2, 4, 6 . . . mal. Sind nun C F und L K (Fig. 127) zwei auf einander folgende Lagen der beweglichen Geraden, so ist klar dass C F nur durch eine gleichzeitig fortschreitende und drehende Bewegung in die Lage L K kommt, und dass

man diese zusammengesetzte Bewegung in zwei einfache zerlegen kann, indem man sich vorstellt dass die Gerade C F zuerst durch eine parallele Verschiebung in die Lage L J und hierauf durch eine Drehung um den Punkt L in die Lage L K gelange. Somit wird das Flächenelement C L K F durch die algebraische Summe des Parallelogramms C F J L = p und des Sectors L J K = s vorgestellt.

Die Fläche p werde als positiv angesehen wenn sie durch die Tangente des Punkts C vom Pole E getrennt ist und, von diesem aus gesehen, rechts von C F liegt; der Sector s dagegen sei positiv wenn die Gerade L J durch eine rechtsinnige Drehung in die nachfolgende Lage übergeht.

Es ist nun nicht schwer einzusehen dass, wenn man sich jedes Flächenelement das durch zwei auf einander folgende Lagen der Geraden C F entsteht und durch die von deren Endpunkten beschriebenen Bögen begrenzt

Fig. 127.

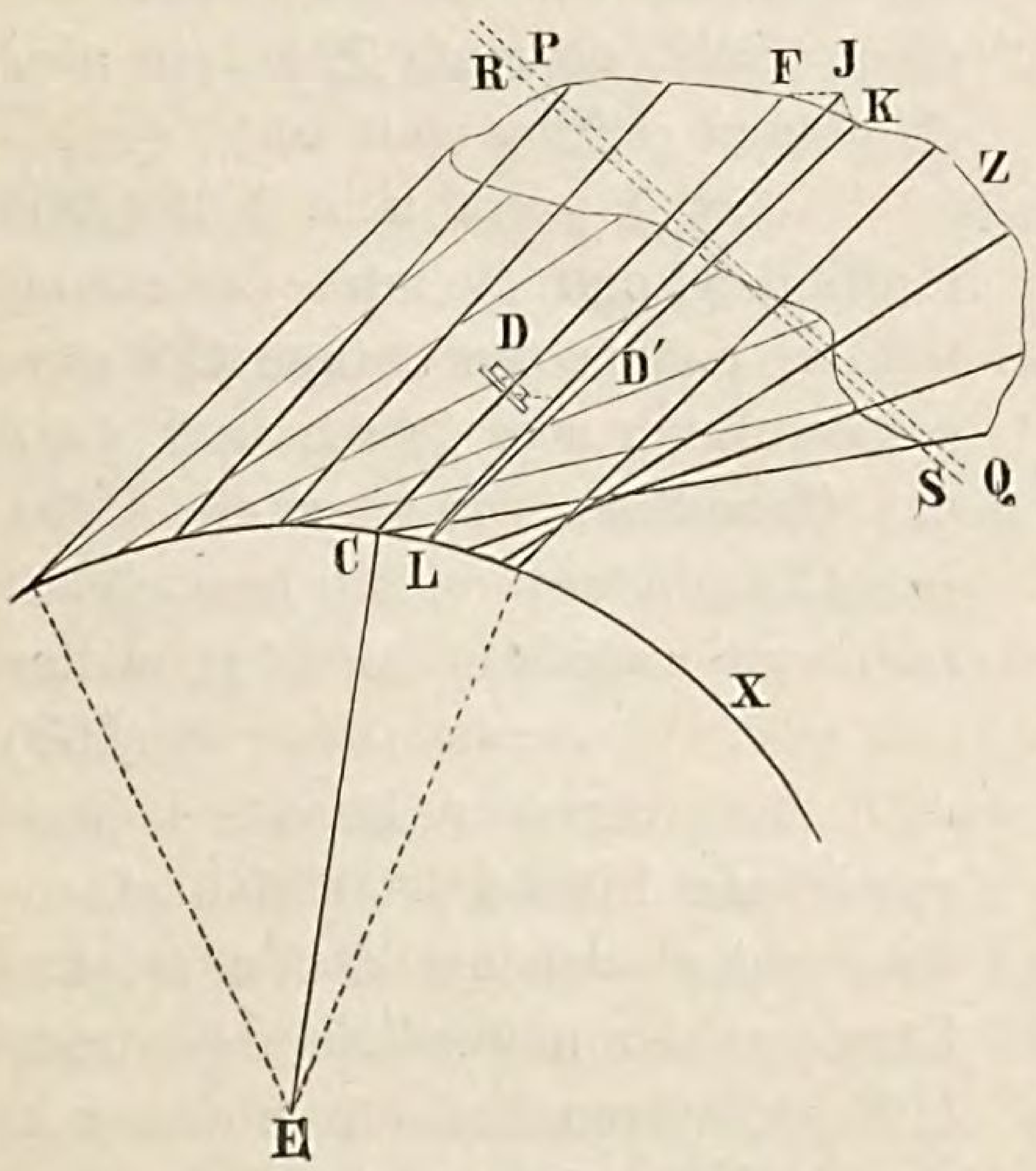
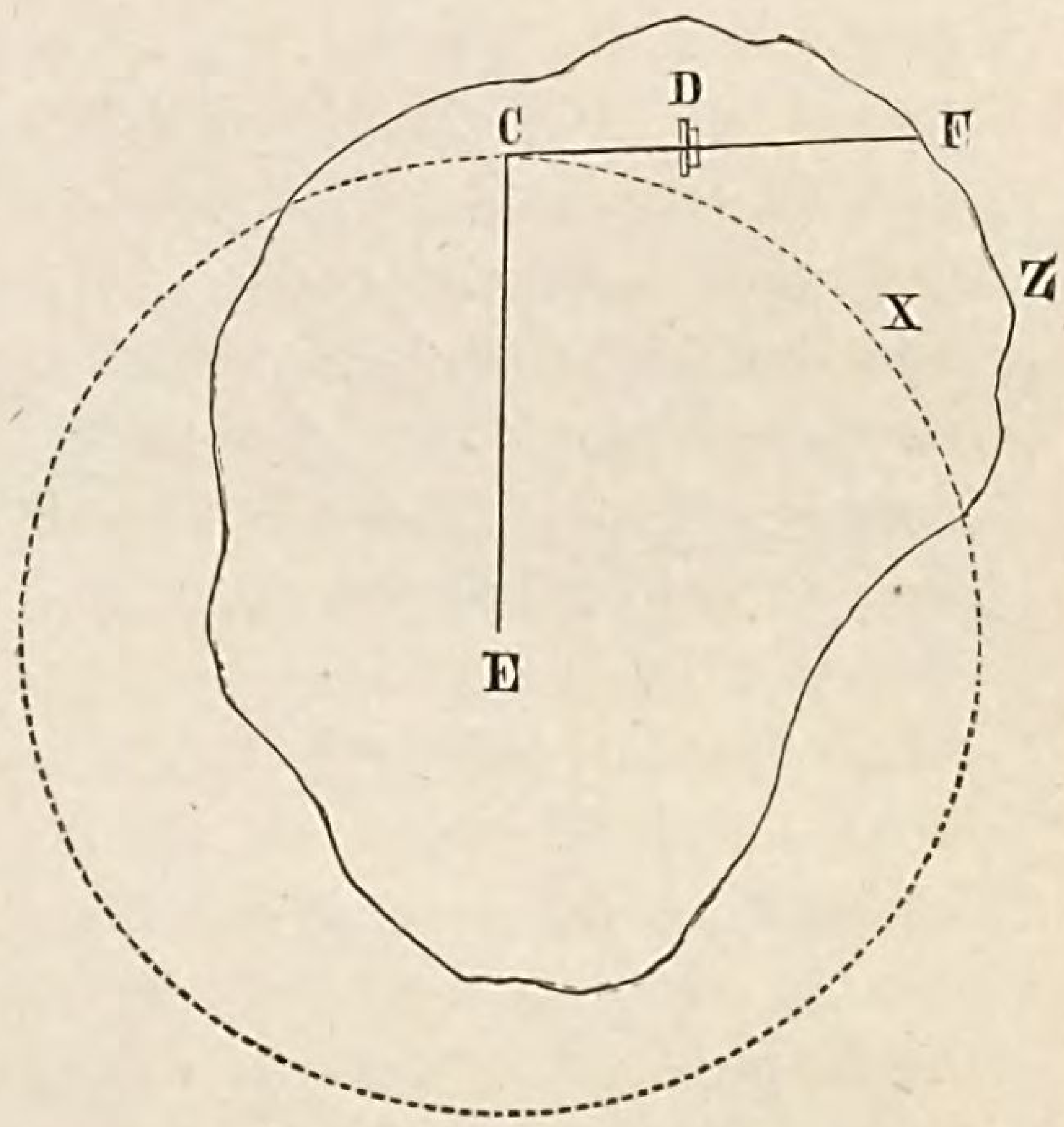


Fig. 128.



wird, in ein Parallelogramm p und einen Sector s zerlegt denkt, die Summe aus der Summe aller p (Σ p) und aus der Summe aller s (Σ s), d. i. Σ p + Σ s gleich ist der von der Curve Z begrenzten Fläche, sobald C F in die erste Lage oder der Stift F auf den Ausgangspunkt zurückgekehrt ist. Wird der Flächengehalt der Figur Z mit J bezeichnet, so ist demnach

$$J = \Sigma p + \Sigma s \tag{194}$$

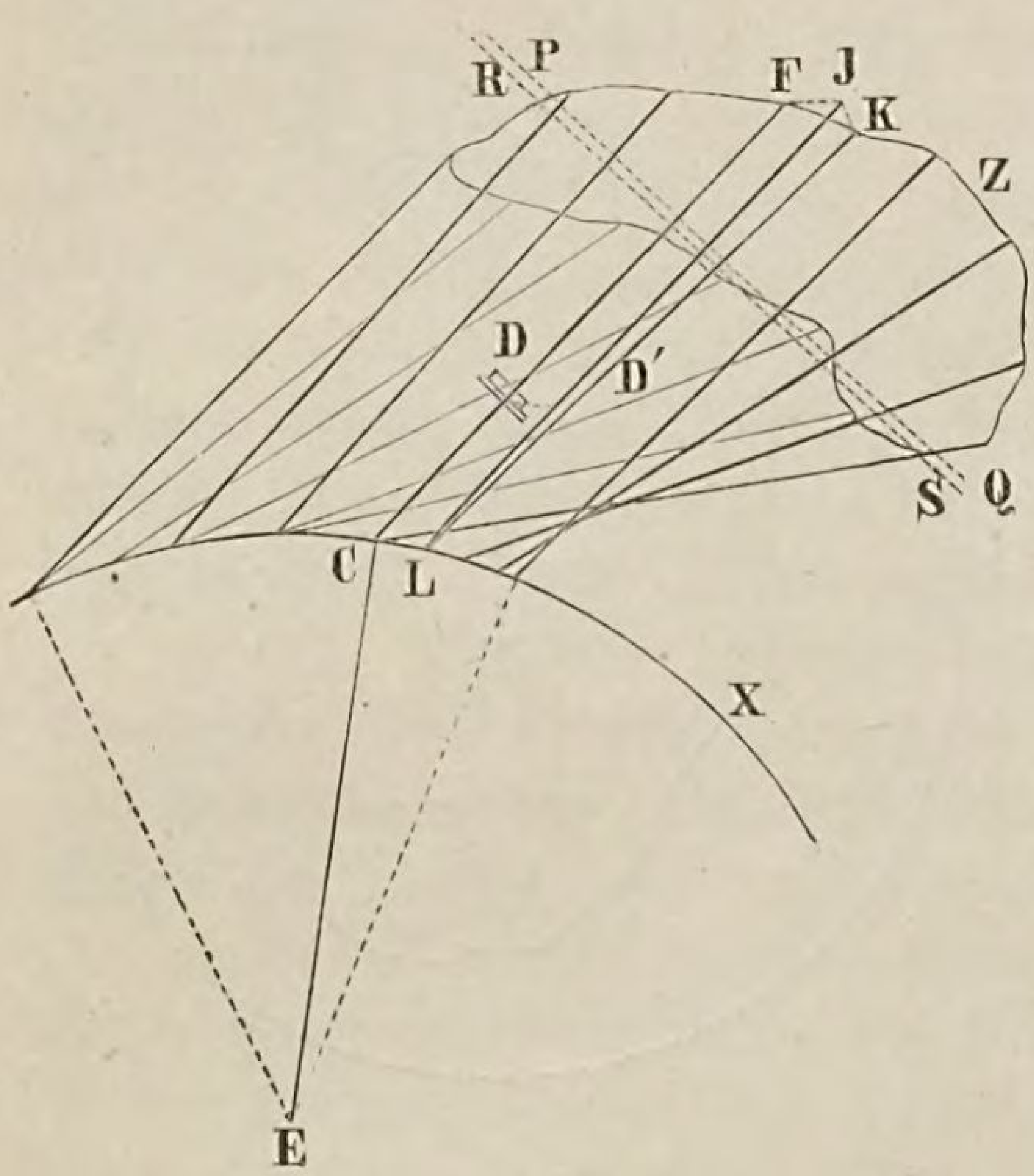
Denkt man sich jetzt mit der Geraden C F eine auf der Zeichnungsfläche sich bewegende Rolle so verbunden dass ihre Axe parallel zu C F ist und ihr Berührungspunkt in D liegt, so wird diese Rolle bloss gleiten wenn sie nach ihrer Axe, und bloss rotiren wenn sie senkrecht zur Axe bewegt wird; in jedem anderen Falle findet gleichzeitig Gleitung und Drehung statt. Bei dem Uebergange der Linie C F in die Lage L J wird

die Rolle einen Bogen h abwickeln welcher der senkrechte Abstand dieser beiden Lagen ist; und bei dem Uebergange von der Lage L J in die Lage L K beschreibt der Berührungspunkt der Rolle D einen Bogen $\varrho\,\varphi$ wenn $\varrho = CD$ und $\varphi = JLK$ ist. Die Gesammtabwickelung von der ersten zur zweiten Lage ist somit $= h + \varrho\,\varphi$ und von der ersten Lage bis wieder zur ersten, wobei die ganze Figur umfahren wird, gleich

$$u = \Sigma h + \Sigma \varrho\,\varphi \qquad (195)$$

Die Grössen h und φ sind positiv oder negativ, je nachdem es die Flächenelemente p und s sind, und der Abstand ϱ wird negativ wenn die Rolle D auf der Verlängerung von F C, also von F weiter abliegt. Für den einen Fall, wo der Pol E ausserhalb der Figur Z liegt, Fig. 127, ist $\Sigma s = 0$, da der constante Halbmesser aller Sectoren, die Gerade C F, gerade so viele Drehungen im positiven als negativen Sinne gemacht hat, sobald er in seine erste Lage zurückgekehrt ist. Es wird somit für diesen Fall, da auch $\Sigma\varphi = 0$, also $\Sigma \varrho\,\varphi = \varrho\,\Sigma\varphi = 0$ ist,

Fig. 127.



$$J = \Sigma p \text{ und } u = \Sigma h \qquad (196)$$

Multiplicirt man die letzte Gleichung mit der constanten Grösse $CF = r$, so kommt $r\,u = \Sigma r\,h$ und da r die Grundlinie, h aber die Höhe jedes Parallelogramms p bezeichnet, somit $r\,h = p$ ist, so folgt weiter

$$J = r\,u \qquad (197)$$

d. h. die von dem Punkte F umschriebene Fläche ist gleich einem Rechtecke welches die constante Länge r der beweglichen Geraden C F zur Grundlinie und den von der Rolle D während der Bewegung abgewickelten Bogen u zur Höhe hat; mit anderen Worten: der abgewickelte Bogen der Rolle D ist dem Inhalte der umfahrenen Fläche proportional.

In dem anderen Falle, wo der Pol E innerhalb der Figur Z liegt, macht die Gerade C F bis zu ihrer Rückkehr in die Anfangslage eine ganze Umdrehung, während sie in dem ersten Falle eben so viele positive als negative Drehungen vollführte. Die von den Punkten F und C (Fig. 129) beschriebenen Curven Z und X, von denen die letztere ein Kreis ist, schliessen demnach die Fläche ein welche durch die Summe $\Sigma p + \Sigma s$ ausgedrückt ist, und es ist desshalb wenn $EC = R$ gesetzt wird,

$$J - R^2\,\pi = \Sigma p + \Sigma s \qquad (198)$$

Diese Gleichung gilt übrigens nicht bloss für die vorstehende Figur allein sondern auch dann noch wenn sich der Kreis X und die Curve Z schneiden, wie dieses in Fig. 128 der Fall ist.

Erwägt man dass die Gerade C F = r eine ganze Umdrehung macht (der Punkt C z. B. beschreibt den Kreis X), bis sie wieder in ihre erste Lage zurückkehrt, so ist klar dass die algebraische Summe aller von ihr bis dahin beschriebenen Sectoren (Σ s) eine Kreisfläche vom Halbmesser r und daher $\Sigma s = r^2 \pi$ ist. Die letzte Gleichung geht somit über in

$$J - R^2 \pi = r^2 \pi + \Sigma p \quad (199)$$

Der Ausdruck $\Sigma \varrho \varphi$ in der Gleichung (195) welche hier unverändert gilt, ändert sich, da die Summe aller Drehungen 360° beträgt, in $\varrho \Sigma \varphi = 2 \varrho \pi$ und somit die Gleichung (195) selbst in

$$u = \Sigma h + 2 \varrho \pi \quad (200)$$

ab. Durch Multiplication mit r und Einsetzung des Werths Σ p für Σ r h erhält man hieraus

$$r u = \Sigma p + 2 r \varrho \pi \text{ oder}$$

$$\Sigma p = r u - 2 r \varrho \pi$$

und wenn man den letzten Werth in die Gleichung (199) und

$$R^2 + r^2 - 2 r \varrho = c^2 \quad (201)$$

setzt, so folgt schliesslich der Inhalt der Curve L oder

$$J = c^2 \pi + r u \quad (202)$$

d. h. befindet sich der Pol E innerhalb der umfahrenen Fläche, so ist diese gleich einer constanten Fläche ($c^2 \pi$) plus einem Recktecke dessen Inhalt dem von der Rolle abgewickelten Bogen (u) proportional ist.

Fig. 129.

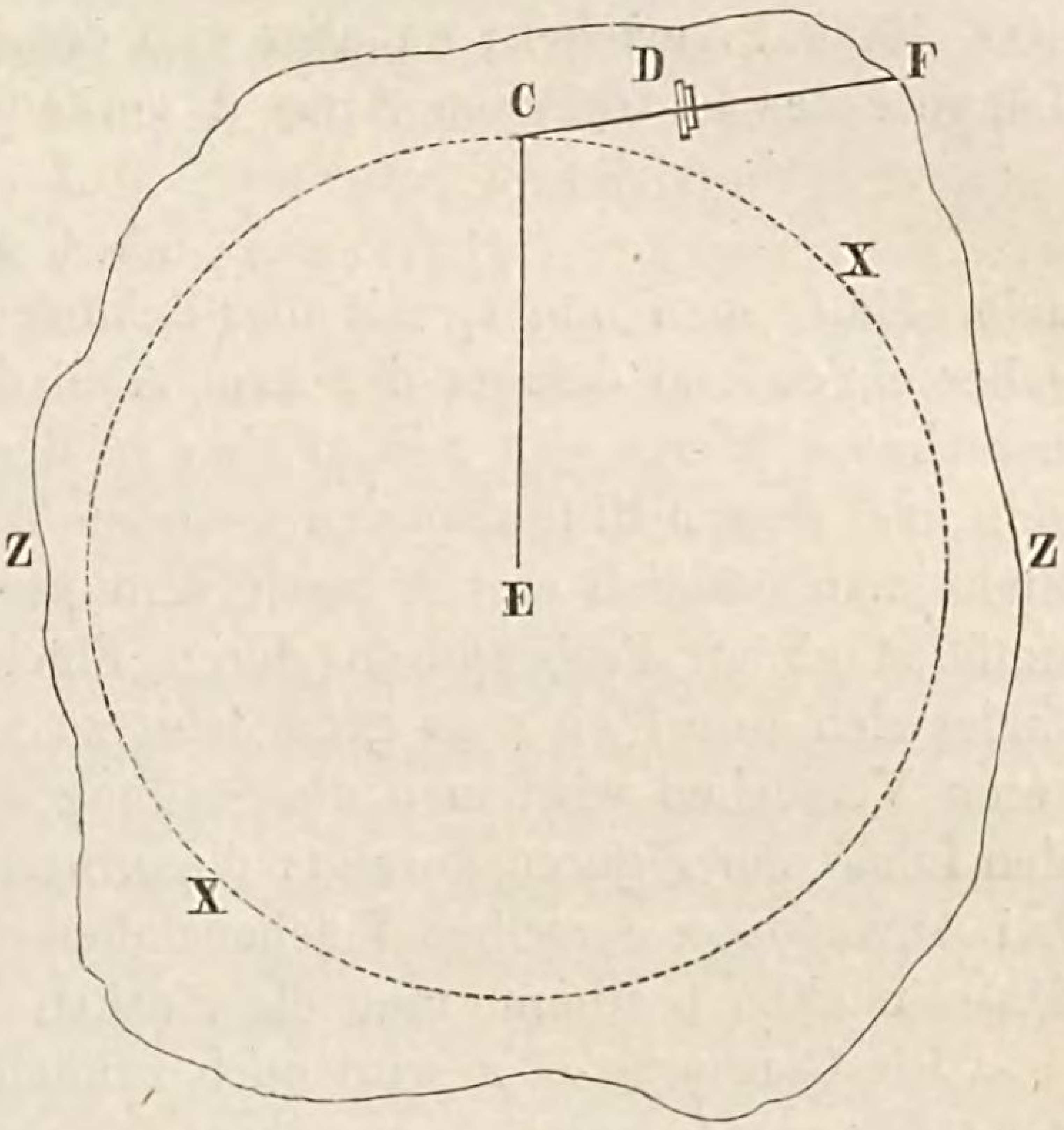
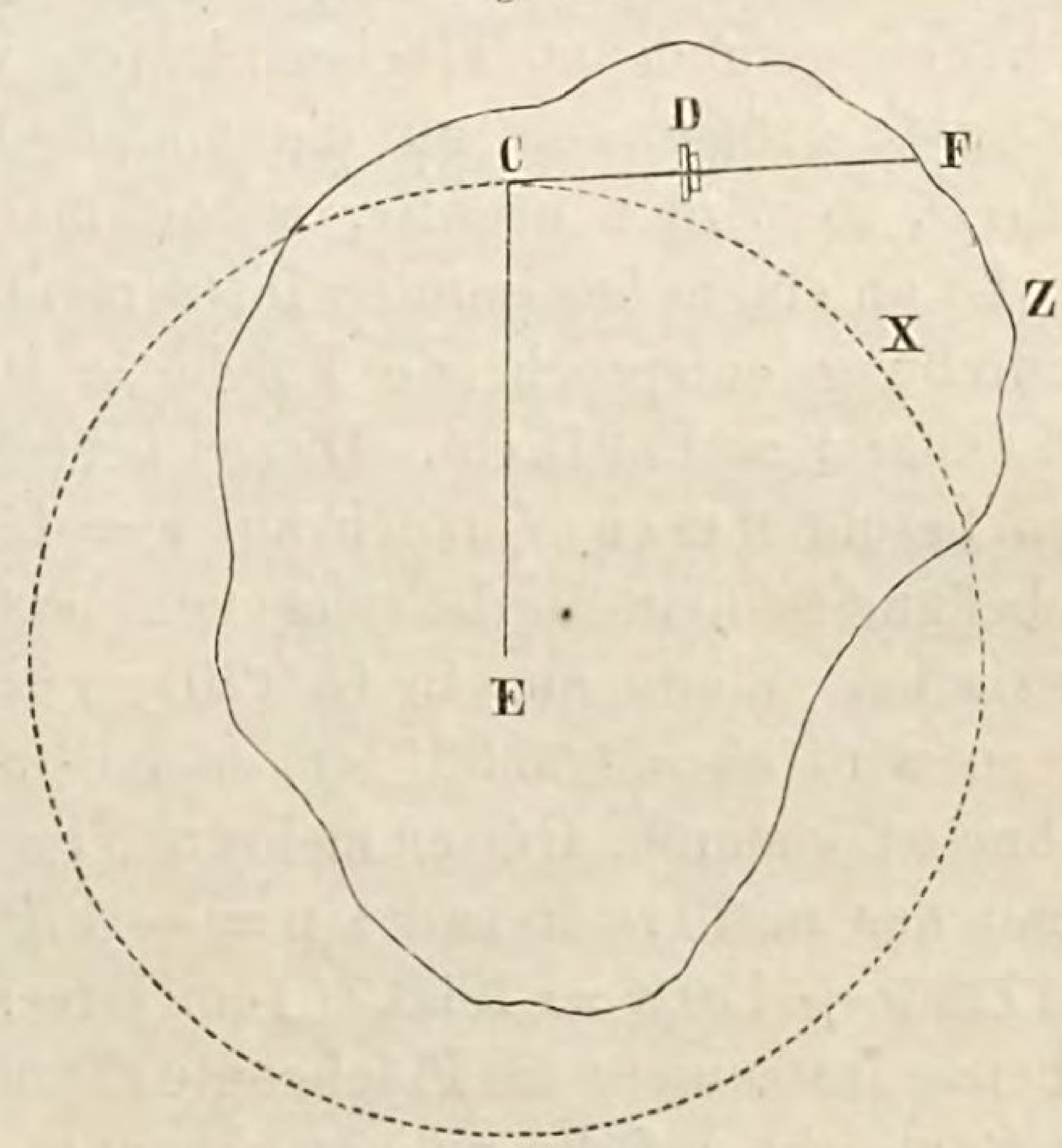


Fig. 128.



Die Anwendung des Polarplanimeters erfordert dass die beiden Ergebnisse der Theorie welche in den Gleichungen (197) und (202) niedergelegt sind, noch weiter erörtert werden. Man kann zunächst statt des Bogens u die Zahl n der Rollenumdrehungen einführen. Ist nun der Halbmesser der Rolle D = r_1, so wird der Bogen

$$u = n \cdot 2 r_1 \pi \quad (203)$$

und wenn man diesen Werth in die eben genannten Gleichungen setzt und die Flächeninhalte J, J der umfahrenen Figuren nunmehr mit J' und J'' unterscheidet, so erhält man jetzt:

$$J' = 2\,r\,r_1\,\pi\,.\,n \qquad (204)$$

$$J'' = 2\,r\,r_1\,\pi\,.\,n + c^2\,\pi \qquad (205)$$

Damit sofort n die Fläche J' oder J'' bis auf die Constante $c^2\,\pi$ angibt, muss man das Product $2\,r\,r_1\,\pi = 1$ oder einer Potenz von 10, also = 10, 100, 1000 . . . machen; da aber von den Factoren dieses Products nur die Länge r des beweglichen Arms A veränderlich ist, so muss

$$r = \frac{1}{2\,r_1\,\pi} \qquad (206)$$

sein. Hätte man nun r_1 mit aller Schärfe gemessen, so liesse sich hieraus r berechnen und danach der Arm A in der Hülse H verschieben; der so berechnete Werth von r wird aber in der Regel nur ein Näherungswerth sein, mit dessen Hilfe man den genauen Werth von r durch Versuch findet. Stellt man nämlich erst A nach dem berechneten Werthe von r ein und umfährt einige Probefiguren deren Flächeninhalt genau bekannt ist, so findet sich sofort ob r zu gross oder zu klein ist, und nach einigen weiteren Versuchen wird man die Stellung des Arms gefunden haben welche den Inhalt der Figuren anzeigt: diese Stellung markirt man, um sie später bei Anwendung derselben Flächeneinheit wieder zu benützen. Für andere Masseinheiten bestimmt man die Marken in gleicher Weise.

Die Constante $c^2\,\pi$ wird auch zunächst berechnet, indem man c^2 aus Gl (201) sucht, unter Anwendung des eben empirisch gefundenen Werths von r. Hierauf werden einige Probefiguren von innen aus umfahren und nach den gefundenen Flächeninhalten wird $c^2\,\pi$ verbessert. Sollte diese Constante grösser sein als die umfahrene Fläche oder die Angabe n der Rolle D, so wird n negativ, worauf man beim Ablesen wohl zu achten hat.

Ist an einem bestimmten Instrumente $r_1 = 1$ cm, so wird, wenn die einer Umdrehung entsprechende Fläche $= 10^2 = 100$ sein soll, $2\,r\,r_1\,\pi = 100$ und daher r = 15,915 cm. Dieser berechnete Werth von r mag durch den oben beschriebenen Versuch auf r = 15,7 cm reducirt worden sein, da die Probefigur in dem Verhältniss von 98,65 : 100 kleiner angegeben wurde, als sie ist. Wenn nun in Gl (201) r = 15,7 cm, R = 15,9 cm, ϱ = 3,4 cm ist, so wird c^2 = 606,06 □cm und $c^2\,\pi$ = 1904 □cm. Dieses ist die berechnete Constante. Hätten mehrere Versuche für eine Fläche von 1728,5 □cm Inhalt das mittlere Resultat n = — 170,2 ergeben, so müsste man $c^2\,\pi$ = = 1728,5 + 170,2 = 1898,7 □ cm setzen, und es wären für das in Rede stehende Instrument die Flächengleichungen J' = n und J'' = n + 1898,7 □ cm. Mit Rücksicht auf die zuletzt genannte Ablesung würde sich die Gleichung für den zweiten Fall (Pol innen) so gestalten: J'' = — 170,2 + 1898,7 = = 1728,5 □ cm.

Als Ergänzung der Theorie des Polarplanimeters folgt hier noch eine Vergleichung der Genauigkeit der Flächenbestimmung in den zwei Fällen,

wo der Pol ausserhalb und innerhalb der Figur sich befindet. Nach den Gleichungen (204) und (205) ist, wenn man die Ablesungen für eine und dieselbe Figur von der Fläche J beziehlich mit n' und n'' bezeichnet:

$$n' = \frac{J}{2\,r\,r_1\,\pi} \qquad n'' = \frac{J - c^2\,\pi}{2\,r\,r_1\,\pi}$$

Differentiirt man diese Gleichungen auf der einen Seite nach n' und n'' und auf der anderen nach r, wobei zu bedenken dass nach Gl (201) $c^2 = R^2 + r^2 - 2\,r\,\varrho$ ist, so erhält man zunächst:

$$d\,n' = -\frac{J}{2\,r_1\,\pi} \cdot \frac{d\,r}{r^2} \qquad d\,n'' = -\frac{J}{2\,r_1\,\pi} \cdot \frac{d\,r}{r^2} + \frac{R^2}{2\,r_1} \cdot \frac{d\,r}{r^2} - \frac{d\,r}{2\,r_1}$$

und nach Einführung des Werthes $2\,r\,r_1\,\pi = 1$ aus Gl (206):

$$d\,n' = -J \cdot \frac{d\,r}{r} \qquad d\,n'' = -\left(J - (R^2 - r^2)\,\pi\right) \frac{d\,r}{r}$$

Zieht man diese beiden Fehlergleichungen von einander ab, so folgt

$$d\,n'' - d\,n' = \pi\,(R^2 - r^2) \cdot \frac{d\,r}{r}$$

und es ist hieraus zu entnehmen dass es für die Genauigkeit der Flächenbestimmung nur dann gleichgültig ist, ob sich der Pol inner- oder ausserhalb der Figur befindet wenn R = r oder E C = C F ist; in jedem anderen Falle gewährt der aussen liegende Pol eine grössere Genauigkeit als der innere. Aus diesem Grunde, und da man in diesem günstigen Falle der Ablesung auch keine Constante beizufügen hat, ist es vorzuziehen eine grosse Figur zu theilen, damit man sie mit aussen stehendem Pole messen kann, oder auch in dieselbe ein Rechteck zu legen, dieses mit Zirkel und Massstab zu messen und nur die Ueberschüsse an den Grenzen des Rechtecks mit dem Planimeter zu bestimmen.

§. 116. Genauigkeit. Ueber die Genauigkeit des Polarplanimeters liegen nunmehr ebenso ausreichende Erfahrungen vor, wie über die des Linearplanimeters. Der Verfasser hat im Herbste 1855 mit einem Amsler'schen Planimeter einige Versuche gemacht und die gemessenen Flächen bis auf ein drittel Procent ihres Inhalts genau erhalten; er wollte aber aus diesem Ergebnisse kein definitives Urtheil über die Genauigkeit des Polarplanimeters ableiten, da das zu den Versuchen verwandte Planimeter nach den Angaben des Erfinders (und nach späteren eigenen Beobachtungen des Verfassers) nicht mit aller Sorgfalt gearbeitet war. In Wien hat man mit dem in §. 113, Seite 230 genannten Starke'schen Planimeter das sich von dem Amsler'schen bloss dadurch unterscheidet dass der Pol (E) nicht durch einen Nadeleinsatz sondern durch einen ziemlich schweren Metallcylinder bestimmt wird, ungefähr dasselbe Resultat erhalten; dagegen führt Amsler über die Genauigkeit seiner Planimeter an: „Man betrachtete die Instrumente als fertig, sobald sie die wirklich umfahrene Fläche bis auf $\frac{1}{1000}$ genau angaben; dass aber eine bedeutend grössere Genauigkeit erreichbar wäre, zeigt schon die Vergleichung des Polarplanimeters mit dem Wetli'schen Planimeter, indem bei jenem mehrere Fehlerquellen wegfallen die das

letztere besitzt.“ Im Jahre 1869 hat Herr F. Eickemeyer (damals Assistent des Verfassers, jetzt Baurath in Nürnberg) die drei Polarplanimeter der polytechnischen Schule in München unter sich in Bezug auf ihre Leistungsfähigkeit verglichen und hierauf mit dem besten von ihnen Genauigkeitsversuche in der Weise angestellt dass er eine auf Messing gravirte Kreisfläche von 116,15 mm Durchmesser auf verschiedene Weisen mass. Zunächst wurde in den Mittelpunkt dieser Fläche das eine Ende eines 1,5 mm dicken Messingstreifens mit einer an diesem senkrecht befestigten feinen Stahlspitze eingesteckt, während der Fahrstift durch ein am anderen Ende des Streifens gebohrtes Loch vom Durchmesser der Fahrstiftspitze seine Führung auf dem Kreisumfange erhielt: aus je 15 Versuchen ergab sich eine mittlere Genauigkeit von $\frac{1}{1760}$ und eine grösste Abweichung von $\frac{1}{550}$, mochte der Pol möglichst nahe oder sehr fern von der Peripherie befestigt gewesen sein. Als hierauf dieselbe Kreisfläche 15 mal mit freier Hand umfahren wurde, ergab sich eine mittlere Genauigkeit von $\frac{1}{615}$ und eine grösste Abweichung von $\frac{1}{340}$. Diese Versuche bestätigen im Wesentlichen die früheren Angaben, und es lässt sich hiernach wohl behaupten dass die mögliche Genauigkeit der Amsler'schen Polarplanimeter etwa $\frac{1}{1800}$ und die in gewöhnlichen Fällen mit einem vorzüglichen Instrumente zu erreichende $\frac{1}{600}$ beträgt. Der Amsler'sche Polarplanimeter gewährt somit für die meisten praktischen Zwecke eine hinreichende Genauigkeit und ist desshalb sehr zu empfehlen.

G. Geometrische Flächentheilung und Grenzberichtigung.

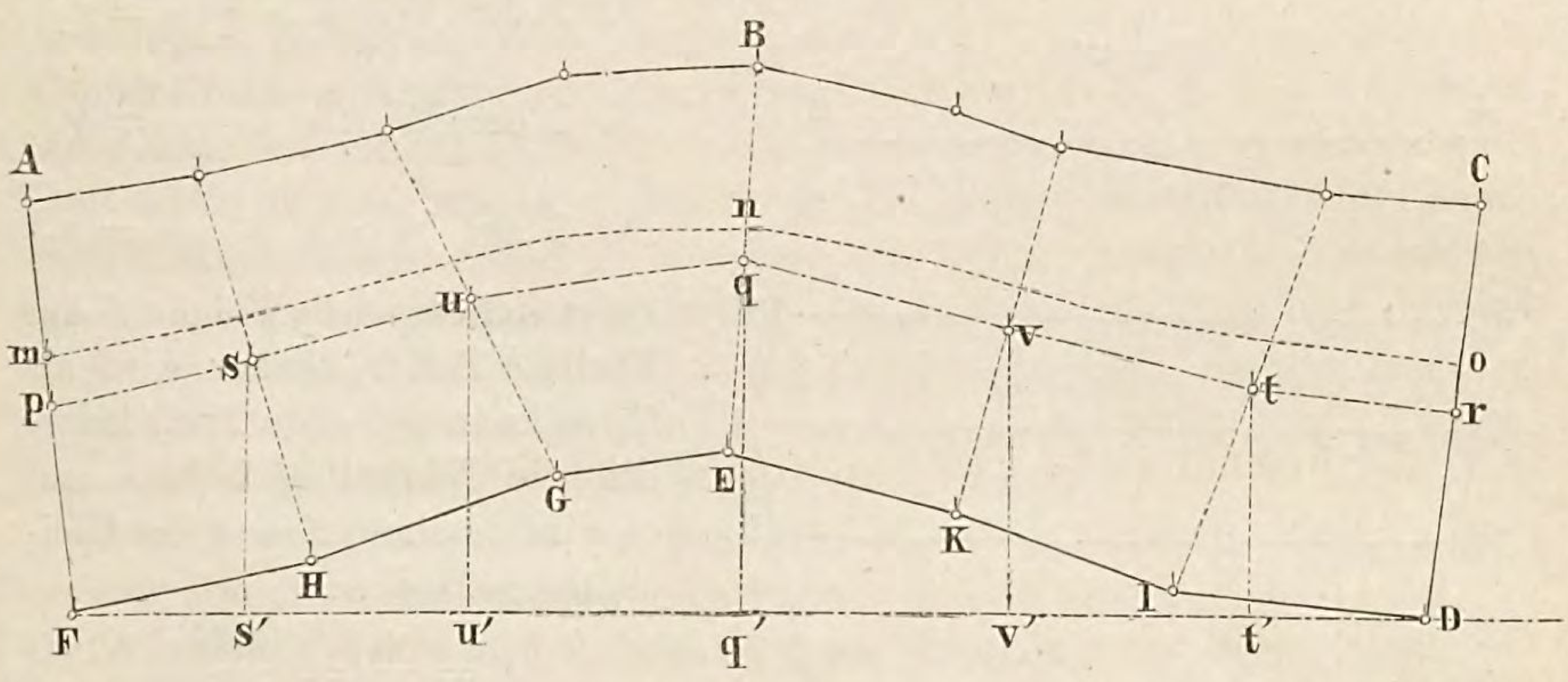
§. 117. Die Theilung eines Grundstücks wird nöthig wenn von diesem für irgend einen Zweck ein Stück von gegebenem Flächeninhalte abzuschneiden ist, oder wenn mehrere Eigenthümer einer Parzelle ihre Antheile sondern wollen, oder wenn die krumme, oder vielfältig gebrochene Grenze zweier Grundstücke in eine geradlinige verwandelt werden soll.

Für diese Theilungen sind entweder bestimmte Richtungen und Formen der Grenzen vorgeschrieben, oder es dürfen die neuen Grenzen in soweit beliebig gewählt werden, als sie den Zugang zu den abgetheilten Parzellen nicht erschweren. Ferner können Theilungen vorkommen bei Grundstücken von gleichem Werthe der Flächeneinheit, d. i. von gleicher Bonität, oder bei Grundstücken von ungleicher Bonität. In diesem Falle wird also für die Theilung nicht die Fläche allein, sondern das Product aus dem Flächeninhalte und dem Preise der Flächeneinheit oder der Werth des Grundstücks massgebend sein. Endlich kann die Theilung auf Grund eines vorliegenden genauen Plans des Grundstücks oder ohne diesen durch unmittelbare Messung auf dem Felde zu vollziehen sein.

Hiernach liesse sich eine grosse Reihe von Aufgaben bilden; wir werden uns aber auf wenige beschränken, da sich das Princip welches bei diesen Theilungen zu befolgen ist, leicht aussprechen und ausführen lässt; es be-

steht nämlich darin: alle hierher gehörigen Aufgaben versuchsweise zu lösen und die ersten Lösungen so lange zu verbessern, bis den gestellten Bedingungen innerhalb der nothwendigen Genauigkeitsgrenzen genügt ist. Soll hiernach z. B. ein Grundstück A B C D E F (Fig. 130) von gleicher Bonität in zwei gleiche Theile so getheilt werden dass die neuen Grenzen den alten nahezu parallel laufen, so wird man erst eine Linie m n o als Theilungslinie annehmen und die beiden Flächen rechts und links dieser Linie aus dem Kettenmasse berechnen. Sind f_1 und f_2 die gefundenen Flächeninhalte, so ist die Gesammtfläche $f_1 + f_2 = 2\,f$ und folglich die Grösse eines gesuchten Theils $= f$, daher der eine bereits abgesteckte Theil (B n) um $d = f - f_1$ zu klein und der andere (E n) um $d = f_2 - f$ zu gross. Misst man nun die Linie m n o auf dem Felde und findet ihre horizontale Länge $= l$, so muss der Streifen p q r $= d$, um welchen f_1 zu ver.

Fig. 130.



grössern und f_2 zu verkleinern ist, eine Breite b erhalten welche sich aus der Gleichung

$$d = b\,l$$

ergibt. Trägt man diese Breite von m n o aus mehrmals ab, so wird die nunmehr abgesteckte Linie p s u q v t r der gestellten Aufgabe genügen.

Wäre das zu theilende Grundstück genau gezeichnet gewesen, so hätte man die vorläufige Theilungslinie m n o in dem Plane angedeutet und die Flächen f_1 und f_2 entweder mit Zirkel und Massstab oder mit dem Planimeter gemessen und hierauf den Streifen m n o r q p wie vorhin bestimmt. Alsdann hätte man die Abstände A p, p F, C r, r D aus dem Plane entnommen, um hiernach die Punkte p und r auf das Feld überzutragen, und schliesslich würde man die Punkte s, u, q, v, t der Theilungslinie durch Abscissen und Ordinaten welche in Bezug auf die Axe F D aus der Zeichnung abgegriffen wurden, auf dem Felde ausgesteckt haben.

Sind die zu theilenden Figuren Dreiecke oder Trapeze, so lassen sich bei der Theilung wohl auch die Constructionen anwenden welche die ebene

Geometrie lehrt; erfahrungsgemäss führt aber auch hier die Lösung durch Versuche meist schneller zum Ziele.

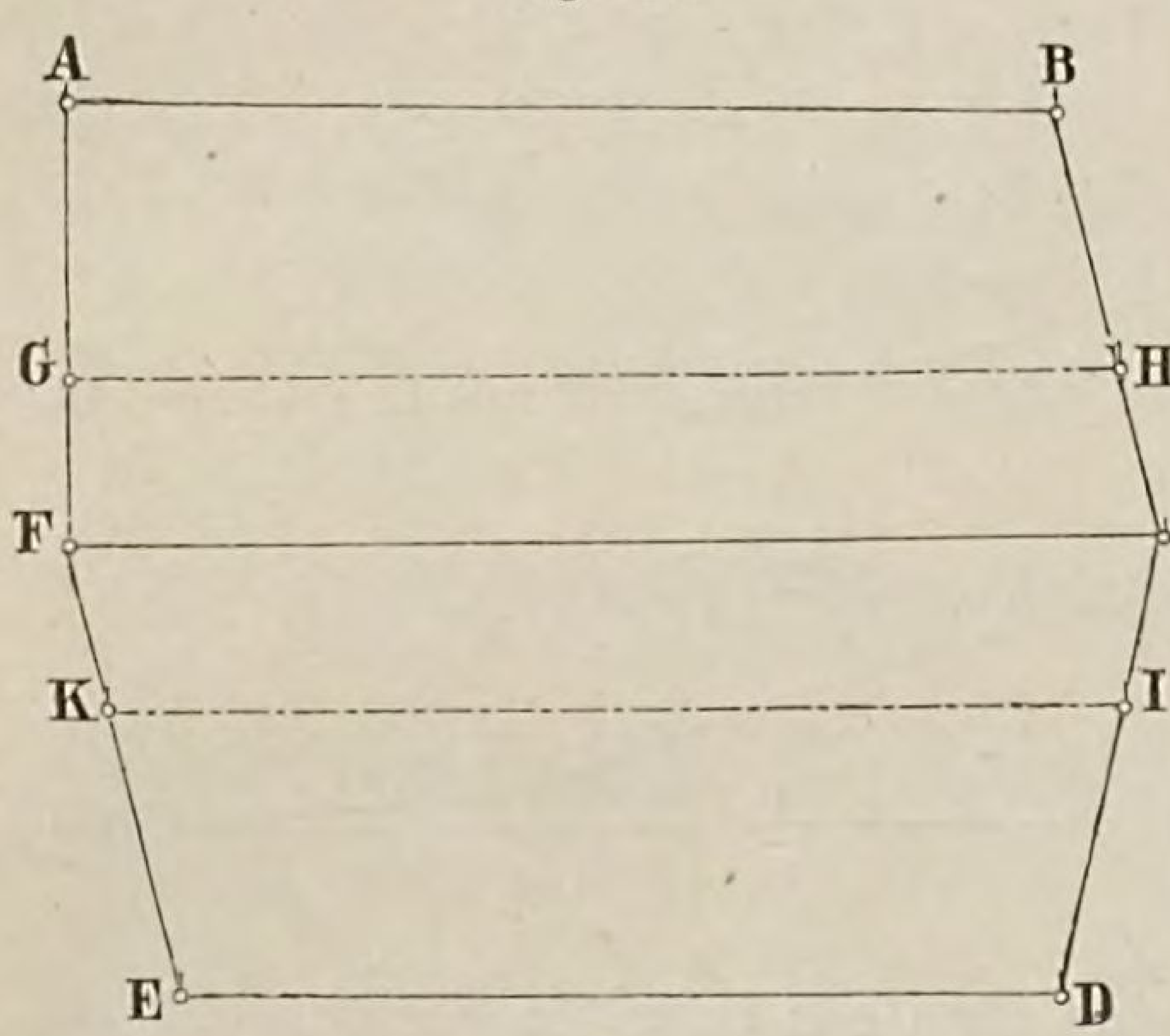
§. 118. Aufgabe. Zwei aneinander stossende Grundstücke von verschiedener aber bekannter Bonität sollen in drei Theile getheilt werden welche ihrem Werthe nach in einem gegebenen Verhältniss stehen.

Es seien A C und F D (Fig. 131) die beiden Grundstücke, der Werth w_1 des ersten $= f_1 b_1$ und der des zweiten $w_2 = f_2 b_2$, wobei f den Flächeninhalt und b den Preis der Flächeneinheit (die Bonität) bezeichnet. Stellen G H und K I die Theilungslinien vor, so soll sich der Werth von A H : G I : K D verhalten wie m : n : p. Der zu theilende Werth ist offenbar

$$w_1 + w_2 = f_1 b_1 + f_2 b_2 = W$$

und es trifft desshalb, wenn man $m + n + p = N$ setzt, nach den Regeln der Gesellschaftsrechnung auf

Fig. 131.



Nr 1 der Werth $m \frac{W}{N} = v_1$

Nr 2 der Werth $n \frac{W}{N} = v_2$

Nr 3 der Werth $p \frac{W}{N} = v_3$

Zeigt sich dass die Fläche f′ des Theils A B H G kleiner wird als f_1, so kann der erste Theil lediglich die Bonität b_1 haben und es wird desshalb f′ aus der Gleichung gefunden:

$$f' = \frac{v_1}{b_1} = \frac{m W}{b_1 N}$$

In gleicher Weise erhält man, wenn die Fläche f″ des dritten Theils D E K I von f_2 abgeschnitten werden kann,

$$f'' = \frac{v_3}{b_2} = \frac{p W}{b_2 N}.$$

und es bleibt folglich für den zweiten Theil I H G K übrig: von dem Grundstücke der Bonität b_1 die Fläche $f_1 - f'$, und von der Bonität b_2 die Fläche $f_2 - f''$. Sind die Flächen f′ und f″ bestimmt, so lassen sich die Linien G H und K I leicht berechnen und abstecken.

Sollen die Theilungslinien (L P, M N) einer gegebenen Richtung X Y parallel laufen und die gemeinsame Grenze der beiden Grundstücke schneiden, wie in Fig. 132, so ziehe man erst L′ P′ so dass die beiden Abschnitte A O′, O′ E dem Werthe v_1 nahezu entsprechen; da aber, wenn φ_1 die Fläche A O′ und φ_2 die Fläche F P′ bezeichnet, der Werth

$$\varphi_1 b_1 + \varphi_2 b_2 \gtrless v_1$$

sein wird, so muss die Differenz

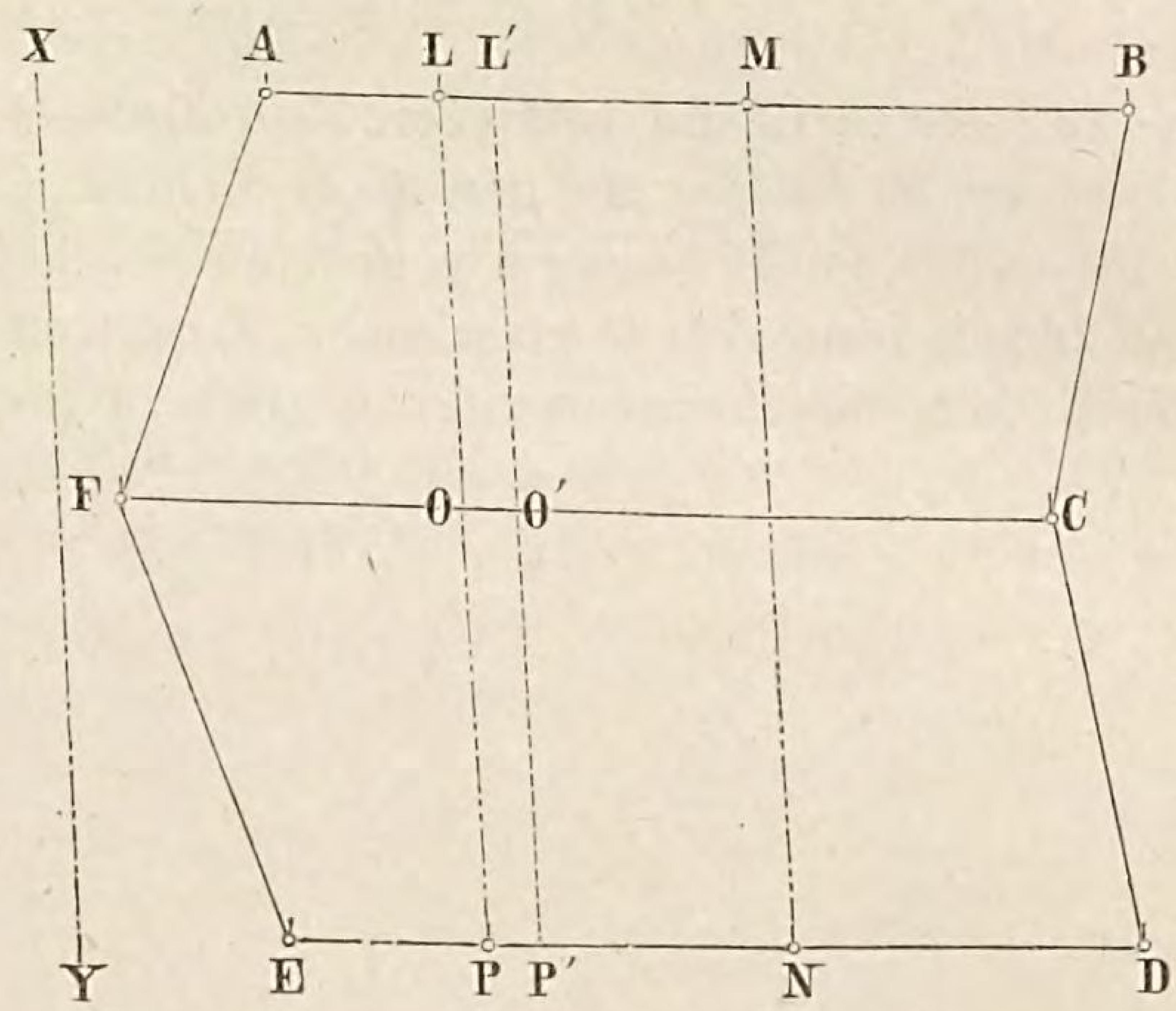
$$\varphi_1 b_1 + \varphi_2 b_2 - v_1 = \Delta$$

welche positiv oder negativ sein kann, ausgeglichen werden. Ist dieselbe positiv, so fällt die wahre Theilungslinie L P links von der vorläufig angenommenen L′P′, ausserdem rechts. Um den Abstand beider $= \delta$ zu finden, kann man folgende Rechnung anstellen. Es muss offenbar, wenn $L' O' = l_1$ und $O' P' = l_2$ gesetzt wird, sehr nahe

$$\delta (l_1 b_1 + l_2 b_2) = \Delta$$

sein. Hat man nun aus dieser Gleichung δ gefunden, so ziehe man in dem Abstande δ eine Parallele zu L′ P′, womit der erste Theil abgeschnitten ist. Ebenso verfahre man mit dem zweiten Theile; der dritte ergibt sich dann von selbst.

Fig. 132.



§. 119. Aufgabe. Ein viereckiges Grundstück A B C D soll von dem Schnittpunkte E der verlängerten Seiten A B und D C aus in drei gleiche Theile getheilt werden.

Man bestimme zunächst die Schnittpunkte E und O der Seiten A B, D C und D A, C B entweder auf dem Felde durch unmittelbare Absteckung, oder auf dem Plane durch Zeichnung oder Rechnung (in dem letzteren Falle aus den gegebenen Coordinaten der Punkte A, B, C, D). Dann messe oder berechne man den Schnittwinkel ε der Geraden A B, D C und den gleichnamigen Winkel ω der Geraden D A, C B. Wir sehen nunmehr diese Winkel und die rechtwinkeligen Coordinaten der Punkte A, B, C, D, E in Bezug auf O A D als Abscissenaxe als bekannte Grössen an und berechnen hiemit die Fläche $A B C D = F$ und $O A B = F_1$. Denken wir uns von E aus die Theilungslinien E J und E K gezogen, so muss $A B G J = J G H K = K H C D = \frac{1}{3} F$ werden. Es ist somit die Fläche

$$O G J = F_1 + \tfrac{1}{3} F \text{ und } O H K = F_1 + \tfrac{2}{3} F$$

zu machen, während $O C D = F_1 + F$ ist. Diese Forderungen setzen aber die Lösung der Aufgabe voraus: durch einen gegebenen Punkt (E) eine Gerade (E J) so zu ziehen dass sie von einem gegebenen Winkel $(C O D = \omega)$ ein Dreieck (G O J) von bekanntem Flächeninhalt (S) abschneidet.

Setzt man zu dem Ende $O J = a$, $O G = b$, $O E_1 = x$ und $E E_1 = y$, so gelten nach der Figur (in der man sich die Ordinate $G G_1$ gezogen denken kann, wodurch Winkel $J G G_1 =$ Winkel $J E E_1$ wird) folgende zwei Gleichungen:

$$S = \tfrac{1}{2}\, a\, b \sin \omega$$

$$\frac{x - a}{y} = \frac{b \cos \omega - a}{b \sin \omega}$$

welche nach a und b aufzulösen sind. Führt man den Werth

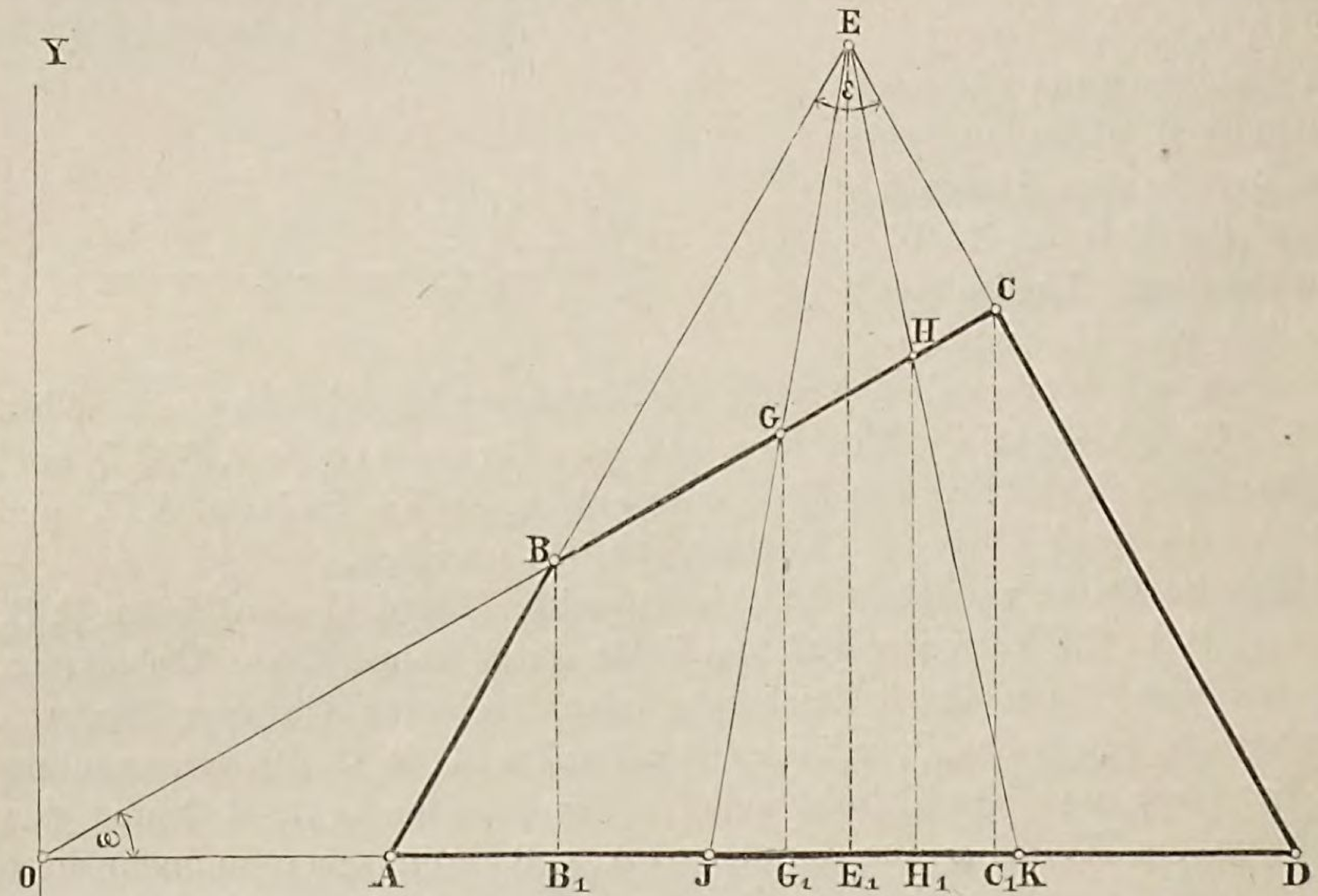
$$b = \frac{2\, S}{a \sin \omega} \qquad (\alpha)$$

aus der ersten in die zweite ein, so wird

$$a = \frac{S}{y} \pm \frac{S}{y} \sqrt{1 - \frac{2\, y}{S} \left(x - y \operatorname{cotg} \omega\right)} \qquad (\beta)$$

und hiemit lässt sich b berechnen. Damit ist aber, wenn a einen reellen Werth hat, die Zwischenaufgabe gelöst.

Fig. 133.



In dem vorliegenden Falle sind die Coordinaten des Punkts E, nämlich $x = O\, E_1$ und $y = E\, E_1$, bereits berechnet, und es wird für die erste Theilungslinie G J der Werth von $S = F_1 + \frac{1}{3} F$ und für die zweite Theilungslinie H K ist $S = F_1 + \frac{2}{3} F$, während es hier eine dritte Theilungslinie nicht gibt. Ein Zahlenbeispiel zu rechnen halten wir für überflüssig, weil es für jeden mit den Elementen der Trigonometrie und analytischen Geometrie Vertrauten nicht schwer ist die hier entwickelten allgemeinen Formeln auf einen besonderen Fall anzuwenden, und weil dergleichen Theilungen in der Praxis selten vorkommen.

§. 120. Aufgabe. Zwei aneinander stossende Grundstücke von gleicher Bonität haben eine gebrochene Grenze; man soll dieselbe ohne Aenderung des Flächeninhalts in eine geradlinige verwandeln.

Es sei B E G (Fig. 134) die zu verbessernde Grenze, und es soll die neue durch B gehen. Denkt man sich zu B G durch die Ecke E die Parallele E H gezogen, so ist durch die Verbindungslinie B H die Aufgabe gelöst. Denn es ist Dreieck B G E welches im Grundstücke I liegt, dem Dreiecke B G H das den beiden Grundstücken angehört, gleich, weil beide gleiche Grundlinie und Höhe haben; kommt nun B G H statt B G E zu dem Grundstücke I, so bleibt dessen Flächeninhalt unverändert, während es die geradlinige Grenze B H erhält; und da zu II für das abgeschnittene Stück G J H das gleich grosse B J E hinzugefügt wird, so bleibt auch dessen Flächengrösse die frühere.

Ist die zu verbessernde Grenze wie in Fig. 135 mehrmals gebrochen, so kann man das vorhergehende Verfahren öfters nach einander anwenden, indem man bei dem Punkte J beginnend erst J K G in eine geradlinige

Fig. 134.

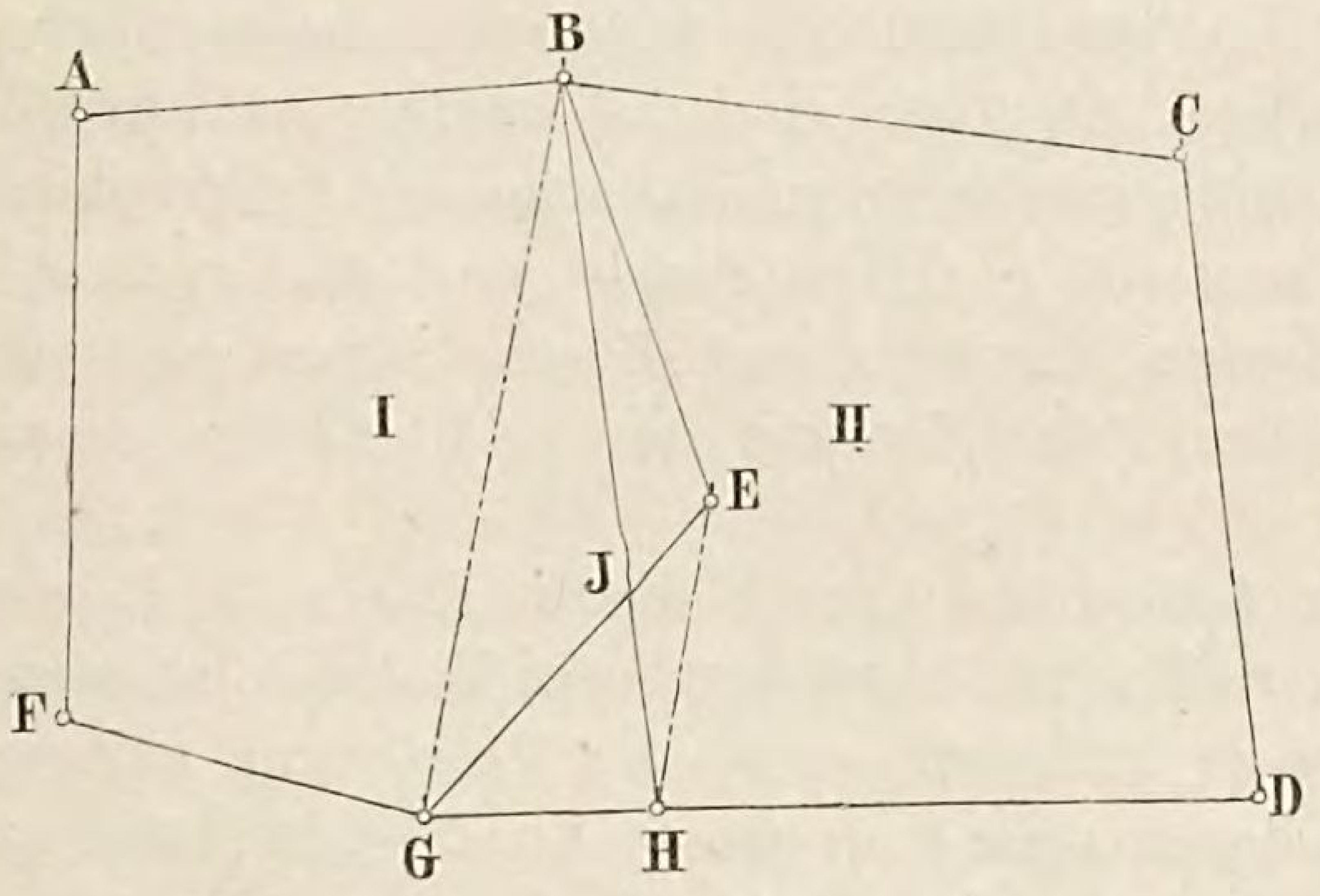
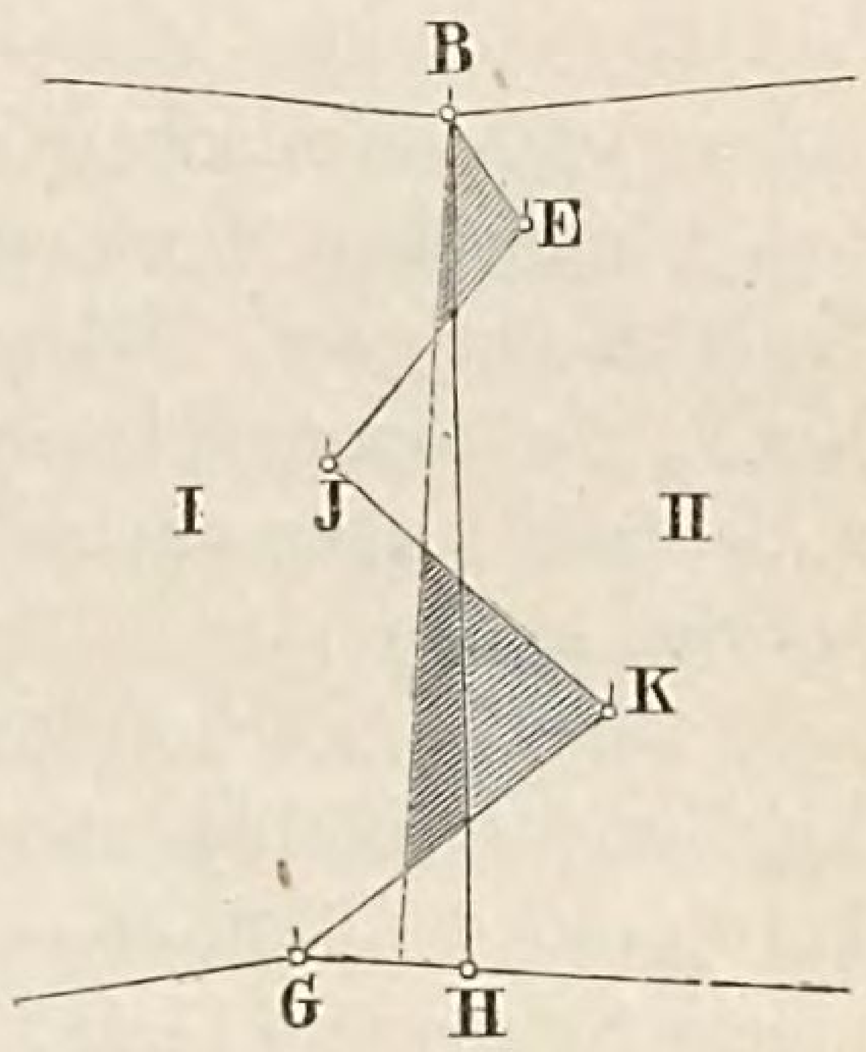


Fig. 135.



Grenze verwandelt, dann mit dieser neuen Grenze und dem Stück J E ebenso verfährt u. s. f. Rascher wird man jedoch in manchen Fällen zum Ziele kommen, wenn man erst eine provisorische Linie B H zieht und aus dem Kettenmasse oder der Zeichnung berechnet, ob die vom Grundstücke I abgeschnittenen (hier schraffirten) Flächengrössen den von II abgetrennten gleich sind oder nicht. Sind die ersteren zu gross, so rückt man die Theilungslinie B H etwas gegen II vor und vergleicht die neuen Abschnitte. Reicht diese Verlegung noch nicht aus, so wird eine weitere gewiss zum Ziele führen. Ist die neue Grenze ausgemittelt, so wird sie durch Marksteine oder einen Graben auf dem Felde bezeichnet.

Man kann hiernach leicht ermessen, wie zu verfahren ist, wenn die Grundstücke I und II verschiedene Bonitäten haben: es ist nämlich von jedem Grundstücke für das andere so viel an Werth abzuschneiden, als ihm von diesem durch die geradlinige Grenze zugelegt wird.

H. Die Messung ganzer Länder (Landesvermessungen.)

§. 121. Der Zweck einer Landesvermessung besteht entweder in der Herstellung von Plänen aus denen sich die Grenzen und Flächen der einzelnen Grundstücke mit hinreichender Genauigkeit entnehmen lassen, oder in der Anfertigung von Karten welche die Lage und Grösse der vorzüglichsten natürlichen und künstlichen Bildungen der Bodenfläche angeben. Wird der erstere Zweck verfolgt, so muss die Messung sehr ins Einzelne gehen und in einem grossen Massstabe (1 : 1000 bis 1 : 5000) vorgenommen werden; in dem anderen Falle aber genügt eine weniger detaillirte Aufnahme und ein kleinerer Massstab (1 : 20000 bis 1 : 100000).

Sehr ausführliche Landesvermessungen werden hauptsächlich in der Absicht gemacht, um sie als Basis für die Anlage der Grundsteuer oder der Steuercataster zu benützen; die hiefür angefertigten Pläne (Steuerblätter) dienen aber auch zu verschiedenen anderen staatswirthschaftlichen und technischen Zwecken. Dagegen sind die weniger ausführlichen topographischen Messungen vorzugsweise für militärische und geographische Zwecke geeignet. Hier ist nur von der Herstellung der Catasterpläne die Rede, da topographische Karten einerseits aus diesen Plänen construirt, andererseits aber nach denselben Principien wie Steuerblätter aufgenommen werden können.

Wenn es schon für die Aufnahme einer kleineren Fläche, z. B. eines Flurbezirks, nöthig ist mehrere Hauptpunkte durch ein Vieleck festzulegen um daran die Detailmessung zu knüpfen, so ist die Herstellung eines genauen Netzes von Linien, wodurch man eine grosse Anzahl gut bestimmter Punkte erhält, für eine Landesvermessung erste Bedingung. Dieses aus Dreiecken bestehende Netz liefert für sich die gegenseitige Lage aller ihm selbst angehörigen Punkte, und in Verbindung mit der Detailaufnahme auch die gegenseitige Lage aller Terrainpunkte. Dieses Resultat genügt aber noch nicht; man will vielmehr auch wissen wie alle wichtigeren Punkte des Landes gegen den Aequator und einen bestimmten Meridian der Erde gelegen sind, mit anderen Worten: man will die geographische Breite und Länge jedes Punkts kennen.

Die desshalb nöthig erscheinende Orientirung des Dreiecksnetzes erfordert dass man die geographische Lage eines Punkts und einer Seite desselben genau kenne. Diese Daten liefern die Astronomen aus vieljährigen genauen Beobachtungen, wesshalb auch die Sternwarte des zu vermessenden oder eines angrenzenden Landes als astronomischer oder Orientirungspunkt und eine von diesem Punkte ausgehende und mehrere Meilen lange Dreieckseite als Orientirungslinie benützt wird. Diese Bestimmungen setzen wir hier als gegeben voraus und beschäftigen uns demnach nur mit den nachfolgenden technischen Arbeiten einer Landesvermessung, nämlich mit der Feststellung der Basis des Dreiecksneztes, der Auswahl und Bezeichnung

der Dreieckspunkte, der Messung und Ausgleichung der Winkel aller Dreiecke, der Berechnung der Dreiecke jeder Ordnung, der Ausgleichung des Dreiecksnetzes, der Berechnung der Coordinaten der Netzpunkte, der Bestimmung der geographischen Lage der Netzpunkte, der Verbindung der Steuerblätter mit dem Netze und schliesslich mit der Aufnahme der Einzelnheiten des Bodens.

1. Die Basis des Dreiecksnetzes.

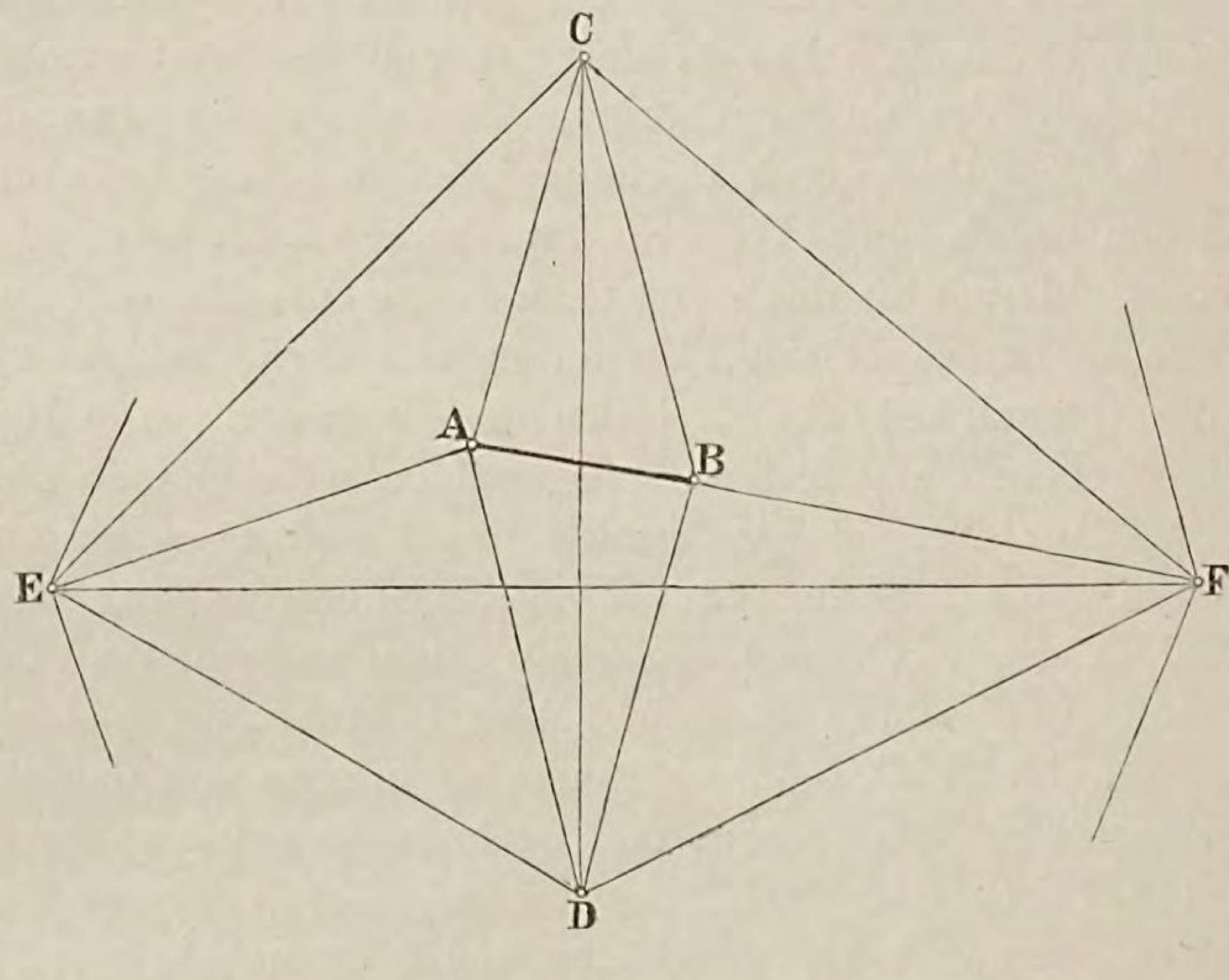
§. 122. Da genaue Längenmessungen sehr mühsame und kostspielige Arbeiten sind, gute Winkelmessungen dagegen verhältnissmässig leicht ausgeführt werden können, so legt man dem Dreiecksnetze, womit das zu vermessende Land überzogen werden muss, nur eine einzige wirklich gemessene Linie zu Grunde welche desshalb die Basis des Netzes genannt wird. Diese Linie ist eine Seite eines der grösseren Netzdreiecke oder eines Dreiecks erster Ordnung. Aus dieser Seite und den drei unmittelbar gemessenen Winkeln des ihr angehörigen Dreiecks findet man die beiden anderen Seiten desselben durch Rechnung; mit den nun bekannten neuen Seiten und den zugehörigen Winkeln kann man wieder zwei andere Dreiecke berechnen, hiermit abermals vier neue anstossende Dreiecke, und so fort bis alle Dreiecke berechnet sind. Da ferner von der Genauigkeit der Basismessung die Genauigkeit des Dreiecksnetzes abhängt, so wird man für dieselbe einen ebenen und festen Boden wählen welcher eine sichere Messung und das Anvisiren einiger Punkte des Hauptnetzes gestattet. Man wird die Basis 1 bis 2 Meilen oder 7 bis 15 Kilometer lang machen und an ihren Endpunkten durch massive Signale genau und dauerhaft bezeichnen.

Prof. Schwerd schlug zwar in seiner Schrift „die kleine Speyerer Basis" vor, nur kleine Grundlinien genau zu messen und dieselben durch Winkelmessungen zu vergrössern, und nachdem er selbst an der genannten Basis von 441 Toisen oder 860 Meter Länge einen erfolgreichen Versuch gemacht hatte, wandte auch Bessel eine kleine Grundlinie von 935 Toisen oder 1822 Meter an, und Baeyer gab seinen Basen ebenfalls blos 1100 bis 1400 Toisen Länge. Das Schwerd'sche Princip wird noch nicht überall anerkannt, und es hat desshalb die Commission der neuen Karte von Spanien die 14663 Meter lange Basis von Madridejas in fünf kleine getheilt und jede dieser Abtheilungen doppelt gemessen; das Mittelstück von 2767 m Länge wurde in 12 Absätzen je zweimal gemessen, wobei sich für die ersten 11 Abschnitte von je 234 m Länge Unterschiede von 0 bis 0,49 mm ergaben, während die Differenz der Doppelmessung des letzten Absatzes von 194 m Länge 0,14 mm betrug. Aus diesen 12 Doppelmessungen ergab sich der mittlere Fehler der Basis von 2767 m Länge zu 0,4 mm.

Die Anwendung kleiner Grundlinien welche von Schwerd ausging, hatte zur nothwendigen Folge dass durch geeignete Dreiecke ein Uebergang von den kleinen Grundlinien auf die grossen Dreiecksseiten vermittelt

werden musste; diese Dreiecksverbindungen nennt man Basisnetze. In Bezug auf diese Netze hat schon Schwerd der von der Methode der kleinsten Quadrate nichts wissen wollte, den richtigen Satz ausgesprochen dass ein rhombisches Netz A B C D (Fig. 136), wie er es anwandte, das günstigste ist, wenn nur die spitzen Winkel bei C und D mit aller Schärfe gemessen werden. Weiter hat Bessel in seinem Gradmessungswerke (S. 36) den Satz aufgestellt dass es (von den Triangulirungsfehlern abgesehen) in Bezug auf die Genauigkeit gleichbedeutend ist, ob man eine kleine Basis von b Meter Länge n mal misst und das arithmetische Mittel der n Messungen der Triangulation zu Grunde legt, oder ob man eine Grundlinie von B = n b Meter Länge nur 1 mal misst und die Triangulation hierauf stützt. Denn wenn der mittlere Fehler einer Messung der Länge b = d b

Fig. 136.



ist, so ist der mittlere Fehler der Messung einer n mal so langen Linie $dB = db \, . \, \sqrt{n}$; weiter ist der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels aus n mal wiederholter Messung der Linie $b = db' = db : \sqrt{n}$; und endlich leitet man aus dem Sinussatze des ebenen Dreiecks mit den Seiten b und B, denen die fehlerfrei gemessenen Winkel β und B gegenüberliegen, die Gleichheit der relativen Fehler in den Seiten b und B oder $dB = n \, . \, db' =$ $= db \, . \, \sqrt{n}$ ab, womit der von Bessel aufgestellte Satz bewiesen ist.

Dieser Satz findet nun ebenfalls keine unmittelbare Anwendung, weil die Voraussetzung fehlerfreier Winkelmessungen, auf der er beruht, nicht erfüllt werden kann; mit Rücksicht auf den Umstand dass ein und derselbe Triangulirungsfehler bei einer sehr kleinen Basis viel einflussreicher ist als bei einer grossen, und weil eine doppelte Messung geboten ist, wenn man Auskunft über die der Basismessung zugehörigen unregel-

mässigen Fehler haben will: aus diesen Gründen zieht man es vor, die Grundlinien der Hauptnetze für Landes- und Gradmessungen zwischen 1 und 2 geographischen Meilen lang zu machen und sie in einzelnen Absätzen doppelt zu messen. Diese Absätze werden vorher mit hölzernen Messlatten so bestimmt dass sie (mit Ausnahme des letzten) Vielfache der Messlagen sind, und es werden an den betreffenden Stellen gut fundirte Werkstücke in dem Boden angebracht welche in Verbindung mit den massiven Signalen an den Endpunkten der Basis durch metallene Marken die Endpunkte der Absätze genau bezeichnen.

Nach der Bezeichnung der End- und Zwischenpunkte nimmt man die Messung der Grundlinie mit genau abgeglichenen Messstangen nach dem in §. 40 Nr 1, 2, 3 auseinander gesetzten Verfahren vor und reducirt die gefundene Länge in der daselbst unter Nr 4 lit a bis d angegebenen Weise auf den Horizont.

Die so gefundene Basis B ist, die Erde als Kugel vorausgesetzt, ein Kreisbogen vom Halbmesser

$$R = r + \tfrac{1}{2}(f + f')$$

wobei r den Erdhalbmesser bis zum Meeresspiegel, f die Höhe des einen und f′ die Höhe des anderen Endpunkts der Basis über dem Meere oder überhaupt das Glied $\tfrac{1}{2}(f + f')$ die mittlere Meereshöhe der Grundlinie die nicht ausschliesslich aus der Höhe der Endpunkte abgeleitet zu sein braucht, bezeichnet.

Schliesst man das Dreiecksnetz an die Basis B an, so liegt dasselbe auf einer Kugel von dem Halbmesser R. Hat man in einem Nachbarlande die Basis B′ gemessen, welche einem Kugelhalbmesser R′ angehört, und denkt man sich die von beiden Basen ausgehenden Dreiecksnetze an der Landesgrenze durch gemeinschaftliche Signale aneinander gefügt, so ist klar dass bei aller Genauigkeit der Messung die sphärischen Dreieckseiten welche den Schluss bilden, aus beiden Netzen verschieden erhalten werden, weil ihrer Berechnung aus dem Netze des einen Landes eine Kugel vom Halbmesser R und aus dem Netze des anderen Landes eine Kugel vom Halbmesser R′ zu Grunde liegt. Jene Dreieckseiten werden jedoch in gleicher Grösse gefunden, wenn man die beiden Netze auf eine und dieselbe Kugel projicirt, wozu sich die Meeresfläche am besten eignet. Diese Projection ergibt sich, wenn man die bereits auf den Horizont reducirte Basis noch weiter auf den Meeresspiegel reducirt. Ist B die Basis auf der Kugel vom Halbmesser R und b die auf die Meeresfläche reducirte Basis, so ist $B : b = R : r$ und hieraus, wenn $R = r + \tfrac{1}{2}(f + f') = r + h$ gesetzt wird,

$$b = \frac{r}{R} B = \frac{r}{r + h} B = \left(1 - \frac{h}{r} + \frac{h^2}{r^2}\right) B$$

Bedenkt man dass der Werth des Bruchs h : r höchstens 0,00011 und somit dessen Quadrat 0,000000012 beträgt, so kann man

$$b = \left(1 - \frac{h}{r}\right) B = B - \frac{h}{r} B \qquad (208)$$

setzen. Betrüge z. B. die Länge einer auf den Horizont reducirten Basis welche in einer Höhe von 326,66 Toisen oder 1959,96 Pariser Fuss über dem Meere liegt, 5470,34 Toisen oder 32822,04 Pariser Fuss, so wäre (da der Halbmesser r = 3266608 Toisen) die Reduction

$$\beta = 0{,}0001 \,.\, 5470{,}34 = 0{,}547034 \text{ Toisen} = 3{,}2822 \text{ P. Fuss.}$$

Die Reduction der Basis auf die Meeresfläche wird hauptsächlich nur wegen der Vergleichung mit anderen Triangulationen vorgenommen; ob man diese Fläche selbst als Projectionsfläche des Netzes ansehen will, hängt von der Höhenlage des zu vermessenden Landes ab. Ist dieses tief gelegen, so kann man das Netz sofort auf die Meeresfläche projiciren; liegt das Land aber hoch, so wählt man eine bis zur mittleren Höhenlage desselben Landes reichende Kugelfläche als Projectionsfläche. In Württemberg z. B. lag die zwischen dem Schlosse Solitude und der Stadt Ludwigsburg gemessene Basis 1019 P. Fuss über dem Meere; da aber der mittleren Höhe des Landes nur etwa 840 P. Fuss oder 140 Toisen entsprechen, so hat man für die gesammte Landesvermessung eine Kugelfläche von dem Halbmesser r + h = 3266608 + 140 = 3266748 Toisen angenommen.

In Bayern wurden für die Landesvermessung drei Grundlinien gemessen: im Jahre 1801 die altbayerische zwischen München und Aufkirchen von Oberst Bonne, 1807 die fränkische zwischen Nürnberg und Bruck bei Erlangen von Professor Schiegg, und 1819 die rheinbayerische zwischen Speyer und Oggersheim von Steuerrath Lämmle. Die auf das Meer projicirten Grundlinien haben folgende Längen:

die altbayerische	Basis	ist	= 21655,603 — 1,643 = 21653,96 m
„ fränkische	„	„	= 13797,196 — 0,632 = 13796,56
„ rheinbayerische	„	„	= 19795,289 — 0,314 = 19794,97

Näheres über diese Basismessungen findet man in dem vom Verfasser dieses Buchs im Jahre 1866 begonnenen und vom topographischen Bureau des k. Generalstabs und der k. Steuercatastercommission dahier vollendeten Werke „Die Bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage“ München 1873, Seite 1 bis 66.

2. Die Wahl und Bezeichnung der Netzpunkte.

§. 123. Das Netz womit ein zu vermessendes Land überzogen wird, besteht aus grossen, mittleren und kleinen Dreiecken welche man der Reihe nach Dreiecke erster, zweiter und dritter Ordnung nennt. Kleinere Dreiecke als dritter Ordnung, deren man für die Detailmessung bedarf, und welche mit den grösseren Dreiecken in Verbindung stehen, gehören nicht mehr zum Dreiecksnetze.

Die Dreiecke erster Ordnung sollen nur eine geringe Anzahl sehr genau bestimmter, aber das ganze Land umfassender Punkte liefern, wesshalb sie Seiten bis zu 10 Meilen Länge haben können. Mit Ausnahme der Basis werden die kleinsten Seiten selten weniger als drei Meilen be-

tragen, und wegen des Einflusses der unvermeidlichen Messungsfehler sucht man es zu vermeiden dass eine kleinste und eine grösste Seite in einem und demselben Dreiecke zusammentreffen; denn jener Einfluss wird nach §. 66 am kleinsten, wenn die Dreiecke soviel als möglich gleichseitig sind. Für die Controle der Messung und Rechnung und auch für die Ausgleichung der zufälligen Fehler ist es sehr gut, wenn man die Dreiecke erster Ordnung so an die Basis anschliesst dass das Netz auf mehrere Arten durchgerechnet werden kann.

Die Dreiecke zweiter Ordnung werden mit denen der ersten Ordnung verbunden, was entweder an Eckpunkten oder Seiten erster Ordnung geschieht. Für die Wahl dieser Dreiecke ist der Umstand massgebend dass man von ihren Winkelscheiteln aus die bemerkenswerthesten Punkte welche sie einschliessen, sehen soll. Da man diese im Flachlande leichter auf grosse Entfernungen hin übersehen kann, als in durchschnittenem Terrain, so ist klar dass in diesem die Dreiecke zweiter Ordnung kleiner sein werden als in jenem; und da manchmal auch ein Dreieck erster Ordnung alle Hauptpunkte seiner Fläche zu übersehen gestattet, so leuchtet ein dass an ein solches Dreieck keines zweiter Ordnung angeknüpft zu werden braucht.

Die Dreiecke dritter Ordnung schliessen sich an jene der zweiten Ordnung so an dass jedes der ersteren eine Seite und als dritten Eckpunkt einen hervorragenden Gegenstand der Fläche eines Dreiecks zweiter Ordnung enthält. Als solche dritte Winkelpunkte dienen natürliche Signale, wie Kirchthurmspitzen, Blitzableiter, hohe Schornsteine, einzelnstehende Bäume u. dgl. Da auf denselben die Winkel der Dreiecke nicht gemessen werden können, so ist es nöthig sie so zu wählen dass sie von wenigstens drei Punkten erster und zweiter Ordnung gesehen und anvisirt werden können. Die Seiten dieser Dreiecke sollen so weit herabgehen dass sie als gerade Linien und die Dreiecke selbst als ebene angesehen werden können. Dieser Bedingung wird genügt, wenn die Seiten 1 Kilometer lang sind; denn in diesem Falle beträgt nach §. 81 der sphärische Excess höchstens 0,01 Secunde.

Die Signale zur Bezeichnung der Netzpunkte sind entweder künstliche oder natürliche. Für die Dreiecke erster Ordnung eignen sich nur solche Signale welche eine sichere Winkelmessung gestatten, also Steinpfeiler oder Pyramiden, wie sie in Bd I, §§. 99 und 100 beschrieben sind. Findet sich eine hochgelegene Ruine vor welche einen würfelförmigen Stein mit Metallcylinder der den Punkt bezeichnet, zu befestigen gestattet, so kann man auch diese als Grundbau für ein Signal erster Ordnung benützen. Sind diese Signale sehr weit entfernt, so macht man sie durch Heliotropenlicht leicht sichtbar. Für Punkte zweiter Ordnung genügt ein in dem Boden befestigter Steinwürfel, auf dessen Oberfläche der Punkt durch einen Kreuzschnitt bezeichnet ist und über dem sich ein Gerüstsignal erhebt welches einen entsprechenden Visirbalken enthält (Bd I, §§. 98 u. 99). Von den

Dreieckspunkten dritter Ordnung sind immer zwei zugleich Punkte zweiter oder erster Ordnung, während der dritte fast immer ein natürliches Signal ist; muss man aber einen solchen dritten Punkt durch ein künstliches Signal bezeichnen, so kann man dazu einen der auf Band I, Seite 143 beschriebenen Holzpfeiler wählen.

Die Netzpunkte werden mit den Namen der Stellen, auf welchen sie sich befinden, z. B. Wendelstein, Peissenberg, Kornbühl, Waldburg, Stauffen, bezeichnet, und es muss ernste Sorge dafür getragen werden dass man die Axen der Signale wieder auffinden kann, wenn letztere zerstört worden sein sollten. Dieses geschieht am besten durch vier Steinprismen welche man in die Ecken eines Vierecks stellt dessen Diagonalen sich in der Signalaxe schneiden. Diese Versicherungssteine werden gut fundirt und so tief versetzt dass sie kaum über dem Boden hervorragen. Auf seiner Oberfläche trägt jeder Stein ein eingehauenes Kreuz welches einen Eckpunkt des Vierecks bezeichnet. Die Lage dieser Steine wird in Bezug auf bekannte Objecte eingemessen und in den Acten über die Triangulation vorgemerkt, wie schon in Bd I §. 99 und §. 100 erwähnt wurde.

3. Die Messung und Ausgleichung der Winkel.

§. 124. Die Messung der Winkel des trigonometrischen Netzes geschieht mit den besten Theodolithen deren Kreise 20 bis 30 cm Durchmesser haben. Bei Dreieckspunkten erster Ordnung werden die Instrumente auf steinerne Pfeiler gestellt; bei Punkten zweiter Ordnung ruhen sie auf einem der hierfür bestimmten Signale oder auf einem der im I Bande beschriebenen dreibeinigen Stative welche zur Sicherheit auf drei in den Boden gerammte Pfähle gestellt und mit Gewichten beschwert werden. Ob die Winkel durch Repetition gemessen werden sollen oder nicht, hängt von der Anordnung des technischen Leiters der ganzen Vermessung ab; bedeutende Astronomen und Geodäten (zuerst Struve 1824 und dann Bessel 1834) verwarfen die Repetition und verlangten statt derselben folgendes Verfahren das sie das der Richtungsbeobachtungen nannten, weil hiebei nicht die einzelnen Winkel nacheinander wie bei der Repetition sondern die Lage (Richtung) aller von einem Punkt ausgehenden Winkelschenkel gegen eine willkührlich aber bestimmt angenommene Anfangs- oder Nullrichtung bestimmt werden.

Nachdem nämlich der Theodolith centrisch und horizontal aufgestellt ist, wird bei feststehendem Horizontalkreise das Fernrohr nach und nach auf alle um den Standpunkt herum liegenden und einzuschneidenden Dreieckspunkte (zuerst auf den Nullpunkt) eingestellt und nach jeder Einstellung jeder Nonius oder jedes Mikroskop des Alhidadenkreises abgelesen. Ist eine solche Reihe von Einstellungen und Ablesungen (ein Gyrus) vollendet, wobei man sich durch wiederholte Einstellung auf den Nullpunkt überzeugt dass keine Verrückung des Theodolithen stattgefunden hat, so richtet man das Fernrohr wieder auf alle vorher anvisirten Signale, jedoch

in umgekehrter Ordnung, und liest die Nonien oder Mikroskope ab. Dieser Gyrus correspondirt dem vorausgegangenen, und bildet mit ihm einen Satz oder eine Satzbeobachtung. Auf den ersten Satz folgt eine Drehung des Dreifusses um etwa 36 Grad, wenn man vorhat, 10 Sätze nach einander zu machen, dann das Durchschlagen des Fernrohrs, dessen Einstellung auf die Nullrichtung, das Ablesen der Nonien oder Mikroskope, das Einstellen und Ablesen auf den Punkten 2, 3 . . . bis 0 und Vollendung des zweiten Satzes; hierauf wiederholte Drehung des Dreifusses um 36 Grad, Messung des dritten Satzes, u. s. f. bis der zehnte Satz vollendet ist und folglich der Horizontalkreis eine ganze Umdrehung gemacht hat, wodurch bewirkt wurde dass jede Richtung an 10 verschiedenen Stellen des Limbus abgelesen wurde. Den Nutzen hievon sieht man unmittelbar ein: er liegt in der dadurch ermöglichten Ausgleichung der Theilungsfehler des Limbus.

Das vorstehend bezeichnete Verfahren Richtungsbeobachtungen anzustellen kann zunächst eine Abänderung dadurch erfahren dass man das Durchschlagen des Fernrohrs sofort nach der Vollendung des ersten Gyrus vornimmt und den zweiten Gyrus mit durchgeschlagenem Fernrohr misst. Im zweiten Satz schlägt man das Fernrohr wieder nach Vollendung des ersten (im Ganzen des dritten) Gyrus durch, vollendet den zweiten Satz und beginnt nach der vorgeschriebenen Drehung des Dreifusses den dritten Satz u. s. w. Für diese Art die Richtungsbeobachtungen zu machen und für die Voraussetzung dass der Horizontalkreis nur zwei Nonien oder Mikroskope habe, eignet sich folgende Art der Aufschreibung der Beobachtungen.

Schema C.

Horizontalwinkelmessung mit Richtungsbeobachtungen.

Theodolith Nr 3 — Beobachter: C. Huber — Zeit: 1877, Septbr 25. — Heliotropenlicht.

Standpunkt: Signal G.

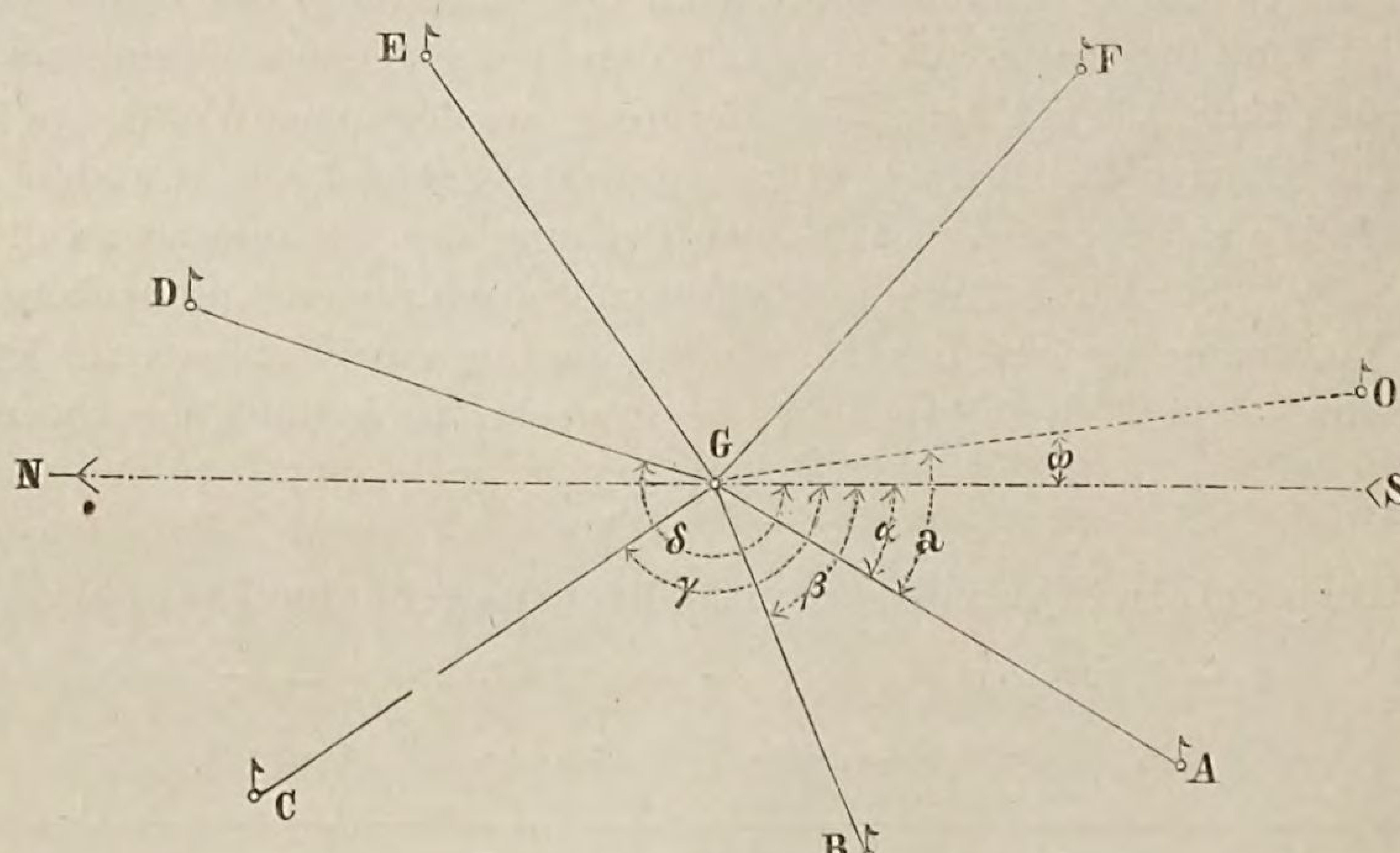
Zielpunkt	1 Lage des Fernrohrs		2 Lage des Fernrohrs		Richtungsw. aus 4 Ables.	Bemerkungen
	1) Non. I	2) Non. II	3) Non. I	4) Non. II		
	1 Gyrus		2 Gyrus		1 Satz	
Sign. O	87° 25′ 35″	267° 25′ 40″	267° 25′ 30″	87° 25′ 35″	0° 0′ 0″	
„ A	124 58 12	304 58 15	304 58 19	124 58 10	37 32 39	Licht ruhig
„ B	166 40 54	246 40 50	246 40 48	166 40 52	79 15 16	
„ C	241 32 20	61 32 25	61 32 23	241 32 28	154 6 46	Windig
:	3 Gyrus		4 Gyrus		2 Satz	
Sign. O	123° 30′ 15″	303° 30′ 20″	303° 30′ 25″	123° 30′ 20″	0° 0′ 0″	

In dem vorstehenden Beispiele ist unter Signal O die Nullpunktsmarke verstanden. Nach Struve besteht diese Marke aus einem lothrecht gestellten mit weisser Farbe auf schwarzem Grunde angelegten Rechtecke

von 20 Zoll Höhe und 10 Zoll Breite welches in einer Entfernung von 500 bis 1000 Meter aufgestellt wird. In diesem Abstande deckt der Verticalfaden des Fadenkreuzes im Fernrohre eine Breite von etwa 6 Zoll, so dass links und rechts desselben ein Streifen von 2 Zoll Breite vom Rechteck übrig bleibt der zur genauen Einstellung dient. Für andere Entfernungen oder andere Vergrösserungen, oder auch für einen doppelten Verticalfaden wird man die Marke entsprechend zu verändern wissen.

Häufig wird von Seite der Vermessungs-Dirigenten die Anordnung getroffen dass alle Richtungswinkel annähernd die Azimuthe der Dreiecksseiten oder diejenigen Horizontalwinkel darstellen welche diese Seiten mit dem Meridian des Winkelscheitels einschliessen. Diese Azimuthe werden in der Regel von der Südseite des Meridians über West bis zu 360° gezählt. Allerdings ist bei der Winkelmessung das Azimuth der Seite G O oder G A (Fig. 137) noch nicht bekannt; es lässt sich aber bei dieser

Fig. 137.



Gelegenheit durch Beobachtung der Sonne oder des Polarsterns annähernd bestimmen. Denn mehr als eine solche Annäherung braucht man für den vorliegenden Zweck nicht, da dieser nur darin besteht durch Angabe des Richtungswinkels auch sofort die Himmelsgegend zu bezeichnen nach der eine Dreiecksseite liegt. Bei der später folgenden genauen Berechnung der Länge und Lage der Dreiecksseiten werden alle Azimuthe nach Bedürfniss verbessert.

Ist nun auf irgend eine Weise das Azimuth der Seite G A $= \alpha$ bekannt geworden, und sind a, b, c, d, e die für die Punkte A, B, C, D, E geltenden mittleren Ablesungen, so wird die Ablesung a auf α gebracht, wenn man von ihr den constanten Winkel $\omega = a - \alpha$ abzieht; durch Abziehen des Winkels ω von b erhält man das genäherte Azimuth von B, u. s. w. Wenn in dem vorstehenden Falle $\alpha = 30^0\ 12'\ 24''$ und

a = 37° 32′ 39″ ist, so wird ω = 7° 20′ 15″ und hiemit das Azimuth von B = β = b — ω = 79° 15′ 16″ — 7° 20′ 15″ = 71° 55′ 1″ und das von C = γ = c — ω = 154° 6′ 46″ — 7° 20′ 15″ = 146° 46′ 31″. Man entnimmt hieraus dass in der vorausgehenden Tabelle die vorletzte Spalte auch mit den um ω verminderten Winkeln welche die genäherten Azimuthe der Richtungen vorstellen, hätte ausgefüllt werden können. Wäre die Nullmarke im Meridian des Stationspunkts aufgestellt gewesen, so stellten die in der Tabelle angegebenen Richtungswinkel ohnehin schon Azimuthe vor. Wo sich eine solche Gelegenheit zur Anbringung des Nullpunkts bietet, wird man sie benützen. Werden die Messungen auf einem Standpunkte wiederholt dessen Meridianlage man unterdessen genauer kennen gelernt hat, so behält man doch den ersten Werth des Azimuths von G A = α bei, weil die Wiederholung der Messung doch nur eine Vergleichung der neuen und alten Werthe zum Zweck hat, und die definitive Verbesserung der Azimuthe doch erst später erfolgen kann.

Mit den Satzbeobachtungen fährt man so lange fort bis im Punkt erster Ordnung etwa 60mal, im Punkt zweiter Ordnung 20mal und im Punkt dritter Ordnung 8mal gut beobachtet worden ist, wobei die zwei Einstellungen in einem Satze für 2 Beobachtungen gelten. Da man von den Punkten eines Dreiecks zweiter Ordnung alle in diesem Dreiecke liegende Punkte dritter Ordnung sehen kann, so werden letztere sofort mit den ersteren eingemessen. Wenn sich jedoch hiedurch die in einem Gyrus aufzunehmenden Punkte zu sehr häufen, so theilt man sie und stellt nur etwa deren 15 in einen Gyrus ein. Jeder Gyrus der Richtungswinkel erster Ordnung ist zu verwerfen, wenn sich bei der wiederholten Einstellung auf den Anfangspunkt eine Ablesungsdifferenz von mehr als 5 Secunden zeigt.

Kommt es vor dass sich bei der Winkelmessung der Theodolith nicht centrisch aufstellen lässt, so müssen die gemessenen Winkel nach §. 47 centrirt, d. h. um die in den Formeln (93) und (95) bestimmte Grösse δ verbessert werden. Um aber die Centrirung δ berechnen zu können, muss man die horizontale Entfernung e der Alhidadenaxe von der Axe des Stationspunkts wissen, wesshalb die Grösse e zu messen und neben der Bezeichnung „Instrumentencentrum“ in das Beobachtungsjournal einzuschreiben ist. Ausserdem hat man auch den Stationspunkt anzuvisiren und in den Gyrus aufzunehmen. Ist dieser Punkt so nahe gelegen dass man die Ocularröhre nicht weit genug ausziehen kann, um ihn zu sehen, so ist es nöthig auf dem Theodolithenfernrohre ein Diopter anzubringen, wie dergleichen auf den Fernrohren der Kippregel und des Reichenbach'schen Distanzmessers (Fig. 184 und 292 im ersten Bande) zu sehen sind. Die Visirlinie dieses Diopters soll mit der des Fernrohrs in einer zum Horizontalkreise senkrechten Ebene liegen. Will man die hiefür nothwendige Prüfung und Berichtigung nicht vornehmen, so genügt es auf einen entfernteren, jedoch mit dem Diopter noch gut anzuvisirenden Gegenstand nach einander das

Diopter und das Fernrohr einzustellen, jedesmal die Nonien des Horizontalkreises abzulesen und hierdurch den Winkel zu bestimmen, um welchen die zur Einstellung des Diopters auf den Stationspunkt gehörige Ablesung verbessert werden muss. Wenn diese Einstellung auch nicht so scharf als die des Fernrohrs auf die entfernteren Punkte ist, so hat dieses wegen des geringen Werths der Excentricität e keine nachtheiligen Folgen. Bei grösseren Werthen von e gebraucht man das Diopter ohnehin nicht.

Ausser dem Verfahren die Winkel des Hauptdreiecksnetzes durch Richtungsbeobachtungen zu messen welches Bessel nach S. 68 seiner Gradmessung in Ostpreussen in etwas anderer Form als vorstehend beschrieben ausgeführt hat, besteht noch immer auch das der Winkelmessung durch Repetition welches schon aus §. 175 des ersten Bands dieses Werks bekannt ist, und das der wiederholten einfachen Winkelmessung deren ebenfalls schon früher (Bd I, §. 173) gedacht wurde. Ist für diese letzte Art der Winkelmessung kein drehbarer Limbus (wie an den Repetitionstheodolithen und an manchen einfachen Theodolithen der Neuzeit) vorhanden, so wird nach jeder Winkelmessung der Dreifuss um die Grösse des eben gemessenen Winkels von rechts nach links gedreht, damit immer ein anderer Theil des Limbus zum Ablesen dient und so die Theilungsfehler möglichst aus dem schliesslichen Messungsergebnisse weggeschafft werden Die Methode der wiederholten einfachen Winkelmessung ist zwar die zeitraubendste, aber sie ist auch die zuverlässigste und genaueste; namentlich aber ist sie mehr als jede andere geeignet erkennen zu lassen, ob Seitenrefractionen des Lichts einen nachtheiligen Einfluss auf die Messung der Winkel ausgeübt haben oder nicht, und wie viel ungefähr dieser Einfluss beträgt. Eben desshalb wird vielleicht diese Methode später ausschliesslich bei der Winkelmessung erster Ordnung und die der Richtungsbeobachtungen und der Repetitionen bei der Messung der Winkel zweiter und dritter Ordnung angewendet werden.

§. 125. Genauigkeit der Winkelmessung. Darf man ein vorzüglich gearbeitetes und berichtigtes Instrument voraussetzen, so kommen bei einer Richtungsbeobachtung nur zwei von einander unabhängige Fehler, nämlich der des Einstellens des Fernrohrs auf das Signal (μ_1) und der des Ablesens mit Einschluss der Theilungsfehler (μ_2) in Betracht. Es wird demnach der mittlere Fehler einer Richtungsbeobachtung

$$\mu = \pm \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2} \qquad (209)$$

und da ein Winkel der Unterschied zweier Richtungswinkel ist, der mittlere Fehler einer Winkelbeobachtung

$$\mathrm{m} = \sqrt{\mu^2 + \mu^2} = \mu \sqrt{2} \qquad (210)$$

Werden zwischen 3 Signalen 1, 2, 3 die Winkel 1 . 2 und 1 . 3 gemessen, so hat jeder den mittleren Fehler $\mathrm{m} = \mu \sqrt{2}$, und da sich der Winkel 2 . 3 aus der Differenz der Winkel 1 . 3 und 1 . 2 ergibt, so ist dessen mittlerer Fehler

$$\mathrm{m}' = \sqrt{\mathrm{m}^2 + \mathrm{m}^2} = 2\mu \qquad (211)$$

Hätte man die Signale 1, 2, 3 zuerst in dieser Folge und hierauf mit durchgeschlagenem Fernrohre in umgekehrter Reihenfolge 3, 2, 1 beobachtet, so würde jedem aus dieser „Satzbeobachtung" hervorgehenden Winkel nur ein mittlerer Fehler $m = \mu \sqrt{2}$ ankleben, während bei gesonderter Winkelmessung die Winkel 1 . 2 und 1 . 3 zwar auch nur diesen Fehler haben, jener des dritten Winkels 2 . 3 aber 2μ beträgt. Erwägt man noch dass diese gesonderte Messung für das Signal 1 eine doppelte Einstellungszahl erfordert, so dass bei ihr eigentlich 4 Richtungsbeobachtungen zu machen sind, während die Satzbeobachtung deren nur 3 fordert, so ergibt sich ohne Weiteres der Schluss dass im Allgemeinen Satzbeobachtungen den gesonderten Winkelmessungen vorzuziehen sind.

Wird ein einziger Winkel 1 . 2 mit einem Theodolithen n mal gesondert gemessen, so wird der mittlere Fehler m'' dieses Winkels im Verhältniss von $\sqrt{n}$ kleiner sein als m, daher

$$m'' = \frac{m}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{2}{n}(\mu_1^2 + \mu_2^2)} \tag{212}$$

Misst man dagegen denselben Winkel durch n malige Repetition, so ist der Theorie nach auch von μ_2^2 nur der n te Theil zu nehmen und somit der mittlere Fehler m''' des n mal repetirten Winkels:

$$m''' = \sqrt{\frac{2}{n}\left(\mu_1^2 + \frac{\mu_2^2}{n}\right)} \tag{213}$$

Für einen Reichenbach'schen Theodolithen der einen Limbus von 12'',5 Durchmesser und ein Fernrohr von 16'',25 Brennweite, 15''' Oeffnung und 60 maliger Vergrösserung hatte, fand Struve (Astr. Nachr. Bd 2, Nr 47)

$$\mu_1 = 1'',290 \text{ und } \mu_2 = 1'',401$$

während Bessel (Astr. Nachr. Bd 11, Nr 256) für einen Theodolithen von Pistor mit einem Limbus von 12'' Durchmesser und einem Fernrohre von 16'' Brennweite, 16''' Oeffnung und 27 maliger Vergrösserung

$$\mu_1 = 0'',837 \text{ und } \mu_2 = 1'',872$$

erhielt. Die Mittel aus diesen Werthen würden $\mu_1 = 1'',063$ und $\mu_2 = 1'',636$ sein; setzt man aber voraus dass stets an 2 Nonien oder Mikroskopen abgelesen wird, so darf der mittlere Ablesefehler μ_2 durch $\sqrt{2}$ dividirt und

$$\mu_1 = 1'',063 \text{ und } \mu_2 = 1'',157$$

gesetzt werden. Mit diesen Werthen hat Prof. Jordan (Taschenbuch der prakt. Geometrie, S. 107) folgende Werthe berechnet:

n =	1	5	10	20	100
m'' =	2,22	0,99	0,70	0,50	0,22
m''' =	2,22	0,75	0,50	0,39	0,15

und daraus die Ueberlegenheit der Repetition gefolgert, jedoch auch die richtige Bemerkung beigefügt dass diese theoretische Genauigkeit in der Praxis nicht eintritt, weil die absolut feste Verbindung des Limbus eines Repetitionstheodolithen mit dem Dreifusse welche hier vorausgesetzt ist, in Wirklichkeit nicht stattfindet. Dass in der That eine kleine Verschiebung

dieser Theile bei der Repetition vorkommt, geht daraus hervor dass man die Winkel bei der Messung von links nach rechts (Drehung mit der Theilung) etwas grösser findet als bei der Messung von rechts nach links (Drehung gegen die Theilung). Da aber diese Differenz nur 2 bis 3 Secunden bei zwei verschieden angeordneten Messungen beträgt, was für den einzelnen Winkel 1 bis 1,5 Secunden ausmacht, so ist die Repetitionsmethode noch immer ein vorzügliches Mittel, Winkel „auf die stehende Secunde" genau zu messen, und da der Zeitgewinn beim Repetiren nicht unterschätzt werden darf, so fragt es sich sehr ob dieses Verfahren in Zukunft, wie Viele glauben, von der wiederholten einfachen Winkelmessung ganz verdrängt werden wird. Nach einer Zusammenstellung von Professor Jordan hat sich bei verschiedenen Triangulirungen der mittlere Fehler m eines durch die Messung und Ausgleichung auf einer Station gewonnenen Winkels zwischen 0″,42 und 2″,74 und im Mittel aus 15 Werthen zu 1″,17 ergeben. Wenn man hierbei erwägt dass Gauss und Schwerd ihre Winkel mit Repetitionstheodolithen bis auf 0″,42 und 0″,69 genau erhalten haben, so liegt hier eine Leistung dieser Instrumente vor welche letztere nicht so geringschätzig zu behandeln gestattet, wie es oft geschieht.

§. 126. Horizontalabschluss. Die auf einer Station gemessenen Winkel sollen zusammen 360⁰ betragen; da dieses aber in der Regel nicht zutrifft, so muss eine vorläufige Ausgleichung der Winkel auf die genannte Summe stattfinden, und dieses Geschäft nennt man den Horizontalabschluss. Freilich erleiden die so verbesserten Winkel später noch eine kleine Veränderung in Folge der Ausgleichung des Dreiecksnetzes, indem die um einen Punkt herumliegenden Winkel nicht bloss der einen Bedingung dass ihre Summe = 360⁰ sei, sondern auch der anderen zu genügen haben dass sie mit den ihnen zunächst gegenüberliegenden Seiten Dreiecke bilden deren Winkelsumme 180⁰ plus dem sphärischen Excess beträgt. Auf diese spätere Aenderung ist jedoch hier noch keine Rücksicht zu nehmen, wo es sich bloss um die beobachteten Winkel handelt.

Bei dem Geschäfte des Horizontal- oder Horizontabschlusses kommt die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen (§§. 16 bis 19) zur Anwendung, und wir benützen zu dessen praktischer Erläuterung das Zahlenbeispiel welches Gerling in seinen Ausgleichsrechnungen der praktischen Geometrie S. 157 u. ff. mitgetheilt hat.

Die von der Station aus anvisirten 4 Signale sollen von links nach rechts mit 1, 2, 3, 4 und die gemessenen 6 Winkel mit 1.2, 1.3, 1.4, 2.3, 2.4, 3.4 bezeichnet werden. Dieser Bezeichnung wird in runder Klammer die Zahl der Repetitionen beigefügt, aus welcher der Winkel hervorgegangen ist. Die durch Beobachtung gefundenen Werthe mögen der Reihe nach o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6 heissen, so dass

$$o_1 = 1.2\,(30) = 48^0\,17'\,1'',4$$
$$o_2 = 1.3\,(20) = 96\;\;52\;\;16,8$$
$$o_3 = 1.4\,(26) = 152\;\;54\;\;6,8$$

$$o_4 = 2\,.\,3\,(25) = 48^0\,35'\,14{,}3$$
$$o_5 = 2\,.\,4\,(28) = 104\;\;37\;\;\;7{,}8$$
$$o_6 = 3\,.\,4\,(44) = 56\;\;\;1\;\;48{,}9 \qquad (214)$$

ist. Heissen die aus den Richtungsbeobachtungen 1 . 2, 1 . 3, 1 . 4 erhaltenen 3 Winkel beziehlich a, b, c, so berechnen sich hieraus die Winkel $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ wie folgt:

$$\begin{aligned} u_1 &= 1\,.\,2\,(30) = +\,a \\ u_2 &= 1\,.\,3\,(20) = \qquad +\,b \\ u_3 &= 1\,.\,4\,(26) = \qquad\qquad +\,c \\ u_4 &= 2\,.\,3\,(25) = -\,a + b \\ u_5 &= 2\,.\,4\,(28) = -\,a \qquad +\,c \\ u_6 &= 3\,.\,4\,(44) = \qquad -\,b + c \end{aligned} \qquad (215)$$

Es sind somit die Fehler v zwischen den berechneten Winkeln (u) und den beobachteten (o):

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 - o_1 = +\,a \qquad\qquad - 48^0\,17'\;\;1'',4 \\ v_2 &= u_2 - o_2 = \qquad +\,b \qquad - 96\;\;52\;\;16{,}8 \\ v_3 &= u_3 - o_3 = \qquad\qquad +\,c - 152\;\;54\;\;\;6{,}8 \\ v_4 &= u_4 - o_4 = -\,a + b \qquad - 48\;\;35\;\;14{,}3 \\ v_5 &= u_5 - o_5 = -\,a \qquad +\,c - 104\;\;37\;\;\;7{,}8 \\ v_6 &= u_6 - o_6 = \qquad -\,b + c - 56\;\;\;1\;\;48{,}9 \end{aligned} \qquad (216)$$

und wenn man vorläufig

$$\begin{aligned} a &= 48^0\,17'\;1'' + d\,a \\ b &= 96\;\;52\;\;17 + d\,b \\ c &= 152\;\;54\;\;\;7 + d\,c \end{aligned}$$

setzt, die Bedingungsgleichungen für das Minimum der Function [v v]

$$\begin{aligned} 0 &= -\,0'',4 + d\,a \\ 0 &= +\;\;0{,}2 \qquad\quad + d\,b \\ 0 &= +\;\;0{,}2 \qquad\qquad\quad + d\,c \\ 0 &= +\;\;1{,}7 - d\,a + d\,b \\ 0 &= -\;\;1{,}8 - d\,a \qquad\quad + d\,c \\ 0 &= +\;\;1{,}1 \qquad\quad - d\,b + d\,c \end{aligned}$$

Um die Verbesserungen d a, d b, d c welche den Constanten a, b, c der Normalgleichungen (27) und (32) auf Seite 20 und 23 entsprechen, zu finden, hat man erst die Summen [x x], [x y], [x z] u. s. w. zu bilden und daraus [p x x], [p x y], [p x z] u. s. w. abzuleiten. Nun sind aber die Coefficienten x, y, z nur entweder + 1 oder — 1 oder 0, daher auch die Producte x x, x y, x z nur = 1 oder = 0, wie aus dem Gleichungssystem (215) hervorgeht. Es wird nämlich

$$\begin{array}{llllll} x_1 = +1 & x_2 = 0 & x_3 = 0 & x_4 = -1 & x_5 = -1 & x_6 = 0 \\ y_1 = 0 & y_2 = +1 & y_3 = 0 & y_4 = +1 & y_5 = 0 & y_6 = -1 \\ z_1 = 0 & z_2 = 0 & z_3 = +1 & z_4 = 0 & z_5 = +1 & z_6 = +1 \end{array}$$

Die Grössen $o_1, o_2, o_3 \ldots$ in den Normalgleichungen (27) und (32) sind die genäherten Werthe von $v_1, v_2, v_3 \ldots$ in dem Gleichungssystem (216), und daher ist $o_1 = -\,0'',4$, $o_2 = +\,0'',2$, $o_3 = +\,0'',2$, $o_4 = +\,1'',7$,

$o_5 = -1'',8$, $o_6 = +1'',1$. Die in dem vorliegenden Falle gegebenen Gewichte p haben folgende Werthe:

$$p_1 = 30 \quad p_2 = 20 \quad p_3 = 26 \quad p_4 = 25 \quad p_5 = 28 \quad p_6 = 44$$

Es kann demnach nicht schwer sein, die für die Normalgleichungen erforderlichen Producte und Summen zu bilden; so ist z. B.

$$[x\,x] = 1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 = +3$$
$$[p\,x\,x] = 30 + 0 + 0 + 25 + 28 + 0 = +83$$
$$[p\,x\,o] = -12{,}0 + 0 + 0 - 42{,}5 + 50{,}4 + 0 = -4{,}1$$

u. s. w. f. Daher die Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} +83\,d\,a - 25\,d\,b - 28\,d\,c &= +4{,}1 \\ -25\,d\,a + 89\,d\,b - 44\,d\,c &= +1{,}9 \\ -28\,d\,a - 44\,d\,b + 98\,d\,c &= -3{,}2 \end{aligned} \qquad (217)$$

Aus diesen drei Gleichungen findet man die Unbekannten wie folgt:

$d\,a = +0'',06$ $\quad d\,b = +0'',04$ $\quad d\,c = 0'',00$

$a = 48^0\,17'\,1'',06$ $\quad b = 96^0\,52'\,17'',04$ $\quad c = 152^0\,54'\,7'',00$

$v_1 = -0'',34$; $v_2 = +0'',24$; $v_3 = +0'',20$; $v_4 = +1'',68$; $v_5 = -1'',86$; $v_6 = +1'',06$. $[p\,v\,v] = 3{,}468 + 1{,}152 + 1{,}040 + 70{,}562 + 96{,}868 + 49{,}439 = 222{,}529$

$$m = \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{P - k}} = \sqrt{\frac{222{,}529}{6 - 3}} = \sqrt{74{,}1763} = \pm 8'',61$$

Der mittlere Fehler eines einmal gemessenen Winkels würde somit $\pm 8'',61$ und der eines 25mal gemessenen $\pm 8'',61 : \sqrt{25} = \pm 1'',72$ betragen.

4. Die Berechnung der Dreieckseiten.

§. 127. Die Ausgleichung der Winkel eines Dreiecks erster Ordnung welches immer als ein sphärisches (eigentlich sphäroidisches) zu betrachten ist, setzt die Länge der Dreieckseiten als bekannt voraus, weil in dem Ausdrucke für den sphärischen Excess eines Dreiecks zwei Seiten desselben vorkommen; nicht minder ist diese Kenntniss für die Centrirung jener Winkel nöthig welche nicht im Scheitel gemessen werden konnten; Hauptzweck der Seitenberechnung aber ist die Bestimmung der gegenseitigen und geographischen Lage der Netzpunkte. Für die ersteren beiden Zwecke genügt eine annähernde (provisorische), für den letzteren aber ist eine genaue (definitive) Berechnung erforderlich. Bei der provisorischen Berechnung der Dreieckseiten zum Behufe der Winkelausgleichung und Centrirung der Winkel setzt man in die entsprechenden trigonometrischen Formeln die Dreieckswinkel so ein, wie sie aus der Messung und dem Horizontalabschluss hervorgingen; bei der definitiven Seitenberechnung werden nur die verbesserten Winkel angewendet.

Geht man bei der Berechnung der Dreiecke erster Ordnung von der unmittelbar gemessenen Basis aus, so sind in dem ersten Dreiecke die auf das Niveau der Messung reducirte sphärische Basis und alle drei auf $180^0 + \varepsilon$ ausgeglichenen Winkel gegeben, wobei ε den sphärischen Excess

bezeichnet. Man könnte somit die zwei anderen sphärischen Seiten des ersten Dreiecks entweder nach dem Satze über die Proportionalität der Sinuse der Seiten und Gegenwinkel, oder auch aus der Relation zwischen einer Seite und den ihr anliegenden Winkeln berechnen. Diese Formeln wendet man jedoch in der Regel nicht an, weil es zu umständlich und mit gewöhnlichen Logarithmentafeln unausführbar wäre die Winkel bis auf Tausendel-Secunden genau zu berechnen, wie es doch geschehen müsste, wenn man die Seitenlängen bis auf einige Centimeter genau finden wollte; denn da einem Centriwinkel von 1″ ein Erdbogen von 31,2m entspricht, so trifft auf 0,001″ ein Bogen von 3 Centimeter. Statt der Formeln der sphärischen Trigonometrie bedient man sich gewöhnlich des nachfolgenden Lehrsatzes von Legendre welcher es möglich macht, die geodätischen Dreiecke wie ebene zu berechnen. Man könnte auch ein von Delambre angegebenes Verfahren anwenden, wonach jede Bogenseite auf ihre Sehne und jeder sphärische Winkel auf den Sehnenwinkel reducirt wird; allein dieses Verfahren ist zu umständlich für die Praxis, wesshalb es nicht angewendet wird. Mit Hilfe besonderer nach dem Vorgange von Soldner in München berechneter Tafeln (Additamententafeln) kann die sphärische Berechnung der Dreieckseiten so erleichtert werden dass sie der nach Legendre in keiner Hinsicht nachsteht. Sie ist in Bayern und Württemberg angewendet worden, und wir werden sie im §. 129 erläutern.

§. 128. **Lehrsatz. Ein geodätisches Dreieck darf wie ein ebenes behandelt werden, wenn man jeden seiner Winkel um den dritten Theil des sphärischen Excesses vermindert.**

Der Beweis von Gauss in Crelle's Journal (Bd 22, S. 96) ist folgender:

Bezeichnet man den ganzen sphärischen Excess eines Kugeldreiecks mit $3\,\omega$, die Winkel dieses Dreiecks mit $A + \omega$, $B + \omega$, $C + \omega$ und die gegenüberliegenden Seiten beziehlich mit a, b, c, so erhalten zwei bekannte Formeln der sphärischen Trigonometrie folgende Gestalt:

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{\sin \tfrac{3}{2}\omega \sin (A - \tfrac{1}{2}\omega)}{\sin (B + \omega) \sin (C + \omega)}$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{\sin (B - \tfrac{1}{2}\omega) \sin (C - \tfrac{1}{2}\omega)}{\sin (B + \omega) \sin (C + \omega)}$$

Aus der Verbindung dieser Formeln durch Potenzirung und Division folgt:

$$\frac{\sin^6 \tfrac{1}{2} a}{\cos^2 \tfrac{1}{2} a} = \frac{\sin^3 (\tfrac{3}{2}\omega) \sin^3 (A - \tfrac{1}{2}\omega)}{\sin^2 (B + \omega) \sin (B - \tfrac{1}{2}\omega) \sin^2 (C + \omega) \sin (C - \tfrac{1}{2}\omega)}$$

$$\frac{\sin^6 \tfrac{1}{2} b}{\cos^2 \tfrac{1}{2} b} = \frac{\sin^3 (\tfrac{3}{2}\omega) \sin^3 (B - \tfrac{1}{2}\omega)}{\sin^2 (A + \omega) \sin (A - \tfrac{1}{2}\omega) \sin^2 (C + \omega) \sin (C - \tfrac{1}{2}\omega)}$$

Dividirt man diese Gleichungen in einander und zieht aus dem Quotienten die Quadratwurzel, so ergibt sich

$$\frac{\sin^3 (\tfrac{1}{2} a) \cos (\tfrac{1}{2} b)}{\cos (\tfrac{1}{2} a) \sin^3 (\tfrac{1}{2} b)} = \frac{\sin (A + \omega) \sin^2 (A - \tfrac{1}{2}\omega)}{\sin (B + \omega) \sin^2 (B - \tfrac{1}{2}\omega)}$$

Macht man die linke Seite dieser Gleichung durch Division gleich 1 und multiplicirt dann beide Seiten mit

$$\left(\frac{a \sin B}{b \sin A}\right)^3 = D, \text{ so wird}$$

$$D = \frac{a^3 \cos \frac{1}{2} a \sin^3 \frac{1}{2} b}{b^3 \cos \frac{1}{2} b \sin^3 \frac{1}{2} a} \cdot \frac{\sin (A + \omega) \sin^2 (A - \frac{1}{2} \omega)}{\sin^3 A} \cdot \frac{\sin^3 B}{\sin (B + \omega) \sin^2 (B - \frac{1}{2} \omega)}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} \sqrt[3]{D} \qquad (218)$$

Diese Formel ist streng richtig und gilt für jedes sphärische Dreieck; geht man aber auf ein geodätisches Dreieck über dessen Seiten im Vergleich zum Erdhalbmesser sehr klein sind (indem sie in der Regel kaum den tausendsten Theil desselben betragen), so wird jeder der drei Factoren, aus denen der Ausdruck für D besteht, so nahe der Einheit gleich dass die Abweichungen hiervon nur noch Grössen vierter Ordnung sind, wenn die Dreieckseiten a, b, c als Grössen erster Ordnung angesehen werden. Unter dieser Voraussetzung wird also $\sqrt[3]{D} = 1$ und für ein geodätisches Dreieck

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} \qquad (219)$$

Nennt man die sphärischen Winkel des geodätischen Dreiecks A', B', C' und setzt man $3\,\omega = \varepsilon$, so ist

$$A = A' - \tfrac{1}{3}\varepsilon, \; B = B' - \tfrac{1}{3}\varepsilon, \; C = C' - \tfrac{1}{3}\varepsilon \text{ und}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin (A' - \frac{1}{3}\varepsilon)}{\sin (B' - \frac{1}{3}\varepsilon)} \qquad (220)$$

d. h. es gilt für ein solches Dreieck der Satz von der Proportionalität der Seiten und Sinuse der Gegenwinkel welcher für ebene Dreiecke bekannt ist, wenn man nur jeden sphärischen Winkel um den dritten Theil des sphärischen Excesses vermindert.

Um den Grad der Genauigkeit vorstehender Formel in einem bestimmten Falle zu übersehen, nehmen wir an, in einem geodätischen Dreiecke A' B' C' sei $C' = 90^0$ und $a = b = 1^0 = 15$ Meilen. Berechnet man die Winkel A' und B' nach den Formeln der sphärischen Trigonometrie, so wird

$$A' = B' = 45^0\, 0'\, 15'',708$$

und bestimmt man die Seite c aus $\operatorname{tg} \frac{1}{2} c = \operatorname{tg} a \cos B'$, so ist

$$c = 1^0\, 24'\, 51'',0396$$

Der sphärische Excess ε des Dreiecks A' B' C' beträgt nach der Formel (121) 31'',416, und hiermit wird

$$A = A' - \tfrac{1}{3}\varepsilon = 45^0\; 0'\; 5'',236$$
$$B = B' - \tfrac{1}{3}\varepsilon = 45^0\; 0'\; 5'',236$$
$$C = C' - \tfrac{1}{3}\varepsilon = 89^0\, 59'\, 49'',528$$

Schreibt man nun die Formel (220) so um dass statt b die Seite c darin vorkommt, so folgt

$$c = a\, \frac{\sin (C' - \frac{1}{3}\varepsilon)}{\sin (A' - \frac{1}{3}\varepsilon)} = 1^0\, 24'\, 51'',0396$$

also genau derselbe Werth welcher oben erhalten wurde. Abweichungen in den Werthen von c zeigen sich somit erst, wenn die Seiten der geo-

dätischen Dreiecke grösser als 15 Meilen sind, was jedoch bei unmittelbaren Triangulationen nicht wohl vorkommt.

§. 129. Aufgabe. Die Soldner'sche Methode der Berechnung von Additamententafeln zur sphärischen Auflösung der geodätischen Dreiecke zu entwickeln.

Bei der sphärischen Berechnung der Dreieckseiten mit Hilfe von Additamententafeln handelt es sich darum aus dem Logarithmus des Sinus den Logarithmus des Bogens in Meter zu finden, und zwar mit Umgehung der trigonometrischen Tafeln. Soldner hat den Weg hiezu bereits im Jahre 1809 gezeigt, als es sich um die Berechnung des bayerischen Hauptdreiecksnetzes handelte; sein Verfahren, das auch in Württemberg angewandt wurde, ist jedoch erst im Jahre 1873 in dem Werke „Die Bayerische Landesvermessung etc.“ Seite 263 u. ff. veröffentlicht worden: bis dahin war es im Grunde nur in den süddeutschen Vermessungskammern bekannt.

Wenn φ den Winkel im Bogenmass vorstellt den eine Dreieckseite a am Erdmittelpunkte bildet, und wenn r der Halbmesser der Erde, hier der Kugel ist, auf welcher das geodätische Dreieck A B C mit den Seiten a, b, c liegt, so ist die Seite $a = r\,\varphi$, und da man $\varphi = m \sin \varphi$ setzen kann, wobei m jene Zahl vorstellt mit der $\sin \varphi$ multiplicirt werden muss um den Quotienten φ zu geben, so gilt auch die Gleichung

$$a = r\,\varphi = m\,r \sin \varphi$$

Nun ist aber φ stets eine sehr kleine Zahl, da der Winkel φ nur äusserst selten die Grösse von 1^0 erreicht; man kann daher

$$\varphi = \sin \varphi + \tfrac{1}{6} \sin^3 \varphi + \tfrac{3}{40} \sin^5 \varphi + \ldots \text{ und folglich auch}$$

$$\log m = \log \varphi - \log \sin \varphi = \log (1 + \tfrac{1}{6} \sin^2 \varphi + \tfrac{3}{40} \sin^4 \varphi + \ldots)$$

setzen. Da die Glieder des letzten Ausdrucks: $\frac{1}{6} \sin^2 \varphi$ und $\frac{3}{40} \sin^4 \varphi$ gegen 1 sehr klein sind, so darf die Summe der auf 1 folgenden Glieder = z und

$$\log (1 + z) = M (z - \tfrac{1}{2} z^2 + \tfrac{1}{3} z^3 - \ldots)$$

geschrieben werden, wenn M den Modul des Briggi'schen Logarithmensystems oder die Zahl 0,43429448 vorstellt. Es wird somit nach kurzer Zwischenrechnung:

$$\log m = \tfrac{1}{6} M \sin^2 \varphi + \tfrac{11}{180} M \sin^4 \varphi + \tfrac{191}{5670} M \sin^6 \varphi + \ldots \qquad (221)$$

und daher auch nach der ersten Gleichung (wenn man $m\,r = n$ setzt):

$$\log a = \log m + \log r + \log \sin \varphi = \log n + \log \sin \varphi \qquad (222)$$

Soldner hat nun für die Bayerische Landesvermessung, für welche $\log r =$ $= 6{,}3402033$ (in bayer. Ruthen) ist, die Logarithmen von n für die Werthe $\log \sin \varphi = 6{,}90$ bis $\log \sin \varphi = 8{,}60$ auf acht Stellen berechnet und in einer Tafel zusammengestellt welche er Additamententafel hiess (von additamentum, der Zusatz), weil sie die Logarithmen enthält welche zu $\log \sin \varphi$ addirt ohne Weiteres den $\log r\,\varphi$ oder $\log a$ geben. Diese Tafel befindet sich in der Sammlung am Schlusse dieses Bands und ist daselbst auch in Hinsicht auf ihren Gebrauch erläutert. Hat man nämlich beispielsweise $\log \sin \varphi = 7{,}6494198$ gefunden und man will $\log a = \log r\,\varphi$ in bayerischen Ruthen erhalten, so liefert die Tafel sofort mit dem Argument 7,64

den log n = 6,34020468 und wegen der dritten Decimalstelle 9 des Arguments noch eine Verbesserung von + 5 Einheiten der achten Decimalstelle des Logarithmus, und hiemit wird der gesuchte Logarithmus

$$\log a = \log n + \log \sin \varphi = 6{,}3402047 + 7{,}6494198 = 3{,}9896245$$

§. 130. Aufgabe. Eine Controle der Messung und Berechnung der Dreieckseiten zu bezeichnen.

Das Verfahren für die definitive Berechnung der Dreiecke erster Ordnung stellt sich nun so. Nachdem eine provisorische Berechnung der Dreieckseiten vorliegt und mit dieser die Winkel ausgeglichen sind, rechnet man, von der Basis ausgehend und die Methode von Legendre oder Soldner anwendend, ein Dreieck nach dem anderen. Ist auf diese Weise das Hauptnetz durchgerechnet, so beginnt man die Rechnung von Neuem, wobei zwar wiederum von der Basis ausgegangen aber ein anderes an dieser liegendes Dreieck als erstes angesehen wird, um eine andere Reihenfolge der Dreiecke zu erhalten. An diese Rechnung kann man noch eine ähnliche dritte anschliessen, wenn die aus den beiden ersten erhaltenen doppelten Werthe der Dreieckseiten merklich von einander abweichen sollten.

Stimmen die durch verschiedene Berechnungen erhaltenen Seitenlängen gut überein, so ist dieses zwar ein Beweis für die richtige Winkelmessung und die Berechnung, aber noch nicht für die Vollkommenheit des Hauptnetzes; denn diese Uebereinstimmung wäre auch bei einem bedeutenden Fehler in der Basis möglich, da sie die Grundlage der beiden Rechnungen bildet. Um sich völlig beruhigen zu können, ist es nöthig das Hauptnetz an eine zweite unmittelbar gemessene Basis anzuschliessen. Aus diesem Netze lässt sich diese zweite eine Dreieckseite bildende Basis berechnen, und da sie auch mit derselben Sorgfalt wie die erste Basis gemessen wurde, so gibt die Vergleichung der berechneten und gemessenen Längen der zweiten Basis welche Verificationsbasis oder Bestätigungslinie heisst, Aufschluss über die Genauigkeit der Gesammtarbeit.

Für die bayerische Landesvermessung hat man drei Basen gemessen, eine Hauptbasis zwischen München und Erding (die altbayerische), und zwei Verificationsbasen: die erste zwischen Nürnberg und Erlangen (die fränkische) und die zweite in der Rheinpfalz zwischen Speyer und Oggersheim (die rheinbayerische). Alle drei haben befriedigende Resultate bezüglich des Hauptnetzes geliefert. Weitere Proben seiner Tüchtigkeit hat dieses Netz auch durch die Anschlüsse an die Dreiecksnetze einiger Nachbarländer (namentlich Hessen, Württemberg und Oesterreich) bestanden.

Es wird nicht als überflüssige Beigabe erachtet werden, wenn wir hier einige sichere Angaben über Basis- oder Netzanschlüsse mittheilen welche durch die Methode der kleinsten Quadrate gewonnen wurden und wobei der Widerspruch v zwischen directer Messung und trigonometrischer Berechnung in Millimeter pro Kilometer, also in Millionstel dieser Länge ausgedrückt ist.

Die vom Steuerrath Lämmle in München im Jahre 1819 zwischen

Speyer und Oggersheim gemessene rheinbayerische Grundlinie von 19795 m Länge wurde von Schwerd aus seiner nur 859 m langen „kleinen Speyerer Basis" mittels eines Netzes von 11 Punkten abgeleitet und hierbei v = 7,0 mm gefunden, während Eckhardt aus der hessischen Basis von 7749 m Länge für dieselbe bayerische Grundlinie den Widerspruch v = 7,4 mm fand.

Aus der von Bessel gemessenen Königsberger Basis wurde durch Vermittelung von 7 Dreiecken die Seite Trunz — Wildenhof = 30123,7481 Toisen gefunden, während Baeyer für dieselbe Seite mit 35 Dreiecken aus der Berliner Basis 30123,5041 Toisen fand. Der Widerspruch beträgt hier 0,2440 Toisen auf 30124 Toisen oder v = 8,1 mm für 1 Km.

Die von Struve und Tenner geleiteten grossen russischen Gradmessungen wurden in zwei aneinanderstossenden Dreiecken vereinigt, und es sandten diese Geodäten die Resultate der Netzanschlüsse unabhängig von einander an Bessel ein. Die Widersprüche in den 5 verschiedenen, durchschnittlich über 14150 Toisen langen Seiten der beiden Dreiecke betrugen für das

1. Dreieck $w_1 = 26{,}4$; $w_2 = 36{,}3$; $w_3 = 19{,}1$ mm
2. Dreieck $w_4 = 13{,}4$; $w_5 = 26{,}2$; $w_6 = 26{,}4$ mm

Was die Geschwindigkeit betrifft, mit der Basismessungen ausgeführt werden, so kann man durchschnittlich 70 bis 80 m pro Arbeitsstunde rechnen; eine Grundlinie von 2 Meilen (15000 m) Länge würde somit für eine Messung 200 Arbeitsstunden und mit Rücksicht auf die wegen schlechten Wetters ausfallenden Tage mindestens sechs Wochen Zeit erfordern.

5. Die Ausgleichung des Dreiecksnetzes.

§. 131. Allgemeines. Die Ausgleichung eines Dreiecksnetzes kann entweder in Einem oder mittels Zerlegung in zwei Operationen geschehen. In dem ersten Falle würden aus dem Netze das zwei oder mehr Grundlinien enthält und worin keine Horizontabschlüsse gemacht wurden, zunächst alle Bedingungsgleichungen, mögen sich diese nun auf die Stationen, Dreiecke oder Seiten beziehen, abzuleiten sein, und die folgende (mühsamere oft unausführbare) Arbeit bestünde in der Auflösung dieser nach der Methode der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen gebildeten Gleichungen. In dem zweiten Falle trennt man die Stationsausgleichungen (Horizontabschlüsse) von der Netzausgleichung (Ausgleichung der Dreiecke und Polygone) und verfährt hierbei nach der Methode der Ausgleichung bedingter Beobachtungen. Diese Trennung ist immer nöthig, wenn es sich um die Ausgleichung grösserer Dreiecksnetze handelt; aber auch das Netz selbst muss noch in kleinere Theile (Polygone) zerlegt werden, wenn man die Auflösung einer oft mehrere Hundert umfassenden Anzahl von Netzbedingungsgleichungen vermeiden will. Bei dieser Zerlegung des Netzes wird zunächst ein Polygon ausgeglichen, dann ein zweites anstossendes, wobei die Ergebnisse der ersten Ausgleichung als gegebene Grössen angesehen werden, dann ein drittes Polygon welches in Bezug auf das zweite

eben so behandelt wird, wie dieses in Bezug auf das zuerst ausgeglichene Polygon. Es bedarf kaum der Erinnerung dass auf diesem Wege der strengen Methode zwar nicht genügt, d. h. ein Minimum der Fehlerquadrate nicht erreicht, jedoch ein System von verbesserten Beobachtungswerthen erlangt wird welches die Bedingungen des Netzes erfüllt und zuverlässiger ist als der Complex der unveränderten Beobachtungswerthe.

§. 132. Eintheilung der Bedingungsgleichungen. Diese Gleichungen beziehen sich, wie schon bemerkt, entweder auf die Winkel um jeden Punkt und in jedem Drei- oder Vieleck welches zum Netze gehört, oder aber auf die Seiten der Dreiecke und bezw. Polygone. Es liessen sich hiernach Stations-, Dreiecks- und Seitengleichungen unterscheiden, man zieht es aber vor, die Bedingungsgleichungen bloss in Winkel- und Seitengleichungen einzutheilen. Die Winkelgleichungen beziehen sich auf die theoretische Winkelsumme des betreffenden Drei- oder Vielecks und drücken demnach aus, welche Grösse die Summe der gemessenen Winkel sammt ihren Verbesserungen haben muss. Man nennt diese Gleichungen wohl auch Bedingungsgleichungen erster Classe, wenn sie lediglich Stations- oder Horizontgleichungen sind, und Bedingungsgleichungen zweiter Classe wenn sie sich lediglich auf die Winkel des Netzes beziehen. Alle übrigen Gleichungen welche zur Verbesserung der aus fehlerhaften Winkeln berechneten Seitenverhältnisse dienen, heissen Seitengleichungen oder auch Bedingungsgleichungen dritter Classe. Durch diese letzteren Gleichungen werden die Winkel so verbessert dass das Verhältniss zweier bestimmten Seiten stets gleich gross erhalten wird, welche Winkel auch zur Berechnung dieses Verhältnisses benützt werden mögen. Die Summe aller Bedingungsgleichungen, von deren Erfüllung das Bestehen des Netzes abhängt, kann man Netzbedingungsgleichungen nennen.

Das Auffinden der Bedingungsgleichungen ist nicht immer so leicht, als es bei den einfachen Beziehungen welche zwischen den Winkeln und den Seiten der Drei- und Vielecke herrschen, scheinen kann. Es verhält sich damit, wie mit dem Ansatze von Textgleichungen, der stets eine Ueberlegung erfordert, während das Lösen von bereits angesetzten Gleichungen nach mechanischen Regeln geschieht. Und wie sich für das Ansetzen der genannten Gleichungen keine speciellen Regeln aufstellen lassen, so können auch hier nur die Principien erörtert werden, nach denen man Zahl und numerischen Ausdruck der Bedingungsgleichungen finden kann.

§. 133. Die Zahl der Bedingungsgleichungen hängt von verschiedenen Dingen ab, nämlich von der Zahl der Netzpunkte und ihrer Verbindungslinien sowie von der Classe der Bedingungen und der Art der Winkelmessung. Wir wollen diese Zahl zuerst für die einzelnen Classen der Bedingungsgleichungen und dann im Ganzen feststellen.

1) Bedingungsgleichungen erster Classe oder Stationsgleichungen gibt es stets so viele als das Netz Punkte enthält, auf denen alle Winkel im

Umkreise einzeln gemessen worden sind. Diese Gleichungen kommen bei Abzählung der Netzbedingungsgleichungen nicht mehr in Anrechnung, wenn Horizontabschlüsse oder Satzbeobachtungen stattgefunden haben. Wenn demnach ein Dreiecksnetz p Punkte der eben bezeichneten Art enthält, so ist die Zahl der Stationsgleichungen

$$z_1 = p \tag{223}$$

2) Die Zahl der Bedingungsgleichungen zweiter Classe oder der Winkelgleichungen ergibt sich aus folgender Betrachtung. Sollen p Punkte zu einer geschlossenen Figur verbunden werden, so sind dazu p Linien nöthig, indem der Punkt 1 mit 2, 2 mit 3, 3 mit 4 und schliesslich p mit 1 zu verbinden ist. Auf die Ordnung der Punkte kommt dabei nichts an, wenn nur der Begriff „geschlossene Figur" ganz allgemein aufgefasst wird. Bestimmt man die Richtungsunterschiede je zweier Seiten in der Weise wie es in der Polygonometrie geschieht, durch Angabe des Winkels um welchen die nach rechts folgende Seite von der nach links vorangehenden abweicht, so ist die Summe aller Richtungsunterschiede entweder gleich 360^0 oder gleich einem Vielfachen von 360^0. Folglich besteht in jeder geschlossenen Figur von p Punkten welche durch die p nothwendigen Linien verbunden sind, 1 Bedingung für die Winkel. Tritt zu den unentbehrlichen Verbindungslinien eine neue nicht nothwendige und also überschüssige Verbindung hinzu so wird dadurch die geschlossene Figur von p Punkten in zwei ebenfalls geschlossene Figuren, die zusammen ebenfalls nur p Punkte haben, zerlegt, und es muss für jede dieser geschlossenen Theilfiguren 1 Bedingungsgleichung zweiter Classe bestehen, für die Gesammtfigur ergeben sich somit 2 solche Gleichungen. In gleicher Weise überzeugt man sich dass jede neu hinzutretende überschüssige Verbindungslinie 1 Bedingungsgleichung mehr verlangt, und dass daher, wenn zwischen p Punkten $u = l - p$ überschüssige Verbindungen vorhanden sind, die Zahl der Bedingungsgleichungen zweiter Classe oder

$$z_2 = u + 1 = l - p + 1 \tag{224}$$

ist. (Dabei versteht es sich von selbst dass die Zahl l nicht kleiner als p und nicht grösser als $\frac{1}{2}$ p (p — 1) sein kann.)

3) Von der Zahl der Bedingungsgleichungen dritter Classe oder der Seitengleichungen kann man sich auf folgendem Wege Rechenschaft geben. Zur Bestimmung eines Dreiecksnetzes ist bekanntlich eine Grundlinie oder die Grösse und Richtung zwischen zwei Punkten unbedingt nöthig. (Die Grösse könnte übrigens auch als Masseinheit angenommen und daher vorläufig unbestimmt bleiben.) Um mit den beiden ersten Punkten (1, 2) einen dritten (3) zu verbinden, sind zwei Richtungen nothwendig, von denen mindestens eine mit der Grundlinie verbunden ist. Die Festlegung eines vierten Punkts (4) verlangt ebenfalls zwei Richtungen die durch zwei beliebige der drei schon bestimmten Punkte (1, 2, 3) gehen können, wovon aber eine mit einer bereits festgelegten Richtung verbunden sein muss. Folglich sind zur Bestimmung eines Dreiecksnetzes von p Punkten ausser

der Grundlinie noch weitere 2 (p — 2) Richtungen und demnach 2 p — 3 Seitengleichungen nothwendig. Jede weitere Linie welche zu den 2 p — 3 unentbehrlichen hinzutritt, ist jetzt offenbar ihrer Lage und Grösse nach bestimmt und bringt eine Bedingung dritter Classe mit sich, mag sie einseitig oder doppelt festgelegt sein. Wenn nun u die Anzahl der überschüssigen Linien und l die Zahl der vorhandenen Linien bezeichnet, so ist $u + 2p - 3 = l$ und folglich die Zahl der Seitengleichungen

$$z_3 = u = l - 2p + 3 \qquad (225)$$

4) Wenn keine Bedingungen erster Classe stattfinden, wie es bei vorausgegangenen Horizontabschlüssen oder bei Richtungsbeobachtungen der Fall ist, so ist die Summe z_4 aller Bedingungsgleichungen offenbar $= z_2 + z_3 = (2l - p) - 2p + 4$. Bedenkt man nun dass zu jedem Winkel 2 Seiten (Schenkel) und nur 1 Punkt (Scheitel) gehören, dass somit in einem Dreiecke dessen 3 Winkel gemessen worden sind, jede Seite zweimal und jede Ecke nur einmal gezählt wird, so stellt offenbar $2l - p = m$ die Zahl aller Winkel des Dreiecksnetzes vor und es ist die Summe aller Bedingungsgleichungen oder die Zahl der Netzbedingungsgleichungen

$$z_4 = z_2 + z_3 = m - 2p + 4 \qquad (226)$$

5) Da die Zahl der Bedingungsgleichungen auch zugleich die Zahl der Unbekannten ist welche gesucht werden müssen, so dürfen die von dem Netze zu erfüllenden Bedingungen nicht zu zahlreich werden, damit die Auflösung der aus den Bedingungsgleichungen hervorgehenden Normalgleichungen nicht physisch unmöglich wird. Grosse Netze werden desshalb, wie schon in §. 131 angeführt ist, in einzelne aneinanderschliessende Polygone zerlegt, wovon jedes für sich ausgeglichen wird.

§. 134. Der Ansatz der Bedingungsgleichungen ist, wenn es sich bloss um Winkelgleichungen handelt, in dem Falle sehr einfach wo sich das Netz in lauter Dreiecke zerlegen lässt: man kann dann diese Gleichungen, indem man von Dreieck zu Dreieck fortschreitet, unmittelbar hinschreiben. Auch ist der Ansatz der Winkelgleichungen in dem anderen Falle, wo das Netz nicht in Dreiecke zerlegt werden kann, nicht schwierig, nur die Seitengleichungen erfordern stets eine dem vorliegenden Falle angepasste besondere Ueberlegung, und es kann deren Ansatz oft schwierig werden.

Für alle Bedingungsgleichungen gilt die Regel dass sie unter sich unabhängig sein müssen und also nicht aus einander abgeleitet werden können. Wenn z. B. in einem ebenen Dreiecke alle Winkel (A, B, C) und alle Seiten (a, b, c) gemessen sind so gibt es zunächst keine Bedingungsgleichung erster Classe, weil an keinem Punkte die Winkel im Umkreise bestimmt worden sind. Dagegen hat man 1 Winkelgleichung: $A + B + C = 180^0$ und 2 Seitengleichungen: $a \sin B = b \sin A$ und $a \sin C = c \sin A$. Die Formeln 223 bis 226 gelten nur für Winkelmessungen; wenn auch Seitenmessungen vorkommen, so gilt für z_3 eine andere Formel. Wollte man auch noch die Gleichung $b \sin C = c \sin B$ als eine

Bedingungsgleichung ansehen und die Rechnung mit 4 statt mit 3 Gleichungen durchführen, so liessen sich aus den Normalgleichungen die Correlaten nicht finden weil sie eine identische Gleichung einschliessen. Denn die vierte Gleichung folgt aus der zweiten und dritten, wenn man a und sin A eliminirt, sie drückt somit wohl eine Eigenschaft des geschlossenen Dreiecks A B C, aber keine Bedingung seiner Existenz aus. An diesem Beispiele lässt sich erkennen wie nothwendig es sei, vor Aufstellung der Bedingungsgleichungen erst deren Anzahl zu bestimmen.

Wenn ferner in einem ebenen Vierecke 1 . 2 . 3 . 4 alle Winkel und eine Seite 1 . 2 gemessen wurden so bestehen, da $l = 6$, $p = 4$, $m = 8$ ist, folgende Werthe von z:

$$z_1 = 0, \; z_2 = 3, \; z_3 = 1, \; z_4 = 4$$

Ohne diese Zahlen vorher bestimmt zu haben, könnte man leicht auf den Gedanken kommen 4 Bedingungen zweiter Classe aufzustellen (also $z_2 = 4$ zu nehmen), da das Viereck durch die beiden Diagonalen in 4 Dreiecke zerlegt wird, von denen jedes seine Winkel auf 180° abschliessen muss; allein bei näherer Ueberlegung findet man dass, wenn 3 Dreiecke diese Bedingung erfüllen, das vierte Dreieck von selbst sich schliesst. Ebenso könnte man glauben dass es 5 Bedingungen dritter Classe gibt (also $z_3 = 5$ wäre), nämlich 4 Gleichungen für die 4 Eckpunkte von der Form

$$\frac{\sin(1.2) \, . \, \sin(1.3) \, . \, \sin(1.4)}{\sin(3.1) \, . \, \sin(4.1) \, . \, \sin(2.1)} = 1$$

und eine Gleichung für das Verhältniss aller vier Seiten zu einander, nämlich

$$\frac{\sin(1.2) \, . \, \sin(2.3) \, . \, \sin(3.4) \, . \, \sin(4.1)}{\sin(3.2) \, . \, \sin(4.3) \, . \, \sin(4.1) \, . \, \sin(2.1)} = 1$$

während es in der That nur 1 Seitengleichung (die vorstehende) gibt: es müssen sich also die 4 übrigen welche man aufstellen könnte, aus dieser einzigen ableiten lassen, wie es in der That auch der Fall ist.

Zur Uebung in dem Ansatze der Bedingungsgleichungen mag folgendes Beispiel dienen. In dem in Fig. 138 dargestellten Dreiecksnetze das aus zwei Centralsystemen (Vielecken welche sich um je einen Mittelpunkt, hier 8 und 9, gruppiren) besteht, seien sämmtliche Winkel einzeln und mit gleicher Genauigkeit gemessen worden und die Seite A B des Netzes diene als Grundlinie.

Dieser Fall ist, da keine Richtungsbeobachtungen vorliegen, nach den von Gauss in dem Supplementum theoriae combinationis etc. §. 13 und §. 14 gegebenen Vorschriften zu behandeln. Suchen wir zunächst die Zahlen der Bedingungsgleichungen auf, so wird, da nur um die Punkte 8 und 9 alle Winkel gemessen worden sind, nach (223) die Zahl $z_1 = 2$; ferner ist wegen $l = 17$ und $p = 9$ nach (224) die Zahl $z_2 = 9$, weiter beträgt nach (225) die Zahl der Seitengleichungen $z_3 = 2$, und schliesslich nach (226) die Zahl aller Netzbedingungsgleichungen $z_4 = 11$.

Ueber die Horizontabschlüsse handelt bereits §. 126, wesshalb wir hier die Bedingungen erster Classe (z_1) nicht weiter berühren. Die Bedingungen

zweiter Classe bestehen darin dass in jedem der 9 Dreiecke des Netzes die Summe der drei Winkel 180⁰ sein muss, wobei die auf 8 und 9 ausgeglichenen Winkel als unmittelbar gemessene angesehen werden. Die Bedingungen dritter Classe (z_3) verlangen dass die Seiten jedes Centralsystems mit den Winkeln übereinstimmen, d. h. dass in dem um den Punkt 8 herum liegenden Sechsecke

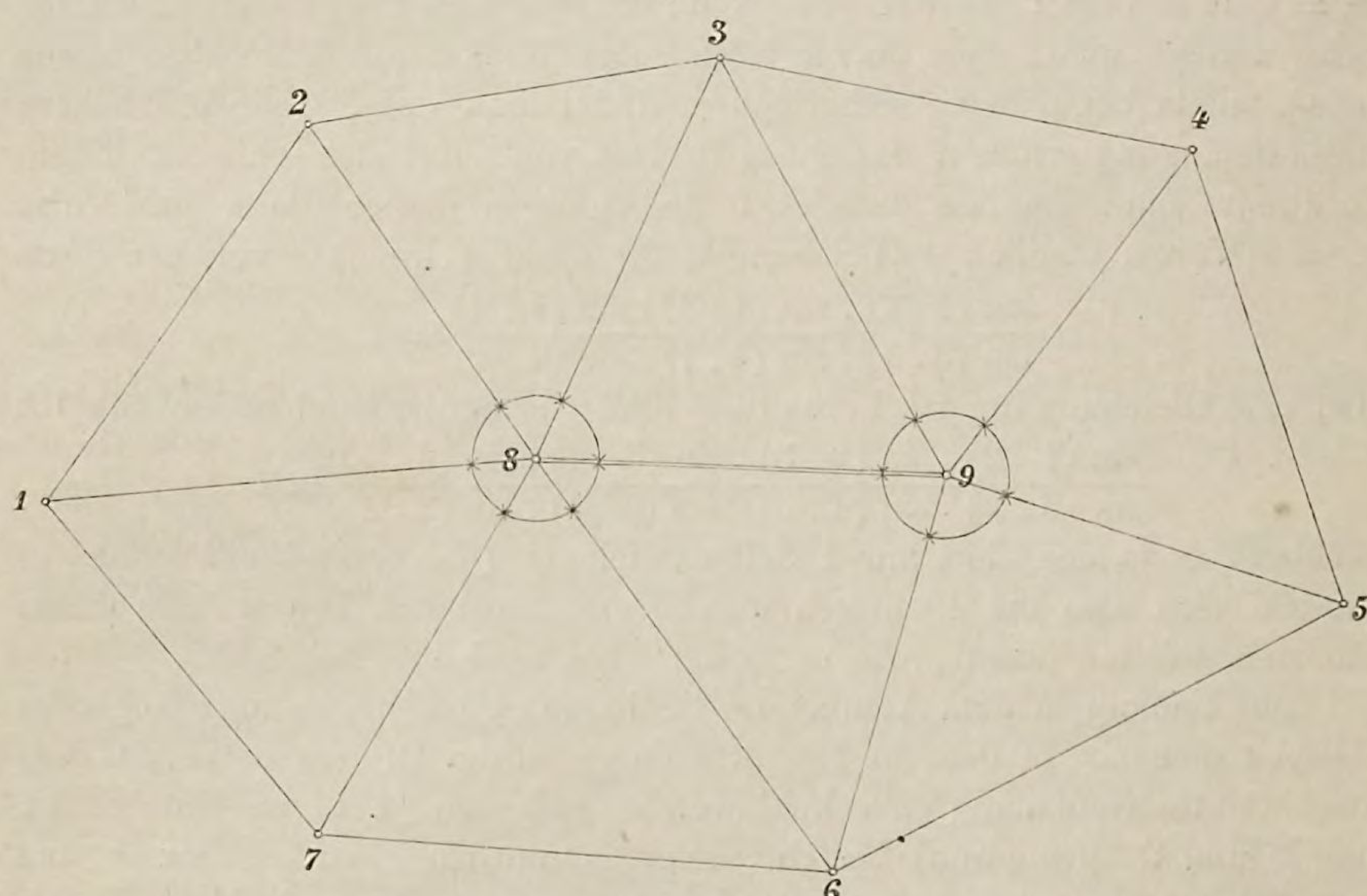
$$\frac{\sin(8 . 1) . \sin(8 . 2) . \sin(8 . 3) . \sin(8 . 4) . \sin(8 . 7) . \sin(8 . 9)}{\sin(2 . 8) . \sin(3 . 8) . \sin(4 . 8) . \sin(9 . 8) . \sin 1 . 8) . \sin(7 . 8)} = 1$$

und in dem um den Punkt 9 herum liegenden Fünfecke

$$\frac{\sin(9 . 8) . \sin(9 . 4) . \sin(9 . 5) . \sin(9 . 6) . \sin(9 . 7)}{\sin(4 . 9) . \sin(5 . 9) . \sin(6 . 9) . \sin(7 . 9) . \sin(8 . 9)} = 1$$

sei. Nachdem so die 13 zu erfüllenden Bedingungsgleichungen bekannt sind, geschieht die weitere Behandlung nach den im allgemeinen Theile der

Fig. 138.



Ausgleichungsrechnung angegebenen Regeln. (Ein auf den vorliegenden Fall passendes Zahlenbeispiel enthält Jordan's Taschenbuch der praktischen Geometrie, S. 300 u. ff.)

6. Die Coordinatenberechnung der Netzpunkte.

§. 135. Durch die definitive Berechnung der Dreieckseiten ist die gegenseitige Lage aller Netzpunkte bestimmt. Soll aber die Lage dieser Punkte gegen den Aequator und einen bestimmten Meridian der Erde angegeben werden, so muss erst dieser Meridian festgesetzt und dessen Lage gegen den Hauptmeridian, worauf die geographischen Längen bezogen

werden, bekannt sein. Der Meridian auf welchen man die Netzpunkte zunächst bezieht, geht in der Regel durch die Sternwarte des Landes deren geographische Lage genau bekannt ist und welche desshalb als astronomischer Punkt der Landesvermessung benützt wird. Es ist jedoch nicht gerade nothwendig dass man die Netzpunkte auf den Meridian der Sternwarte bezieht, es kann hierzu auch der Meridian eines anderen genau bestimmten Netzpunkts, welcher dann der Normalpunkt heisst, gewählt werden, wie z. B. für die bayerische Landesvermessung die Axe des nördlichen Thurms der Frauenkirche in München. Senkrecht zu diesem Meridian denkt man sich durch den Normalpunkt einen grössten Kreis der Erdkugel gelegt welcher das Perpendikel genannt wird und in der Richtung Ostwest liegt. Der Meridian und das Perpendikel des Normalpunkts, auf das Niveau der Messung projicirt gedacht, stellen nunmehr kreisförmige Coordinatenaxen vor und auf diese werden in der Regel alle Punkte der Vermessung durch kreisförmige Abscissen und Ordinaten bezogen. Die Abscissen sind Meridianbögen und werden entweder nach Süden oder nach Norden hin als positiv betrachtet. Die Ordinaten sind grösste Kreise die auf dem Meridian des Normalpunkts senkrecht stehen und folglich ihre Pole in dem Aequator der Erde haben, ihre positive Richtung kann nach Osten oder Westen laufen: wir werden für die Ordinaten die Richtung vom Normalpunkte nach Westen und für die Abscissen jene vom Normalpunkte nach Süden als die positive annehmen. Ausser diesen von Soldner eingeführten rechtwinkeligen sphärischen Coordinaten werden bei kleinen Landes- oder Gradmessungen auch sphärische Polarcoordinaten angewendet, wie es Bessel bei seiner Gradmessung in Ostpreussen gethan hat. Der Meridian des Normalpunkts ist dann wieder Abscissenaxe und es ist für jeden Dreieckspunkt die Länge des vom Normalpunkte als Pol an gezählten Radiusvector und dessen Neigungswinkel gegen den Meridian zu berechnen.

Bei kleineren Dreiecksnetzen für welche man den von ihnen eingeschlossenen Theil der Erdkugel als eben ansehen darf, werden selbstverständlich die Axen und die Coordinaten senkrecht auf einander stehende gerade Linien, und es müssen sich die Formeln hiefür aus den sphärischen ergeben, wenn man den Halbmesser der Kugel, auf welcher das Netz liegt, unendlich gross annimmt.

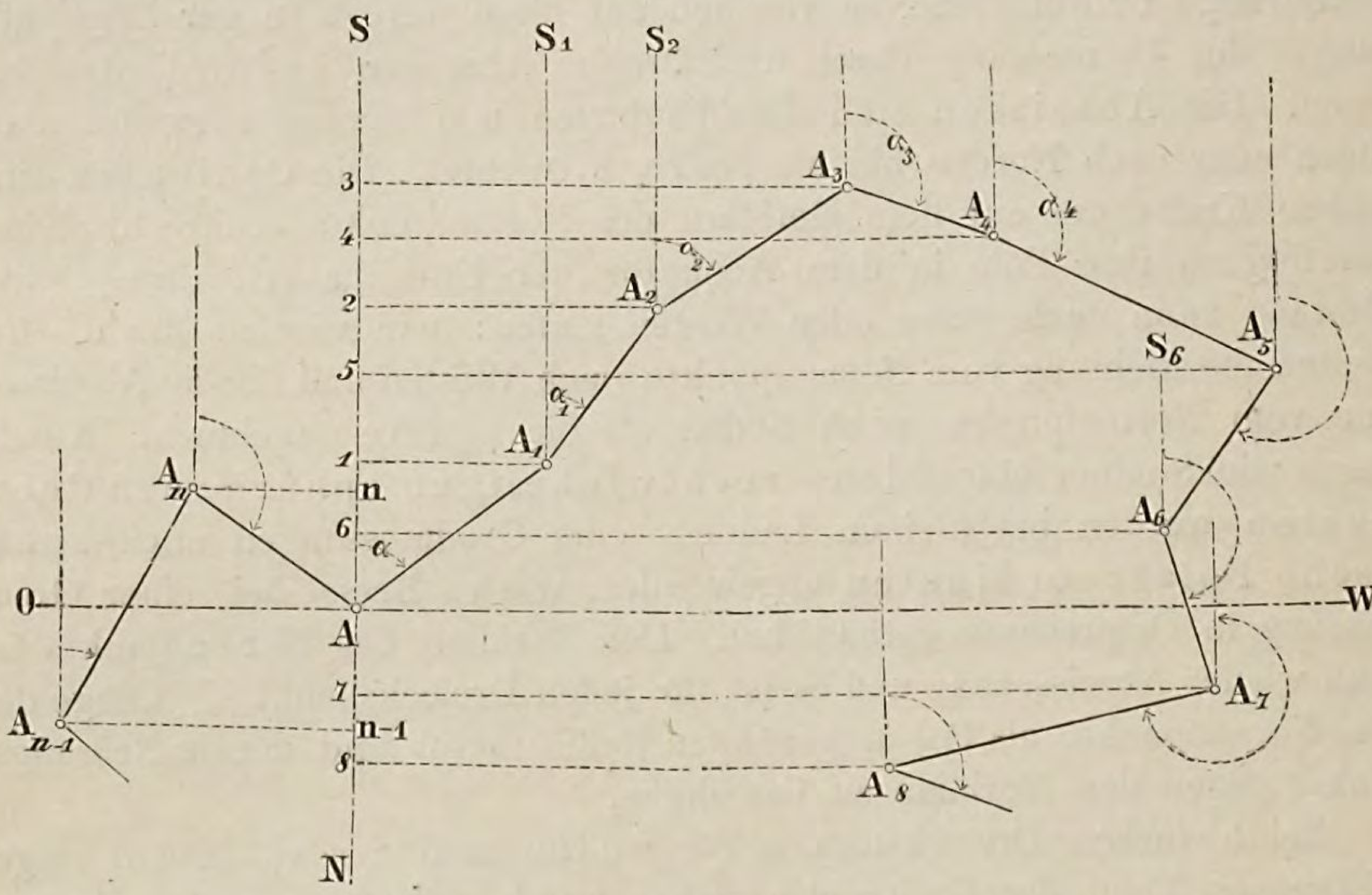
§. 136. Aufgabe. Ein für eine Landesvermessung hergestelltes Dreiecksnetz hat eine so geringe Ausdehnung dass es als eben angesehen werden kann; man soll aus den gegebenen Bestimmungsstücken die Coordinaten der Netzpunkte berechnen.

Es sei die vom Normalpunkte A ausgehende erste Dreieckseite $A A_1 = a_1$, die anstossende zweite $A_1 A_2 = a_2$, die dritte $A_2 A_3 = a_3$ u. s. f., die n^{te} $A_{n-1} A_n = a_n$. Ist das Azimuth der Seite a_1 (vom Südpunkte über West bis 360^0) in $A = \alpha$, so ist es in $A_1 = 180^0 + \alpha$; setzt man ferner den

ersten Richtungswinkel der Seite a_2 in $A_1 = \alpha_1$, so ist der zugehörige zweite im Punkte $A_2 = 180^0 + \alpha_1$. Für die Seite a_3 hat man den ersten Richtungswinkel in $A_2 = \alpha_2$ und den zweiten in $A_3 = 180^0 + \alpha_2$, und so fort erhält man für a_n den ersten Richtungswinkel $= \alpha_{n-1}$ und den zweiten $= 180^0 + \alpha_{n-1}$.

Ueber die Richtungswinkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots . \alpha_n$ ist zu bemerken dass sie aus den nach §. 124 bei der Messung bestimmten Richtungswinkeln erhalten werden, wenn man an diesen die nöthigen Reductionen δ wegen der früher nur annähernd bekannten Lage des Meridians anbringt. Diese Lage ist aber jetzt, nachdem alle Dreieckswinkel ausgeglichen sind und das Azimuth von a_1 genau bekannt ist, zunächst für a_2, hiermit für a_3, damit für a_4 u. s. f. mit a_{n-1} für a_n bekannt.

Fig. 139.



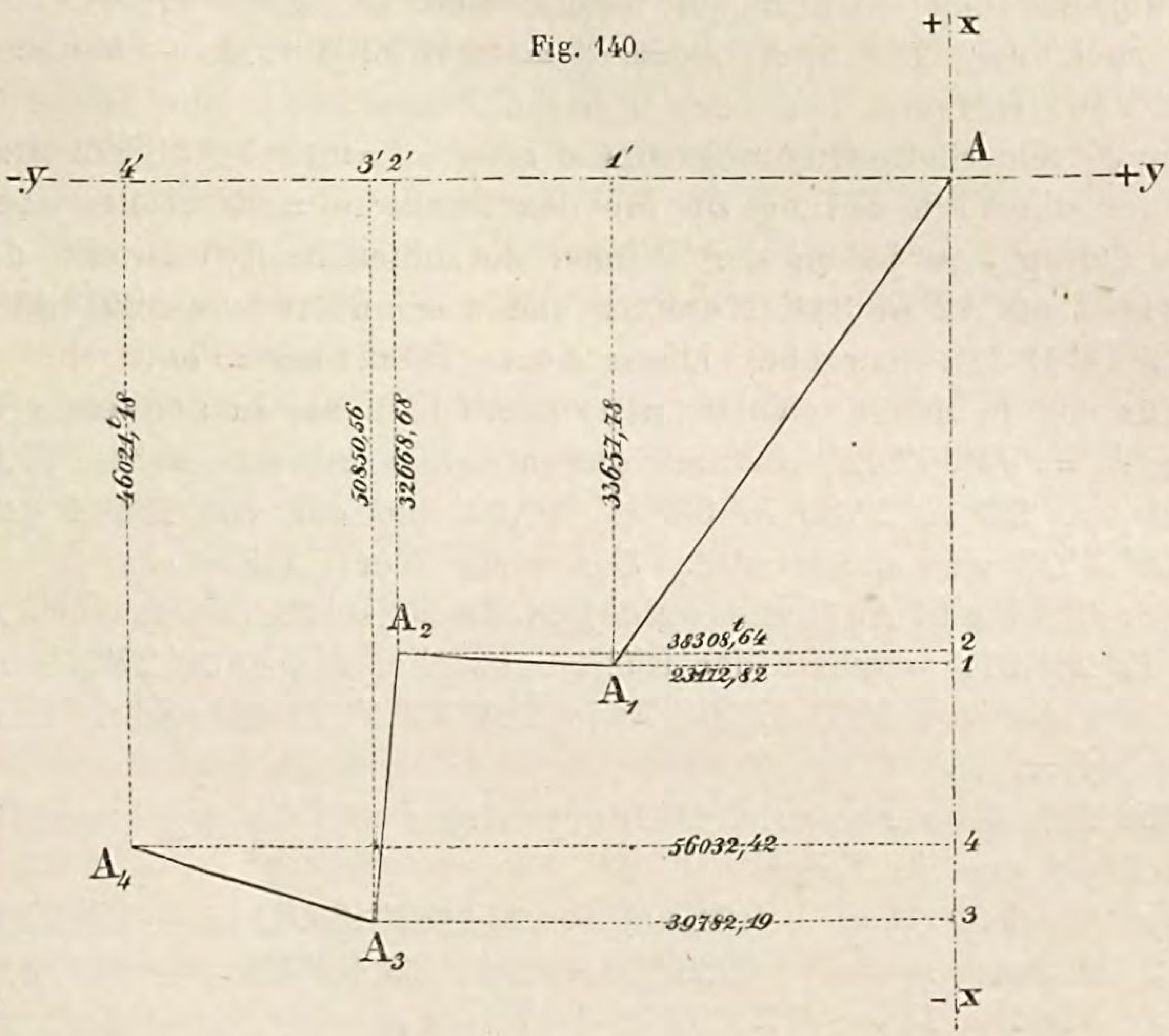
Bezeichnen die Buchstaben $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \ldots \xi_n$ die Abscissen und $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4 \ldots \eta_n$ die Ordinaten der Netzpunkte $A_1, A_2, A_3, A_4 \ldots A_n$, so ist nach der Figur 139:

$$\begin{array}{ll}
\xi_1 = a_1 \cos \alpha & \eta_1 = a_1 \sin \alpha \\
\xi_2 = \xi_1 + a_2 \cos \alpha_1 & \eta_2 = \eta_1 + a_2 \sin \alpha_1 \\
\xi_3 = \xi_2 + a_3 \cos \alpha_2 & \eta_3 = \eta_2 + a_3 \sin \alpha_2 \\
\xi_4 = \xi_3 + a_4 \cos \alpha_3 & \eta_4 = \eta_3 + a_4 \sin \alpha_3 \\
\vdots & \vdots \\
\xi_n = \xi_{n-1} + a_n \cos \alpha_{n-1} & \eta_n = \eta_{n-1} + a_n \sin \alpha_{n-1}
\end{array}$$

Theils um die praktische Anwendung dieser Formeln zu zeigen, theils aber auch um nachzuweisen dass die hieraus erhaltenen Werthe von den genaueren sphärischen Coordinaten welche im folgenden Paragraph berechnet werden, nur sehr wenig abweichen, lassen wir hier ein aus der

Gradmessung von Bessel und Baeyer entlehntes und auch von Hansen in seiner Instruction für die thüringische Triangulation benütztes Beispiel

Fig. 140.



folgen. Zur leichteren Uebersicht der Lage der Punkte welche in demselben vorkommen, mag die Figur 140 dienen, in welcher + x A + y das positive Viertel vorstellt.

Netzpunkt	Dreieckseite	Logarithmus	Richtungswinkel
	Trunz (A)		
Galtgarben (A_1)	40863t,50	4,6113356	214° 32′ 48″,32
	Galtgarben (A_1)		
Trunz (A)			34° 34′ 50″,72
Kondehnen (A_2)	15168t,11	4,1809313	273° 46′ 22″,32
	Kondehnen (A_2)		
Galtgarben (A_1)			93° 11′ 2″,30
Lattenwalde (A_3)	18241t,50	4,2610605	184° 4′ 42″,61
	Lattenwalde (A_3)		
Kondehnen (A_2)			4° 50′ 27″,14
Gilge (A_4)	16952t,67	4,2292381	286° 45′ 31″,70

Für den Normalpunkt A (Trunz) ist die geographische Breite $\varphi =$ 54° 13′ 11″,47 und das Azimuth der Seite A A_1, (Trunz-Galtgarben) $\alpha =$

$214^0\ 32'\ 48'',32$. Damit nun die in Galtgarben (A_1) stattfindenden Richtungswinkel auf den richtigen Meridian bezogen werden, ist an denselben eine Verbesserung anzubringen welche sich wie folgt ergibt: Offenbar muss nach Fig. 139 $S_1\ A_1\ A_2 = \alpha_1 = 214^0\ 32'\ 48'',32 - 180^0 = 34^0\ 32'\ 48'',32$ sein, während nach der früheren Bestimmung laut obiger Tabelle der um δ_1 fehlerhafte Richtungswinkel $\omega + \delta_1 = 34^0\ 34'\ 50'',72$ ist. Hieraus folgt die Verbesserung δ_1 für den Punkt $A_1 = 2'\ 2'',40$, und es ist dieser Betrag von jedem der Winkel zu subtrahiren, wesshalb der eine von $34^0\ 34'\ 50'',72$ in $34^0\ 32'\ 48'',32$ und der andere von $273^0\ 46'\ 22'',32$ in $272^0\ 44'\ 19'',92$ übergeht. Dieser letzte Werth sei $= \omega_1$.

Für den Punkt A_2 (Kondehnen) findet man die zu addirende Verbesserung $\delta_2 = 33'\ 17'',62$, wodurch der in der Tabelle aufgeführte Richtungswinkel von $93^0\ 11'\ 2'',30$ in $93^0\ 44'\ 19'',92$ und der von $184^0\ 4'\ 42'',61$ in $184^0\ 38'\ 0'',23$ verwandelt wird. Der letzte Werth sei $= \omega_2$.

Für den Punkt A_3 (Lattenwalde) ist die zu subtrahirende Verbesserung $\delta_3 = 12'\ 29'',91$, wesshalb der Richtungswinkel von $4^0\ 50'\ 27'',14$ in $4^0\ 38'\ 0'',23$ und der von $286^0\ 45'\ 31'',70$ in $286^0\ 33'\ 4'',79$ übergeht. Der letzte Werth sei $= \omega_3$.

Mit Hilfe der verbesserten Richtungswinkel und der gegebenen Dreieckseiten findet man in Toisen

die Abscisse $\xi_1 = 40863,50 \cos 214^0\ 32'\ 48'',32 = -33657,78$
„ Ordinate $\eta_1 = 40863,50 \sin 214^0\ 32'\ 48'',32 = -23172,82$
„ Abscisse $\xi_2 = -33657,78 + a_2 \cos \omega_1 = -32688,68$
„ Ordinate $\eta_2 = -23172,82 + a_2 \sin \omega_1 = -38308,64$
„ Abscisse $\xi_3 = -32688,68 + a_3 \cos \omega_2 = -50850,56$
„ Ordinate $\eta_3 = -38308,64 + a_3 \sin \omega_2 = -39782,19$
„ Abscisse $\xi_4 = -50850,56 + a_4 \cos \omega_3 = -46021,18$
„ Ordinate $\eta_4 = -39782,19 + a_4 \sin \omega_3 = -56032,42$

Nach diesen Coordinatenwerthen ist die Fig. 140 construirt.

§. 137. Aufgabe. Es sollen aus den berechneten Dreieckseiten, der bekannten geographischen Breite des Normalpunkts und dem Azimuth einer Seite die rechtwinkligen sphärischen Coordinaten eines grossen Dreiecksnetzes entwickelt werden.

Die sphärischen Linearcoordinaten sind für Landesvermessungen geeigneter als die Polarcoordinaten, weil sie eine leichtere Verbindung des für die Stückmessung nöthigen graphischen oder geometrischen Netzes mit dem trigonometrischen Netze gestatten.

Die rechtwinkligen sphärischen Coordinaten wurden zuerst von dem Astronomen J. Soldner (geb. zu Feuchtwangen 1773, gest. zu München 1833) entwickelt und seit 1810 auf die bayerische Landesvermessung angewendet. Soldner's System, in Folge widriger Umstände erst 1873 durch den Druck veröffentlicht (vergl. „Die Bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage." München 1873), ging schon frühe

durch private und amtliche Mittheilungen an Gelehrte und Beamte in Württemberg, Baden, Hessen u. s. w. über und wurde bereits 1826 durch Bohnenberger in Tübingen welcher den wissenschaftlichen Theil der württembergischen Landesvermessung zu leiten hatte, seinem wesentlichen Inhalte nach öffentlich bekannt. (Siehe die Abhandlung „De computandis dimensionibus trigonometricis in superficie terrae sphaeroïdica institutis.“ Tubingae 1826.) Hieraus erklärt sich warum einige Schriftsteller glauben das in Württemberg zur Anwendung gekommene Vermessungssystem rühre von Bohnenberger her, während es doch bis auf Kleinigkeiten mit dem älteren bayerischen übereinstimmt.

Das der bayerischen Landesvermessung zu Grunde liegende Soldner'sche System rechtwinkliger sphärischer Coordinaten lässt sich wie folgt darstellen. Durch den Normalpunkt der Vermessung (gewöhnlich die Sternwarte, in Bayern die Axe des nördlichen Frauenthurms zu München) wird ein Meridian (hier ein grösster Kreis) der Erdkugel gelegt welcher als Abscissenaxe gilt. Zieht man durch jeden Dreieckspunkt einen grössten Kreis derselben Kugel welcher auf der Abscissenaxe senkrecht steht, so stellen die Bögen dieser Kreise, von den Dreieckspunkten bis zur Abscissenaxe gemessen, die sphärischen Ordinaten, und die von ihnen abgeschnittenen Meridianstücke, bis zum Normalpunkt genommen, die sphärischen Abscissen der Dreieckspunkte vor. Klar ist dass sämmtliche Ordinatenkreise sich in zwei Punkten welche nach West und Ost um 90⁰ vom Normalpunkte oder von der Abscissenaxe abstehen, schneiden: von diesen Punkten kann man den einen (W) Westpunkt, den anderen Ostpunkt nennen, zum Unterschiede vom Nordpol und Südpol der Kugel welche als Projectionsfläche der gesammten Vermessung dient.

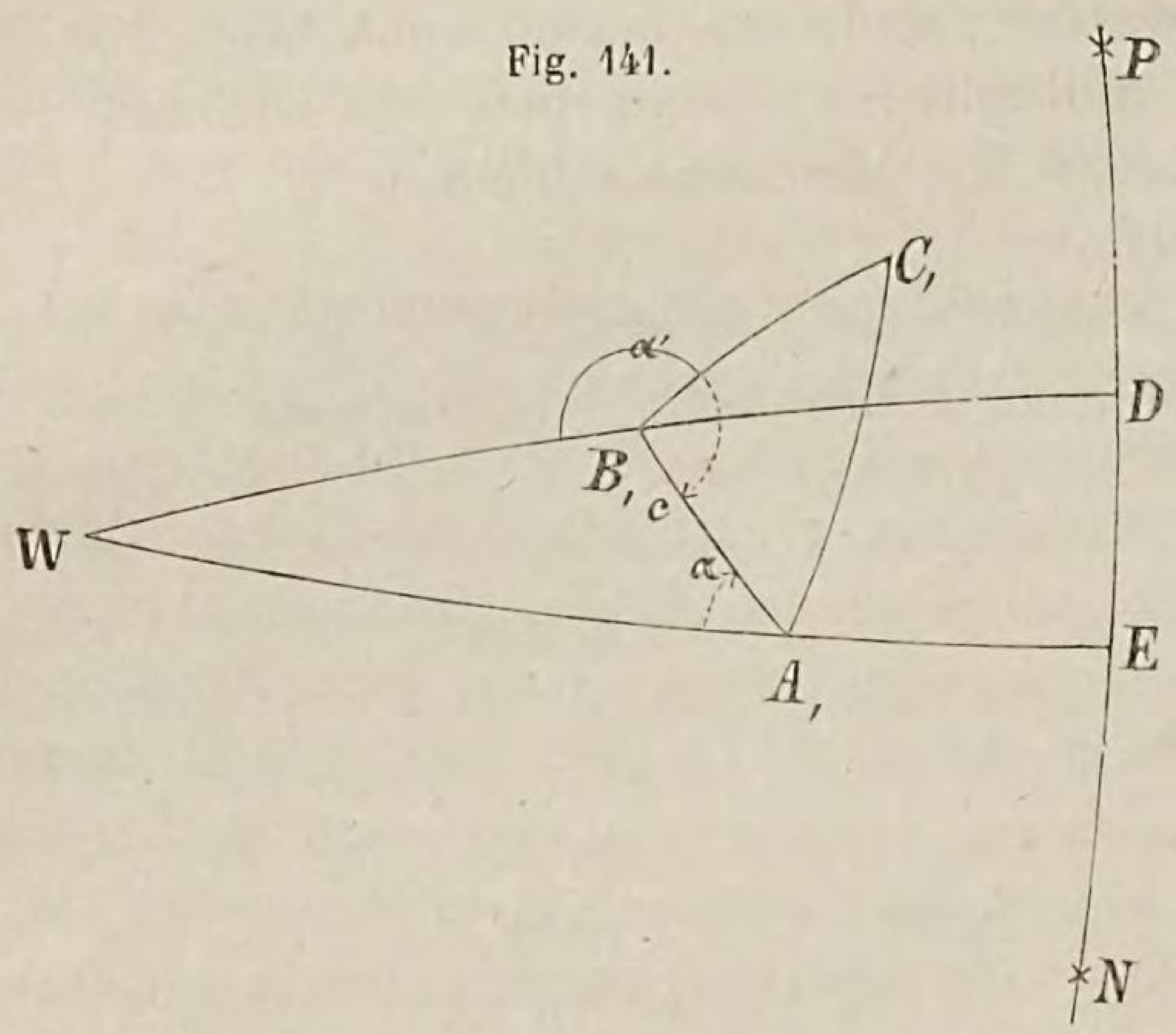
Den vom Westpunkte oder der westlichen Richtung des betreffenden Ordinatenkreises über Nord bis zu 360⁰ gezählten Winkel einer beliebigen Dreieckseite heisst Soldner deren Directionswinkel, und es ist derselbe wohl zu unterscheiden von dem was wir bisher „Richtungswinkel“ genannt haben und auch später so nennen werden; die Soldner'schen Directionswinkel sind zwar auch Richtungswinkel, aber sie gehen nur von Einer bestimmten Richtung aus, wärend die mit dem deutschen Ausdrucke bezeichneten Richtungswinkel von irgend einer gegebenen oder angenommenen Geraden aus gezählt werden können. Jede Dreieckseite hat zwei Directionswinkel: sind diese Seiten gerade und die Ordinaten parallel, so beträgt der Unterschied dieser Winkel genau 180^0; sind aber die Dreiecksseiten Kreisbögen und laufen die Ordinatenkreise im West- und Ostpunkte zusammen, so ist der Unterschied der beiden Directionswinkel $= 180^0 + \delta$ wobei δ von der Convergenz der beiden Ordinatenkreise abhängt.

Ist $A_1 B_1 C_1$ in Figur 141 ein gegebenes sphärisches Dreieck dessen Seiten und Winkel nebst dem Directionswinkel $W A_1 B_1 = \alpha$ bekannt sind; stellt ferner N den Normalpunkt der Vermessung und N P die Abscissenaxe vor; sind $W A_1 E$ und $W B_1 D$ die durch A_1 und B_1 gezogenen Ordinaten-

kreise und folglich $A_1 E = O$ und $B_1 D = O'$ die Ordinaten, $N E = A$ und $N D = A'$ die Abscissen von A_1 und B_1: so ist der Grosskreisbogen $A_1 W = 90^0 - O$ und $B_1 W = 90^0 - O'$; desshalb auch in dem sphärischen Dreiecke $A_1 W B_1$ dessen Seite $A_1 B_1 = c$ sei, nach einem bekannten Satze der sphärischen Trigonometrie:

$$\sin O' = \cos c \sin O + \sin c \cos O \cos \alpha \qquad (227)$$

Fig. 141.



Hiernach lässt sich also die Ordinate O' berechnen, wenn O nebst c und α bekannt ist. Der Abscissenunterschied $A'-A$ ist in der Figur dem Grosskreisbogen $D E$ gleich und misst den Winkel $D W E = A''$. Stellt man sich vorläufig unter A' und A die zugehörigen Winkel vor, so ist $A'' = A' - A$ und hieraus $A' = A + A''$; d. h. man kann die Abscisse A' berechnen, sobald man A'' kennt. Hiefür folgt aber durch Anwendung des bekannten Sinus-Satzes der sphärischen Trigonometrie sofort:

$$\sin A'' = \frac{\sin c}{\cos O'} \sin \alpha \qquad (228)$$

Um endlich den Directionswinkel der Seite c in B_1 oder α' zu finden, führt derselbe Satz der sphärischen Trigonometrie zu dem Ausdrucke:

$$\cot \alpha' = \cos c \cot \alpha - \frac{\sin c \tang O}{\sin \alpha} \qquad (229)$$

Die zwei ersten Formeln (227) und (228) sind zwar theoretisch strenge richtig, in der Praxis aber nicht unmittelbar anwendbar, weil sie die Coordinaten im Gradmasse liefern, das nach §. 127, Seite 258 hier nicht genügt. Da jedoch die Bögen O, O', c und die Winkel A'' und $\alpha' - (\alpha + 180^0)$ sehr klein sind so kann man leicht Näherungswerthe entwickeln, indem man die trigonometrischen Functionen der Bögen durch rasch convergirende Reihen ausdrückt welche nach Potenzen dieser Bögen fortschreiten. Setzt man z. B. in Formel (227):

$$\sin O = O - \frac{O^3}{6} + \ldots, \quad \sin c = c - \frac{c^3}{6} + \ldots$$

$$\cos O = 1 - \frac{O^2}{2} + \ldots, \quad \cos c = 1 - \frac{c^2}{2} + \ldots$$

und vernachlässigt in ihr, wie in diesen Reihen, alle Glieder von mehr als dritter Ordnung, so erhält man zunächst:

$$\sin O' = O + c \cos \alpha - \tfrac{1}{6} O^3 - \tfrac{1}{2} O c^2 - \tfrac{1}{2} O^2 c \cos \alpha - \tfrac{1}{6} c^3 \cos \alpha$$

da aber auch die Reihe besteht: $O' = \sin O' + \frac{1}{6} \sin^3 O'$, so folgt durch Einsetzung der Werthe sin O′ und sin³ O′ in dieselbe:

$$O' = O + c \cos \alpha - \tfrac{1}{2} O c^2 \sin^2 \alpha - \tfrac{1}{6} c^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha$$

Bisher haben wir den Halbmesser 1 vorausgesetzt; das Dreiecksnetz liegt aber auf einer Kugel vom Halbmesser r, und es müssen daher die Bögen O′, O, c mit r dividirt werden; andererseits sind auch beide Seiten der letzten Gleichung mit r zu multipliciren, wenn man die Ordinate O′ im Längenmass von r ausdrücken will. Man erhält hienach

$$O' = O + c \cos \alpha - \frac{O c^2}{2 r^2} \sin^2 \alpha - \frac{c^3}{6 r^2} \sin^2 \alpha \cos \alpha$$

und wenn man $c \sin \alpha = m$ und $c \cos \alpha = n$ setzt, die Ordinate

$$O' = O + n - \frac{m^2 O}{2 r^2} - \frac{m^2 n}{6 r^2} \tag{230}$$

In gleicher Weise findet man A″ und damit die Abscisse

$$A' = A + m + \frac{m O'^2}{2 r^2} - \frac{n^2 m}{6 r^2} \tag{231}$$

Die auch unmittelbar anwendbare Formel 229 liefert:

$$\alpha' = 180^0 + \alpha + \frac{m n}{2 r^2 \sin 1''} + \frac{m O}{r^2 \sin 1''} \tag{232}$$

Dass die Näherungsausdrücke für O′, A′, α′ genau genug sind, selbst wenn das zu vermessende Land 50 geographische Meilen lang und breit ist, bewies Soldner an folgendem Beispiele, dem die für Bayern geltenden und auf bayerische Ruthen zu 10 Fuss bezogenen constanten Werthe zu Grunde liegen:

brgg. log r = 6,340 2033	brgg. log $\frac{1}{6 r^2}$ = 0,54144 — 14
Radius r = 2 188 786	log $\frac{1}{2 r^2 \sin 1''}$ = 0,33300 — 8
log $\frac{1}{2 r^2}$ = 0,01856 — 13	log $\frac{1}{r^2 \sin 1''}$ = 0,63402 — 8

Ist nämlich c = 1° 30′ oder 22,5 Meilen, O = 30′ oder 7,5 Meilen und α = 46°, so findet man mittels der genauen Formel (227) die Ordinate O′ = 5550″,615 und mittels der Näherungsformel (230) dieselbe Ordinate O′ = 1800″ + 3751″,156 — 0″,139 — 0″,221 = 5550″,616. Den Abscissenunterschied A″ liefert die strenge Formel (228) = 3885″,628 und die Näherungsformel (231) = 3884″,435 + 1″,406 — 0″,214 = 3885″,627. Den Directionswinkel α′ gibt sowohl die strenge Formel (229) als die Näherung (232) = 46° 1′ 9″,220. In allen drei Werthen tritt demnach kein grösserer Unterschied als von höchstens 0″,001 auf.

Die Formeln (230) bis (232) lassen sich auch so schreiben:

$$O' = O + n - \frac{m^2}{2 r^2}\left(O + \frac{n}{3}\right) = O + n - \Delta_1 \tag{230}$$

$$A' = A + m + \frac{m}{2 r^2}\left(O'^2 - \frac{n^2}{3}\right) = A + m + \Delta_2 \tag{231}$$

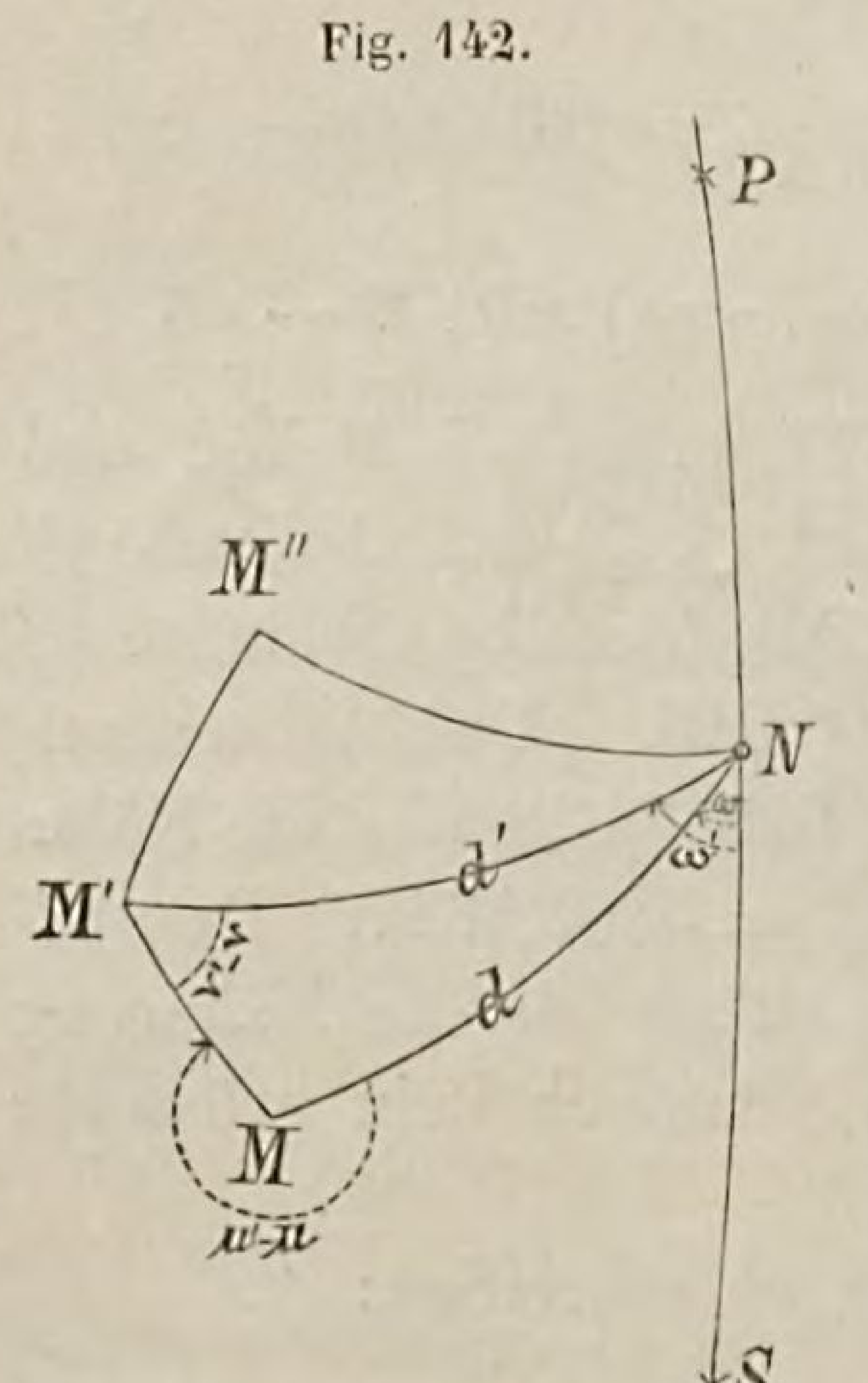
$$\alpha' = 180^0 + \alpha + \frac{m}{r^2 \sin 1''}\left(O + \frac{n}{2}\right) = 180^0 + \alpha + \Delta_3 \qquad (232)$$

wobei die Werthe Δ_1, Δ_2, Δ_3 die Verbesserungen vorstellen welche an den für die Ebene geltenden Ausdrücken:

$$O' = O + n; \; A' = A + m, \; \alpha' = 180^0 + \alpha \qquad (233)$$

anzubringen sind, sobald das Dreiecksnetz nicht mehr als ebenes angesehen werden darf, sondern als sphärisches zu behandeln ist: die Werthe Δ_1, Δ_2, Δ_3 sind also die Correctionen der Coordinaten und Directionswinkel wegen der Erdkrümmung und werden null, sobald $r = \infty$, d. h. die Projectionsfläche des Netzes eben ist, sie sind Functionen von c, α, O, und es wächst namentlich die Abscissencorrection Δ_2 rasch mit der Entfernung O′ des betreffenden Dreieckspunkts von der Abscissenaxe. Hieraus geht deutlich hervor dass, wenn auch bei kleineren Dreiecksnetzen vierter und fünfter Ordnung die Dreiecke selbst als ebene berechnet werden dürfen, diess doch nicht bei den Coordinaten weit entfernter Punkte der Fall ist. Es muss demnach als ein verdienstliches Unternehmen bezeichnet werden, dass der Trigonometer J. H. Franke zu München in neuester Zeit Tafeln hergestellt hat, aus denen sich die Verbesserungen der Coordinatenwerthe O′ und A′ wegen der Erdkrümmung oder die Werthe Δ_1 und Δ_2 abgreifen lassen. Diese Tafeln gelten zunächst nur für Bayern, d. i. für eine der Landestriangulation zu Grunde liegende Abplattung von 1 : 305 und einen Krümmungshalbmesser in Meter dessen Logarithmus = 6,8053766 ist, sie lassen sich aber unbedenklich auf eine Zone von 48⁰ bis 52⁰ geographischer Breite anwenden. (Vergl. „Die trigonometrische Punktbestimmung im Netzanschlusse" von J. H. Franke, München 1875, worin mehr Einzelnheiten enthalten sind.)

Fig. 142.



§. 138. Aus dem berechneten Dreiecksnetze, der bekannten geographischen Breite des Normalpunkts oder Pols und dem Azimuth einer durch den Pol gehenden Dreieckseite die sphärischen Polarcoordinaten aller Dreieckspunkte zu berechnen.

Unter den sphärischen Polarcoordinaten eines Punkts M versteht man den Grosskreisbogen M N = d welcher diesen Punkt mit dem als Pol angenommenen Punkt N verbindet und dessen Azimuth S N M = ω ist. Nach dieser Definition lassen sich die Polarcoordinaten eines ganzen Dreiecksnetzes durch wiederholte Anwendung der Aufgabe finden: aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die übrigen Stücke eines sphärischen Dreiecks zu berechnen. Sind nämlich die Coordinaten d und ω eines

Punkts M, ferner die Seite $M M' = d_1$ und der von M N aus gezählte Richtungswinkel $N M M' = \mu' - \mu$ der Seite M M' (worunter man sich die Differenz der in M, M' gemessenen und von je einer beliebigen Richtung an gezählten Winkel der Richtungen M M', M N und M' N, M' M zu denken hat) gegeben und die Coordinaten $M' N = d'$ und $M' N S = \omega'$ eines Punkts M', sowie der von M' N aus gezählte und mit $\nu' - \nu$ bezeichnete Richtungswinkel des Strahls M' M gesucht, so hat man erstens für den sphärischen Excess ε des Dreiecks N M M'

$$\varepsilon = \varrho'' \frac{d\, d_1}{2\, r^2} \sin(\mu' - \mu) \tag{234}$$

zweitens für den unbekannten Richtungswinkel ω':

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\left(\nu' - \nu - (\omega' - \omega)\right) = \frac{(d - d_1) \cos \frac{1}{2}(\mu' - \mu + \frac{1}{3}\varepsilon)}{-(d + d_1) \sin \frac{1}{2}(\mu' - \mu + \frac{1}{3}\varepsilon)} = \frac{Z}{N} \tag{235}$$

drittens für den gesuchten Strahl d^1:

$$d' = \frac{(d - d_1) \cos \frac{1}{2}(\mu' - \mu + \frac{1}{3}\varepsilon)}{\sin \frac{1}{2}(\nu' - \nu - (\omega' - \omega))} = \frac{(d + d_1) \sin \frac{1}{2}(\mu' - \mu + \frac{1}{3}\varepsilon)}{\cos \frac{1}{2}(\nu' - \nu - (\omega' - \omega))} \tag{236}$$

und viertens als Controle die Beziehung zwischen den Winkeln:

$$\nu' - \nu + \omega' - \omega = 180^0 + \varepsilon + \mu' - \mu \tag{237}$$

Hiebei ist zu bemerken dass die Differenz $\nu' - \nu - (\omega' - \omega)$ bezüglich des Quadranten stets so zu wählen ist dass die Länge d' aus den beiden vorletzten Formeln positiv erhalten wird. Wie dieses geschieht bedarf wohl keiner besonderen Erläuterung.

Nach Seite 168 und 254 der „Gradmessung in Ostpreussen“ von Bessel sind z. B. die Polarcoordinaten von M (Trunz): $d = 42621{,}4873$ Toisen und $\omega = 48^0\, 56'\, 53'',169$, wobei N die Königsberger Sternwarte vorstellt; ferner ist M M' (Trunz-Galtgarben) $= d_1 = 40863{,}5004$ Toisen und für

M N der Richtungswinkel $\mu = 50^0\, 29'\, 47,''0590$
M M' der Richtungswinkel $\mu' = 36\;\; 52\;\; 42,\; 8515$
somit der Winkel $\mu' - \mu = 346\;\; 22\;\; 55,\; 7925$

Ist die Krümmung in N oder $r = 3\,271\,629$ Toisen gegeben, so wird

$$\varepsilon = 3,''951 \qquad \log Z = 3,''2419419_n \qquad \log N = 3,''9955295_n$$

$$\tfrac{1}{2}(\nu' - \nu) + \tfrac{1}{2}(\omega' - \omega) = 263^0\, 11'\, 29,''872$$
$$\tfrac{1}{2}(\nu' - \nu) - \tfrac{1}{2}(\omega' - \omega) = 190^0\;\; 0'\;\; 7,''601$$
$$\nu' - \nu = 93^0\, 11'\, 37{,}473$$
$$\omega' - \omega = 73\;\; 11\;\; 22{,}271$$
$$\omega' = 122\;\; 8\;\; 15{,}440$$
$$d' = 1050{,}3442.$$

Will man aus den Soldner'schen sphärischen Orthogonalcoordinaten die zugehörigen Polarcoordinaten berechnen, so ist zunächst daran zu denken dass hier eine Aenderung in der Definition der sphärischen Polarcoordinaten einzutreten hat, indem an die Stelle des Azimuthalwinkels ω der Directionswinkel α tritt welcher auf die Ordinatenkreise bezogen wird (vergl. Seite 273). Unter dieser Voraussetzung und der gestatteten Nähe-

rung, dass man bei Berechnung der Werthe von n und m aus (230) und (231) in den an O′ — O und A′ — A anzubringenden Verbesserungen

$$\frac{m^2}{2\,r^2}\left(O+\frac{n}{3}\right) \text{ und } \frac{m}{2\,r^2}\left(O'^2-\frac{n^2}{3}\right)$$

m = A′ — A und n = O′ — O setzen darf, findet man sofort aus den eben bezeichneten Formeln:

$$n = O' - O + \frac{(A'-A)^2}{2\,r^2}\left(O+\frac{O'-O}{3}\right) \qquad (238)$$

$$m = A' - A - \frac{(A'-A)}{2\,r^2}\left(O'^2-\frac{(O'-O)^2}{3}\right) \qquad (239)$$

und hiemit die gesuchten Polarcoordinaten α und d aus

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{n} \text{ und } d = \frac{m}{\sin\alpha} = \frac{n}{\cos\alpha} \qquad (240)$$

Wenn auch die Unterschiede zwischen den ebenen und sphärischen Coordinaten oder die Werthe für $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, $\varDelta_3$ welche sich aus den Gleichungen (230) bis (232) ergeben, nur gering sind, so soll man sie doch bei den Dreiecken dritter und vierter Ordnung noch nicht vernachlässigen, zumal sie nach den Tafeln von Franke leicht graphisch bestimmt werden können. Ist ein Punkt dritter oder vierter Ordnung von mehreren Seiten her angeschnitten, so kann man seine Coordinaten mehrfach berechnen und wird es auch der Controle wegen thun. Weichen die hiefür erhaltenen Werthe nur wenig von einander ab, so genügt es in der Regel diese Abweichungen durch die arithmetischen Mittel der Coordinatenwerthe auszugleichen; will man aber strenger verfahren, so ist die Methode der kleinsten Quadrate oder ein dieser Methode nahekommendes Ausgleichungsverfahren anzuwenden.

7. Die geographische Lage der Netzpunkte und Seiten.

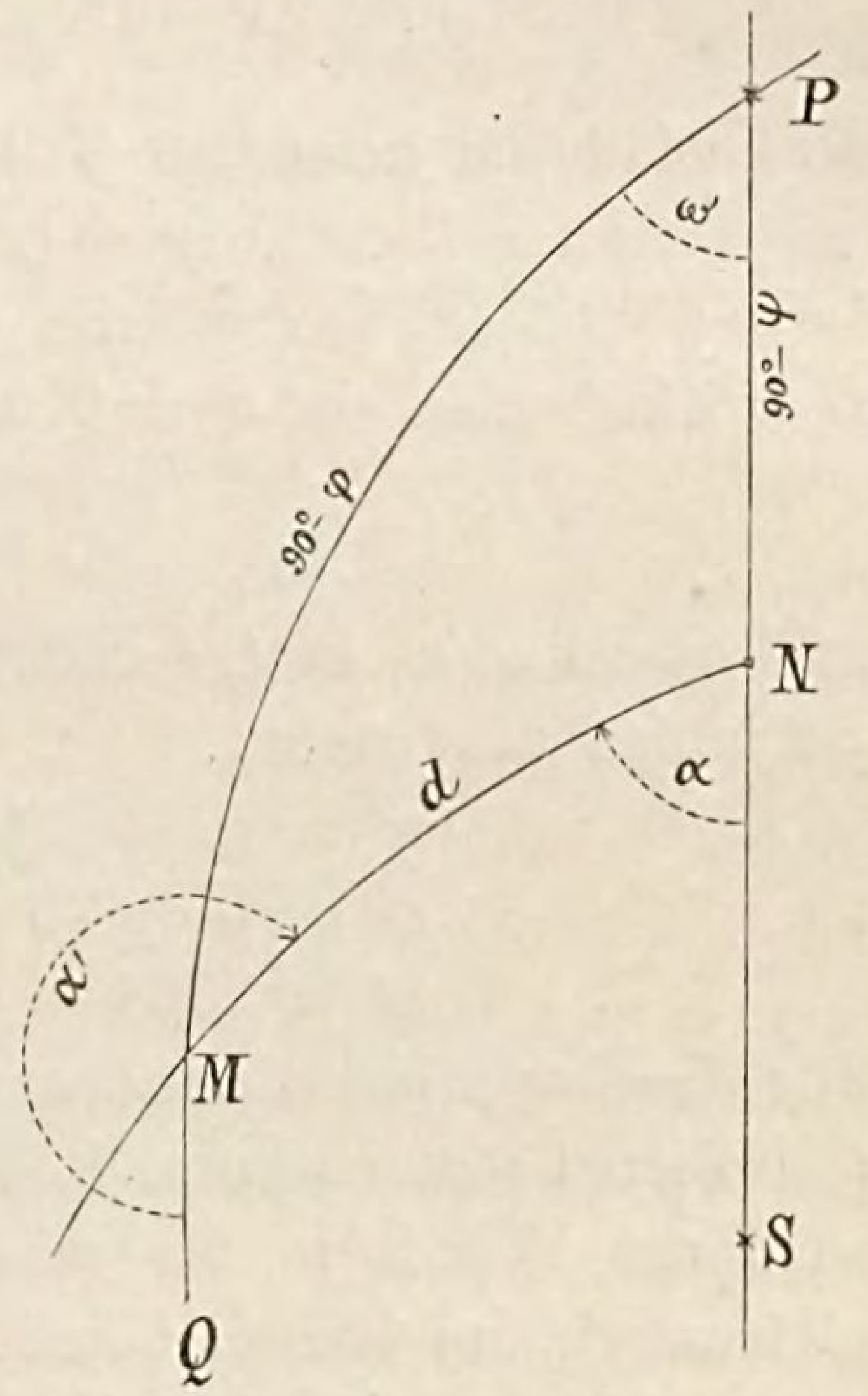
§. 139. Obwohl es für die Vermessung hinreichend wäre, die Orthogonal- oder Polarcoordinaten der Netzpunkte eines Landes zu bestimmen, so will man doch auch noch die geographische Breite oder Polhöhe und die geographische Länge jedes Punkts, sowie die Azimuthe aller Seiten des Hauptnetzes kennen, um hievon bei Anfertigung von topographischen Karten und Erreichung anderer geographischer Zwecke Gebrauch zu machen. Wir werden auch hier wieder nach dem Vorgange Soldner's zuerst strenge Formeln und hierauf Näherungsausdrücke angeben welche für die Projectionskugel gelten, schliesslich aber den Zusammenhang dieser Formeln mit den für das Bessel'sche Erdellipsoid gültigen zeigen und die Hilfsmittel zur Verbesserung der sphärischen Ausdrücke mittheilen.

1) Bezeichnet d die Entfernung zweier Punkte M und N in Theilen des Halbmessers r, N P = $90^0 - \psi$ das Complement der geographischen Breite ψ des Punkts N, M P = $90^0 - \varphi$ das Complement der Breite φ

des Punkts M, ferner N P M $= \omega$ die Längendifferenz der Punkte M und N, endlich S N M $= \alpha$ das Azimuth von d in N und Q M N $= \alpha'$ das Azimuth von d in M, beide von Süd über West gezählt, so gelten für das sphärische Dreieck folgende drei Formeln:

$$\sin \varphi = \cos d \sin \psi - \sin d \cos \psi \cos \alpha \tag{241}$$
$$\sin \omega \cos \varphi = \sin d \sin \alpha \tag{242}$$
$$\sin (\alpha' - 180^0) \cos \varphi = \sin \alpha \cos \psi \tag{243}$$

Fig. 143.



Hieraus kann man, wenn d genau genug im Gradmasse gegeben ist und Logarithmentafeln zu Gebote stehen welche die Winkel bis auf 0″,001 richtig geben, die drei gesuchten Grössen φ, ω, α' berechnen; es ist aber schwer, diese Voraussetzungen zu erfüllen, und darum werden die geographischen Positionen φ, ω, α' ebenso wie früher die Coordinaten und Directionswinkel aus Näherungsformeln berechnet die man aus den vorstehenden drei strengen Ausdrücken erhält, wenn man wieder für sin d, cos d, sin ψ, cos ψ die entsprechenden Reihen nach d und ψ bis einschlüssig der dritten Potenzen anwendet und berücksichtigt dass die Winkel $\alpha' - 180^0$ und α nur um die Convergenz der Meridiane von einander verschieden, also sehr klein sind.

Nach mehrfachen Substitutionen und Reductionen (worüber in dem Werke „Die Bayerische Landesvermessung“ S. 527 bis 539 Näheres angegeben ist) gelangt man zunächst zu folgenden drei anderen Formeln, in welchen $v = \sin \alpha : \cos \varphi$ gesetzt ist:

$$\varphi = \psi - d \cos \alpha - \tfrac{1}{2} d^2 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \psi + \tfrac{1}{6} d^3 \cos \alpha \sin^2 \alpha (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \psi) \tag{244}$$
$$\omega = v d - \tfrac{1}{6} v d^3 (1 - v^2) \tag{245}$$
$$\alpha' = 180^0 + \alpha - d v \sin \varphi - \tfrac{1}{4} d^2 \sin 2\alpha - \tfrac{1}{6} d^3 v \sin \varphi (v^2 - \cos 2\alpha) \tag{246}$$

Wenn die Dreiecke sphärisch berechnet werden, so sind nicht unmittelbar die Logarithmen von d sondern die von sin d gegeben; es ist daher angezeigt, in die letzten drei Formeln wiederum sin d für d einzuführen, was mit Hilfe der bekannten Reihe $d = \sin d + \frac{1}{6} \sin^3 d$ leicht geschehen kann. Wendet man diese Reihe an und setzt gleichzeitig

$$\sin d \sin \alpha = m, \qquad \sin d \cos \alpha = n, \qquad \frac{1''}{\sin 1''} = \varrho'' \tag{247}$$

so erhält man nach einigen Umformungen für die kugelförmige Erde:

$$\varphi = \psi - \varrho'' (n + \tfrac{1}{2} m^2 \operatorname{tg} \psi + \tfrac{1}{6} n^3 - \tfrac{1}{2} m^2 n \operatorname{tg}^2 \psi) \tag{248}$$
$$\omega = - \varrho'' (\sec \varphi + \tfrac{1}{6} m^3 \sec^3 \varphi) \tag{249}$$
$$\alpha' = 180^0 + \alpha - \varrho'' \left(m \operatorname{tg} \varphi + \tfrac{1}{2} m n - \tfrac{1}{3} m^3 \operatorname{tg} \varphi + \tfrac{1}{6} m^3 (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) \operatorname{tg} \varphi\right)$$

(Der Ausdruck für ω ist negativ gemacht, weil die Längen westlich

vom Normalpunkte negativ angenommen wurden. Die Grössen m und n bekommen die Zeichen welche sin α und cos α mit sich bringen.)

Will man die Polhöhe φ, die Länge ω und das Azimuth α' durch die bereits berechneten Coordinaten O, A ausdrücken, so hat man nur in den vorletzten drei Formeln das Azimuth der Seite d oder $\alpha = 90^0$, folglich sin $\alpha = 1$ und cos $\alpha = 0$ zu setzen und zu bedenken dass hier ψ die Polhöhe des Punkts der Abscissenaxe ist, von dem die Ordinate O ausgeht. Nennt man diese bestimmte Polhöhe ψ' so ist

$$\varphi = \psi' - \frac{O^2}{2\,r^2} \operatorname{tg} \psi' \tag{250}$$

Um ψ' durch bekannte Grössen, worunter die Abscisse A, auszudrücken, setze man in der Formel (244) die Seite d gleich der Entfernung A der beiden Punkte, für welche ψ und ψ' die Polhöhen sind, und das Azimuth $\alpha = 180^0$, also sin $\alpha = 0$ und cos $\alpha = -1$. Dadurch wird

$$\psi' = \psi + \frac{A}{r} \tag{251}$$

und wenn man weiter noch $A : r = a$ und $O : r = b$ schreibt und alles in Secunden ausdrückt:

$$\varphi = \psi + \varrho'' (a - \tfrac{1}{2} b^2 \operatorname{tg} \psi - \tfrac{1}{2} b^2 a \sec^2 \psi) \tag{252}$$

$$\omega = - \varrho'' b \sec \varphi (1 + \tfrac{1}{6} b^2 v^2) \tag{253}$$

$$\alpha' = 270^0 - \varrho'' b \operatorname{tg} \varphi \left(1 + \tfrac{1}{6} b^2 (2 + \operatorname{tg}^2 \varphi)\right) \tag{254}$$

Für die bayerische Landesvermessung ist die Breite ψ des Normalpunkts (nördlicher Frauenthurm in München) $= 48^0\, 8'\, 20''$. Führt man diesen besonderen Werth in die vorstehenden allgemeinen Formeln ein und setzt gleichzeitig im letzten Gliede der Gleichungen (249) auch $\varphi = 48^0\, 8'\, 20''$, wodurch kein grösserer Fehler als von der Ordnung $b^3 . a$ begangen wird, so erhalten die letzteren drei Formeln folgende Gestalt:

$$\varphi = 48^0\, 8'\, 20'' + a - 115100''.\, b^2 - 231589\, b^2 a \tag{255}$$

$$\omega = - 206265''.\, b \sec \varphi - 64165''.\, b^3 \tag{256}$$

$$\alpha' = 270^0 - 206265'' b \operatorname{tg} \varphi - 124520''.\, b^3 \tag{257}$$

und wenn man unter den von eckigen Klammern eingeschlossenen Zahlen die Logarithmen der hier vorkommenden constanten Zahlen versteht:

$$\varphi = 48^0\, 8'\, 20'' + a - [5{,}06108]\, b^2 - [5{,}36472]\, b^2 a \tag{255'}$$

$$\omega = - [5{,}3144251]\, b \sec \varphi - [4{,}80730]\, b^3 \tag{256'}$$

$$\alpha' = 270^0 - [5{,}3144251]\, b \operatorname{tg} \varphi - [5{,}09524]\, b^3 \tag{257'}$$

Der Winkel α' bedeutet hier den Horizontalwinkel zwischen der Südseite des Meridians und der Ostseite des Ordinatenkreises über West und Nord, der Directionswinkel α geht vom westlichen Ordinatenkreise aus, folglich ist der Unterschied zwischen Azimuth und Directionswinkel einer Seite

$$\alpha' - \alpha = \delta = 90^0 - [5{,}3144251]\, b \operatorname{tg} \varphi - [5{,}09524]\, b^3 \tag{258}$$

2) Die auf vorstehende Weise gefundenen geographischen Positionen φ, ω, α' beziehen sich alle auf eine Kugelfläche vom Halbmesser r, während die mathematische Oberfläche der Erde ein Umdrehungsellipsoid ist. Es käme also noch darauf an zu zeigen, wie diese Grössen gefunden würden,

wenn man ihrer Bestimmung das Bessel'sche Erdellipsoid zu Grunde legte. Dem Zwecke dieses Buchs genügt es jedoch, in dieser Hinsicht lediglich auf die Arbeiten von Gauss (Astronomische Abhandlungen, herausgegeben von Schumacher, 1825; ferner: Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, 1844) und Bessel (Gradmessung in Ostpreussen, Berlin 1838; ferner: Astronomische Nachrichten, herausgegeben von Schumacher in Altona, Nr 86) zu verweisen und einige Ergebnisse der hieher gehörigen Rechnungen anzuführen.

Was zunächst die Azimuthe (α') der Dreieckseiten betrifft, so ist zu bemerken dass deren Werthe für die Kugel auch für das Sphäroid gelten, da die Unterschiede selbst bei den grössten Landesvermessungen oft kaum $\frac{1}{100}$ Secunde betragen. Um diese Behauptung wenigstens theilweise zu begründen, führen wir folgende numerische Berechnung eines Beispiels von Gauss an.

In dem hannover'schen Dreiecksnetze ist das Dreieck Brocken-Hohehagen-Inselsberg eines der grössten und vom mittleren Parallelkreise des Landes am weitesten entfernt. Die Logarithmen der in Toisen gegebenen Dreieckseiten sind:

Hohehagen-Inselsberg	= 4,6393865
Inselsberg-Brocken	= 4,7353929
Brocken-Hohehagen	= 4,5502669

und die von Gauss berechneten Reductionen, wie sie mit ihren Vorzeichen zu den Azimuthen auf dem Sphäroid addirt werden müssten, um die Azimuthe auf der Kugel zu erhalten, folgende:

Brocken-Inselsberg	= + 0,″00055
Brocken-Hohehagen	= + 0, 00196
Hohehagen-Brocken	= — 0, 00238
Hohehagen-Inselsberg	= — 0, 00332
Inselsberg-Hohehagen	= + 0, 00428
Inselsberg-Brocken	= — 0, 00083

Demnach müssen die auf dem Sphäroid zwischen geodätischen Linien gemessenen Dreieckswinkel wie folgt abgeändert werden, um die zwischen grössten Kreisbögen liegenden Winkel auf der Kugel zu erhalten:

Winkel Brocken	um	+ 0,″00141
„ Hohehagen	„	— 0, 00094
„ Inselsberg	„	— 0, 00511

Auch der Unterschied zwischen den geographischen Längen (ω) auf der Kugel und dem Sphäroid ist im Allgemeinen nur sehr klein, und es besteht zwischen beiden die Beziehung

$$\omega = \gamma\,\omega_1 \tag{259}$$

wobei ω die Länge auf der Kugel, ω_1 jene auf dem Ellipsoid und γ einen Factor bezeichnet der sich aus folgenden Gleichungen, in denen ψ die Breite des Normalpunkts und e die Erdexcentricität vorstellt, ergibt:

$$\gamma = \frac{1}{\cos\zeta} \qquad \operatorname{tg}\zeta = \operatorname{tg}\varepsilon \,.\, \cos^2\psi \qquad (260)$$

$$\sin\varepsilon = e \qquad \varepsilon = 4^0\, 41'\, 9,''9826 \qquad (261)$$

Ist beispielsweise $\psi = 52^0\, 42'\, 2,''532$, so wird der Hilfswinkel

$$\zeta = 1^0\, 43'\, 26,''804 \text{ und } \log\gamma = 0,0001966$$

Hat man nun für einen Ort dessen Breite und Länge von der des Normalpunkts nur um 5 bis 6^0 verschieden ist, den Längenunterschied auf der Kugel $\omega = 2^0\, 16'\, 10'' = 8170''$ gefunden, so erhält man den Längenunterschied ω_1 auf dem Ellipsoid aus der Gleichung

$$\log\omega_1 = \log\omega - \log\gamma = 3,9120255$$

welche $\omega_1 = 8166,''305 = 2^0\, 16'\, 6,''305$ liefert. Die Differenz $\omega - \omega_1$ beträgt somit nur 3,7 Secunden.

Bedeutender ist die Abweichung zwischen den geographischen Breiten (φ) auf der Kugel und dem Ellipsoid. Wie man die einen auf die anderen in der einfachsten Weise reduciren kann, hat Gauss in seinen schon mehrmals angeführten „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie" gezeigt, auf die wir desshalb verweisen. Ebendaselbst hat er aber auch eine Tafel mitgetheilt welche alle Rechnungen in dieser Beziehung erspart, indem sie die einander entsprechenden Breiten auf der Kugel und dem Sphäroid zwischen $46^0\, 10'$ und $58^0\, 40'$ enthält. Wir haben diese Tafel im Anhange aufgenommen und dazu nur noch zu bemerken dass die erste Columne die Breiten auf der Kugel und die zweite jene auf dem Sphäroid angibt.

8. Verbindung der Detailblätter mit dem Dreiecksnetze.

§. 140. Ist die Triangulation des Landes vollendet, so besteht die nächste Arbeit in der Eintheilung der aufzunehmenden Fläche in Vierecke von solcher Ausdehnung dass jedes derselben in dem Massstabe der Aufnahme eine Seitenlänge von 50 bis 70 Centimeter hat. Diese unter sich zusammenhängenden Vierecke bilden im Gegensatze zu dem trigonometrischen Netze das geometrische oder graphische Netz und es besteht dasselbe entweder aus Quadraten, Rechtecken oder Paralleltrapezen welche sich an den Meridian und das Perpendikel (beziehungsweise den Parallelkreis) des Normalpunkts der Aufnahme anschliessen. Die Form der Netzvierecke hängt davon ab, ob die Seiten derselben den Meridianen und Parallelkreisen oder den sphärischen Coordinatenaxen nahezu parallel laufen sollen, und was ihre Grösse betrifft, so richtet sich diese nach den Bestimmungen der Direction der Landesvermessung; welche Form aber auch gewählt werden mag, so kommt es doch immer darauf an, die Begrenzungslinien der Vierecke auf die Detailblätter (bei der Aufnahme mit dem Messtische „Messtischblätter" genannt) und innerhalb derselben die auf sie treffenden Netzpunkte genau aufzutragen, damit der Geometer auf dem Felde seine Operationslinien oder den Messtisch so gut als möglich

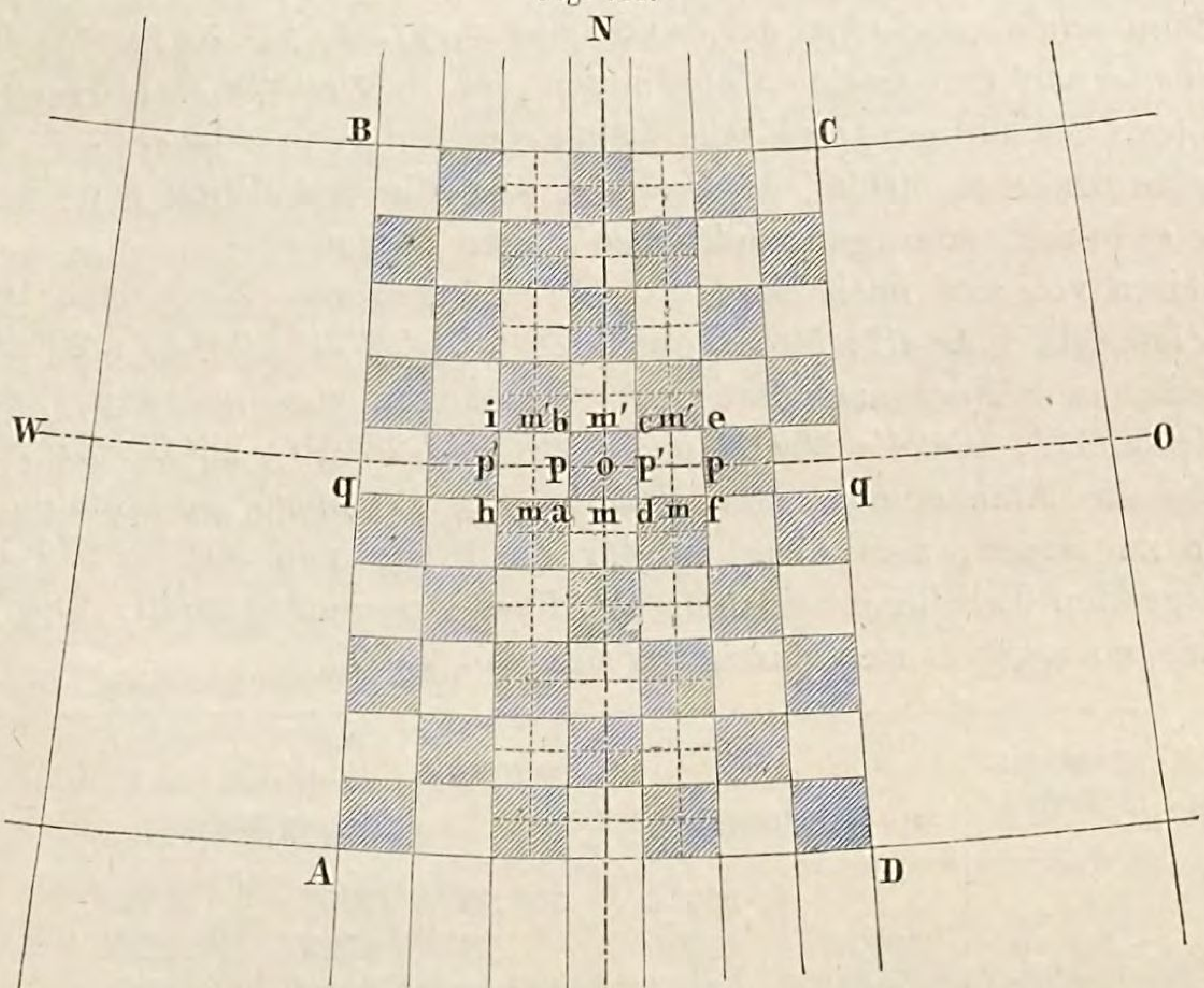
orientiren kann. Wir werden die Lösung dieser Aufgabe für zwei Formen des graphischen Netzes geben, nämlich:

a) für eine Abtheilung der Terrainoberfläche nach Paralleltrapezen welche aus Abschnitten von Meridianen und Parallelkreisen gebildet sind, und

b) für eine Eintheilung der Landesfläche in Quadrate welche aus Abschnitten von Curven gebildet werden die dem Meridian und Perpendikel des Normalpunkts nahezu parallel laufen.

§. 141. Aufgabe. Es sollen auf Grund einer vorausgegangenen Triangulirung die Blätter für die Stückmessung vorbereitet werden, wenn das graphische Netz aus Abschnitten von Meridianen und Parallelkreisen gebildet wird.

Fig. 144.



In Preussen und Sachsen-Gotha geschieht die topographische Vermessung im Massstabe von 1 : 25000; man hat daher zu dem graphischen Netze Vierecke gewählt welche in der Richtung von Osten nach Westen von zwei Meridianabschnitten begrenzt werden die 6 Minuten der geographischen Breite umfassen, während sie in der Richtung von Süden nach Norden aus zwei Abschnitten von Parallelkreisen bestehen die einem Längenunterschiede von 10 Minuten entsprechen. Auf diese Weise wird ein Stück der Erdoberfläche welches einen Grad Länge und Breite umfasst, auf 60 Blättern dargestellt. Die Abschnitte der Meridiane und Parallelkreise sind zwar in aller Strenge krumme Linien, aber so lange diese Abschnitte sich nur über 6 und 10 Minuten Breite und Länge ausdehnen, können sie unbedenklich als gerade Linien angesehen werden.

Die Höhen und Breiten der einzelnen Blätter müssen aus den bekannten Dimensionen des Erdsphäroids und den geographischen Längen und Breiten der Blattmittelpunkte berechnet werden. Will man dass auch die Parallelkreise welche ganzen Breitegraden angehören, als Mittellinien der Netzvierecke erscheinen, so muss man von einem Normalpunkte ausgehen dessen Breite ein Vielfaches von 6 Minuten ist, wobei man aus anderen Gründen gut thut, diesen Punkt so viel als möglich in der Mitte des zu vermessenden Landes anzunehmen. Eine ähnliche Rücksicht kann man bezüglich der Länge dieses Punkts eintreten lassen welche demnach ein Vielfaches von 10 Minuten sein müsste. Auf den Meridian und das Perpendikel dieses Normalpunkts sind alle Coordinaten der Netzpunkte zu reduciren wenn sie nicht ursprünglich darauf bezogen wurden. Wir nehmen an dass diese Reduction schon geschehen sei, und dass $x_1\ y_1$, $x_2\ y_2$, $x_3\ y_3$ etc. die für den Normalpunkt geltenden Coordinaten der Netzpunkte A_1, A_2, A_3 etc. vorstellen. Ist die geographische Länge des Normalpunkts z. B. $= 28^0\ 20'$ und seine Breite $= 50^0\ 36'$ gegeben, so sind die den Mitten der Messtischblätter entsprechenden geographischen Lagen folgende:

Breiten von Süd nach Nord:	Längen von West nach Ost:
$50^0\,36'$; $50^0\,42'$; $50^0\,48'$; $50^0\,54'$ etc.	$28^0\,20'$; $28^0\,30'$; $28^0\,40'$; $28^0\,50'$ etc.
Breiten von Nord nach Süd:	Längen von Ost nach West:
$50^0\,36'$; $50^0\,30'$; $50^0\,24'$; $50^0\,18'$ etc.	$28^0\,20'$; $28^0\,10'$; $28^0\,0'$; $27^0\,50'$ etc.

Um die Abmessungen der Netzvierecke in einem bestimmten Falle kennen zu lernen, sind dieselben für die Breite von 50^0 bis 51^0 in der nachfolgenden Tabelle in preussischen Fuss zusammengestellt: Die Blattdimensionen ergeben sich durch Division mit 25000.

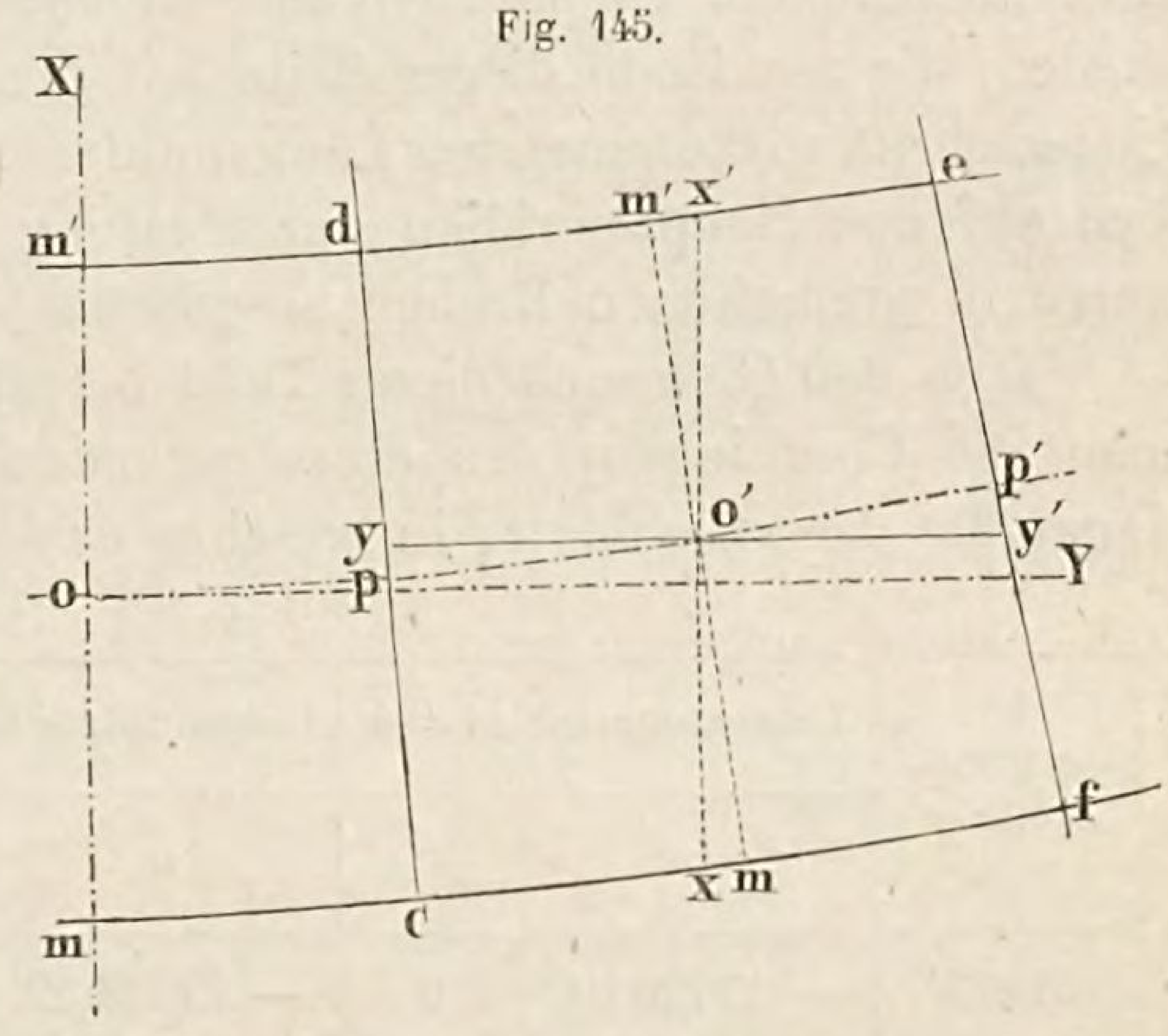
Geograph. Breite	Höhe des Vierecks	Breite des Vierecks	Geograph. Breite	Höhe des Vierecks	Breite des Vierecks
		31754	$50^0\ 30'$	29531	31358
$50^0\ 0'$	29529	31690	36	29532	31292
6	29530	31624	42	29532	31226
12	29530	31558	48	29533	31160
18	29530	31492	54	29533	31092
24	29531	31424	$51^0\ 0'$	29534	31026

Wenn die Blattseiten berechnet sind, hat man sie auf das betreffende Messtischblatt mit dem ihm zugehörigen mittleren Meridian zu zeichnen, was in folgender Weise so sorgfältig als möglich geschieht. Zunächst wird jedes Blatt durch eine von Süden nach Norden laufende Linie (m m′) halbirt und diese Linie gleich der berechneten Blatthöhe gemacht, an ihren Endpunkten werden Senkrechte zu ihr errichtet, auf diesen trägt man die halben Blattbreiten und zwar an der Nordseite die kleineren (m′ b = m′ c) und an der Südseite die grösseren (m a = m d) ab, und endlich verbindet man die Eckpunkte (a, b, c, d) durch gerade feine Tuschlinien.

Sind alle Blätter so weit zubereitet, so kommt es darauf an ob die einzelnen Netzpunkte mittels ihrer Coordinaten oder ihrer geographischen Längen und Breiten in die Blätter eingetragen werden sollen. Ist letzteres der Fall, so theilt man jedes Netzviereck (a b c d) an der Südseite (a d) und an der Nordseite (b c) in 10, an der Ost- und Westseite aber in je 6 gleiche Theile und verbindet die Theilungspunkte so durch gerade Linien dass man 60 kleine Vierecke erhält, wovon jedes eine Minute Länge und Breite umfasst. In diesen kleinen Vierecken werden alsdann die durch ihre geographischen Längen und Breiten ausgedrückten Netzpunkte mittels senkrechter Abstände, oder durch fortgesetzte Theilung der Vierecke aus Meridian- und Parallelkreisabschnitten bestimmt. Hat man es dagegen unterlassen die geographischen Längen und Breiten der Netzpunkte zu berechnen, so muss man (wie bei der thüringischen Landesvermessung) in jedem Messtischblatte die in der Mitte seines Meridianabschnitts entspringenden Coordinatenaxen dieses Blatts einzeichnen, was auf folgende Weise geschieht.

Für die Blätter deren mittlerer Meridian mit dem Hauptmeridian zusammenfällt, ist selbstverständlich der mittlere Meridian (m m′) die Abscissenaxe und die Senkrechte (p p′) in seiner Mitte (o) die Ordinatenaxe. Auf allen Blättern aber welche östlich oder westlich vom Hauptmeridian liegen, weicht die Abscissenaxe von dem mittleren Meridian und folglich die Ordinatenaxe von dem mittleren Parallelkreise ab; denn die Seitenmeridiane convergiren gegen den Hauptmeridian und die Parallelkreise stehen auf ihnen senkrecht, während die Abscissenaxen dem Hauptmeridian und die Ordinatenaxen dessen Perpendikel parallel laufen. Die beigedruckte Fig. 145 in welcher m m′ die Meridiane, p p′ die Parallelkreise, x x′ die Abscissen- und y y′ die Ordinatenaxen vorstellen, macht dieses anschaulich, und man entnimmt daraus leicht dass, um die Axen x x′ zu erhalten, auf allen Blättern der Ostseite des Hauptmeridians oben die Abweichung m′ x′ rechts und unten dieselbe Abweichung = m x links von m m′ anzutragen ist, während auf allen Blättern der Westseite des Hauptmeridians m′ x′ links und m x rechts von m m′ liegen muss. Wie gross die Abweichungen m x = m′ x′ für die einzelnen Blätter sind, lässt sich aus den Dimensionen des Erdsphäroids berechnen. Wir wollen indess auf diese Rechnungen hier nicht näher eingehen, da wir bei den Kartenprojectionen umständlicher davon zu reden haben, sondern lediglich bemerken dass für jene vom Hauptmeri-

Fig. 145.



dian gerechnete Länge von 10 Minuten die Abweichung der x Axe = 33′, für 20 Minuten = 66′, für 30 Minuten = 99′, für 40 Minuten = 133′, für 50 Minuten = 166′ und für 60 Minuten = 199′ ist. Entspricht demnach der Abstand o o′ der Blattmitten 10 Minuten, so ist

$$m' x' = \frac{33'}{25000} = \frac{3300'''}{25000} = 0{,}13'''$$

bei dem östlichen (rechtseitigen) Blatte rechts, bei dem westlichen (linkseitigen) Blatte aber links und m x = 0′′′,13 bei dem östlichen Blatte links, bei dem westlichen aber rechts vom Meridian m m′ aufzutragen.

Es bleibt nun noch übrig zu zeigen, wie die Coordinaten der Dreieckspunkte in die nunmehr auch mit den Axen versehenen Detailblätter eingetragen werden; dieses Eintragen setzt voraus dass man die Coordinaten der Blattmittelpunkte kenne. Da indessen diese Punkte nicht von der Triangulirung abhängen, sondern auf beliebigen Annahmen beruhen, so kann man sie im Voraus ein für allemal berechnen und in einer Tabelle zusammenstellen. Einen Theil einer solchen von Hansen berechneten Tabelle theilen wir am Ende dieser Seite mit dem Bemerken mit dass die in der Ueberschrift vorkommenden Längenunterschiede 0, ± 10 und ± 20 Minuten sich auf den Hauptmeridian der Messung beziehen, und dass die Coordinaten in preussischen Ruthen ausgedrückt sind.

Was den Gebrauch dieser Tafel betrifft, so ist derselbe folgender. Hat man die Coordinaten des einzutragenden Dreieckspunkts, so findet man damit das Messtischblatt, in welches er fällt, indem man in der Tafel die

Geograph. Breite φ	Längenunterschied = 0		Längenunterschied = ± 10′		Längenunterschied = ± 20′	
	x	± y	x	± y	x	± y
51° 12′	— 17720,04	0	— 17723,52	3092,60	— 17733,98	6185,18
51 6	14766,57	0	14770,06	3099,27	14780,53	6198,53
51 0	11813,15	0	11816,64	3105,93	11827,14	6211,86
50 54	8859,78	0	8863,28	3112,59	8873,79	6225,18
50 48	5906,47	0	5909,97	3119,24	5920,50	6238,49
50 42	— 2953,21	0	2956,72	3125,90	2967,27	6251,79
50 36	0	0	— 3,52	3132,55	— 14,08	6265,08
50 30	+ 2953,15	0	+ 2949,62	3139,18	+ 2939,06	6278,35
50 24	5906,26	0	5902,62	3145,80	5892,13	6291,60
50 18	8859,32	0	8855,78	3152,42	8845,17	6304,84
50 12	11812,34	0	11808,79	3159,04	11798,17	6318,07
50 6	14765,30	0	14761,75	3165,65	14751,11	6331,29
50 0	+ 17718,21	0	+ 17714,66	3172,25	+ 17704,00	6344,50

Coordinatenwerthe aufsucht welche den seinigen am nächsten kommen. Sind z. B. die Coordinaten eines solchen Punkts

$$x = + 12734{,}94 \text{ und } y = - 2783{,}12$$

so liegen diesen Werthen am nächsten die Coordinaten

$$x' = +\ 11808{,}79 \text{ und } y' = -\ 3159{,}04$$

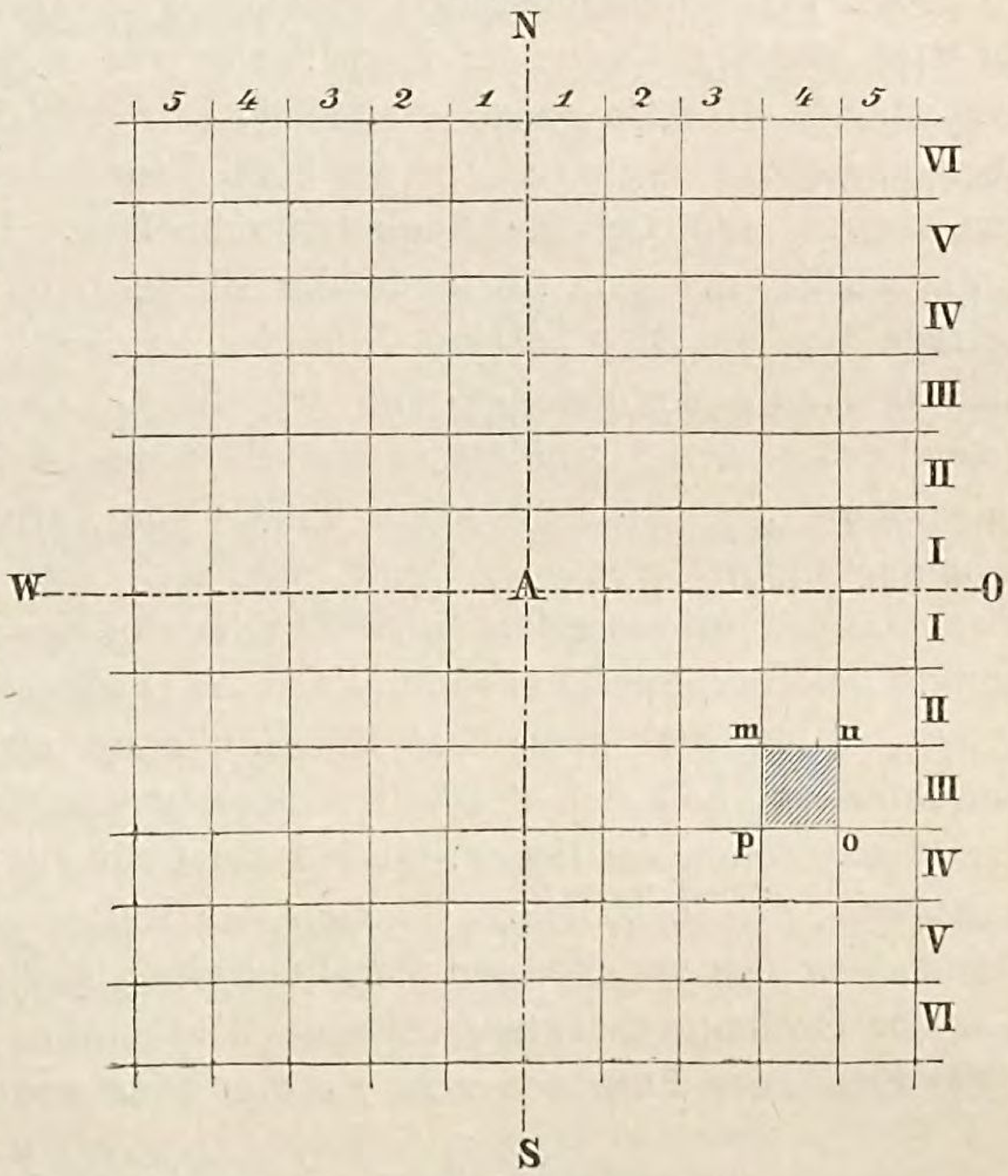
welche zu der geographischen Breite $\varphi = 50^0\ 12'$ und zu dem östlichen Längenunterschiede $\lambda = 10'$ gehören. Der Punkt fällt somit auf das Blatt dessen Mitte diese Breite und Länge hat. Stellt man hierauf die Unterschiede

$$x - x' = +\ 926{,}15 \text{ und } y - y' = +\ 375{,}92$$

her, so ist die Länge $x - x'$ südlich und $y - y'$ westlich von der Mitte des Blatts auf den in dasselbe eingetragenen Axen abzuschneiden und durch Perpendikel der gesuchte Punkt zu bestimmen.

§. 142. Aufgabe. Die Messblätter für die Stückmessung eines Landes in dem Falle vorzubereiten wo das graphische Netz aus Quadraten besteht deren Seiten den Hauptaxen parallel laufen.

Fig. 146.



Ein graphisches Netz von Quadraten mit 8000 Fuss Seite ist in Bayern und eines mit 4000 Fuss Seite in Württemberg zur Anwendung gekommen. In dem erstgenannten Lande beträgt der Massstab der Stückmessung 1 : 5000 und in letzterem 1 : 2500; in beiden Ländern erhalten folglich die Messblätter Seiten von 16 Decimalzoll Länge. Da das württembergische Landesvermessungssystem im Wesentlichen mit dem bayerischen übereinstimmt, so werden wir die vorliegende Aufgabe lediglich mit Rücksicht auf das in Bayern beobachtete Verfahren zur Vorbereitung der Messtischblätter für die Stückmessung beschreiben.

Stellt der Punkt A in Fig. 146 den Normalpunkt der Messung (nördl. Frauenthurm), S N dessen Meridian und O W das Perpendikel desselben vor, so wird zunächst die ganze Landesoberfläche in vier Theile zerlegt welche durch Südwest (S W), Nordwest (N W), Nordost (N O) und Südost (S O) bezeichnet werden. Theilt man hierauf den Meridian S N in lauter gleiche Theile von 8000′ Länge und zieht durch die Theilungspunkte grösste Kreise welche auf S N senkrecht stehen, so wird jedes Viertel in Schichten

zerlegt welche fast durchgehends gleich breit sind, da die Ordinatenkreise (s. §. 137) auf die Breite des Landes nur äusserst wenig convergiren. Diese Schichten werden mit römischen Ziffern bezeichnet, wie aus der Figur zu entnehmen ist. Theilt man ferner jeden Ordinatenkreis vom Meridian ab in lauter gleiche Theile von 8000′ Länge und verbindet die Theilungspunkte durch gerade Linien, so wird jede Schichte in Vierecke zerlegt welche nahezu Quadrate sind und auf die in der Figur angegebene Weise durch arabische Ziffern (Nummern) bezeichnet werden. Will man nun irgend ein Viereck (Messtischblatt, Steuerblatt) benennen, so geschieht diess durch Angabe des Viertels, der Schichte und der Nummer. Das schraffirte Blatt m n o p z. B. wird genannt und auch überschrieben: S O. III. 4.

Nach dieser geometrischen Eintheilung der Oberfläche des Landes stellen die Detailblätter Theile der Kugelfläche vor welche in der Richtung von Ost nach West stets gleich breit sind, in der Richtung von Süd nach Nord aber eine etwas kleinere Höhe als 8000 Fuss haben, da die Ordinatenkreise convergiren und sich im Aequator schneiden. Diese Verschiedenheit der Höhe wächst mit dem Abstande der Blätter vom Münchener Meridian und beträgt für ein Blatt dessen Nummer $= n$ ist, $0{,}000534\ n^2$ Fuss. (Zu diesem Ausdrucke gelangt man wie folgt. Da die östlichen und westlichen Seiten der Tischblätter dem Meridian (A N) des Normalpunkts parallel laufen, so können sie als Theile von Parallelkreisen zu diesem Meridian betrachtet werden. Denkt man sich nun durch die die Höhen der Tischblätter bestimmenden, je 8000 Fuss von einander entfernten Theilungspunkte des Hauptmeridians und die zu W O (Westost) parallele Axe Ebenen gelegt, so ist klar dass diese Höhen überall an der Axe gleiche Winkel umschliessen, und sich desshalb verhalten wie die Halbmesser der Parallelkreise auf denen sie liegen. Heisst die Ordinate welche einem Tischblatte entspricht, O, so ist sie in Theilen des Halbmessers $= O : r = \omega$ und der Halbmesser des zugehörigen Parallelkreises ist $r \cos \omega$. Heisst s die Höhe des der Ordinate O entsprechenden Tischblatts, so verhält sich offenbar 8000 Fuss zu s Fuss wie r zu $r \cos \omega$ oder wie 1 zu $\cos \omega$, d. h. es ist

$$s = 8000 \,.\, \cos \frac{O}{r} = 8000 \,.\, \cos \frac{n \,.\, 8000}{r} =$$

$$= 8000 \left(1 - \tfrac{1}{2} \left(\frac{8000}{r}\right)^2 n^2\right) = 8000 - 0{,}0005344\ n^2$$

und folglich der Unterschied $8000 - s = 0{,}0005344\ n^2$ Fuss.) Ein Blatt also das die Nummer 100 hat, von München somit im Mittel 804000 Fuss östlich oder westlich entfernt ist, hat eine Höhe von $8000' - 5{,}344 = 7994{,}656$ Fuss. Die Differenz von $5',344 = 534''',4$ beträgt aber im Massstabe von 1 : 5000 nur $0''',106$ oder nahezu 1 Zehntel Linie, was in der Zeichnung des Vierecks kaum zu bemerken ist. Wegen dieses geringen Unterschieds — der noch dazu der grösste ist, da weder die östlichen noch die westlichen Grenzen des Landes mehr als 804000 Fuss vom Münchener

Meridian abliegen — kann man wohl alle Netzvierecke als Quadrate bezeichnen, wenn sie es auch in aller Strenge nicht sind.

Soll nun ein trigonometrischer Punkt dessen Coordinaten

$$x = +\ 124824{,}5 \text{ und } y = -\ 93218{,}3$$

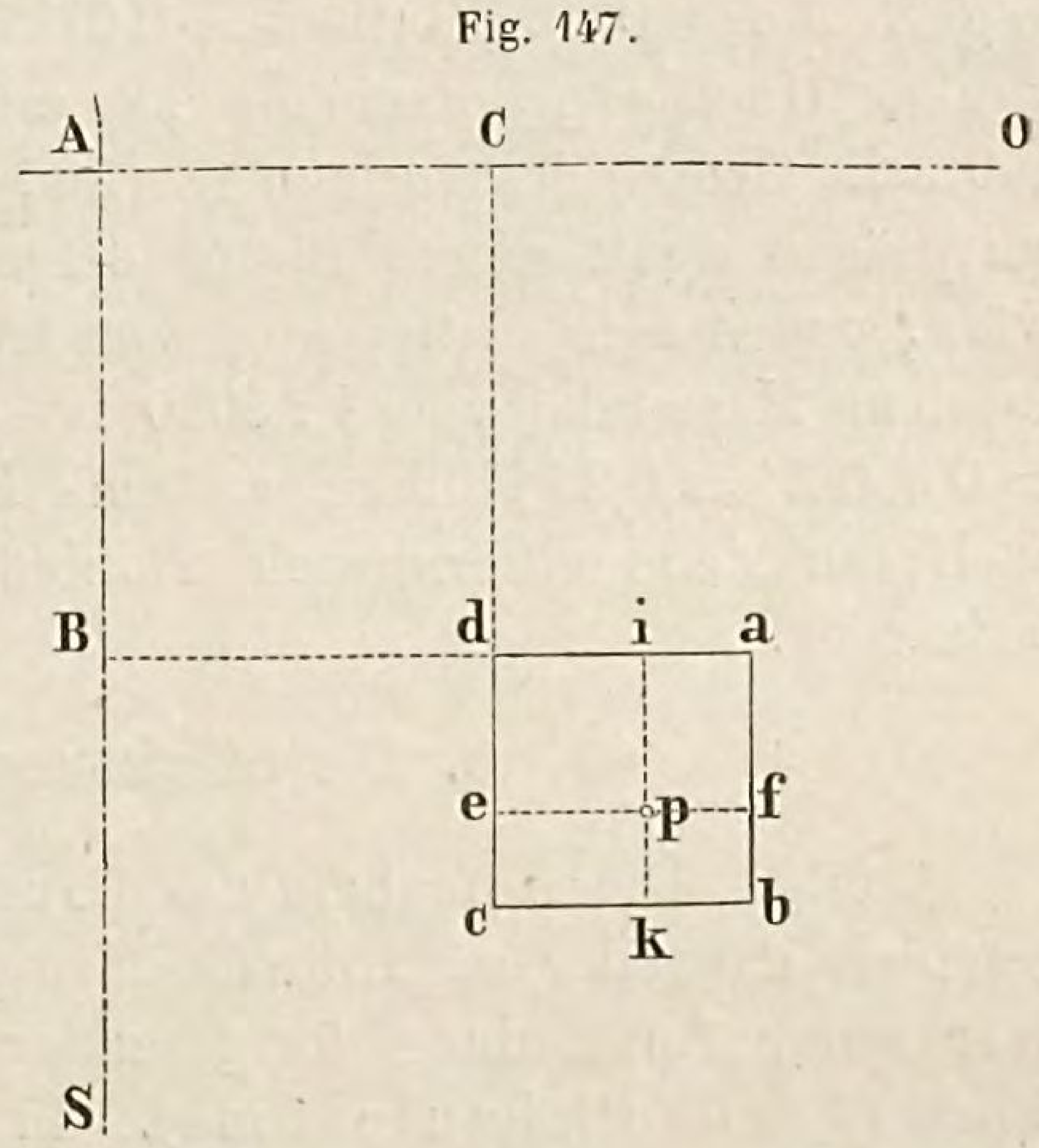
sind, wobei die positive Axe der x der südliche Theil (A S) des Meridians und die positive Axe der y der westliche Theil (A W) des Perpendikels ist, aufgetragen werden, so ist zunächst das Blatt zu bestimmen, in das er fällt. Dieses Blatt liegt aber offenbar in dem südöstlichen Viertel, und zwar in der 12 Nummer der XVI Schichte, seine Bezeichnung ist demnach S O. XVI. 12. Man findet nämlich die Schichte, wenn man die Abscisse, und die Nummer, wenn man die Ordinate durch 8000 dividirt und die Ganzen des Quotienten um 1 vermehrt.

Demgemäss erhält man im vorliegenden Falle

$$\frac{x}{8000} = \frac{124824{,}5}{8000} = 15{,}6; \text{ also die Schichte} = \text{XVI},$$

$$\frac{y}{8000} = \frac{93218{,}3}{8000} = 11{,}6; \text{ mithin die Nummer} = 12.$$

Fig. 147.



Stellt in der Fig. 147 das Viereck a b c d das Blatt S O. XVI. 12 vor, so ist die Abscisse des Punkts d oder

$$A\,B = C\,d = 15\,.\,8000 = 120000'$$

und die Ordinate desselben Punkts d oder

$$A\,C = B\,d = 11\,.\,8000 = 88000'$$

es sind folglich auf der westlichen Seite und vom nördlichen Rande (d a) des Blatts gegen den südlichen (c b) hin noch

$$124824{,}5 - 120000 = 4824{,}5' = d\,e$$

aufzutragen um die Abscisse des gegebenen Punkts

$$C\,e = x = +\ 124824{,}5'$$

zu erhalten, und auf der nördlichen Seite (d a) vom westlichen Rande (d c) gegen den östlichen (a b) 93218,3′ — 88000′ = 5218,3′ = d i abzuschneiden, um durch die Parallelen zu a d und c d den gesuchten Punkt p zu finden. Es versteht sich von selbst dass die Abmessungen d e und d i durch ihre Ergänzungen e c und a i controlirt werden, und dass man die Parallelen e f, i k nur durch die Punkte f und k zieht welche ebenso auf den Quadratseiten einzumessen sind wie e und i.

Sind die Abscissen der aufzutragenden Punkte sehr gross, so bedürfen sie wegen der Convergenz der Ordinatenkreise noch einer kleinen Reduction. Nennt man diese Reduction δ, die Ordinate y, den Erdhalbmesser r, und bezeichnet u den Rest welcher sich bei der Bestimmung der Schichte eines

Blatts ergibt, nachdem man die Ganzen des Quotienten gefunden hat, so ist

$$\delta = \frac{u\,y^2}{2\,r^2} \tag{262}$$

und diese Grösse wird von der Abscisse u die nach der Lage des Blatts von der Ecke an auf der östlichen oder westlichen Grenzlinie nach Norden oder Süden hin aufzutragen ist, abgezogen, so dass statt u die Länge

$$u - \delta = u - \frac{u\,y^2}{2\,r^2}$$

abzumessen ist um die Abscisse des trigonometrischen Punkts auf dem ihm angehörigen Blatte zu erhalten. Diese Reductionen δ sind freilich sehr klein, müssen aber doch berücksichtigt werden, wenn die Ordinate y gross ist oder das Blatt weit vom Hauptmeridian abliegt. Berechnet man δ für den dem vorigen Beispiele zu Grunde gelegenen Punkt p, so ist

$$u = x - 15\,.\,8000 = 4824{,}5' = 482{,}45^0$$
$$y = -\,93218{,}3' = -\,9321{,}83^0$$
$$\log r = 6{,}3402033;\ \log\,(1:2\,r^2) = 0{,}01856 - 13$$

folglich $\delta = 0{,}00437$ Ruthen $= 0{,}0437$ Fuss. Würde die Abscisse x bleiben, y_1 aber 10 mal so gross sein als y, so erhielte man selbstverständlich für δ_1 die 100 fache Grösse des vorigen Werths, also $\delta_1 = 4{,}37$ Fuss. Diese Reduction entspräche somit einem Blatte dessen Nummer $n = 932183 : 8000 = 117$ wäre, und dessen Entfernung vom Hauptmeridian über 36 Meilen betrüge. In dem Massstabe von 1 : 5000 ist die absolute Grösse von 4,37 Fuss $=$ $= 0{,}00087' = 0{,}25$ Millimeter, somit kleiner als $\frac{1}{10}$ Linie. Es sind demnach auch auf den entferntesten Planblättern die Reductionen δ ganz unbedeutend.

9. Die Stückmessung des Landes.

§. 143. Die Aufnahme der Grundstücke oder Parzellen eines Landes geschieht entweder mit Hilfe des Messtischapparats (Messtischaufnahme) oder unter Anwendung fortgesetzter Triangulirung mit kleinen Theodolithen (Theodolithaufnahme). In beiden Fällen können Coordinatenmessungen mit Kette oder Latte und Winkelspiegel oder Winkelprisma nicht entbehrt werden. Die Messtischaufnahme ist die minder genaue Art der Aufnahme und wird bald von der Stückmessung mit dem Theodolithen verdrängt sein. Zu dem Vorzuge der Genauigkeit kommt bei der Theodolithaufnahme noch der dass man aus den bei den Katasterämtern aufbewahrten Naturmassen stets neue Flurberechnungen machen und neue Planzeichnungen in beliebigem Massstabe herstellen kann, ohne gegen den Grundsatz der praktischen Geometrie „vom Grossen ins Kleine“ zu verstossen. Wir werden hier beide Arten von Aufnahmen, soweit es nicht schon in den §§. 102 bis 105 geschehen, mit Bezug auf die Vermessung eines ganzen Landes erläutern. Dabei setzen wir eine Vermarkung und Versteinung der Fluren voraus.

§. 144. Für eine Messtischaufnahme des Landes soll die erforderliche Anzahl von Punkten welche zur Aufstellung und Orientirung der Messtischblätter dienen, bestimmt werden.

Die Stückmessung mit Hilfe des Messtischapparats zerfällt in zwei besondere Verrichtungen, nämlich in die Bestimmung der Richtpunkte und Richtungslinien, und in die Vermessung der einzelnen Parzellen. Mit dem ersteren Geschäfte haben sich nach den üblichen Titeln die Obergeometer, mit den letzteren die Geometer zu befassen, während die unter Nr 1 bis 6 schon betrachteten auf die Anlage und Berechnung des Dreiecksnetzes sich beziehenden Arbeiten den Trigonometern, und die Bestimmungen der geographischen Lage des Normalpunkts und des Azimuths einer Dreieckseite dem Astronomen des Landes übertragen sind. Hier ist fast nur noch von dem Geschäfte der Obergeometer die Rede, da die Arbeiten der Geometer schon im Abschnitte II, E besprochen wurden.

Die bisherige Vorbereitung der Messblätter, wenn sie nach Nr 8 von den Obergeometern vollzogen ist, reicht weder zur Orientirung des Messtisches auf dem Felde, noch zum Eintragen der Abscissenlinien hin, weil bei einem Massstabe der Aufnahme von 1 : 5000 von den Punkten erster, zweiter, dritter Ordnung selten mehr als einer auf ein Blatt trifft, während viele Blätter gar keinen enthalten. Es müssen also ausser den schon bestimmten Netzpunkten noch so viele neue Punkte vierter Ordnung eingemessen und auf die Blätter übertragen werden dass der Geometer im Stande ist, behufs der Parzellarmessung seinen Messtisch genau aufzustellen und zu orientiren.

Zur einfachen Orientirung des Messtisches genügen zwar zwei Punkte (A, B) des Felds welche in verjüngter Entfernung (a b) auf dem Blatte bezeichnet sind; aber die Prüfung der Aufstellung erfordert ausser diesen zwei Punkten entweder noch einen dritten Punkt (C, c) auf dem Felde und dem Messtische, oder eine Visirrichtung (e f) zwischen zwei anderen Punkten (E, F), die zwar ausserhalb des Blattbezirks liegen dürfen, wovon aber doch stets einer von den beiden ersten Punkten (A, B) aus sichtbar sein muss.

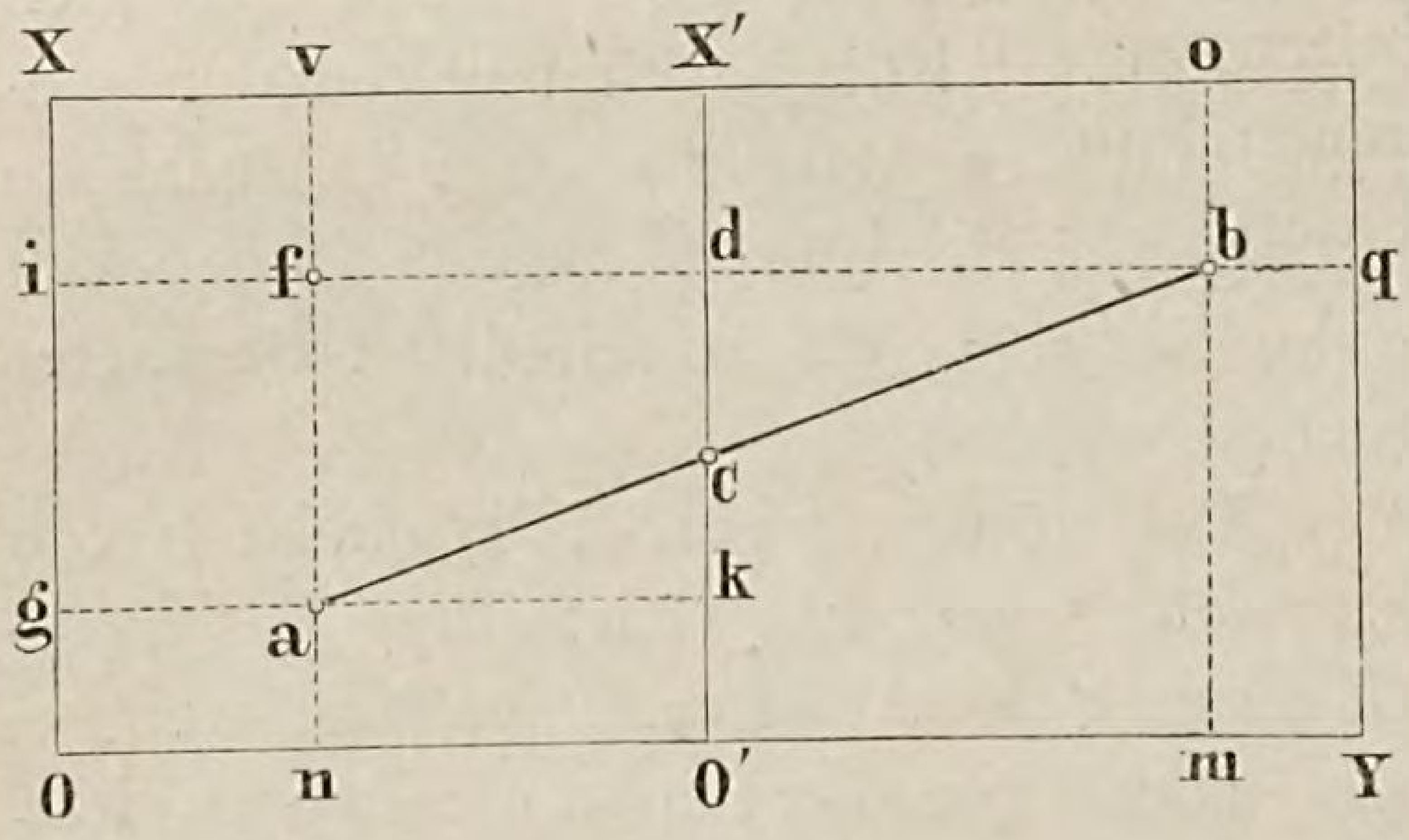
Wo nun an den zur Orientirung oder zum Auftragen der Parzellen erforderlichen drei Punkten oder zwei Abscissenlinien Mangel ist, müssen noch mehr Punkte bestimmt werden, und diese Bestimmungen können offenbar nur von dem trigonometrischen Netze ausgehen, da sie lediglich eine weitere Fortsetzung dieses Netzes sind. Die hierauf bezüglichen Arbeiten bestehen demnach bloss darin, neue auf dem Felde bezeichnete Punkte durch Vorwärtsabschneiden oder durch Rückwärtseinschneiden mit dem Theodolithen zu bestimmen, und es kommen bei ihrer Ausführung lediglich die Lehren vom Aufnehmen der Drei- und Vierecke mit dem Theodolithen (§. 61 bis §. 64 und §. 95 bis §. 101) zur Anwendung. Ausserdem ist für die Feststellung von Richtungslinien die zur Orientirung des Messtisches dienen, noch folgende Aufgabe zu lösen.

§. 145. Aufgabe. Auf zwei aneinanderstossenden Mess-

blättern sind zwei trigonometrische Punkte A, B unter a, b eingetragen; man soll die Orientirungslinie zwischen diesen Punkten berechnen und auftragen (Fig. 148).

Sind die Coordinaten des Punkts a in Bezug auf die Axen O X, O Y $= x_1, y_1$, und die des Punkts b in Bezug auf die Axen O′ X′, O′ Y $= x_2, y_2$ gegeben, so handelt es sich darum, den Abstand O′ c $= x$ zu bestimmen, um auf dem einen Blatte die Orientirungslinie a c welche durch B, b geht, und auf dem anderen Blatte die Richtung b c welche durch A, a geht, auftragen und bei der Aufstellung des Messtisches benützen zu können. Zieht man durch b die Linie b i senkrecht zu O′ X′ und O X, durch a aber a v parallel zu O′ X′ und O X, so entstehen zwei rechtwinklige ähnliche Dreiecke a b f und c b d, in denen, wenn man O O′ = O′ X′ = 1 setzt, $a f = x_2 - x_1$, $f b = 1 - y_1 + y_2$, $d b = y_2$ bekannt ist; man kann folglich

Fig. 148.



$$c\,d = \frac{x_2 - x_1}{1 - y_1 + y_2}\, y_2$$

berechnen. Hat man aber c d, so ist c d + c O′ $= x_2$ und daher

$$x = c\,O' = x_2 - c\,d = x_2 - \frac{x_2 - x_1}{1 - y_1 + y_2}\, y_2 \qquad (263)$$

Trägt man die Länge x von O′ auf der Seite O′ X′ der beiden Blätter ab, so ist c und damit auf dem einen Blatte a c, auf dem anderen b c bestimmt. Als Controle der Zeichnung ist anzuwenden dass man von X′ aus die Länge $1 - x$ abschneidet. So wie die Richtungen a c, b c zwischen den Punkten A, a und B, b berechnet und aufgetragen wurden, lassen sich zwischen irgend zwei anderen Punkten Absehlinien herstellen; die dabei vorkommenden Rechnungen und Zeichnungen sind in allen Fällen (auch wenn die Punkte auf nicht aneinanderstossenden Blättern liegen) so einfach dass wir sie dem Leser selber überlassen können. Ueber die Richtungslinien ist nur noch zu bemerken dass man sie so scharf und so lang als möglich zieht und ausserhalb der Randlinien des Messblatts bezeichnet.

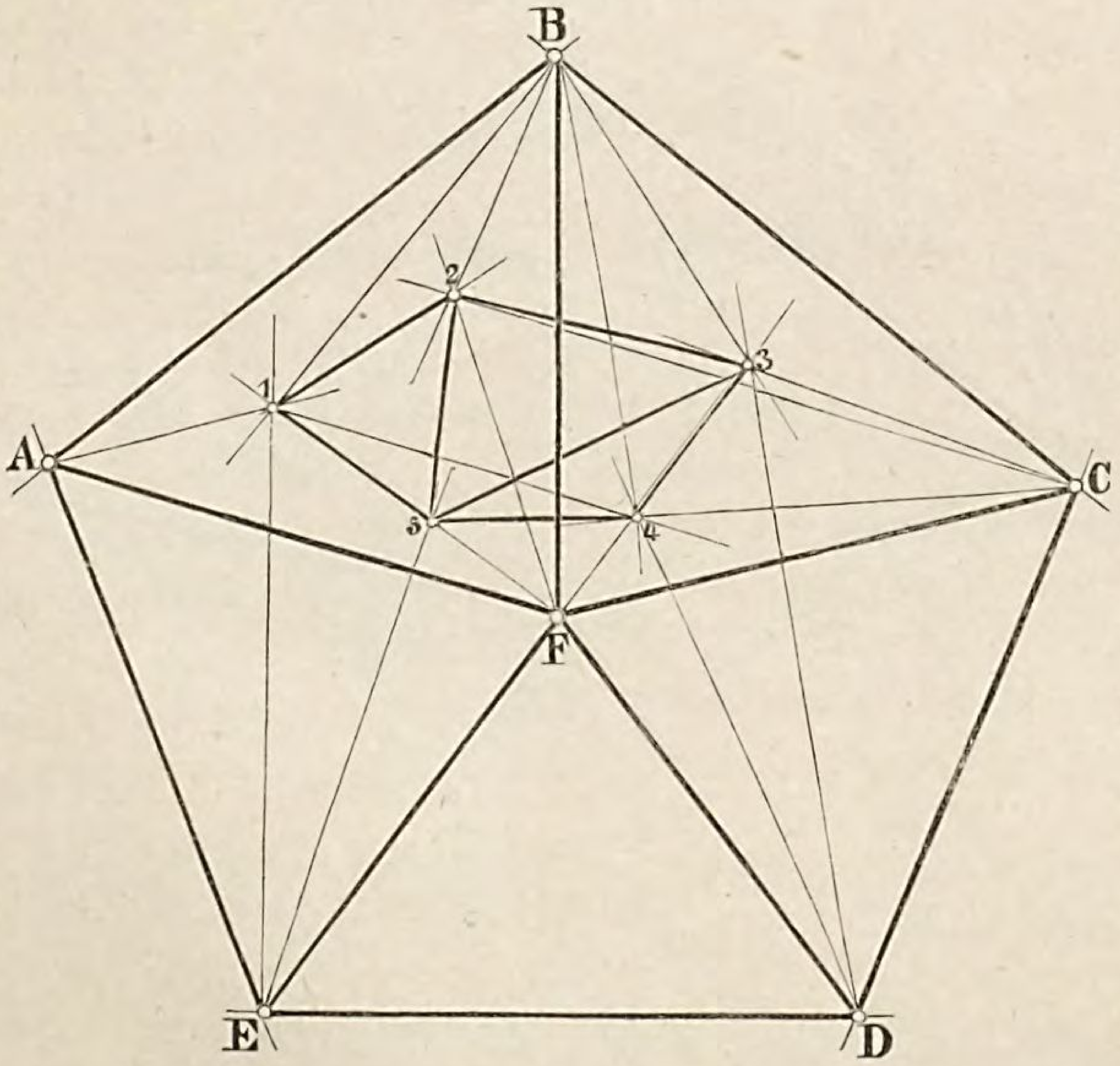
§. 146. Aufgabe. Die Punktbestimmung für eine Stückmessung ohne Messtisch oder die Kleintriangulirung für eine Theodolithaufnahme durchzuführen.

Es handelt sich hier um eine Fortsetzung des trigonometrischen Netzes durch Punkte vierter Ordnung (Kleintriangulirung) bis zu jener Grenze der Entfernung, an welche sich die Coordinatenmessung mittels Latte und

Winkelprisma oder Kette und Winkelspiegel anschliessen kann und muss. Die Punkte vierter Ordnung lassen sich nun an die zweiter und dritter Ordnung auf zwei Wegen anschliessen, die sich sowohl nach der Anlage als nach der Ausgleichung der Messungsfehler von einander unterscheiden, nämlich durch Punkteinschaltung oder durch Netzeinschaltung.

Im Falle der Punkteinschaltung bestimmt man durch mehrfache Messungen, d. i. durch Vorwärtsabschneiden oder Rückwärtseinschneiden nach §. 95 bis 101 stets nur einen einzigen Punkt, jedoch so dass er, wie die Punkte dritter Ordnung für ihn, auch für die weitere Bestimmung von Punkten vierter Ordnung beibehalten werden kann. Sieht man in Fig. 149 die durch starke Linien verbundenen Punkte A, B, C, D, E, F als Punkte dritter Ordnung an, so ist der Punkt 4. Ord. Nr 1 auf A, B, F, E einge-

Fig. 149.



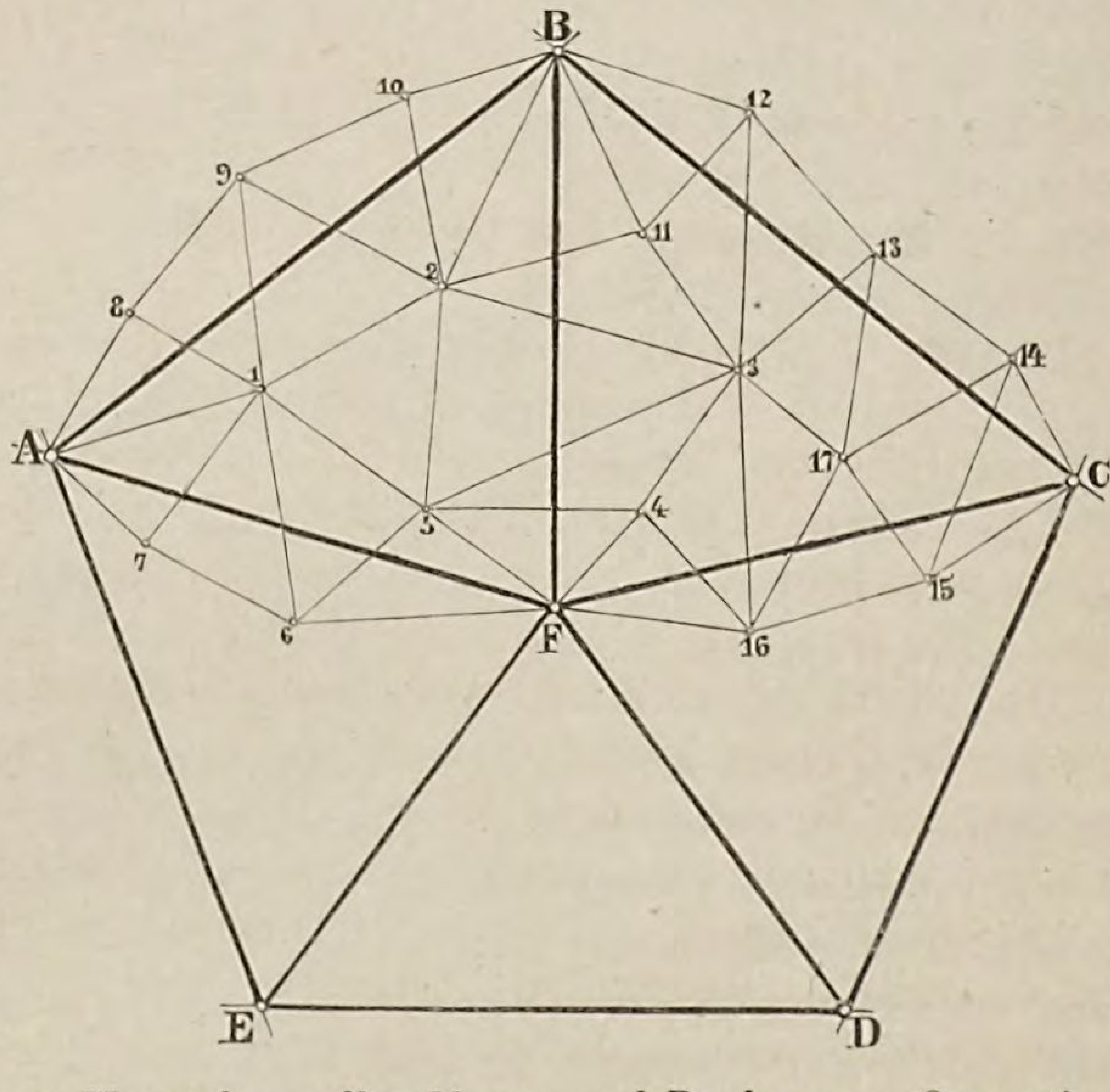
schnitten oder von diesen Punkten aus angeschnitten; der Punkt Nr 2 ist aus Nr 1, B, C, F, der Punkt Nr 3 ist aus Nr 2, B, C, F, der Punkt Nr 4 aus Nr 1, Nr 3, B, C, F bestimmt u. s. w.

Anders gestaltet sich die Sache bei der Festlegung von Punkten vierter Ordnung durch Netzeinschaltung. Hier wird wie in Fig. 150 ein zusammenhängendes Netz von kleinen Seiten für sich und so angelegt dass es an die Seiten des Netzes dritter Ordnung anschliesst und demnach auch in eine Reihe von Einzelnetzen zerfällt welche mit je einem Drei- oder Viereck höherer Ordnung verknüpft sind. Hiedurch ist die Ausgleichung nach §. 101 ermöglicht oder wenigstens eine Controle für die Messung und Berechnung des Netzes geboten, in welchem je noch eine oder mehrere Grundlinien, z. B. 1, 2 oder 3, 4 gemessen werden können.

Vergleicht man die vorgenannten beiden Methoden der Punktbestimmung unter sich, so ist nicht zu verkennen dass die Netzeinschaltung zwar weniger Winkelmessung veranlasst als die Punkteinschaltung, aber die systematische Ausgleichung eines Partialnetzes oder einer Kette von Dreiecken ist entschieden schwieriger und mühsamer als die Summe von Ausgleichungen welche für die pothenotischen Bestimmungen einzelner Punkte nöthig wird: es lässt sich somit wohl behaupten dass die Methode der Punkteinschaltung wegen ihrer Einfachheit den Vorzug verdient vor der Methode der Netzeinschaltung.

Spezielle Anweisungen zur Anordnung der Beobachtungs- und Rechnungshefte für die eine oder andere Methode mit Erläuterungen durch Beispiele können nicht in einem Lehrbuche gesucht werden welches nur

Fig. 150.



Anleitung zum Verstehen aller Mess- und Rechnungs-Operationen und der von den leitenden Behörden abgefassten rationellen technischen Messungs-Instructionen zu geben hat. Wer sich jedoch im Voraus mit dem Wesen solcher Bestimmungen bekannt machen will, mag die Mittheilungen von Otto Koll über „Formulare für trigonometrische und polygonometrische Rechnungen" im VI Bande (Jahrgang 1877) der Zeitschrift für Vermessungswesen, Seite 305 bis 327, durchlesen.

Ueber die Wahl der Stationspunkte (der Punkte vierter Ordnung) welche von grösster Wichtigkeit für die Stückvermessung ist und daher einen umsichtigen und erfahrenen Triangulator erfordert, lassen sich besondere Regeln kaum geben, weil sie wesentlich vom Terrain und der Lage der schon bestimmten und noch zu bestimmenden Punkte abhängt.

Im Allgemeinen muss aber gefordert werden dass jeder Stationspunkt leicht eingemessen und die Sicherheit seiner Bestimmung geprüft werden kann; ferner dass sich von den bestimmten Stationspunkten aus eine für die Stückmessung hinreichende Zahl von Eckpunkten für die Parzellarmessung feststellen lässt; und endlich dass in den Ortschaften und deren Umgebung so viel als möglich Punkte wie Thürme, Blitzableiter, Schornsteine, Hausecken u. s. w. trigonometrisch aufgenommen werden, um die Ortsaufnahme mit Sicherheit an das Dreiecksnetz anschliessen und prüfen zu können.

Dritter Abschnitt.

Die Verticalmessungen.

A. Messung der Verticalwinkel.

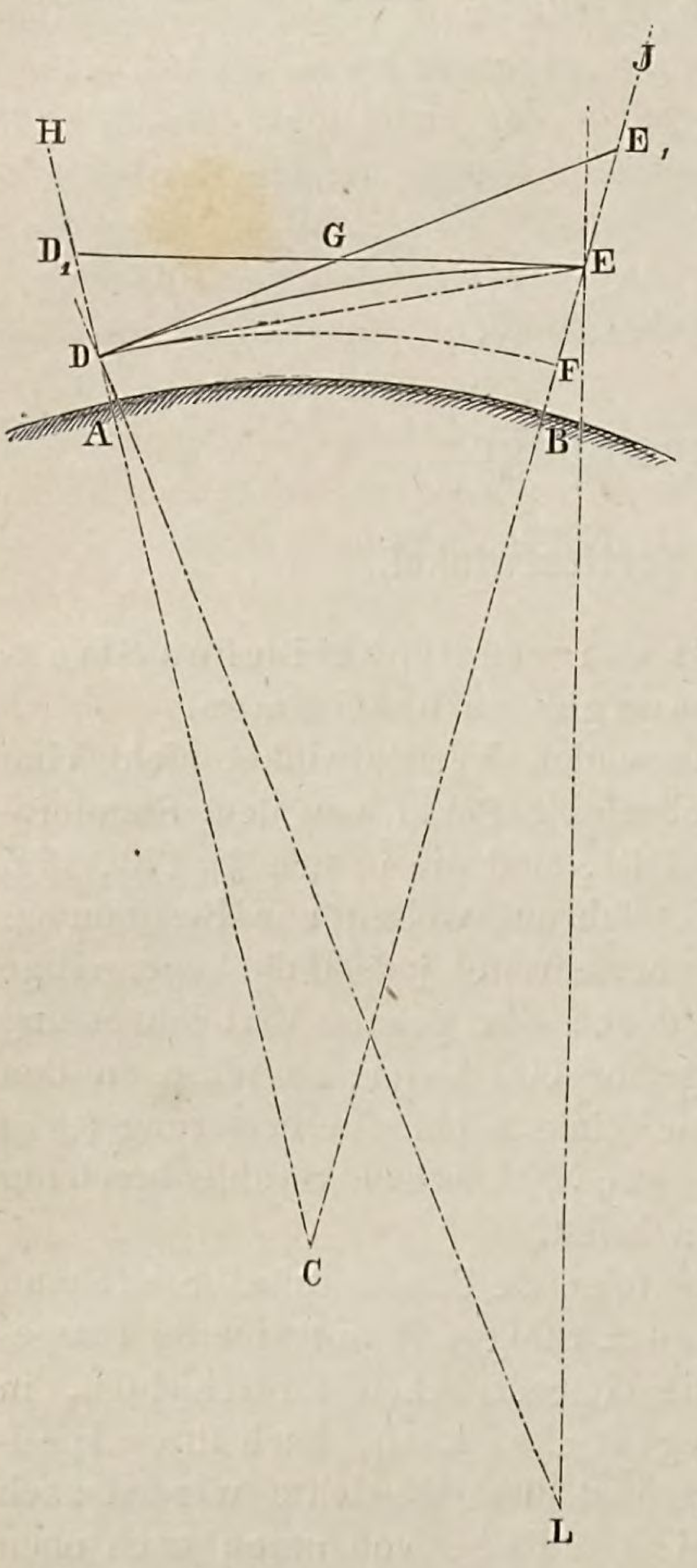
§. 147. Aufgabe. Den Einfluss der atmosphärischen Strahlenbrechung auf die Verticalmessungen zu bestimmen.

So lange die Schenkel der zu messenden Verticalwinkel nicht eine bedeutende Länge haben, also der beobachtete Punkt von dem Standorte des Beobachters nicht sehr weit entfernt ist, sind die in den §§. 170, 171, 175, 192 des I Bands angegebenen Verfahrungsweisen zur Bestimmung jener Winkel vollständig ausreichend; überschreitet jedoch die gegenseitige Entfernung der zwei Punkte, zwischen denen eine genaue Verticalmessung vorzunehmen ist, die Grösse von ungefähr 500 Meter, so muss an den nach der früheren Anleitung gefundenen Winkeln eine Verbesserung (Δz) angebracht werden welche von der atmosphärischen Strahlenbrechung herrührt und desshalb die Refraction heisst.

Mit dieser Strahlenbrechung hat es folgende Bewandtniss. Stellt man sich nämlich die Atmosphäre der Erde ganz ruhig und mit einerlei Temperatur begabt vor, so werden sich die concentrischen Luftschichten, in welche man sich die Atmosphäre zerlegt denken kann, nach ihren specifischen Gewichten über einander lagern und diese Gewichte werden nach einer leicht zu bestimmenden geometrischen Reihe von unten nach oben abnehmen. Ein Lichtstrahl nun der von einem hochgelegenen Punkte der Atmosphäre herabkommt, wird in immer dichtere Luftschichten gelangen und folglich von Schichte zu Schichte eine Brechung erleiden welche ihn immer mehr von seiner geraden Bahn ablenkt und diese in eine gegen die Erde concave Curve verwandelt. In der Figur 151, S. 296 stellt E D diese, den ungleich hoch gelegenen Punkten D und E angehörige Lichtcurve

vor, während D C und E C die durch D und E gehenden Erdhalbmesser sind. Ein in D befindliches Auge empfängt das von E kommende Licht in der Richtung D G welche die Curve E D in D berührt, und versetzt desshalb die Lage des Punkts E in diese Richtung (nach E_1); ein Auge aber das sich in E befindet, sieht den Punkt D, von dem die Curve D E ausgeht, in der Richtung E G des letzten Curvenelements (in D_1). Die Höhe des Punkts D_1 ist grösser als die von D, und die von E_1 grösser als die von E: folglich besteht die Wirkung der Strahlenbrechung in der Atmosphäre darin dass sie alle Gegenstände höher erscheinen lässt, als sie liegen, und folglich alle Zenithwinkel zu klein und alle Höhenwinkel zu gross macht. Der Winkel um welchen man einen anvisirten Punkt über seiner wahren Lage sieht heisst der Refractionswinkel oder auch kurz: die Refraction. Für den leuchtenden Punkt E und den Beobachtungsort D ist dieser Winkel $\Delta z = E D E_1$ und für D und E die Refraction $\Delta z_1 = = D E D_1$. Liegt der leuchtende Punkt innerhalb der Erdatmosphäre, geht also das Licht von einem irdischen Gegenstande aus und durchdringt es nur einen Theil dieser Atmosphäre, so nennt man die durch den Refractionswinkel ausgedrückte Summe aller hierbei vorkommenden Brechungen die terrestrische Refraction; ist aber ein Himmelskörper der leuchtende Gegenstand, so geht das von ihm kommende Licht durch die ganze Erdatmosphäre und die im Refractionswinkel ihren Ausdruck findende Summe aller Brechungen heisst dann die astronomische Refraction. Beide Refractionen sind somit nur quantitativ, nicht qualitativ von einander verschieden, und man sieht leicht ein dass der Winkel um welchen ein Stern höher zu liegen scheint in der Fig. 151 nicht durch $E D E_1$ sondern durch $E G E_1$ vorgestellt wird, weil wegen der unendlichen Entfernung des leuchtenden Sterns E der Winkel D E G = Null ist.

Fig. 151.



Befände sich die Atmosphäre der Erde wirklich in dem einfachen Zu-

stande den wir bis jetzt angenommen haben, so liesse sich die Gleichung der Lichtcurve D E und damit auch der Betrag der Refraction in den Punkten D und E streng bestimmen. Dieser Zustand der Atmosphäre ist aber nicht vorhanden, und es können sogar Fälle eintreten in welchen die an der Erdoberfläche stärkere Erwärmung der Luft bewirkt dass die unteren Luftschichten dünner sind als die oberen: in diesem Falle wird die Lichtcurve convex gegen die Erdfläche und folglich die Refraction negativ. Zwischen dem negativen und positiven Werthe gibt es selbstverständlich auch einen gleich Null, und dieser tritt ein, wenn in Folge der ungleichen Erwärmung die Luftschichten, durch welche das Licht geht, gleich dicht werden. Für diese verwickelten Verhältnisse ist eine genaue Bestimmung der Refractionsgrösse unmöglich; für einfache Voraussetzungen aber über die Abnahme der Temperatur und Dichtigkeit der Luft mit der Höhe kann sie mit ausreichender Genauigkeit bestimmt werden. Man kann nun entweder für einen mittleren Zustand der Atmosphäre das Gesetz der Temperatur- und Dichtigkeits-Aenderung als gegeben voraussetzen, oder man kann gleich so weit gehen die Lichtcurve D E als einen sehr flachen Kreisbogen anzunehmen welcher gegen die Erdoberfläche concav ist.

§. 148. A u f g a b e. D i e G r ö s s e d e r t e r r e s t r i s c h e n S t r a h l e n b r e c h u n g n a c h d e r b i s h e r ü b l i c h e n W e i s e z u b e s t i m m e n.

Auf Grund der eben angeführten (allerdings willkürlichen und daher unwissenschaftlichen) Annahme dass die Lichtcurve ein sehr flacher Kreisbogen sei, kann man wie folgt einen Ausdruck für den Refractionswinkel Δ z finden. Bezeichnet nämlich

r_0 den Erdhalbmesser D C in dem Beobachtungspunkte D,
r_1 den Erdhalbmesser E C in dem leuchtenden Punkte E,
R den Halbmesser D L der Lichtcurve E D,
C den Mittelpunktswinkel D C E und
L den Mittelpunktswinkel D L E,

so ist, da die Länge der Curve D E von ihrer Horizontalprojection D F sehr wenig verschieden ist und dieser gleich gesetzt werden kann,

$$r_0\, C = R\, L$$

und da ferner $L = 2\,(E\,D\,E_1) = 2\,(\Delta z) = E\,G\,E_1 = r$, so findet man

$$r = 2\,(\Delta z) = \frac{r_0\, C}{R} = k\, C \tag{264}$$

wobei k das Verhältniss von $r_0 : R$ vorstellt und der R e f r a c t i o n s c o e f f i c i e n t oder die R e f r a c t i o n s c o n s t a n t e heisst. (Häufig nennt man auch bloss den halben Werth von k oder das Verhältniss von $r_0 : 2\,R$ den Strahlenbrechungscoefficienten, die Zahl nämlich womit C multiplicirt werden muss um den Winkel $\Delta z = \frac{1}{2}\, k \,.\, C$ zu geben.)

Diese Constante wird dadurch bestimmt dass man in den beiden Punkten D und E, deren Horizontalabstand (arc. D F) bekannt ist, gleichzeitig die Zenithwinkel der Linie D E misst und aus der Beziehung welche zwischen diesen Winkeln und dem Winkel Δ z stattfindet, den letzteren

berechnet. Gleichzeitig werden die Zenithwinkel desshalb gemessen, weil man alsdann annehmen zu dürfen glaubt, es sei $\varDelta z_1 = \varDelta z$.

Der Theodolith in D gibt in Folge der Strahlenbrechung nicht den wahren Zenithwinkel $H D E = Z$, sondern den scheinbaren $H D E_1 = z$, so dass $Z = z + \varDelta z$. Ebenso erhält man in E statt des wahren Zenithwinkels $J E D = Z_1$ den scheinbaren $J E D_1 = z_1$, und es ist wieder $Z_1 = z_1 + \varDelta z$. Aus der Figur findet man leicht durch Vergleichung der beiden Aussenwinkel Z und Z_1 des Dreiecks D C E mit dessen inneren Winkeln:

$$2\,(\varDelta z) = 180^0 + C - z - z_1 \tag{265}$$

Da aber nach Gleichung (264) auch $2\,(\varDelta z) = k\,C$, so erhält man folglich die gesuchte Constante

$$k = \frac{180^0 + C - z - z_1}{C} \tag{266}$$

Aus vielfachen Beobachtungen, von verschiedenen Astronomen und Geodäten in verschiedenen Ländern und zu verschiedenen Jahres- und Tageszeiten, jedoch bei ruhiger und klarer Luft gemacht, erhielt man folgende Werthe des Strahlenbrechungs-Coefficienten:

Lambert	fand	$\frac{1}{2}k = 0{,}0625$	Bessel	fand	$\frac{1}{2}k = 0{,}0685$
Tob. Mayer	„	$\frac{1}{2}k = 0{,}0625$	Struve	„	$\frac{1}{2}k = 0{,}0618$
Gauss	„	$\frac{1}{2}k = 0{,}0653$	Coraboeuf	„	$\frac{1}{2}k = 0{,}0642$

Die meisten Franzosen nehmen nach Laplace und Delambre den Werth von $\frac{1}{2}k = 0{,}08$ und die Engländer sogar $\frac{1}{2}k = 0{,}10$ an. In Deutschland benützt man in der Regel den von Gauss angegebenen Coefficienten welcher von dem Bessel'schen nur wenig abweicht. Am besten verfährt man aber, wenn man die Verticalmessungen so einrichtet dass die Refraction in den Resultaten gar nicht mehr vorkommt, wie in der Folge an mehreren Stellen gezeigt werden wird.

Nach Gauss beträgt die mittlere Unsicherheit des Werths von k bei ruhiger und klarer Luft den achten Theil seiner eigenen Grösse, so dass demnach bei solcher Beschaffenheit der Atmosphäre der wahre Werth von $\frac{1}{2}k$ zwischen 0,0735 und 0,0571 liegt; andere Beobachter fanden jedoch die Schwankungen der Refractionsconstanten viel grösser, wie schon die von den Franzosen und Engländern angewendeten Werthe zeigen. Bei sehr erhitzter und unruhiger Luft beobachtet man auch negative Werthe von k. So fand Delambre an einem sehr heissen stürmischen Tage $\frac{1}{2}k = -0{,}0035$ und bei schlechtem Wetter $\frac{1}{2}k = -0{,}0351$. Auf solchen Werthen von k beruhen die Luftspiegelungen welche in heissen Gegenden beobachtet werden. Weiteres über die Grösse der Werthe von k und deren Abhängigkeit von der Temperatur der Luft und dem Barometerstand findet man am Schlusse des §. 149.

§. 149. Aufgabe. Die Grösse der terrestrischen Strahlenbrechung nach neueren Aufstellungen über die physikalische Constitution der Atmosphäre zu bestimmen.

Um die Grösse der Strahlenbrechung zu berechnen muss man deren Differentialgleichung kennen und diese, nach Einführung des Gesetzes über die Aenderung der Dichtigkeit der Atmosphäre mit der Höhe, integriren. Die Differentialgleichung der atmosphärischen Strahlenbrechung, von Laplace vollständig entwickelt, steht fest für alle Zeiten, während über die Abnahme der Dichtigkeit der Atmosphäre mit der Höhe verschiedene Hypothesen aufgestellt sind, wodurch die Integration der genannten Differentialgleichung mehr oder weniger erschwert wird und das Ergebniss derselben verschieden ausfällt. Es ist hier nicht der Ort alle diese Hypothesen zu kritisiren und die durch sie veranlassten Integrationen darzustellen: wir beschränken uns hier darauf: erstens die Differentialgleichung der Strahlenbrechung nach Laplace vorzuführen, zweitens unsere eigene auf Beobachtungen gestützte Aufstellung über die physikalische Constitution zu erörtern, und drittens die Ergebnisse unserer Untersuchungen über die terrestrische Strahlenbrechung zusammenzustellen.

Bezeichnet nämlich (mit Bezug auf Fig. 151):

r die Strahlenbrechung zwischen den Punkten E und D,
z die scheinbare Zenithdistanz H D E_1 des Punkts E in D,
r_0 den Krümmungshalbmesser der Erde (C D) am Beobachtungsorte,
x die Höhe (E F) eines Punkts der Atmosphäre über dem Orte D,
h die ganze Atmosphärenhöhe, vom Meere an gerechnet,
y das Verhältniss der Höhe x zur Höhe h,
m das Verhältniss von h zu r_0, also m y das von x zu r_0,
s das Verhältniss der Höhe x zur Entfernung $r_0 + x$,
ϱ die Dichtigkeit der Luft in der Höhe x über dem Meere,
ϱ_0 die Dichtigkeit der Luft am Meeresspiegel und
α die Refractionsconstante der Luft,

so ist (wenn man die einander entsprechenden Buchstaben einführt) nach Laplace's Mécanique céleste, Tom. IV, p. 246:

$$d\,r = -\frac{\alpha \sin z}{1-\alpha} \cdot \frac{d\,\varrho}{\varrho_0} \cdot \frac{1-s}{\sqrt{\cos^2 z + (2s - s^2)\sin^2 z - 2\alpha\left(1 - \frac{\varrho_0}{\varrho}\right)}} \qquad \text{(a)}$$

Um diese Gleichung integriren zu können, müssen ϱ und s in x oder y ausgedrückt werden. Ist dieses der Fall, dann wird die terrestrische Refraction gleich dem Integral von d r zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = x$, und die astronomische Refraction gleich dem Integral von d r zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = h$.

Der Verfasser dieses Buchs hat in seiner Schrift: „Beobachtungen und Untersuchungen über die Genauigkeit der barometrischen Höhenmessungen“ etc. (München, 1862) unter anderem auch eine Relation zwischen Temperatur, Druck, Dichtigkeit und Höhe der Atmosphäre aufgestellt welche auf einer grossen Zahl von Beobachtungen verschiedener Forscher beruht. Diese Relation heisst nach S. 97 der genannten Schrift:

$$\frac{\Theta'}{\Theta} = \left(\frac{p'}{p}\right)^{1-\frac{1}{k}} = \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^{k-1} = \left(\frac{h'}{h}\right)^{k'} \qquad \text{(b)}$$

und es bezeichnen darin für zwei Punkte einer durch den ganzen Luftraum reichenden Verticallinie:

h, h′ die zugehörigen Atmosphärenhöhen,

Θ, Θ' die absoluten (d. h. von — 272, 8° C an gezählten) Temperaturen,

p, p′ die entsprechenden Pressungen und

ϱ, ϱ' die Dichtigkeiten der Luft an jenen Punkten, sowie

k, k′ zwei aus Beobachtungen zu bestimmende Exponenten.

Aus einer grossen Zahl von Messungen ergaben sich die Mittelwerthe von $k = 1{,}2035 - 0{,}017 \cos 2\psi$ (wobei ψ die geographische Breite des Beobachtungsorts ist) und von $k' = 1{,}023$. Gestattet man eine kleine Abweichung von diesen Werthen, so kann $k = 1{,}2$ und $k' = 1$ gesetzt werden, wodurch die vorstehende Relation in folgende übergeht:

$$\frac{\Theta'}{\Theta} = \left(\frac{p'}{p}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{h'}{h} \qquad \text{(c)}$$

Hiernach sind bei einem mittleren Zustande der Atmosphäre und unter 45° Breite die absoluten Temperaturen, die sechsten Wurzeln der Pressungen und die fünften Wurzeln der Dichtigkeiten der Luft den Atmosphärenhöhen an den Beobachtungsorten proportional.

Auf Grund dieser Annahme hat der Verfasser in den Nummern 1478 bis 1840 der „Astronomischen Nachrichten“ die astronomische Refraction berechnet und selbst für die Zenithdistanzen zwischen 85° und 90° bis auf einzelne Secunden mit den Bessel'schen Tafeln übereinstimmend gefunden, was bis jetzt bei keiner anderen Aufstellung über die physikalische Constitution der Atmosphäre gelungen ist, und woraus der Schluss gezogen werden muss dass keine dieser Aufstellungen der Wahrheit so nahe kommt als die vorstehende Relation.

Um in der Differentialgleichung (a) die Functionen ϱ und s in x oder y auszudrücken, hat man zunächst nach dem Gesetze (c) und den auf Seite 299 aufgeführten Bezeichnungen das Verhältniss

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \left(\frac{h - x}{h}\right)^5 = \left(1 - \frac{x}{h}\right)^5 = (1 - y)^5 \qquad \text{(d)}$$

zu setzen, woraus durch Differentiiren, da ϱ_0 constant ist, folgt

$$\frac{d\varrho}{\varrho_0} = -5\left(1 - \frac{x}{h}\right)^4 \cdot \frac{dx}{h} = -5(1 - y)^4\, dy \qquad \text{(e)}$$

Ferner ist nach der Annahme auf Seite 299:

$$s = \frac{x}{r_0 + x} = \frac{x}{r_0\left(1 + \frac{x}{r_0}\right)} = \frac{m y}{1 + m y} \qquad \text{(f)}$$

Werden die Werthe (e) und (f) in (a) eingesetzt und einige ganz unbedeutende Vernachlässigungen gestattet, so wird schliesslich die zur Integration geeignete Differentialgleichung der Refraction:

$$d\,r = \frac{5\,\alpha \sin z\,(1-y)^4\,d\,y}{(1-\alpha)\sqrt{\cos^2 z + 2\,m\,y - 2\,\alpha\,[1-(1-y)^5]}} \qquad (g)$$

Es würde jedoch zu weit führen hieraus in jedem einzelnen Falle die terrestrische Refraction r zu berechnen und deren Werth in die Formeln für die trigonometrischen Höhenmessungen einzusetzen; man erhält die gesuchten Höhen sofort mit Rücksicht auf Erdkrümmung und Strahlenbrechung aus der Differentialgleichung der Lichtcurve, wenn diese auf Polarcoordinaten bezogen wird deren Axe das Loth des Beobachtungsorts und deren Pol der Erdmittelpunkt ist. Bezeichnet man nämlich den im Bogenmasse ausgedrückten Centriwinkel zwischen Beobachtungsort und leuchtenden Gegenstand mit φ und behält alle bisherigen Bezeichnungen bei, so erhält die in der Mécanique céleste, T. IV, Nr 11 entwickelte Differentialgleichung folgende Gestalt

$$d\,\varphi = \frac{m \sin z \,.\, d\,y}{(1+m\,y)\sqrt{\cos^2 z + 2\,m\,y - 2\,\alpha\,[1-(1-y)^5]}} \qquad (h)$$

Diese Gleichung lässt sich zum Zwecke der Integration noch weiter umformen, wenn man den Factor $(1+m\,y)$ als Quadrat $=1+2\,m\,y$ unter das Wurzelzeichen bringt und dafür cos z vor dasselbe setzt; ferner durch Entwicklung der Potenz $(1-y)^5$ und mit Einführung folgender Bezeichnungen:

$$\frac{5\,\alpha}{m} = \nu; \quad \frac{m\,(\cos^2 z + 1 - \nu)}{\cos^2 z} = p; \quad \frac{2\,m\,\nu}{3\cos^2 z} = p_1; \quad \frac{\operatorname{cotg} z}{m} = p_0 \qquad (i)$$

lässt sich die Gleichung (h) so schreiben:

$$p_0 \,.\, d\,\varphi = \frac{d\,y}{\sqrt{1+(2\,p-3\,p_1)\,y + 6\,p_1\,y^2 - 6\,p_1\,y^3 + 3\,p_1\,y^4 - 0{,}6\,p_1\,y^5}} \qquad (k)$$

Um diese Gleichung integriren zu können muss man vorerst die Reciproke des Wurzelausdrucks in eine Reihe nach y entwickeln, was hier am einfachsten mittels der Methode der unbestimmten Coefficienten geschehen kann. Vollzieht man nach dieser Entwicklung die einfachen Integrationen aller Glieder zwischen den Grenzen 0 und y, so folgt

$$p_0 \cdot \varphi = y - \tfrac{1}{2}\,p\,y^2 + \tfrac{1}{2}\,(p^2 - 2\,p_1)\,y^3 - \tfrac{1}{8}\,(5\,p^3 - 18\,p\,p_1 - 6\,p_1)\,y^4 + \ldots \quad (l)$$

und wenn man die Reihe für φ umkehrt, d. h. $y = A\,\varphi + B\,\varphi^2 + C\,\varphi^3 + \ldots$ setzt und die unbestimmten Coefficienten A, B, C ... in bekannter Weise entwickelt, so wird die hier besonders brauchbare Reihe für

$$y = (p_0\,\varphi) + \tfrac{1}{2}\,p\,(p_0\,\varphi)^2 + p_1\,(p_0\,\varphi)^3 + \tfrac{1}{4}\,p_1\,(p-3)\,(p_0\,\varphi)^4 + \ldots\ldots \qquad (267)$$

Nun ist nach den Erklärungen zu Anfang dieses Paragraphen

$$y = \frac{x}{h} = \frac{x}{m\,r_0} \text{ und folglich } x = r_0 \,.\, m\,y$$

daher, mit Rücksicht auf die Bezeichnung (i), $m\,p_0 = \operatorname{cotg} z$ und die Höhe

$$x = r_0\,\varphi \,.\operatorname{cotg} z \left(1 + \tfrac{1}{2}\,p\,(p_0\,\varphi) + p_1\,(p_0\,\varphi)^2 + \tfrac{1}{4}\,p_1\,(p-3)\,(p_0\,\varphi)^3 + \ldots\right) \quad (268)$$

Diese Formel bildet die Grundlage der Berechnungen trigonometrischer Höhenmessungen, und es bedarf das aus ihr hervorgehende Resultat keiner Verbesserung wegen der Erdkrümmung und Strahlenbrechung mehr, da

die Höhe x (F E in Fig. 151) aus der Gleichung der Lichtcurve (E D) abgeleitet ist. Es genügt für diesen Zweck vollkommen ausser r_0, φ, z noch die Werthe von α, m und damit von v zu kennen welche der Lage des Beobachtungsorts, der Temperatur und dem Drucke der Luft entsprechen. Mit diesen Constanten hat es folgende Bewandtniss.

Die Grösse α heisst nur desshalb die Refractionsconstante, weil sie für eine und dieselbe Lichtcurve, d. h. für Eine Höhenmessung den gleichen Werth erhält und sich nicht mit der Höhe des beobachteten Gegenstands ändert. Beobachtet man an der gleichen Stelle den nämlichen Punkt bei anderer Luftdichtigkeit, so hat α einen anderen der Luftdichtigkeit entsprechenden Werth, denn die Refractionsconstante ist der Luftdichtigkeit ϱ proportional. Nach Bessels Bestimmungen ist für die Temperatur $\tau_0 = 9^0{,}31$ C und den Barometerstand $\beta_0 = 751{,}71$ mm die mittlere Refractionsconstante

$$\alpha_0 = 0{,}00027895 \text{ und } \log \alpha_0 = 6{,}4455264 - 10 \qquad (269)$$

Der Werth m oder das Verhältniss der Atmosphärenhöhe zum Erdhalbmesser ist mit der Höhe der Atmosphäre veränderlich, und diese Höhe ändert sich nicht bloss mit der Luftdichtigkeit sondern auch (wegen der Abplattung der Atmosphäre) mit der geographischen Breite des Beobachtungsorts. Da die Höhe h um so kleiner wird, je grösser die Luftdichtigkeit ϱ ist, so muss man m der Luftdichtigkeit umgekehrt proportional setzen. Die Formel für die Abhängigkeit der Grösse m von der geographischen Breite ist sehr zusammengesetzt, wesshalb der Verfasser welcher in seiner Abhandlung (Astron. Nachrichten, Nr 1479, S. 228) für die Temperatur $\tau_0 = 9^0{,}31$ C, den Barometerstand $\beta_0 = 751{,}71$ mm und die geogr. Breite von Königsberg $\psi_0 = 54^0\, 52'\, 50''$ das mittlere Höhenverhältniss

$$m_0 = 0{,}007464 \text{ und } \log m_0 = 7{,}8729716 - 10 \qquad (270)$$

bestimmte, für die übrigen Breiten die mittleren Atmosphärenhöhen (durch

ψ	log m_0	m_0	ψ	log m_0	m_0
90⁰	7,854 99	0,007 163	45⁰	7,883 83	0,007 653
80	856 46	185	44	884 98	673
70	861 09	262	43	886 32	697
65	863 52	303	42	887 45	717
60	868 56	388	41	888 75	740
55	873 51	473	40	889 84	759
54	874 61	492	39	890 91	778
53	875 73	511	38	892 14	800
52	876 62	527	37	893 06	817
51	877 82	547	36	894 35	840
50	878 98	568	35	895 31	857
49	879 95	584	30	899 77	939
48	880 92	601	20	910 40	0,008 135
47	881 90	619	10	916 66	253
46	882 87	636	0	919 07	300

den Erdhalbmesser gemessen) im Voraus berechnete und in vorstehender Tabelle zusammengestellt hat.

Das Verhältniss $\nu = 5\,\alpha : \mathrm{m}$ ändert sich mit α und m, und da α der Luftdichtigkeit direkt und m dieser Dichtigkeit umgekehrt proportional ist, so ändert sich der Werth von ν mit dem Quadrat der Luftdichtigkeit, d. h. es ist

$$\nu = \frac{5\,\alpha}{\mathrm{m}} = \varrho^2\,\frac{5\,\alpha_0}{\mathrm{m}_0} = \varrho^2\,\nu_0{}^2 \text{ und hiebei}$$

$$\nu_0 = 0{,}186865;\ \log \nu_0 = 9{,}2715248 - 10 \tag{271}$$

Anlangend die Luftdichtigkeit ϱ, so gilt für diese bei einer Temperatur τ in Centesimalgraden, einem Barometerstand β in Millimetern, wenn ε den Ausdehnungscoefficienten 0,00367 der Luft für 1° C bezeichnet, der Ausdruck:

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{(1+\varepsilon\,\tau_0)\,\beta}{(1+\varepsilon\,\tau)\,\beta_0} = \frac{(273+\tau_0)\,\beta}{(273+\tau)\,\beta_0} = \frac{\Theta_0\,\beta}{\Theta\,\beta_0} \tag{272}$$

wobei Θ und Θ_0 die absoluten Temperaturen bei τ und τ_0 Grad Celsius vorstellen. Mit Benützung dieser Bezeichnungen kann man die in Rede stehenden Constanten wie folgt ausdrücken:

$$\alpha = \frac{\Theta_0\,\beta}{\Theta\,\beta_0}\,\alpha_0;\quad \mathrm{m} = \frac{\Theta\,\beta_0}{\Theta_0\,\beta}\,\mathrm{m}_0;\quad \nu = \frac{(\Theta_0\,\beta)^2}{\Theta\,\beta_0}\cdot\nu_0 \tag{273}$$

Dividirt man die beiden Differentialgleichungen (g) und (h) durcheinander, so findet man das Verhältniss der Differentiale d r und d φ zu einander, und bezeichnet man dasselbe mit k, so besteht die Gleichung

$$\mathrm{k} = \frac{\mathrm{d\,r}}{\mathrm{d}\,\varphi} = \frac{5\,\alpha}{\mathrm{m}}\cdot\frac{1+\mathrm{m\,y}}{1-\alpha}\left(1-\mathrm{y}\right)^4 \tag{274}$$

wofür man auch, genau genug, setzen kann:

$$\mathrm{k} = \nu\,(1-\mathrm{y})^4 \text{ und } \mathrm{d\,r} = \nu\,(1-\mathrm{y})^4\,\mathrm{d}\,\varphi \tag{275}$$

Nennt man das Verhältniss k den neuen Refractionscoefficienten, so sieht man sofort dass dieser an der Meeresfläche (d. i. für $\mathrm{y} = 0$) der Grösse ν gleich ist, und dass sich an zwei Punkten der Lichtcurve welche in den Höhen x_1 und x_2 über dem Meere liegen, die Coefficienten k_1 und k_2 wie die vierten Potenzen der über diesen Punkten verbleibenden Atmosphärenhöhen verhalten; denn es ist $\mathrm{k}_1 = \nu\,(1-\mathrm{y}_1)^4$, $\mathrm{k}_2 = \nu\,(1-\mathrm{y}_2)^4$ und folglich

$$\frac{\mathrm{k}_1}{\mathrm{k}_2} = \left(\frac{1-\mathrm{y}_1}{1-\mathrm{y}_2}\right)^4 = \left(\frac{\mathrm{h}-\mathrm{x}_1}{\mathrm{h}-\mathrm{x}_2}\right)^4 \tag{276}$$

Ist somit der Coefficient k_1 in der Höhe x_1 bekannt, so muss unter sonst gleichen Umständen der Coefficient für die Höhe x_2 oder

$$\mathrm{k}_2 = \left(\frac{1-\mathrm{y}_2}{1-\mathrm{y}_1}\right)^4\cdot\mathrm{k}_1 \tag{277}$$

sein. Dieses aus des Verfassers Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung in einfachster Weise folgende Gesetz der Refractionscoefficienten erhielt ausser anderen Bestätigungen eine vollwichtige thatsächliche Anerkennung durch die an den Verfasser gerichtete und in den Astronomischen Nachrichten Nr 1590 Seite 88 abgedruckte Mittheilung des damaligen Herrn

Oberstlieutenants Stebnizki d. d. Tiflis 16/28 April 1865 dahin lautend dass bei den trigonometrischen Höhenmessungen im Kaukasus zwischen den Höhen von $x_1 = 100$ m und $x_2 = 4000$ m eine Abnahme des Strahlenbrechungscoefficienten von 0,085 auf 0,058 beobachtet wurde. Berücksichtigt man dass unter den obwaltenden Verhältnissen nach des Verfassers bereits erwähnten „Beobachtungen und Untersuchungen" (Seite 123 Gl 73) und nach der eben genannten Nummer der Astronomischen Nachrichten Seite 87 eine Atmosphärenhöhe h = 25760 Toisen = 50200 Meter in die Rechnung einzuführen ist, so wird für den halben Werth $k_1 = 0{,}085$ der halbe Werth von $k_2 = 0{,}061$ welcher mit dem von Stebnizki im Kaukasus beobachteten (0,058) fast ganz übereinstimmt.

Um den Zusammenhang zwischen der terrestrischen Strahlenbrechung r und dem Bogen φ zu erfahren muss man die Gleichung (g) nach r und φ integriren, nachdem vorher für y sein Werth aus Gl (267), nämlich

$$y = p_0\,\varphi + \tfrac{1}{2}\,p\,(p_0\,\varphi)^2 + p_1\,(p_0\,\varphi)^3 + \ldots.$$

eingesetzt ist. Hienach findet man die terrestrische Refraction

$$r = \nu\,\varphi\left(1 - 2(p_0\,\varphi) + (2 - \tfrac{2}{3}\,p)(p_0\,\varphi)^2 - (1 + p_1 - \tfrac{3}{2}\,p)(p_0\,\varphi)^3 + \ldots\right) \quad (278)$$

und wenn man den in Klammern stehenden Ausdruck mittels der Gleichung (l) durch y darstellt:

$$r = \nu\,\varphi\left(1 - 2\,y + (2 + \tfrac{1}{3}\,p)\,y^2 - (1 + \tfrac{1}{2}\,p - p_1 + \tfrac{1}{3}\,p^2)\,y^3 + \ldots.\right) \quad (279)$$

Hieraus ergibt sich dass sich auch des Verfassers Theorie der terrestrischen Refraction auf die bisher übliche Form $r = k\,\varphi$ bringen lässt; nur besteht zwischen beiden Theorien der grosse Unterschied dass der Bruch k womit der Bogen φ zu multipliciren ist nach der alten Refractionstheorie constant ist (wenn auch in verschiedenen Ländern zwischen 2 . 0,06 = 0,12 und 2 . 0,10 = 0,20 wechselnd) während nach der neuen der Factor von φ oder das Verhältniss $r : \varphi$ gleich

$$K = \nu\,(1 - 2\,p_0\,\varphi + \ldots.) = \nu\,(1 - 2\,y + \ldots) \quad (280)$$

sich mit der Temperatur und dem Barometerstand (der Luftdichtigkeit) und ausserdem noch mit der Zenithdistanz z (die in p_0 steckt) und dem Bogen φ oder mit der Höhe x des Gegenstands (die in y enthalten ist) ändert. Es ist von selbst klar dass, nachdem wir das Verhältniss $dr : d\varphi$ den neuen Strahlenbrechungscoefficienten genannt haben, diese Bezeichnung nicht auch für das Verhältniss $r : \varphi$ passt. Zwischen den Zahlen

$$k = \frac{d\,r}{d\,\varphi} \quad \text{und} \quad K = \frac{r}{\varphi}$$

besteht der grosse Unterschied dass die erstere (k) den Verhältnisswerth $dr : d\varphi$ für einen bestimmten durch y bezeichneten Höhenpunkt angibt, während die zweite (K) den Werth des Verhältnisses $r : \varphi$ auf die ganze Ausdehnung des Bogens φ bis zur Höhe x ausdrückt.

Zeigt das vorhin berechnete Beispiel, wie stark die Aenderung des neuen Coefficienten der Refraction mit der Höhe werden kann, so lässt sich an einem anderen Beispiele leicht übersehen, wie viel dessen Aenderung an der nämlichen Stelle in Folge einer Dichtigkeitsänderung der Luft

zu betragen vermag. Nach Seite 303 ist der mittlere Werth von ν oder

$$\nu_0 = 0{,}186865$$

Lässt man die Temperatur von 9,31° C welche ν_0 entspricht, in — 25° C und den Barometerstand von 751,71 mm in 760 mm übergehen, so ändert sich die Luftdichtigkeit von 1 in 1,15095 ab und es wird

$$\nu = 0{,}24755$$

Steigt dagegen die Temperatur auf + 30° C und sinkt der Barometerstand auf 730 mm, so wird die Luftdichtigkeit 0,90473 und

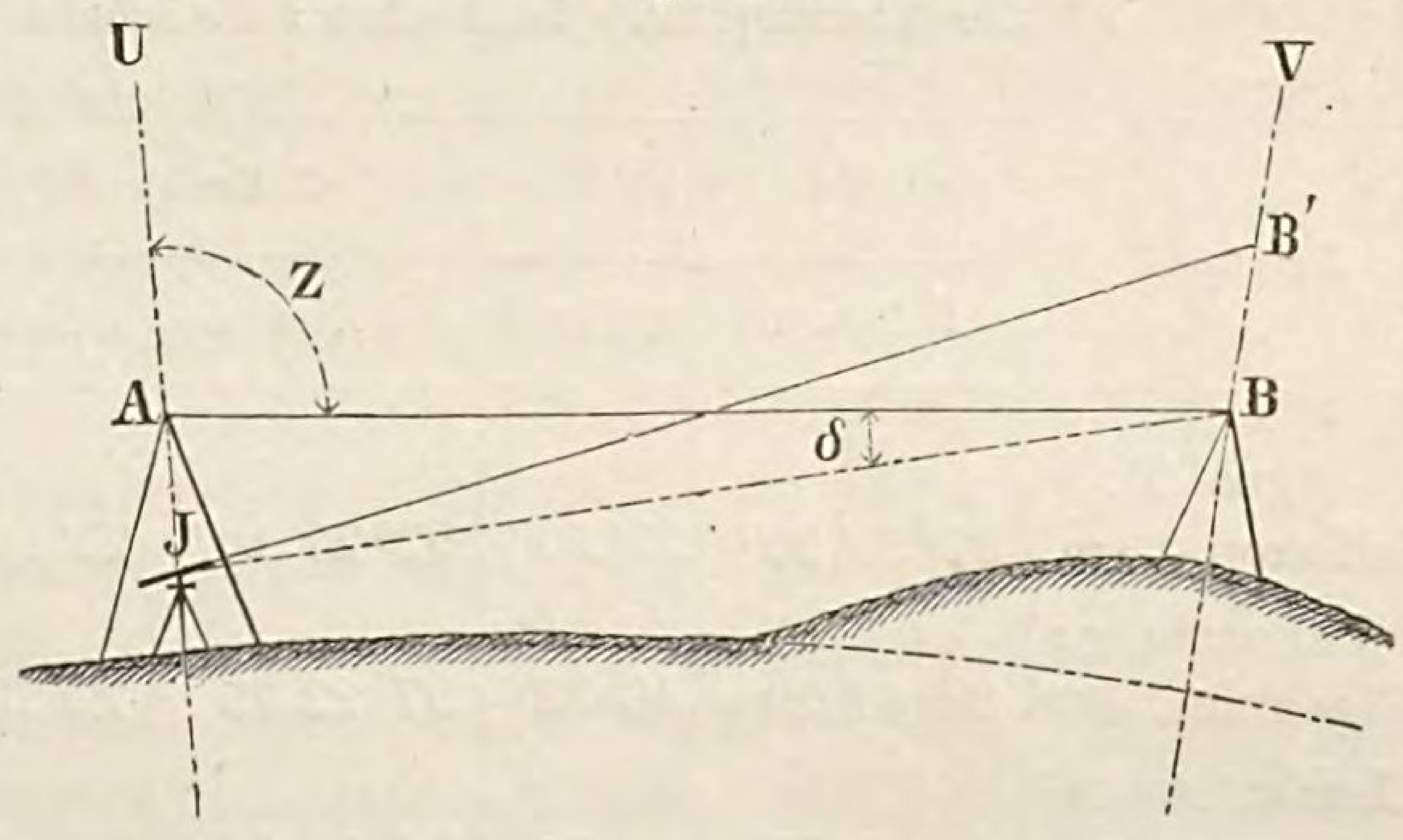
$$\nu = 0{,}15296$$

Da der Bruch K nahezu $= \nu$ ist, so begreift man jetzt die Schwankungen in den Angaben für den Werth des alten Coefficienten k′: die hier vorgeführten Beispiele umfassen die Werthe 0,24755; 0,186865; 0,17; 0,15296; 0,122 und entsprechen somit den in §. 148 angeführten Werthen von $\frac{1}{2}$ k′.

§. 150. Aufgabe. Die Reduction der Verticalwinkel auf den wahren Scheitelpunkt vorzunehmen.

Bei dem früher beschriebenen Verfahren den Zenithwinkel einer Linie zu messen, wurde vorausgesetzt dass die Drehaxe des Verticalkreises des Theodolithen in einem Endpunkte der Linie liege. Dieses ist aber in der Regel nicht möglich, und es steht (wenn kein Heliotropenlicht angewendet wird) entweder das Instrument über oder unter dem genannten Endpunkte. Dieser Umstand veranlasst einen kleinen Fehler im Zenithwinkel welcher berücksichtigt werden muss. Die Verbesserung des letzteren nennt man dessen Reduction auf den wahren Scheitel.

Fig. 152.



Nimmt man, wie in Fig. 152 geschehen, an dass behufs Messung des Zenithwinkels U A B = Z der Verticalkreis unterhalb A im Punkte J aufgestellt sei, so wird man zuerst den scheinbaren Zenithwinkel U J B′ = z und hieraus den wahren für den Punkt J = U J B = z + Δ z erhalten. Der gesuchte Zenithwinkel ist aber

$$Z = z + \Delta z + \delta \tag{281}$$

wenn A B J = δ gesetzt wird. Aus dem Dreiecke A B J worin A J = h und A B = b gegeben sei, folgt

$$\sin \delta = \frac{h}{b} \sin (z + \Delta z) \text{ und } \delta = \frac{h \sin (z + \Delta z)}{b \sin 1''} \text{ Sec.} \tag{282}$$

womit die Aufgabe gelöst ist. Läge der Punkt J über A, so würde

$Z = z + \Delta z - \delta$ sein, der Winkel δ aber seinen absoluten Werth behalten, wenn h und b unverändert bleiben und Z nicht viel von 90° abweicht.

Wir lassen hier ein Schema für die Aufschreibungen bei der Messung von Verticalwinkeln mit sehr langen Sckenkeln welche die Berücksichtigung der Refraction erfordern, folgen. Behufs Berechnung dieser Refraction nach den Formeln des §. 149 ist die Temperatur der Luft und der Barometerstand auf der Station zu beobachten, wesshalb Spalten hiefür vorgesehen sind. Der Verticalkreis für den das folgende Schema passt, ist zweitheilig, d. h. er ist zweimal von 0° bis 180° getheilt. Aus den Ablesungen an diesem Kreise in seinen beiden Lagen folgt der Verticalwinkel = Ablesung Kreislage 2 minus Ablesung Kreislage 1; der Höhenwinkel ist durch +, der Tiefenwinkel durch — bezeichnet. Kann das Kreiscentrum (J Fig. 152) nicht in den Höhenpunkt (A) gebracht werden, so muss der Abstand beider, die Excentricität des Instruments (A J = h) gemessen und im Formular vorgemerkt werden, wie hier geschehen ist.

Schema E für Verticalwinkelmessungen mit Rücksicht auf Refraction.

Standpunkt: Signal S (Kirchthurm).

Theodolith Nr 5. Instrumentenhöhe = 0,45 m. Axe des Verticalkreises 15,68 m unter der Thurmspitze. Beobachter: E. Schulze. 1878, Mai 17.

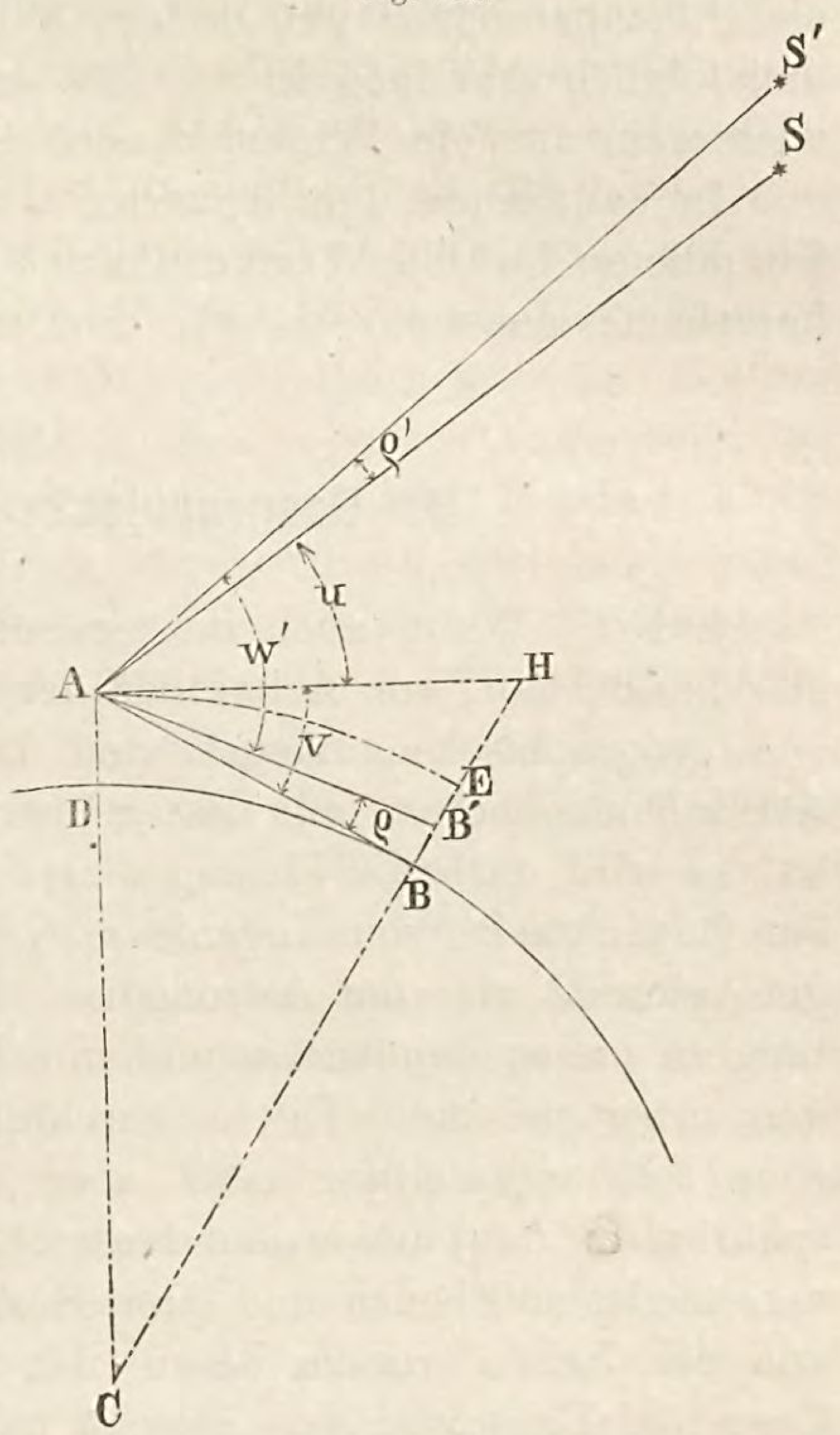
Zielpunkt	1 Kreislage		2 Kreislage		Doppelter Verticalwinkel	Luftdichtigkeit	
	1) Non. L	2) Non. R	3) Non. L	4) Non. R		Temp.	Barom.
1. Signal T:						R	mm
Heliotrop 0,3 m	87° 32′ 50″	32′ 50″	92° 27′ 10″	27′ 10″	+ 4° 54′ 20″	+ 10°,2	710,2
2. Peissenberg:							
Signaltafel U	82 46 29	46 33	97 12 15	12 13	+ 14 25 43	+ 9,9	710,2
3. Isarbrücke bei							
M., Sockelmarke	93 21 35	21 55	86 38 26	38 4	— 6 43 30	+ 9,8	710,1

§. 151. Aufgabe. Die Kimmtiefe oder die Depression des Meereshorizonts zu bestimmen.

Nach §. 192 des I Bands wird auf dem Meere oder in dessen Nähe mit dem Spiegelsextanten oder dem Spiegelkreise der Höhenwinkel eines Gestirns dadurch gemessen dass man die Bilder des Meereshorizonts und Gestirns zur Deckung bringt: bezeichnet also in Fig. 153 der Punkt A den Sextanten, S das Gestirn und B die in der Verticalebene A S liegende äusserste sichtbare Stelle des Meeresspiegels, so liefert der Sextant, so lange man von der atmosphärischen Strahlenbrechung absieht, den Winkel

S A B = w. Dieser Winkel ist aber der gesuchte Höhenwinkel noch nicht; denn erstens ist der Schenkel A B nicht horizontal, und zweitens sieht man die Punkte B und S in Folge der Strahlenbrechung der Luft höher als sie sind. Nimmt man an dass S in S′ und B in B′ erscheint, so liest man auf dem Sextanten statt S A B = w den Winkel S′ A B′ = w′ ab, während der Winkel S A H = u mit dem horizontalen Schenkel A H gesucht wird. Setzt man den Winkel S A S′ welcher die nach der betreffenden Tabelle des Anhangs zu bestimmende astronomische Strahlenbrechung vorstellt $= \varrho'$, den Winkel B A B′ oder die terrestrische Strahlenbrechung $\Delta z = \varrho$, und den Winkel H A B = v, so ist der gesuchte Höhenwinkel

Fig. 153.



$$u = (w' - \varrho') - (v - \varrho) \quad (283)$$

Der Winkel $H A B' = v - \varrho = \delta$ stellt nun die **Kimmtiefe** oder die **Depression des Meereshorizonts** vor, und es lässt sich dieselbe in folgender Weise bestimmen.

Nach der Figur sind die Dreiecke A C H, A B C, A B H alle rechtwinklig und einander ähnlich, folglich ist auch der Winkel H A B = v = A C B = C, und somit (wegen $\varrho = \Delta z = \frac{1}{2} k C$) die Kimmtiefe

$$\delta = v - \varrho = (1 - \tfrac{1}{2} k)\, C \quad (284)$$

Setzt man den Bogen B D = A B = e und den Abstand A D = h und berücksichtigt dass nach der ebenen Geometrie

$$A B^2 = A D\,(2 r + A D) \text{ oder } e^2 = 2 r h \quad (285)$$

ist, so wird der zu A B gehörige Mittelpunktswinkel

$$C = 206\,265'' \frac{e}{r} = 206\,265'' \sqrt{\frac{2 h}{r}}$$

und hiemit nach Gl (284) die gesuchte Kimmtiefe

$$\delta = 206\,265'' \,(1 - \tfrac{1}{2} k) \sqrt{\frac{2 h}{r}} \quad (286)$$

Für $\frac{1}{2} k = 0{,}0653$ und $r = 3\,266\,608$ Toisen wird $\delta = 150{,}''85 \sqrt{h}$ und demnach für h = 4 Toisen der Winkel $\delta = 301'',7 = 5{,}03$ Minuten. Wäre für diese Höhe des Instrumenten-Standpunkts die Ablesung auf dem

Spiegelsextanten $= w' = 33^0 40'$ gewesen, so würde die astronomische Refraction $\varrho' = 1' 26'',5$ und folglich der gesuchte Höhenwinkel

$$u = w' - \varrho' - (v - \varrho) = 33^0 33' 31'',8$$

sein. Da in dem vorliegenden Falle ein Stern beobachtet wurde, so fällt die Höhenparallaxe, und da der Winkelschenkel A B = e = 5112 Toisen und folglich sehr lang ist, so fällt auch die Schiefenparallaxe weg welche ausserdem an dem Winkel u noch anzubringen wären.

In nautischen Jahrbüchern, z. B. in dem von Bremiker, sind die Kimmtiefen für die Werthe h = 0,5 bis h = 20 Meter zu 1′ 16″ bis 8′ 0″ berechnet; man kann sie also dort sofort aufschlagen.

B. Geographische Ortsbestimmungen.

§. 152. Wenn auch die genaue Feststellung von Mittagslinien oder Meridianzeichen, von Azimuthen der Dreieckseiten grosser Triangulationen, von geographischen Längen und Breiten gegebener Punkte Sache des Astronomen und nur mit dessen Instrumenten und Apparaten durchführbar ist, so wird doch die Lösung dieser Aufgaben, mit geringeren Ansprüchen auf Genauigkeit, vom Ingenieur, Geodäten, Geographen u. A. weit häufiger gefordert als vom Astronomen, und es darf desshalb hier eine Anleitung zu diesen genäherten und mit Theodolith, Spiegelkreis, Secundenuhr und astronomischen Tafeln durchführbaren Bestimmungen nicht fehlen. Eine solche Anleitung setzt aber die Kenntniss der Grundbegriffe der sphärischen Astronomie und insbesondere eine klare Anschauung von den verschiedenen Ebenen und Kreisen an der scheinbaren Himmelskugel, sowie der Zeiten voraus deren sich der Astronom zur Bestimmung der Lage und Bewegung von Sternen und irdischen Punkten bedient.

§. 153. A s t r o n o m i s c h e B e g r i f f e. Insoferne es sich in der sphärischen Astronomie nur um Winkelbestimmungen handelt, darf man sich den ganzen Fixsternhimmel als eine unbewegliche hohle Kugel denken worauf die Sterne vom Mittelpunkt der Erde aus welche zugleich Mittelpunkt der scheinbaren Himmelskugel ist, projicirt sind. Auf dieser Kugel befinden sich die Sterne mit Ausnahme von Sonne, Mond, Planeten und Kometen stets an demselben Orte, obwohl sie sich in der Richtung von Ost nach West zu bewegen scheinen. Diese scheinbare Bewegung rührt von der Axendrehung der Erde her, und sie verhält sich genau so, als ob sich der ganze Fixsternhimmel um die ins Unendliche verlängerte Erdaxe drehte: die Erdaxe wird so zur W e l t a x e und ihre im Unendlichen liegenden Enden werden zu H i m m e l s p o l e n von denen man ebenfalls einen Nordpol und einen Südpol unterscheidet. Ebenso gibt der Erdäquator und jeder irdische Parallelkreis, wenn man deren Ebenen ins Unendliche erweitert denkt, den H i m m e l s ä q u a t o r; denn alle diese Ebenen schneiden sich im Unendlichen mit dem Erdäquator, da der Erd-

halbmesser gegen den der scheinbaren Himmelskugel verschwindet. Wenn wir uns auf der unendlich klein und im Mittelpunkt der Himmelskugel liegend gedachten Erdoberfläche eine im Meridian eines Orts O liegende und die Erdaxe schneidende unendlich lange Tangente gezogen denken, so wird diese in Folge der Erddrehung einen Doppelkegel um die Weltaxe beschreiben, und dieser Kegel schneidet auf der scheinbaren Himmelskugel zwei Parallelkreise ab von gleicher Grösse unter sich und gleicher Stellung zum Pol und Aequator. Denkt man sich an die Stelle der eben beschriebenen Berührungslinie eine zum Meridian des Orts O senkrecht stehende Tangentialebene gesetzt, so wird diese die scheinbare Himmelskugel in zwei Hälften theilen, eine von O aus sichtbare und eine von dort aus unsichtbare Halbkugel. Den Schnitt der unendlich erweiterten Berührungsebene mit der Himmelskugel nennt man den Horizont des Orts O: er steht senkrecht zur Lothlinie dieses Orts deren oberes unendlich entferntes Ende das Zenith genannt wird, während das entgegengesetzt liegende unendlich ferne Ende das Nadir des Orts heisst. Eine durch das Zenith, das Nadir und die Himmelspole gehende Ebene ist ein Meridian der Himmelskugel, und es ergeben sich auch diese Meridiane als unendliche Erweiterungen irdischer Meridian-Ebenen. Der Abstand der Parallelkreise vom nächsten Pole ist gleich der Polhöhe oder geographischen Breite des Orts; sie schneiden von der Himmelskugel Zonen ab, wovon die dem sichtbaren Pole zunächst gelegene stets über, die andere entferntere stets unter dem Horizont bleibt. Die in der sichtbaren Zone liegenden Sterne gehen für den Ort O nicht unter und heissen desshalb Circumpolarsterne; alle übrigen gehen auf und unter. Zenith und Nadir eines Orts beschreiben am Himmel ebenfalls zwei Parallelkreise deren Abstand vom Himmelsäquator gleich der geographischen Breite des Orts ist, und welche folglich vom Pol um das Complement der Breite des Orts abstehen: es werden folglich alle Sterne durch das Zenith eines Orts gehen deren Polabstand dem Complement der Breite des Orts gleich ist. Von einem Meridian ist ebenso wie von der scheinbaren Himmelskugel nur diejenige Hälfte zu übersehen in der sich der sichtbare Himmelspol befindet, während der andere unsichtbare Theil einem Orte angehört dessen geographische Länge um 180^0 von der des ersten Orts verschieden ist. Ein Stern in dem ersten Theil des Meridians befindet sich in seiner oberen Culmination, kommt er in den zweiten Theil, so ist er in der unteren Culmination: in der oberen Culmination sind diejenigen Sterne sichtbar deren Abstand vom unsichtbaren Pole grösser ist als die geographische Breite des Orts, und in der unteren Culmination sehen wir nur jene Sterne deren Abstand vom sichtbaren Pole kleiner als die geographische Breite des Beobachtungsorts ist: die Circumpolarsterne sehen wir zweimal culminiren.

§. 154. Coordinatensysteme. In der sphärischen Astronomie unterscheidet man vier Coordinatensysteme zur Bestimmung der Lage der

Gestirne und irdischen Orte gegen die vorher beschriebenen Ebenen und Kreise, nämlich das Coordinatensystem der Azimuthe und Höhen, das der Stundenwinkel und Declinationen, das der Rectascensionen und Declinationen und das der Längen und Breiten. Wir werden hier nur die drei ersten als die vorzugsweise gebrauchten erklären.

1. Azimuth und Höhe. Führt man durch das Zenith Z eines Orts O und einen Stern S einen grössten Kreis der Himmelskugel, so steht dieser auf dem Horizont des Orts senkrecht und beide Kreise schneiden sich in H. Der Bogen des Verticalkreises von H aufwärts bis zum Sterne S misst den Höhenwinkel oder die Höhe h des Sterns, und $z = 90^0 - h$ ist die Zenithdistanz dieses Sterns. Denkt man sich ferner den Meridian des Orts bis zum Himmelshorizont gezogen und den südlichen Schnittpunkt beider mit M' bezeichnet, so ist der von M' bis H über West gezählte und durch den Bogen M' H gemessene Horizontalwinkel $M' O H = A$ das Azimuth des Sterns S in O. Die Azimuthe, Höhen und Zenithdistanzen werden mittels centrisch und horizontal aufgestellter Theodolithen gemessen. Will man den Ort eines Sterns nicht durch A und h oder A und z allein darstellen, so kann man denselben auch durch geradlinige Coordinaten x, y, z versinnlichen, indem man die z Axe in das Loth und die x y Ebene in die Horizontalebene des Orts legt, die positive Axe der x nach dem Südpunkte des Meridians und die der y nach dem Westpunkte des Perpendikels oder nach dem Azimuth von 90^0 gerichtet. Bei diesen Annahmen wird

$$x = \cos h \cos A; \qquad y = \cos h \sin A; \qquad z = \sin h \qquad (287)$$

2. Declination und Stundenwinkel. Wegen der Drehung der Erde um ihre Axe ändern sich Azimuth und Höhe eines Sterns beständig, sowie sie auch in einem und demselben Augenblick für verschiedene Orte der Erde einander nicht gleich sind. Um nun die Sternörter durch Coordinaten zu geben welche für alle Beobachtungsorte übereinstimmen und also nicht von der täglichen Bewegung der Erde abhängen, bezieht man die Sterne auf gewisse feste Kreise der Himmelskugel. Legt man durch einen Stern und die Himmelspole einen grössten Kreis (einen Meridian des Sterns), so steht dieser senkrecht zum Aequator, und es kann der Sternort eben so wohl durch den Bogen zwischen Stern und Aequator, d. i. durch die Declination δ, als durch den Bogen zwischen Stern und Pol, d. i. durch die Poldistanz $90^0 - \delta$ des Sterns angegeben werden. Der Himmelsmeridian auf dem die Declination und Poldistanz eines Sterns gemessen wird heisst dessen Declinations- oder Abweichungskreis, und es fällt die Ebene dieses Kreises mit der irdischen Meridianebene zusammen welche in ihrer unendlichen Erweiterung durch den Stern geht. Bildet diese Meridianebene mit jener des Orts O einen Winkel t, so heisst letzterer der Stundenwinkel des Sterns, und es kommt dieser Name davon her dass der Winkel t durch die Zeit gemessen wird welche die Erde braucht um sich um ihn zu drehen.

Dabei entsprechen 24 Stunden einem Drehungs-Winkel von 360°, und folglich ist eine Stunde = 15°, eine Minute Zeit = 15 Bogenminuten und eine Secunde Zeit = 15 Bogensecunden. Man wird sofort die Beziehungen zwischen Declination und geographischer Breite, sowie zwischen Stundenwinkel und geographischer Länge erkennen und sich ohne weitere Anleitung klar machen dass ein Stern der für einen Ort O im Meridian ist, für einen andern östlich gelegenen Ort O′ in demselben Augenblick einen Stundenwinkel τ hat, wenn dessen Längenunterschied gegen O in Zeit $= \tau$ oder in Bogen $= 15\,\tau$ ist. Will man sich den Sternort nicht bloss durch die Declination δ und den Stundenwinkel t vorstellen, so kann man ihn wieder durch rechtwinkelige Coordinaten ausdrücken welche auf Axen bezogen sind von denen die positive Richtung der z senkrecht auf dem Aequator steht und folglich der Weltaxe parallel ist, während die x y Ebene mit der Ebene des Himmelsäquators (oder der des irdischen Parallelkreises) zusammenfällt: dabei geht die positive Richtung der x durch den Nullpunkt und die positive Richtung der y durch den 90sten Grad des Stundenwinkels. Hienach wird

$$x' = \cos\delta \cos t; \qquad y' = \cos\delta \sin t; \qquad z' = \sin\delta \qquad (288)$$

Die Stundenwinkel und Declinationen der Sterne werden durch theodolithartige Instrumente gemessen welche Aequatoreale heissen und so aufgestellt sind dass die Alhidadenaxe der Weltaxe parallel ist und folglich der Horizontalkreis im Himmelsäquator liegt, während die Ebene des Höhen- oder Declinationskreises senkrecht zum Aequator steht.

3. Rectascension und Declination. Von den beiden vorhergehenden Coordinaten δ und t ist die Declination unveränderlich, während der Stundenwinkel mit der Zeit wächst und für einen und denselben Augenblick an beliebigen Orten der Erde um deren Längendifferenzen verschieden ist. Diese Veränderlichkeit wird beseitigt, wenn man alle Stundenwinkel von einem bestimmten Punkte des Himmelsäquators aus zählt, und als solchen Anfangspunkt hat man einen der zwei Schnittpunkte des Aequators und der Ekliptik oder Sonnenbahn (d. i. des grössten Kreises welchen der Sonnenmittelpunkt vom Erdmittelpunkt aus gesehen im Laufe eines Jahrs unter den Sternen von Westen nach Osten scheinbar beschreibt) gewählt. Die Ebene der Ekliptik ist gegen die des Aequators unter $23\frac{1}{2}$ Grad geneigt, und man nennt diese Neigung die Schiefe der Ekliptik. Der Schnittpunkt des Aequators welcher entsteht, wenn die Sonne aus der südlichen Halbkugel in die nördliche übergeht, heisst der Frühlings- Tag- und Nachtgleichenpunkt oder auch bloss der Frühlingspunkt, und es steht die Sonne am 21 März jeden Jahrs in diesem Punkte; der andere dem Uebergange der Sonne aus der nördlichen Halbkugel in die südliche entsprechende Schnittpunkt des Aequators heisst der Herbst- Tag- und Nachtgleichenpunkt oder auch bloss der Herbstpunkt, und es steht die Sonne am 23 September jeden Jahrs in diesem Punkte. Die Punkte der Ekliptik welche je 90° von dem Frühlings-

und dem Herbst- Tag- und Nachtgleichenpunkt abstehen, heissen Sonnenwendepunkte. Den vom Frühlingspunkt aus von Westen nach Osten gezählten und auf dem Aequator gemessenen Stundenwinkel eines Sterns nennt man dessen gerade Aufsteigung oder Rectascension, und es ist folglich ein Stern durch seine Declination und Rectascension ebenso bestimmt wie ein Ort auf der Erde durch seine geographische Breite und Länge. Behält man das vorige Axensystem bei, mit dem Unterschiede jedoch dass die positive Richtung der x nach dem Anfangspunkte und die positive Richtung der y nach dem 90sten Grade der geraden Aufsteigungen α geht, so finden die Beziehungen statt:

$$x'' = \cos\delta \cos\alpha; \qquad y'' = \cos\delta \sin\alpha; \qquad z'' = \sin\delta \qquad (289)$$

§. 155. Die verschiedenen Zeitarten. Mit dieser Bezeichnung soll nicht gesagt sein dass es qualitativ verschiedene Zeiten gebe, sondern nur dass es verschiedene Zeitabschnitte gibt welche in der Wissenschaft und im Leben als Masseinheiten für die Bewegungen von Erd- und Himmelskörpern angewendet werden. In diesem quantitativen Sinne allein unterscheiden wir drei Zeitarten, nämlich die Sternzeit, die wahre Sonnenzeit und die mittlere Sonnenzeit.

1. Die Sternzeit wird durch die Axendrehung der Erde bestimmt, von der wir wissen dass sie im höchsten Grade gleichförmig ist. Die Zeit für eine einmalige ganze Umdrehung der Erde um ihre Axe, oder die Zeit welche zwischen zwei aufeinander folgenden oberen oder unteren Culminationen eines und desselben Fixsterns verfliesst, heisst ein Sterntag, und dieser Tag wird in 24 Stunden zu 60 Minuten und jede Minute wieder in 60 Secunden Sternzeit getheilt. Der Sterntag beginnt für einen Ort mit 0^h in dem Augenblicke wo der Frühlingspunkt durch den Meridian des Orts geht, und es werden die Stunden dieses Tags wie die geraden Aufsteigungen von West nach Ost gezählt, so dass es 1^h, 2^h, 3^h . . . nach Sternzeit ist, wenn der Stundenwinkel des Frühlingspunkts 1^h, 2^h, 3^h . . . beträgt, oder wenn derjenige Punkt des Aequators culminirt, dessen gerade Aufsteigung 15^0, 30^0, 45^0 . . . ist. Die Sternzeit welche somit den jedesmaligen Stand des Fixsternhimmels anzeigt und für einen beliebigen Meridian M der Aequatorbogen ist, um den der Frühlingspunkt vom Meridian M absteht, wird bis zu 24 Stunden gezählt, und es umfasst ein Sterntag zwei Hälften des von Nachts 12 Uhr bis wieder dahin dauernden bürgerlichen Tags dessen Datum unverändert bleibt. Wenn also 4^h des 21 März mit Nachmittag 4 Uhr der bürgerlichen Zeitrechnung übereinstimmt, so bedeutet 16^h Sternzeit desselben Sterntags Morgens 4 Uhr des 22 März u. s. w. Die Sternzeit oder der Stundenwinkel des Frühlingspunkts Θ steht mit dem Stundenwinkel t und der geraden Aufsteigung α eines Sterns in der Beziehung

$$\Theta - t = \alpha \text{ oder } t = \Theta - \alpha \qquad (290)$$

wonach also der Unterschied zwischen Sternzeit und Stundenwinkel gleich der geraden Aufsteigung ist. Wäre demnach $\alpha = 195^0\,36'$ und $\Theta = 5^h$

$26' = 81^0\,30'$ gegeben, so fände man $t = 360^0 + 81^0\,30' - 195^0\,36' = 245^0\,54'$ oder $16^h\,23{,}6^m$ östlich.

2. Die wahre Sonnenzeit. Am 21 März geht die im Frühlingspunkte stehende Sonne um 0^h Sternzeit durch den Meridian eines Orts, und am 23 September, bei 12^h gerader Aufsteigung und im Herbstpunkt stehend, culminirt sie um 12^h Sternzeit. Die Zeit der Culmination der Sonne ändert sich somit in einem halben Jahre um einen halben und folglich vom 21 März bis wieder dahin um einen ganzen Sterntag. Dieser Unbequemlichkeit wegen wird die Sternzeit als Zeitmass für das bürgerliche Leben nicht angewendet, sondern die mittlere Sonnenzeit. Um diese zu definiren müssen wir erst erklären was man unter wahrer Sonnenzeit versteht. Man nennt aber einen wahren Sonnentag die Zeit welche zwischen zwei aufeinander folgenden sichtbaren Culminationen der Sonne verfliesst, und es ist 0^h wahre Zeit an einem Orte, wenn der Mittelpunkt der Sonne im Meridian dieses Orts liegt oder eine richtige Sonnenuhr gerade 12 Uhr zeigt. Solche Uhren allein geben wahre Sonnentage an. Da sich nun (wegen der Schiefe der Ekliptik und der ungleichförmigen Bewegung der Erde in ihr) die gerade Aufsteigung der Sonne nicht gleichförmig ändert, so geht auch die wahre Sonnen-Zeit nicht gleichförmig fort, und sie ist desshalb ebenso wenig als die Sternzeit ein brauchbares Zeitmass für das bürgerliche Leben. Ein solches gewährt nur

3. die mittlere Sonnenzeit oder diejenige Zeit welche erhalten wird, wenn man sich vorstellt, die Sonne bewege sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit in der Aequatorebene des Himmels und brauche zur Vollendung eines Umlaufs genau so lange als die Erde braucht, um ihre Bahn in der Ekliptik ein Mal zurückzulegen. Auf Grund dieser Vorstellung bekommt man ideale mittlere Tage von gleicher Länge welche sich durch Uhren darstellen lassen und bald länger, bald kürzer als die wahren Sonnentage sind. Diese Unterschiede können von 0 bis 16 Minuten anwachsen. Hienach umfasst ein mittlerer Sonnentag $24^h\,3^m\,56{,}555^s$ Sternzeit, und diese Zeitsumme, als Einheit angenommen und in 24 Stunden zu 60 Minuten und 60 Secunden abgetheilt, heisst auch abgekürzt ein mittlerer Tag. Die mittlere Zeit oder der Stundenwinkel der mittleren Sonne ist somit der in westlicher Richtung gezählte Bogen zwischen der mittleren Sonne und dem Meridian eines Orts, und es haben verschiedene Orte eine um die Meridian- oder Längendifferenz verschiedene mittlere Zeit. Schliesslich sei noch bemerkt dass man die gerade Aufsteigung der mittleren Sonne die Sternzeit im mittleren Mittage nennt, und dass dieselbe zur Verwandlung der Sternzeit in mittlere Zeit und umgekehrt gebraucht wird.

4. Zeitverwandlungen. Darunter verstehen wir die Berechnung einer Zeitart aus einer anderen auf Grund einer gegebenen Gleichung zwischen beiden Zeiten. Eine solche Gleichung nennt man allgemein eine Zeitgleichung; im Besonderen aber wird diese Bezeichnung nur von

dem Unterschiede zwischen wahrer und mittlerer Zeit gebraucht. Es würde jedoch hier zu weit führen, diese Zeitgleichung zu entwickeln; wir beschränken uns auf die Zeitverwandlungen mit Hilfe von astronomischen Tafeln und Ephemeriden die man für ein bestimmtes Jahr stets zwei oder drei Jahre voraus haben kann, und unter denen wir das „Nautische Jahrbuch" von Dr. Bremiker in Berlin besonders bequem und billig (1 Mk 50 Pf.) finden.

a) Sternzeit und mittlere Zeit. In Folge der Bewegung der Erde um die Sonne vom Zeichen der Wage nach dem des Steinbocks scheint es als ob sich die Sonne vom Widder gegen den Krebs um die Erde bewegte. Durch diese scheinbare Bewegung verliert die Sonne in einem tropischen Jahre (d. h. in der Zeit von einer Frühlingsnachtgleiche zur anderen) eine volle tägliche Umdrehung gegen die Fixsterne, und es enthält daher dieses Jahr einen Sterntag mehr als mittlere Tage, so dass

$$1 \text{ Sterntag} = \frac{365{,}2422}{366{,}2422} \text{ mittl. Tagen} = 1 \text{ mittl. Tag} - 3^m\, 55{,}909^s \text{ M. Z.}$$

$$1 \text{ mittl. Tag} = \frac{366{,}2422}{365{,}2422} \text{ Sterntagen} = 1 \text{ Sterntag} + 3^m\, 56{,}555^s \text{ St. Z.}$$

Bedeutet nun allgemein Θ die Sternzeit welche einer mittleren Zeit M entspricht, und heisst Θ_0 die aus einer Tafel zu entnehmende Sternzeit für $M = 0$, d. h. für den mittleren Mittag des Datums, so verwandelt man Sternzeit und mittlere Zeit nach folgenden Formeln:

$$M = (\Theta - \Theta_0)\, \frac{24^h - 3^m\, 55{,}909^s}{24^h} \qquad (291)$$

$$\Theta = \Theta_0 + M\, \frac{24^h + 3^m\, 56{,}555^s}{24^h} \qquad (292)$$

für welche man die Werthe der Brüche, womit $(\Theta - \Theta_0)$ und M multiplicirt sind, in den Tafeln findet.

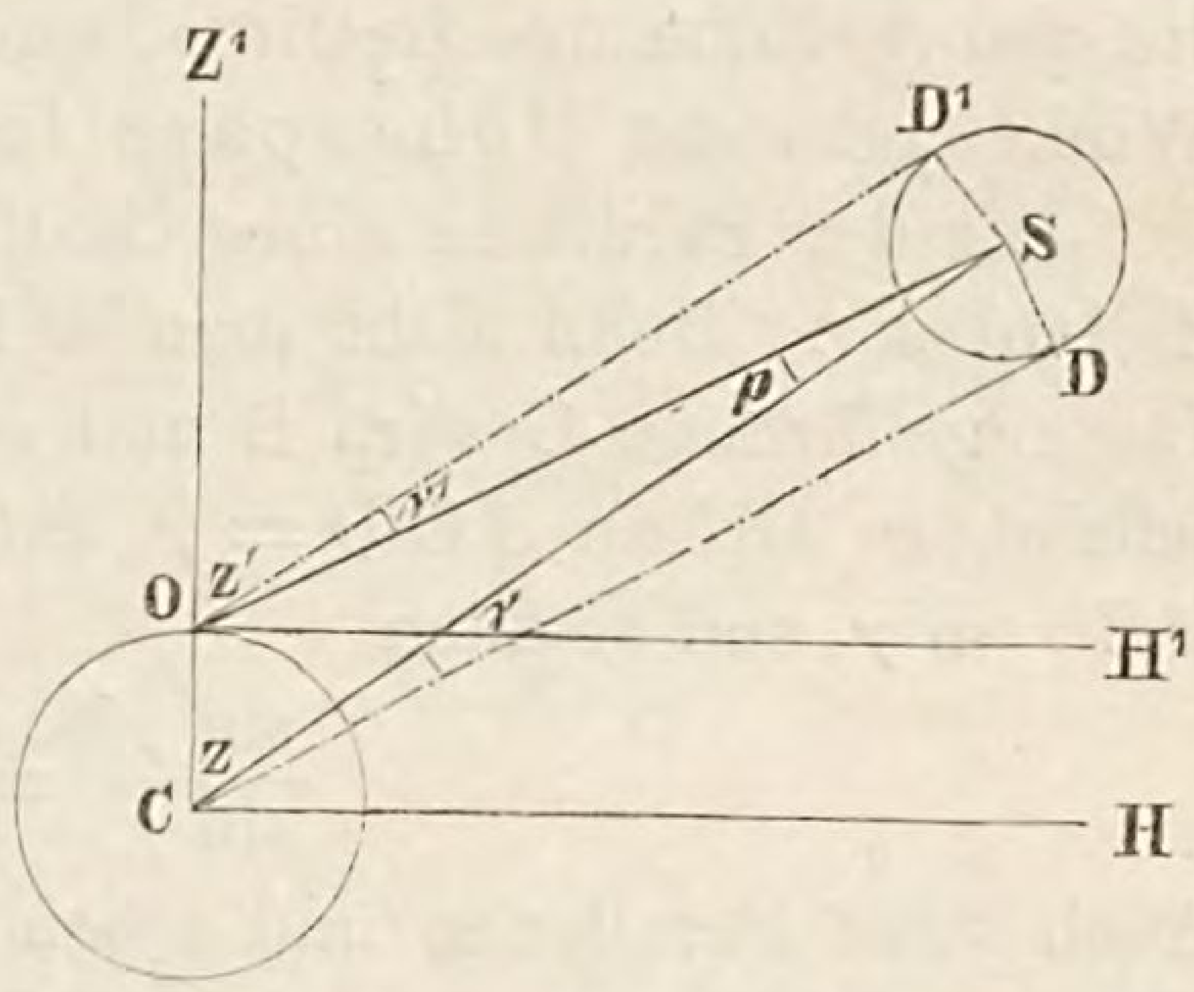
b) Wahre und mittlere Zeit. Die Verwandlung der wahren Zeit in mittlere geschieht einfach dadurch dass man aus den Ephemeriden die Zeitgleichung oder denjenigen Zeitbetrag sucht welcher mit seinem Vorzeichen der gegebenen wahren Zeit zuzulegen ist. (Siehe Bremiker „Nautisches Jahrbuch" pag. I für jeden Monat, woselbst die Zeitgleichung für jeden Tag in einer besonderen Spalte enthalten ist.) Aus der Zeitgleichung: Wahre Zeit (W) plus Verbesserung (v) gleich mittlere Zeit (M) oder $W + v = M$ findet man $W = M - v$, d. h. man findet die wahre Zeit mit derselben in den Tafeln enthaltenen Zeitgleichung; da aber v in wahrer Zeit gegeben ist und hier in mittlerer ausgedrückt werden muss, so bringe man an dem gegebenen M die Verbesserung v annähernd an und interpolire dann mit der genäherten wahren Zeit, so findet man einen hinreichend genauen Werth für v der von M abzuziehen ist, um die gesuchte wahre Zeit zu geben.

c) Sternzeit und wahre Zeit. Nach Nr 2 dieses Paragraphs ist

die wahre Zeit der Stundenwinkel der Sonne: man braucht folglich nur die gerade Aufsteigung der Sonne für die gegebene wahre Zeit zu suchen und zu dieser zu addiren, um die Sternzeit zu erhalten. Ist Sternzeit in wahre Zeit zu verwandeln, so bedarf man des genäherten Werths der wahren Zeit behufs der Interpolation der geraden Aufsteigung der Sonne. Diesen Näherungswerth herzustellen ist aber umständlicher als die gegebene Sternzeit nach Nr 4a in mittlere Zeit und diese mit Hilfe der Zeitgleichung nach Nr 4b in wahre Zeit zu verwandeln, wesshalb man diesen Weg der direkten Umrechnung vorzieht.

§. 156. Die Parallaxe. Die astronomischen Tafeln geben die Oerter der Gestirne, also auch der Sonne, des Monds, der Planeten so wie sie vom Mittelpunkt der Erde aus erscheinen würden, während sie doch nur auf der Erdoberfläche beobachtet werden können. Für Fixsterne ist es wegen ihrer unendlichen Entfernung gleich wo sie beobachtet werden, da ihnen gegenüber die ganze Erde selbst nur als Punkt erscheint; bei Sonne, Mond und Planeten verhält sich aber die Sache anders, da ihre Entfernungen zum Halbmesser der Erde noch in einem angebbaren Verhältnisse stehen. Um daher die Angaben der astronomischen Tafeln benützen zu können, muss man den Winkel kennen den die vom Beobachtungsorte und dem Erdmittelpunkte nach dem Centrum des betreffenden Gestirns gezogenen Geraden in diesem Centrum mit einander bilden. Diesen Winkel nennt man die Parallaxe des betreffenden Gestirns, und es ist von vorneherein klar dass diese Parallaxe nicht bloss mit dem Gestirn sondern auch für ein und dasselbe Gestirn mit der Zeit und dem Beobachtungsort auf der Erdoberfläche sich ändern muss.

Fig. 154.



Stellt in Fig. 154 der grössere Kreis einen Schnitt der Erde, der kleinere einen Schnitt des Gestirns vor, und ist S der Mittelpunkt des letzteren, C der Mittelpunkt der Erde und O der Beobachtungsort auf ihr, so ist der Winkel C S O = p die Parallaxe des Gestirns S und der Schnittpunkt Z' des durch O gezogenen und unendlich verlängerten Erdhalbmessers mit der scheinbaren Himmelskugel das geocentrische Zenith von O. Hat man in O die wahre Zenithdistanz z' = der scheinbaren plus der astronomischen Refraction bestimmt und setzt man den Erdhalbmesser $C\,O = r_0$ und die Entfernung $C\,S = d$, so verhält sich $r_0 : d = \sin p : \sin z'$ und es ist hienach

$$\sin p = \frac{r_0 \sin z'}{d} \tag{293}$$

Für $z' = 90^0$ erhält p seinen grössten Werth und es wird dieser mit dem Namen Horizontalparallaxe bezeichnete Werth strenge und genähert gefunden aus den beiden Gleichungen:

$$\sin \pi = \frac{r_0}{d} \quad \text{und} \quad \pi = 206265'' \frac{r_0}{d} \tag{294}$$

Führt man den Werth von $\sin \pi$ und $z' = z + p$ in den Ausdruck für $\sin p$ ein und entwickelt, so entstehen folgende Formeln:

$$\sin p = \sin \pi \sin z' \tag{295}$$

$$\operatorname{tg} p = \frac{\sin \pi \sin z}{1 - \sin \pi \cos z} \tag{296}$$

$$p = \frac{\sin \pi \sin z}{\sin 1''} + \frac{\sin^2 \pi \sin 2z}{2 \sin 1''} + \frac{\sin^3 \pi \sin 3z}{3 \sin 1''} + \ldots\ldots \tag{297}$$

Da die Erde keine Kugel sondern ein Ellipsoid ist, so fällt das geocentrische Zenith nicht genau mit dem scheinbaren Zenith zusammen welches durch das Loth in O bestimmt wird. Stellt nun in der beigedruckten Figur O H' den scheinbaren und C H den astronomischen oder wahren Horizont vor, so ist der Winkel S O H' die scheinbare und S C H die wahre Höhe des Gestirns, und es stellt p den Unterschied dieser zwei Winkel oder die Höhenparallaxe des Gestirns S vor.

Mit der Parallaxe eines Gestirns ändert sich auch dessen scheinbarer Halbmesser. Denn zieht man in Fig. 154 die Tangenten O D' und C D an das kugelförmige Gestirn S und setzt den Halbmesser $DS = SD' = r'$, die scheinbare Grösse $SCD = \gamma$ und $SOD' = \gamma'$, so ist $r' = OS \,.\, \sin \gamma' = CS \,.\, \sin \gamma$ und folglich

$$\frac{\sin \gamma'}{\sin \gamma} = \frac{CS}{OS} = \frac{\sin z'}{\sin z} \tag{298}$$

Auch diese Parallaxen und scheinbaren Halbmesser findet man für Sonne, Mond und Planeten in den astronomischen Tafeln angegeben.

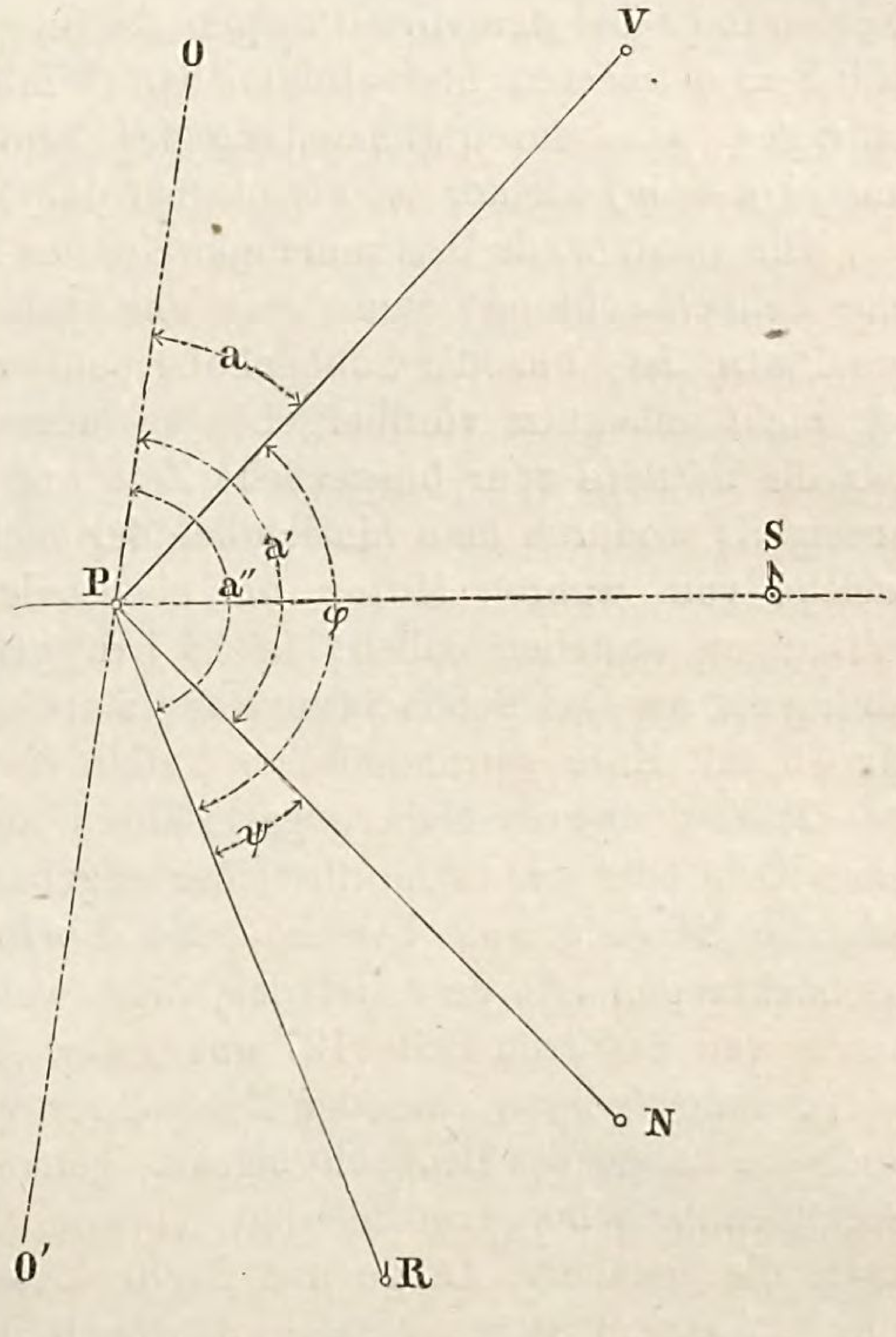
§. 157. Aufgabe. Die Mittagslinie eines Orts und das Azimuth einer gegebenen Geraden annähernd zu bestimmen.

Diese Aufgabe kann, abgesehen von dem bekannten Verfahren der Beobachtung der Länge des Sonnenschattens den ein lothrechter Stift auf wagrechter Ebene erzeugt, auf folgenden zwei Wegen durch Beobachtung der Sonne und durch Messung verticaler und horizontaler Winkel gelöst werden.

1) Man stellt einen vollständig berichtigten Theodolithen an einem heiteren Tage mehrere Stunden vor Mittag über dem Punkte P (Fig. 155), durch den die Mittagslinie gehen soll, centrisch und horizontal auf, versieht hierauf das Ocular des Fernrohrs mit einem Sonnenglase und stellt das Fadenkreuz auf die Sonnenscheibe so ein dass es z. B. deren oberen Rand in der Mitte schneidet. Ohne an dem Instrumente das Geringste zu ändern, liest man die Nonien des Horizontal- und Verticalkreises ab und bemerkt sich die Zeit der Beobachtung nach seiner Taschenuhr. Die Ablesungen auf dem Horizontalkreise seien a und $180^0 + a$, die auf dem Verticalkreise v und $180^0 + v$, und die Beobachtung habe m Stunden vor Mittag statt-

gefunden. Nun bleibt das Instrument verdeckt und unberührt stehen, bis gegen die m^{te} Stunde nach dem Mittage, um welche man die Alhidade des Horizontalkreises löst und mit dem noch wie am Vormittage geneigten Fernrohre der Sonne folgt, bis das Fadenkreuz wieder auf die obere Mitte des Sonnenrands einsteht. Ist dieses der Fall, so liest man die zwei Nonien des Horizontalkreises ab. Diese Ablesungen seien $= a'$ und $180^0 + a'$. Dreht man nun die Alhidade des Horizontalkreises so weit nach links zurück dass die Ablesungen $\frac{1}{2}(a + a')$ und $180^0 + \frac{1}{2}(a + a')$ werden und steckt in der Richtung der Absehlinie ein Signal aus, so bezeichnet dieses mit dem Standpunkte des Instruments die gesuchte Mittagslinie. Denn wenn als bekannt angenommen wird: erstens dass der wahre Mittag eines Punkts der Erde in dem Augenblicke stattfindet wo die Meridianebene dieses Punkts durch die Mitte der Sonne geht; zweitens dass die Richtung nach der Sonne in dem Augenblicke wo sie im Meridian steht oder culminirt, die Mittagslinie bezeichnet; und drittens dass die Sonnenhöhe in gleichen Zeitabständen vom wahren Mittage gleich gross ist: so folgt von selbst dass die gesuchte Mittagslinie P S (Fig. 155) den Horizontalwinkel V P N welcher aus der vor- und nachmittägigen Beobachtung gleicher Sonnenhöhen hervorging, halbiren muss; ist aber dieses der Fall und bezeichnet P O den durch den Nullpunkt des Limbus gehenden Halbmesser, so entsprechen die Winkel O P V und O P N den Ablesungen a und a' des Nonius I, und es muss folglich auch die Ablesung am ersten Nonius $= \frac{1}{2}(a + a')$ sein, wenn die Absehlinie des Fernrohrs in der Mittagslinie liegen soll. Der Nonius II liefert selbstverständlich bei den Einstellungen auf V, N, S Ablesungen welche genau oder sehr nahe 180^0 mehr oder weniger als die am ersten Nonius betragen.

Fig. 155.



Hat man die Richtung der Mittagslinie P S gefunden, so ergibt sich sofort das Azimuth einer durch den Standpunkt des Instruments gehenden

Richtung P R, indem man das Theodolithenfernrohr auf den Punkt R einstellt, an den Nonien des Horizontalkreises abliest und aus diesen Ablesungen den Horizontalwinkel S P R berechnet. War die Ablesung bei der Einstellung auf das Object R auf dem Nonius I $= a''$ und auf dem Nonius II $= 180^0 + a''$, so ist das gesuchte Azimuth S P R $= a'' - \frac{1}{2}(a + a')$. Mit diesem Azimuth sind selbstverständlich die Azimuthe aller um P herum liegenden Punkte bekannt, sobald man deren Richtungswinkel gemessen hat.

Wäre es aus irgend einem Grunde nicht möglich den Theodolithen behufs der Aufsuchung der Mittagslinie den ganzen Tag hindurch stehen zu lassen, so muss man Vormittags den Winkel R P V $= a'' - a = \varphi$ und Nachmittags bei der vormittägigen Neigung (v) des Fernrohrs den Winkel R P N $= \psi$ messen und alsdann den Winkel R P S $= \frac{1}{2}(\varphi + \psi)$ an R P antragen, was durch Einstellung des Nonius I auf eine Ablesung welche um $\frac{1}{2}(\varphi + \psi)$ kleiner ist als die bei der Visur nach R, geschieht.

Die vorstehende Bestimmungsweise der Mittagslinie fordert nur desshalb eine Zeitbeobachtung, damit man am Nachmittage zur rechten Zeit wieder am Platze ist, um die Sonnenhöhe, auf welche das Fernrohr eingestellt ist, nicht unbenützt vorübergehen zu lassen. Da jedoch die Taschenuhren nur die mittlere oder bürgerliche Zeit und also nicht den wahren Mittag anzeigen, wodurch man hinsichtlich der nachmittägigen Beobachtungszeiten welche vom wahren Mittag um ebensoviel als die entsprechenden vormittägigen abstehen sollen, leicht irre geführt werden kann, so ist es nöthig die an dem Beobachtungstage stattfindende Zeitdifferenz nach §. 155 Nr 4b mit Hilfe astronomischer Tafeln zu beachten.

2) Ein anderes Näherungsverfahren zur Bestimmung der Mittagslinie eines Orts oder des Azimuths einer gegebenen Geraden welches ebenfalls nur die Messung von Vertical- und Horizontalwinkeln und einige Zeitbeobachtungen erfordert, ist dasjenige welches in der Praktischen Astronomie von Sawitsch Seite 127 angegeben ist.

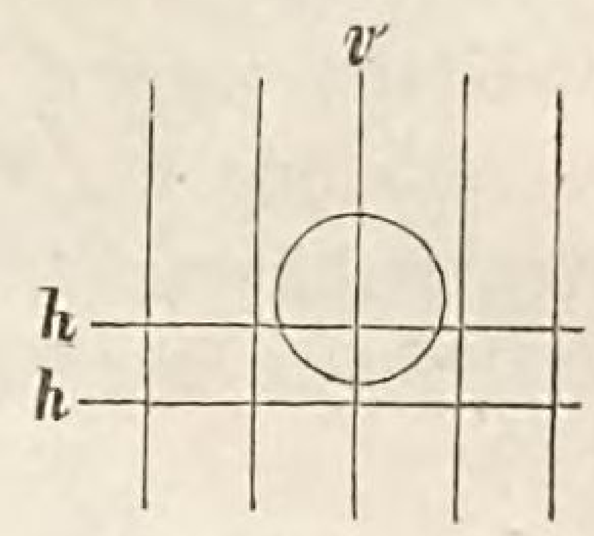
Nehmen wir an dass der Beobachter weder die geographische Breite noch die Länge des Beobachtungsorts genau kennt, aber den Stand seiner Secundenuhr schon ermittelt hat, so kann er mit Hilfe einer guten Landkarte die genäherte Länge und Breite dieses Orts finden, und mit seiner Uhr und einem astronomischen Jahrbuch die dem Ort und der Zeit der Beobachtung entsprechende Declination des zu benützenden Fundamentalsterns (Abweichung δ nach §. 154 Nr 2) bestimmen.

Soll die Bestimmung der Mittagslinie am Tage, also mit Hilfe von Sonnenbeobachtungen geschehen, so werden je vier Einstellungen und Ablesungen am Höhen- und am Horizontalkreise des Theodolithen nothwendig und zwar am besten dann, wenn sich die Sonne Vor- oder Nachmittags in der Nähe des ersten Verticals (d. i. der von Ost nach West gerichteten und zum Meridian des Beobachtungsorts senkrecht stehenden Verticalebene) befindet. Diese Stellung findet aus Gründen der mathematischen Geographie nur zwischen dem 21 März und 23 Septbr statt; es bleibt aber für die

Zeit vor oder nach diesen Tagen das Verfahren nicht ausgeschlossen, nur ist es minder genau durchzuführen. Wir wollen also annehmen die Beobachtungen werden innerhalb des Sommerhalbjahrs und zwar an einem Nachmittage gemacht. Das Beobachtungsschema ist dann folgendes:

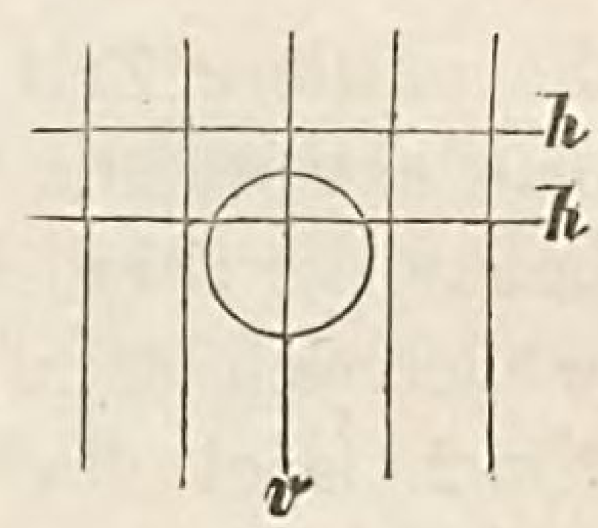
Erste Kreislage zwischen Osten und Süden, parallel der südwestlichen Richtung des Fernrohrs:

Fig. 156.



a) Einstellung des Höhen- und des Horizontalkreises auf den unteren Sonnenrand, so dass dieser Rand nach der beigedruckten Fig. 156 von dem Mittelfaden v des Fernrohrs symmetrisch durchschnitten wird und gleichzeitig mitten zwischen den Horizontalfäden h, h liegt. Die Ablesung am Höhenkreise heisse α_1, die am Horizontalkreise β_1 und die auf der nach mittlerer Zeit gehenden Uhr t_1;

Fig. 157.



b) Einstellung des Fernrohrs auf den oberen Sonnenrand in der gleichen Weise, so dass dieser nach Fig. 157 vom Mittelfaden v halbirt wird und in der Mitte der Horizontalfäden liegt. Die Ablesung am Höhenkreise heisse α', die am Horizontalkreise β' und die auf der Uhr t'.

Zweite Kreislage zwischen Westen und Norden, hervorgebracht durch Drehen der lothrechten Alhidadenaxe um 180° und Durchschlagen des Fernrohrs:

c) Einstellung auf den oberen Rand der Sonne wie bei b), Ablesung am Höhenkreise $= \alpha''$, am Horizontalkreise $= \beta''$ und an der Uhr $= t''$;

d) Einstellung auf den unteren Rand der Sonne wie bei a), Ablesung am Höhenkreise $= \alpha_{,,}$, am Horizontalkreise $= \beta_{,,}$ und an der Uhr $= t_{,,}$.

Sind nun, wie wir annehmen, die Ablesungen $\alpha_{,}$ und α' kleiner als 90° und $\beta_{,}$ und β' kleiner als 180°, so sind die Ablesungen β'' und $\beta_{,,}$ kleiner als 270° und α'' nebst $\alpha_{,,}$ kleiner als 360°, d. h. es sind die Zenithdistanzen der Sonnenränder

$$\zeta_{,} = \alpha_{,}; \quad \zeta' = \alpha'; \quad \zeta'' = 360^0 - \alpha''; \quad \zeta_{,,} = 360^0 - \alpha_{,,}$$

und die diesen Zenithdistanzen entsprechenden, vom Nullpunkte des Horizontalkreises im Sinne der Theilung gezählten Stellungen der Alhidade dieses Kreises

$$\eta_{,} = \beta_{,}; \quad \eta' = \beta'; \quad \eta'' = \beta'' - 180^0; \quad \eta_{,,} = \beta_{,,} - 180^0$$

Die Ausführung dieser vier Einstellungen und acht Ablesungen wird, die nöthige Uebung im Beobachten vorausgesetzt, höchstens eine halbe Stunde dauern, und für diese Zeit kann angenommen werden dass sowohl die ζ als die η proportional der Zeit sich ändern. Ist dieses aber der Fall, dann entsprechen dem Zeitmomente $\tau = \frac{1}{4}\,(t_{,} + t' + t'' + t_{,,})$ folgende Winkel zur Bestimmung der Lage des Sonnenmittelpunkts, nämlich

der Verticalwinkel $\zeta = \frac{1}{4}(\zeta_{,} + \zeta' + \zeta'' + \zeta_{,,})$
der Horizontalwinkel $\eta = \frac{1}{4}(\eta_{,} + \eta' + \eta'' + \eta_{,,})$

Diese Winkel sind ihrer Beobachtungsart wegen von Excentricitäts- und Indexfehlern frei, der Verticalwinkel bedarf aber noch einer Verbesserung erstens wegen der astronomischen Strahlenbrechung deren mittleren Werth ϱ man für jede Zenithdistanz ζ in einer Tabelle des Anhangs findet, und zweitens wegen der Höhenparallaxe der Sonne welche jedoch hier, wo es sich nur um eine genäherte Bestimmung handelt, ihrer Geringfügigkeit wegen übersehen werden darf. Wir setzen nun die wahre Zenithdistanz der Sonne zur Zeit τ gleich

$$z = \zeta + \varrho$$

und drücken die in Bogenmass bekannte Längendifferenz zwischen dem Beobachtungsort und einer Sternwarte N für die es ein astronomisches Jahrbuch gibt (z. B. Berlin, Greenwich, Paris etc.) in Zeit aus. Ist dieser Unterschied $= \pm l$, so ist

$$t = \tau \pm l$$

die mittlere Zeit auf der Sternwarte welche der Zeit τ am Beobachtungsorte entspricht. Für diese Zeit findet man aus dem astronomischen Jahrbuche der Sternwarte die zugehörige Declination δ des Sonnenmittelpunkts, womit sich dann leicht aus dem sphärischen Dreiecke Zenith — Sonne — Himmelspol das Azimuth des Sonnenmittelpunkts a nach der Formel berechnen lässt:

$$\cos a = \frac{\sin \varphi \cos z - \sin \delta}{\cos \varphi \sin z} \tag{299}$$

worin φ die Breite des Orts bezeichnet und das Azimuth a der Seite Zenith — Sonne von Süden aus über Westen gezählt ist. Diese Formel lässt sich für die logarithmische Berechnung bequemer gestalten, wenn man die Hilfsgrösse

$$q = \tfrac{1}{2}(z - \varphi - \delta) \tag{300}$$

einführt; denn man erhält dadurch unter Benützung der trigonometrischen Formeln $2 \sin^2 \frac{1}{2} x = 1 - \cos x$ und $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{1}{2}(x + y) \cdot \cos \frac{1}{2}(x - y)$ nach einfachen Umformungen

$$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos q \cdot \sin (q + \delta)}{\cos \varphi \sin z}} \tag{301}$$

Wenn so der Winkel a bekannt ist und der Südpunkt des Horizonts vom Nullpunkt des Horizontalkreises um den Winkel σ absteht, so ist für die Nachmittagsbeobachtung

$$\sigma + a = \eta \qquad \text{und} \qquad \sigma = \eta - a \tag{302}$$

und für eine Vormittagsbeobachtung, wenn das Azimuth von Süden nach Osten hin gezählt wird (was in der Formel für $\sin \frac{1}{2} a$ nichts ändert):

$$\sigma - a = \eta \qquad \text{und} \qquad \sigma = \eta + a \tag{303}$$

In dem ersten Falle (302) ist, wenn $\eta - a$ negativ werden sollte, 360^0 zuzulegen, und in dem zweiten, wenn $\eta + a$ grösser als 360^0 wird, 360^0

abzuziehen. Stellt man nun den betreffenden Nonius auf die Ablesung σ ein, so ist die gesuchte Mittagslinie und durch Einstellen auf eine gegebene Richtung R, Ablesen σ' und Abziehen das Azimuth $\omega = \sigma' - \sigma$ dieser Richtung R gefunden. Als Zahlenbeispiel einer solchen Meridianbestimmung kann der in Melde's Werk „Astronomische Zeitbestimmung" S. 319 berechnete besondere Fall dienen welcher sich auf Marburg und den 26 März 1874 bezieht.

Aus einem Atlas wurde die auf Ferro bezogene geogr. Länge von Marburg $= 26^0\,25'\,54''$ und jene von Greenwich $= 17^0\,41'\,1''$ gefunden; der Längenunterschied Greenwich-Marburg betrug also $8^0\,44'\,53''$ in Bogen oder $34^m\,59{,}5^s$ in Zeit. Die Mitte der nachmittägigen Beobachtung fiel auf die Zeit $\tau = 5^h\,0^m$ einer zuverlässigen Taschenuhr; die Declination der Sonne im mittleren Mittage von Greenwich betrug am 26 März (nach dem Nautical Almanac) $2^0\,15'\,15'',8$ und die tägliche Aenderung dieser Declination vom 26 auf den 27 März $23'\,29'',7$. Daher war die der Zeit $\tau = 5^h\,0'$ entsprechende Declination der Sonne

$$\delta = 2^0\,15'\,15'',8 + \frac{23'\,29'',7\,(5^h\,0' - 35^m)}{24^h} = 2^0\,19'\,35'',2$$

Die Ablesungen am Höhenkreise waren folgende:

$$\alpha_, = 77^0\,27';\quad \alpha' = 77^0\,23';\quad \alpha'' = 281^0\,55';\quad \alpha_{,,} = 281^0\,8'$$

und am Horizontalkreise wurde abgelesen:

$$\beta_, = 118^0\,10'\,30'';\quad \beta' = 118^0\,50'\,0'';\quad \beta'' = 299^0\,30'\,30'';\quad \beta_{,,} = 299^0\,49'\,0''$$

Es hatten somit die Zenithdistanzen nachstehende Werthe:

$$\zeta_, = 77^0\,27';\quad \zeta' = 77^0\,23';\quad \zeta'' = 78^0\,5';\quad \zeta_{,,} = 78^0\,52'$$

$$\zeta = 77^0\,56'\,45''$$

und die Horizontalwinkel betrugen einzeln und durchschnittlich:

$$\eta_, = 118^0\,10'\,30'';\quad \eta' = 118^0\,50'\,0'';\quad \eta'' = 119^0\,30'\,30'';\quad \eta_{,,} = 119^0\,49'\,0''$$

$$\eta = 119^0\,5'\,0''$$

Die mittlere astronomische Refraction ist für $\zeta = 78^0$ gleich $\varrho = 4'\,24''$ und die Sonnenparallaxe $\pi = 8'',8$; daher das geocentrische Zenith

$$z = \zeta + \varrho - \pi = 78^0\,1'\,0'',2$$

$$q = \tfrac{1}{2}(z - \varphi - \delta) = 12^0\,26'\,19''$$

$$q + \delta = 14^0\,45'\,54'',2$$

$$a = 78^0\,46'\,16''$$

$$\sigma = 40^0\,18'\,44''$$

Als das Fernrohr auf das astronomisch genau bestimmte Meridianzeichen der Sternwarte eingestellt wurde, war die Ablesung des betreffenden Nonius $40^0\,19'\,55''$ und daher die Mittagslinie bis auf 1,2 Minuten richtig bestimmt.

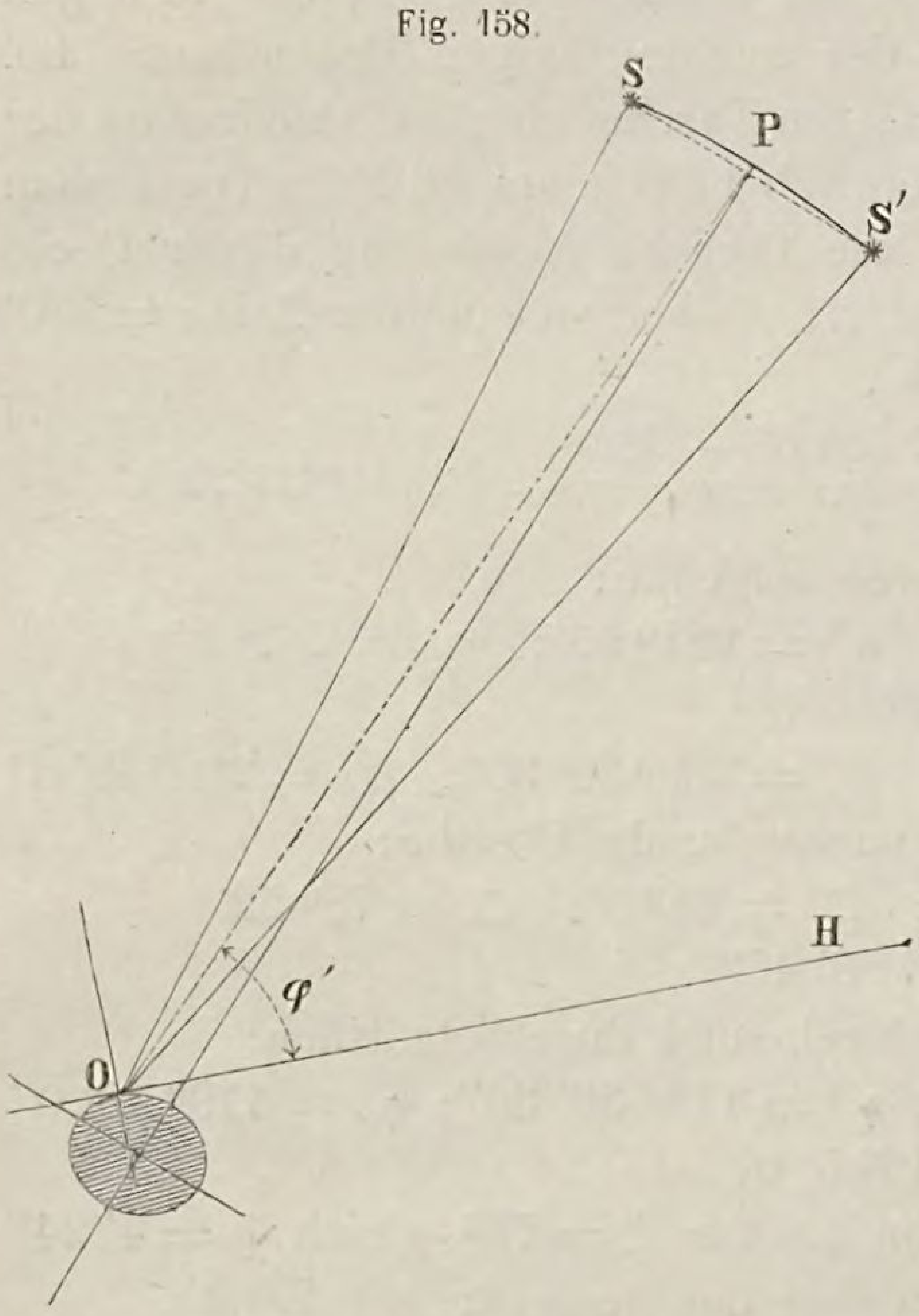
§. 158. Aufgabe. Die Polhöhe oder geographische Breite eines gegebenen Orts der Erde zu bestimmen.

Unter der Polhöhe eines Orts versteht man den Höhenwinkel der Verbindungslinie desselben mit dem Himmelspole (einem in der Richtung der Erdaxe unendlich weit entfernten Punkte). Da nun jene Linie mit der Erdaxe parallel zu nehmen ist, so kann man auch sagen: die Polhöhe ist der

Neigungswinkel der scheinbaren Horizontalebene eines Orts gegen die Erdaxe. Vergleicht man damit die geographische Breite welche der Neigungswinkel der Verticallinie eines Orts gegen die Aequatorebene ist (Bd. I, §. 4): so sieht man sofort ein dass die Polhöhe und Breite eines und desselben Orts der Grösse nach gleich sind, und dass man demnach die Breite durch die Polhöhe bestimmen kann.

Alle Methoden die Polhöhe eines Orts mit grösster Genauigkeit zu messen, erfordern einen vorzüglichen astronomischen Apparat (feine Winkelmessinstrumente, Chronometer, Hilfstafeln etc.); wenn man diesen aber nicht besitzt, so kann man entweder mittels eines Theodolithen oder Spiegelkreises allein durch blosses Messen von Höhenwinkeln oder durch dieselben Instrumente und eine gute Secundenuhr die Polhöhe für viele Zwecke ausreichend genau finden.

Fig. 158.



1. Lösung der Aufgabe mit Theodolith oder Spiegelkreis allein.

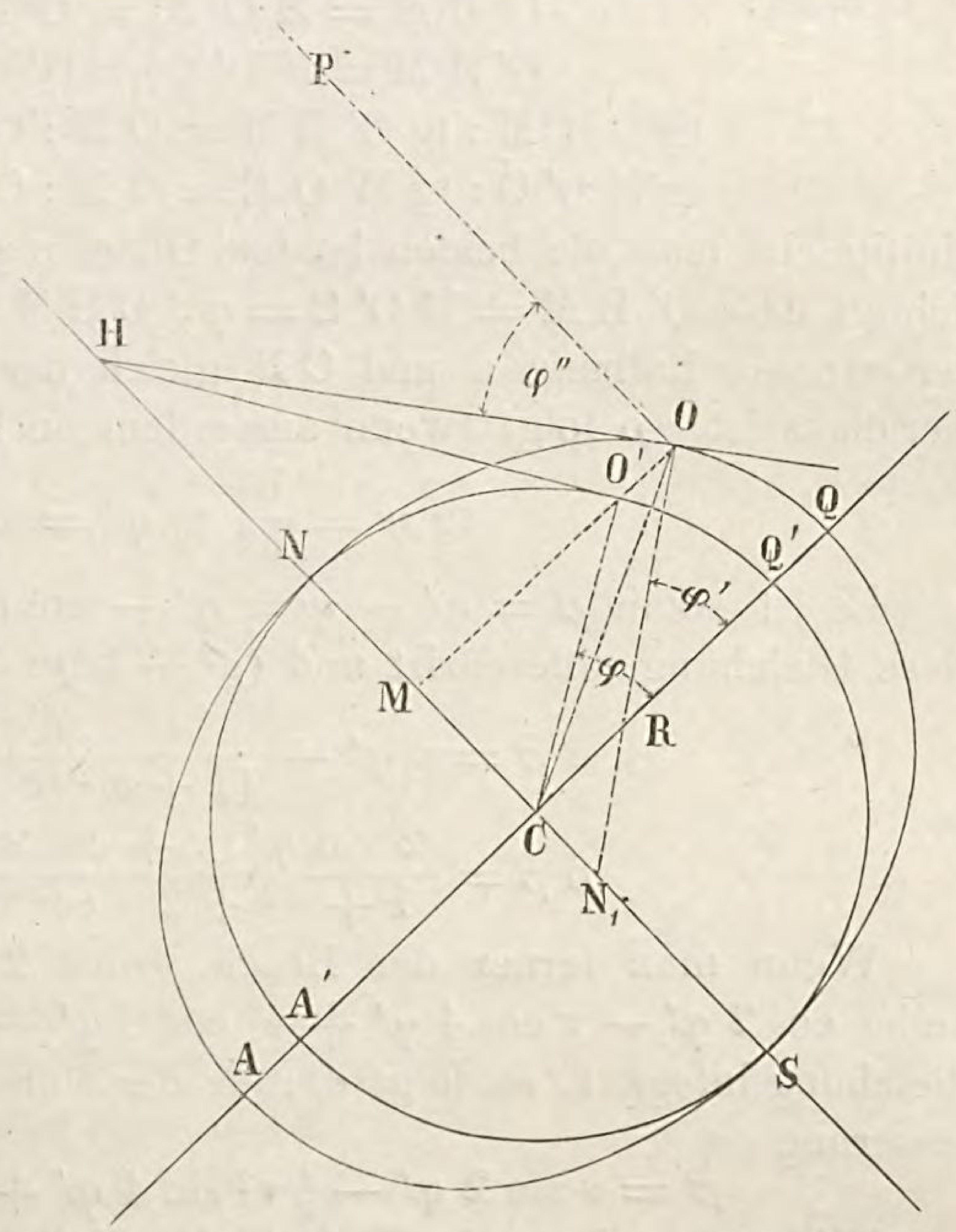
Würden sich in den Verlängerungen der Erdaxe, also an den Himmelspolen Fixsterne befinden, so könnte man, je nach der Lage des Orts dessen Polhöhe gesucht wird, den einen oder den anderen anvisiren, und man brauchte folglich nur den Höhenwinkel dieser Visirlinie zu messen, um die gesuchte Polhöhe zu erhalten. Es gibt aber keine Fixsterne die gerade so gelegen sind. Dagegen können wir uns auf der nördlichen Halbkugel der Erde des Polarsterns bedienen welcher dem nördlichen Pole der Himmelskugel am nächsten steht und durch das bekannte Sternbild des grossen Bären leicht aufzufinden ist, da er in der Verlängerung der durch die beiden hinteren Sterne jenes Bilds gehenden Linie liegt und sich durch seine Grösse und Helligkeit von den nächsten Sternen auszeichnet. In Folge der Axendrehung der Erde kommt der Polarstern (S. Fig. 158) täglich zweimal in die Ebene eines jeden Meridians, also auch des Orts O dessen Polhöhe gesucht wird: d. h. der Polarstern culminirt täglich zwei Mal, und beide Culminationen sind für uns sichtbar. Stellt man nun einen Theodolithen über dem Punkte O horizontal und so auf dass sich die Absehlinie in der Meridianebene dieses Punkts bewegt, und beobachtet man für die obere Culmination den Höhenwinkel

S O H = φ_1 und für die untere den Winkel S′ O H = φ_2, so lässt sich aus diesen Winkeln derjenige Höhenwinkel φ' berechnen welcher den Winkel S O S′ halbirt und dessen geneigter Schenkel O P (wegen der unendlichen Entfernung des Punkts P) der Erdaxe parallel ist: dieser Winkel ist nun die gesuchte Polhöhe und gleich

$$\varphi' = \tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) \tag{304}$$

vorausgesetzt dass jeder der gemessenen Höhenwinkel φ_1 und φ_2 schon seine Verbesserung wegen der atmosphärischen Strahlenbrechung erhalten hat. Man liest nämlich in Folge dieser Strahlenbrechung für die obere Culmination nicht unmittelbar den Winkel φ_1, sondern einen etwas grösseren γ_1 und für die untere Culmination nicht φ_2, sondern γ_2 ab. Bezeichnet nun ϱ_1 die Refraction für γ_1 und ϱ_2 die Refraction für γ_2, so ist $\varphi_1 = \gamma_1 + \varrho_1$ und $\varphi_2 = \gamma_2 + \varrho_2$ zu setzen. Diese astronomischen Refractionen welche sich nicht so einfach wie die terrestrischen berechnen lassen, findet man für den vorliegenden Zweck genau genug aus der dem Anhange beigefügten Refractionstafel. Die Winkel φ_1 und φ_2 oder zunächst γ_1 und γ_2 kann man auch mit einem Spiegelkreise oder einem Sextanten bestimmen, wenn man die Zeiten der Culminationen des Polarsterns kennt.

Fig. 159.



Der Winkel $\varphi' = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$ ist gleich dem Winkel der Normale des Punkts O mit der Aequatorebene und heisst die scheinbare oder elliptische Polhöhe des Punkts O, weil er durch die scheinbare Horizontallinie dieses Punkts erhalten wird und der Neigung der Normale des elliptischen Erdmeridians in jenem Punkte gleich ist. Diese Normale geht aber nur für die Breiten 0° und 90° durch den Mittelpunkt der Erde, in allen übrigen Fällen nicht. Will man nun die Breiten durch Winkel messen welche alle ihre Scheitel in dem Erdmittelpunkte haben, so muss man nach Fig. 159, in welcher A N Q S den Meridian von O und A Q den Schnitt der Aequatorebene vorstellt, statt der Normale O N_1 den Halbmesser O C und statt des Winkels

O R Q $= \varphi'$ den Winkel O C Q $= \psi$ setzen. Dieser Winkel heisst die wahre oder geocentrische Polhöhe von O und ist offenbar um den Winkel C O $N_1 = \beta$ kleiner als die scheinbare Polhöhe φ', d. h. es ist

$$\psi = \varphi' - \beta \tag{305}$$

Die Verbesserung β kann nach Bohnenberger auf folgende Weise gefunden werden. Beschreibt man mit der kleinen Halbaxe C N = b des elliptischen Meridians O Q S A N einen in der Ebene dieses Meridians liegenden Kreis N O′ S A′, errichtet die Ordinate O M senkrecht zu S N, und zieht in dem Schnittpunkte O′ eine Tangente O′ H an den Kreis, so schneidet diese nach bekannten Sätzen der Curvenlehre die Tangente O H der Ellipse in dem Punkte H der verlängerten kleinen Axe S N und es ist, wenn man O′ C zieht:

$$\begin{aligned} O\,H\,M &= M\,O\,N_1 = O\,R\,Q = \varphi' \\ O'\,H\,M &= M\,O'\,C = O'\,C\,Q = \varphi \\ \operatorname{tg} O\,H\,M : \operatorname{tg} O'\,H\,M &= O\,M : O'\,M = C\,Q : C\,N \\ \operatorname{tg} M\,O'\,C : \operatorname{tg} M\,O\,C &= O\,M : O'\,M = C\,Q : C\,N \end{aligned}$$

Multiplicirt man die beiden letzten Gleichungen mit einander und berücksichtigt dass O′ H M = M O′ C $= \varphi$, O H M $= \varphi'$, M O C $= \psi$, C Q gleich der grossen Halbaxe a und C N gleich der kleinen Halbaxe b des Erdmeridians ist, so folgt (wenn ausserdem noch $b^2 : a^2 = m$ gesetzt wird):

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \varphi' = m \operatorname{tg} \varphi' \tag{306}$$

Es ist somit $\beta = \varphi' - \psi = \varphi' - \operatorname{arc\,tg} (m \operatorname{tg} \varphi')$, und wenn man diese Gleichung differenzirt und $(a^2 - b^2) : (a^2 + b^2) = v$ setzt:

$$d\,\beta = d\,\varphi' - \frac{m\,d\,\varphi'}{(1 + m^2 \operatorname{tg}^2 \varphi') \cos^2 \varphi}$$

$$d\,\beta = \frac{2\,v\,d\,\varphi' (v + \cos 2\,\varphi')}{1 + v^2 + 2\,v \cos 2\,\varphi'}$$

Wenn man ferner den Bruch womit $2\,v\,d\,\varphi'$ multiplicirt ist, in die Reihe $\cos 2\,\varphi' - v \cos 4\,\varphi' + v^2 \cos 6\,\varphi' - \ldots.$ auflöst und vorstehende Gleichung integrirt, so folgt daraus der Unterschied $\varphi' - \psi$ oder die Verbesserung

$$\beta = v \sin 2\,\varphi' - \tfrac{1}{2} v^2 \sin 4\,\varphi' + \tfrac{1}{3} v^3 \sin 6\,\varphi' \ldots. \tag{307}$$

Will man diesen in Theilen des Halbmessers bestimmten Winkel β welcher die Neigung der Verticallinie zu dem Erdhalbmesser eines Orts O vorstellt, in Secunden ausdrücken, so muss man ihn noch mit der Anzahl Secunden welche auf einen Bogen von der Länge des Halbmessers treffen, nämlich mit 206 265″ multipliciren. Hiernach wird, mit Weglassung des zweiten und dritten Glieds des Ausdrucks für β in dem vorliegenden Falle genau genug:

$$\beta = 206\,265'' \, v \sin 2\,\varphi' \tag{308}$$

und wenn man bedenkt dass

$$v = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + a\,b}{a^2 + b^2} \cdot \frac{a - b}{a}$$

sehr nahe der Abplattung der Erde, also $= \frac{1}{300}$ ist, so folgt

$$\beta = 687'' \sin 2\,\varphi' \tag{309}$$

Für $\varphi' = 45^0$ ist $\sin 2\varphi' = \sin 90^0 = 1$ und daher der grösste Werth von $\beta = 11' 27''$, woraus zu entnehmen dass diese Verbesserung auch bei kleineren und grösseren Breiten nicht vernachlässigt werden darf.

2. Lösung mit Theodolith und Secundenuhr.

a) Denkt man sich durch die drei Punkte der Himmelskugel: Stern, Zenith, Pol ein sphärisches Dreieck gelegt, so findet zwischen dessen drei Seiten $ZP = 90^0 - \varphi$ (wobei φ die geographische Breite des Beobachtungsorts ist) $SP = 90^0 - \delta$ (wobei δ die Declination des Sterns bezeichnet) und $ZS = z = 90^0 - h$ (wobei h den gemessenen Höhenwinkel vorstellt) und dem der Seite z gegenüberliegenden oder von den Meridianen ZP und SP eingeschlossenen Stundenwinkel t nach einer bekannten Grundformel der sphärischen Trigonometrie die Beziehung statt

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t \tag{310}$$

Hierauf stützt sich das Verfahren durch Messung der Zenithdistanz z und des Stundenwinkels $t = \Theta - \alpha$ (Gl 290) die geographische Breite φ des Beobachtungsorts zu finden. Wie man h oder z misst und von der astronomischen Refraction befreit, ist bekannt; die Sternzeit Θ welche der auf der Secundenuhr beobachteten mittleren Zeit entspricht wird nach Gl (292) gefunden, und die gerade Aufsteigung α ist für den gewählten Stern, z. B. den Polarstern, aus astronomischen Tafeln bekannt. Führt man zwei Hilfswinkel μ und ν ein, indem man

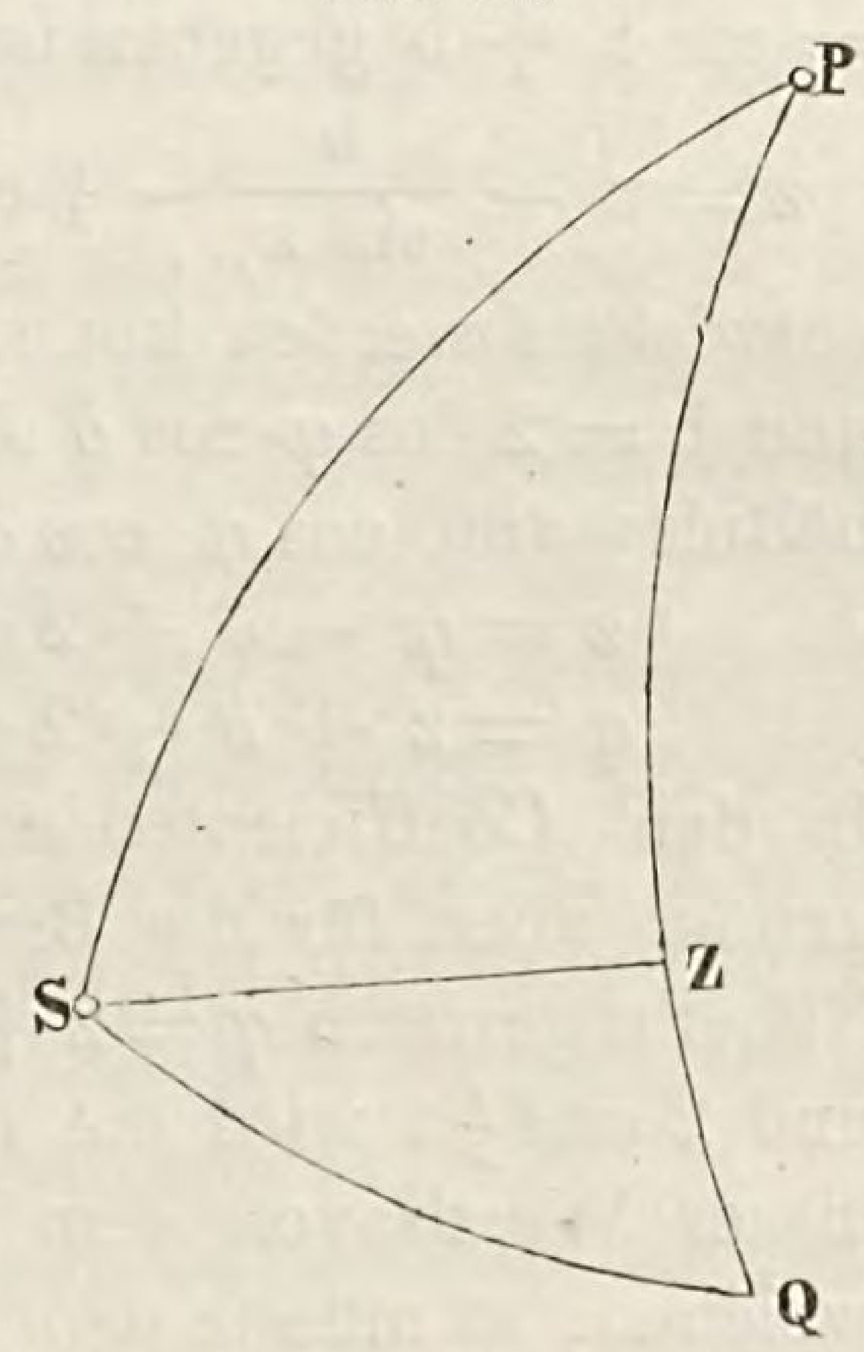
$$\operatorname{tg} \nu = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\cos t} = \frac{\sin \delta}{\cos \delta \cos t} = \frac{\mu \sin \nu}{\mu \cos \nu} \tag{311}$$

und folglich $\sin \delta = \mu \sin \nu$ und $\cos \delta \cos t = \mu \cos \nu$ setzt, so wird

$$\cos z = \mu \cos (\varphi - \nu) \text{ und } \cos (\varphi - \nu) = \frac{\cos z}{\mu} = \frac{\sin \nu}{\sin \delta} \cos z \tag{312}$$

und hieraus folgt die gesuchte Breite φ. Die letztere Formel ist allerdings zweideutig, indem $\varphi - \nu$ eben so wohl den positiven als den negativen zu $\cos(\varphi - \nu)$ gehörigen Bogen bedeuten kann. Diese Zweideutigkeit wird aber durch folgende geometrische Betrachtung gehoben welche sich in Brünnows sphärischer Astronomie (3 Auflage, S. 265) angegeben findet. Fällt man nämlich nach Fig. 160 vom Sternorte S ein Perpendikel SQ auf den Meridian PZ, so ist $\nu = 90^0 - PQ =$ dem Abstande des Fusspunkts Q vom Aequator, und $ZQ = \varphi - \nu$, während μ der Cosinus des Perpendikels SQ ist. So lange nun SQ den Meridian südlich vom Zenith trifft, hat man $\varphi - \nu$ zu nehmen; wenn dagegen der Fusspunkt Q des Perpendikels nördlich vom Zenith liegt, so ist $\nu - \varphi$ zu setzen. Ist $t > 90^0$, so fällt das Perpendikel nördlich vom Pol und der Abstand des Fusspunkts desselben vom Aequator

Fig. 160.



wird $> 90^0$; folglich ist der Abstand vom Zenith $= v - \varphi$, und man hat somit auch in diesem Falle für den durch den Cosinus gegebenen Winkel den Werth $v - \varphi$ zu nehmen. Ebendaselbst ist folgendes Beispiel zur Formel (312) gerechnet. Am 19 October 1822 hat Dr. Westphal zu Benisuef in Aegypten um $23^h\ 1^m\ 10^s$ mittlere Zeit die Höhe des Mittelpunkts der Sonne $h = 49^0\ 17'\ 22{,}8''$ beobachtet; die Declination der Sonne war $\delta = -10^0\ 12'\ 16{,}1''$ und die Zeitgleichung $= -15^m\ 0^s$. Hienach ist der Stundenwinkel der Sonne

$$t = 23^h\ 1^m\ 10^s + 15^m = 23^h\ 16^m\ 10^s = -10^0\ 57'\ 30''$$

Damit erhält man $\log \operatorname{tg} \delta = 9{,}2552942_n$ und $\log \cos t = 9{,}9920078$

$$\log \operatorname{tg} v = 9{,}2632864_n \text{ und hieraus } v = -10^0\ 23'\ 23{,}7''$$

Ferner ist $\log \sin v = 9{,}2561063_n$ und $\log \sin \delta = 9{,}2483695_n$

$$\log \mu = \log \sin \delta - \log \sin v = 0{,}0077368$$

Zieht man $\log \mu$ von $\log \cos z = \log \sin h = 9{,}8796788$ ab, so wird

$$\log \cos (\varphi - v) = 9{,}8719420; \quad \varphi - v = 39^0\ 29'\ 54{,}5'';$$

und hieraus ergibt sich die gesuchte Breite

$$\varphi = 29^0\ 6'\ 30{,}8''$$

b) Liegt der beobachtete Stern nahe am Meridian (zu Polhöhenbestimmungen wählt man am zweckmässigsten solche Sterne) so lässt sich φ einfacher finden, indem man zu der beobachteten Höhe h die Verbesserung sucht welche sie zur Meridianhöhe macht und in Verbindung mit der Declination δ des Sterns die gesuchte Polhöhe φ gibt. Dieses Verfahren die Polhöhe zu bestimmen heisst das der Circummeridianhöhen. Die allgemeine Rechnung gestaltet sich wie folgt. Es ist

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t \text{ oder}$$

$$\cos z = \cos (\varphi - \delta) - 2 \cos \varphi \cos \delta \sin^2 \tfrac{1}{2} t$$

und da die Grösse z welche durch eine Gleichung von der Form $\cos z = \cos x + b$ gegeben ist, in die nach Potenzen von b fortschreitende Reihe

$$z = x - \frac{b}{\sin x} - \tfrac{1}{2} \cot x \frac{b^2}{\sin^2 x} - \tfrac{1}{6} (1 + 3 \cot^2 x) \frac{b^3}{\sin^3 x} - \cdots \quad (313)$$

entwickelt werden kann, so wird, da in dem vorliegenden Falle $x = \varphi - \delta$ und $b = 2 \cos \varphi \cos \delta \sin^2 \frac{1}{2} t$ ist, wenn man zur Abkürzung das Verhältniss von $\cos \varphi \cos \delta : \sin (\varphi - \delta) = c$ setzt:

$$z = \varphi - \delta + 2 c \sin^2 \tfrac{1}{2} t - 2 c^2 \cot (\varphi - \delta) \sin^4 \tfrac{1}{2} t + \cdots \quad (314)$$

$$\varphi = z + \delta - 2 c \sin^2 \tfrac{1}{2} t + 2 c^2 \cot (\varphi - \delta) \sin^4 \tfrac{1}{2} t - \cdots \quad (315)$$

In dem Coefficienten c steckt zwar die noch unbekannte Polhöhe φ, es genügt aber für die Berechnung von c aus $\cos \varphi \cos \delta : \sin (\varphi - \delta)$ den Näherungswerth $\varphi = z + \delta$ zu setzen. Hiemit und mit Tafeln für $2 \sin^2 \frac{1}{2} t$ und $2 \sin^4 \frac{1}{2} t$ wird die strengere Berechnung von φ sehr einfach. Sollte dieser Werth von dem vorher angewendeten Näherungswerthe stark abweichen, so müsste man die Berechnung von c mit diesem besseren Werthe von φ und die strenge Berechnung von φ mit dem neuen Werthe von c wiederholen. (Was die Entwicklung der Reihe für z (313) betrifft, so wird es für den in der Mathematik geübten Leser genügen zu bemerken

dass die gegebene Gleichung $\cos z = \cos x + b$ zuerst in der Form $z = \text{arc} \cos (\cos x + b)$ geschrieben wird, und dass man dann die Veränderliche $\cos x = y$ und $z = \text{arc} \cos (y + b) = f(y + b)$ setzt. Die Function $f(y + b)$ nach dem Taylor'schen Satze entwickelt führt zu der oben angegebenen Reihe.)

§. 159. Aufgabe. Die geographische Länge eines Orts aus der Länge eines anderen Orts zu bestimmen.

Die Lösung dieser Aufgabe kommt immer darauf zurück den Winkel der durch beide Orte gelegten Meridianebenen durch den Zeitunterschied dieser Orte zu messen, und dieses kann auf drei Wegen geschehen, erstens durch directe Uebertragung der Zeit durch Uhren und Chronometer von einem Ort zum anderen; zweitens durch Beobachtung der Zeiten welche in einem und demselben Augenblicke an beiden gegebenen Orten stattfinden; und drittens durch Beobachtung des Mondes, insbesondere seiner Abstände von anderen Himmelskörpern nämlich von den hellsten Fixsternen, von der Sonne und den grösseren Planeten.

1) Mittels Zeitübertragung. Für Reisezwecke und die geodätischen Bestimmungen welche wir hier im Auge haben, sind Federuhren (Taschenuhren und Chronometer) allein anwendbar und ausreichend. Dieselben müssen einen gleichförmigen Gang haben und es dürfen die Minuten- und Secundenzeiger nicht excentrisch zum Zifferblatte angebracht sein. An festen Orten gehen gute Chronometer täglich innerhalb einer halben Secunde und gute Taschenuhren innerhalb zwei bis drei Secunden genau. Es ist rathsam dergleichen Uhren stets zu der nämlichen Zeit aufzuziehen, jede grössere Erschütterung bei ihrem Transport und Gebrauch zu vermeiden, sie stets in der Lage zu transportiren und zu beobachten für welche sie regulirt sind, und keinen starken Magnet in die Nähe einer solchen Uhr zu bringen, weil er ihren Gang sehr stört. Da man sich auf grösseren Reisen nie sicher auf den Gang der Uhren verlassen kann, so müssen deren mindestens zwei oder drei mitgenommen und angewendet werden. Gehen diese Uhren nach Sternzeit und hat man am Orte B bereits eine Mittagslinie ausgemittelt, so braucht man nur zu wissen, um welche Zeiten ein und dasselbe Gestirn, z. B. die Sonne, in A und B culminirt; der Unterschied dieser Zeiten ist dann der gesuchte Längenunterschied in Sternzeit und mit 15 multiplicirt in Gradmass. Ist der Meridian in B noch nicht bekannt, so beobachte man die Sonne Vor- und Nachmittags in gleichen Höhen h', h'', h'''... und nehme aus den Zeiten u', u'', u'''... u_1, u_2, u_3... das Mittel, so entspricht dieses dem Durchgange der Sonne durch den Meridian, wodurch die weitere Aufgabe wieder auf den vorigen Fall gebracht ist. Wären die Secundenuhren für mittlere Zeit regulirt, so ist es nach der Formel (292) leicht die hienach bestimmte Zeitdifferenz auf Sternzeit und Gradmass zu reduciren.

2) Mittels Beobachtung momentaner Erscheinungen. Dergleichen Erscheinungen welche für die beiden Orte A und B in demselben

Augenblicke eintreffen, sind Pulverblitze, telegraphische Zeichen, Sonnen- und Mondfinsternisse, Verfinsterungen der Jupitertrabanten u. dgl. Pulverblitze (durch plötzliche Entzündung einer grösseren Menge Pulvers hervorgebracht) sind nur für kurze Entfernungen und höchstens auf 10 Meilen anwendbar, für diese Entfernungen aber sehr wohl geeignet. Telegraphische Zeichen können bei den grössten Entfernungen der Orte gebraucht werden und finden überall Anwendung wo es electrische Telegraphen gibt. Reisende jedoch, für welche diese Voraussetzungen nicht eintreffen, können davon keinen Gebrauch machen und sind, wenn sie ausser den Zeitübertragungen ein anderes Mittel anwenden wollen, auf die Phänomene am Himmel angewiesen welche für alle Orte, welche sie überhaupt sehen können, gleichzeitig eintreten und deren Eintritt voraus berechnet ist, wie z. B. Sonnen- und Mondfinsternisse. Beobachtet man also z. B. bei einer Sonnenfinsterniss die Zeiten in A und B sowohl beim Eintritt als beim Austritt des Monds, so werden die gehörig berechneten Zeitunterschiede den Längenunterschied zwischen A und B ergeben. Beim Ein- und Austritt des Monds an der Sonnenscheibe kann man sowohl dessen äussere als innere Berührung beobachten, so dass man an jedem Orte 4 Beobachtungen erhält aus denen sich ein Mittelwerth bestimmen lässt.

3) Mittels der Monddistanzen. Dieses Mittel den geographischen Längenunterschied zweier Orte A und B zu bestimmen, lässt sich, wenn der Mond über dem Horizont ist, in jedem Augenblicke anwenden, und ist desshalb auch für die Seefahrer sehr geeignet. Die nautischen Jahrbücher enthalten nämlich die Distanzen des Mondes von der Sonne, von den grössten Planeten und von den bekanntesten Fixsternen, und es sind dieselben für jede dritte Stunde eines ersten Meridians so berechnet wie sie vom Erdmittelpunkte aus erscheinen. Man braucht also nur an dem Orte B (wenn A der Ort ist für den die Monddistanzen in den Ephemeriden enthalten sind) zu einer bekannten Zeit die Distanz des Monds von der Sonne oder einem Planeten oder einem Fixstern zu messen und den gemessenen Winkel zwischen Mond und Gestirn von der Refraction und Parallaxe zu befreien, so erhält man auf diese Weise die wahre Distanz des Monds von dem Gestirne, wie sie im Augenblicke der Beobachtung für den Mittelpunkt der Erde gilt. Sucht man hierauf in den Tafeln diejenige Zeit des ersten Meridians, zu welcher die gleiche Distanz gehört, so ist der Unterschied zwischen dieser und der beobachteten Zeit dem gesuchten Längenunterschiede in Zeit gleich, und es kann derselbe in bekannter Weise auf Gradmass übertragen werden. Eine sehr zuverlässige Bestimmungsweise des Längenunterschieds zweier Orte bietet übrigens dieses Verfahren nicht. Eine ins Einzelne gehende Anleitung zur Berechnung der Beobachtungen ist in den Tafeln enthalten, und da ohne diese das Verfahren nicht angewendet werden kann, so unterlassen wir es näher hierauf einzugehen.

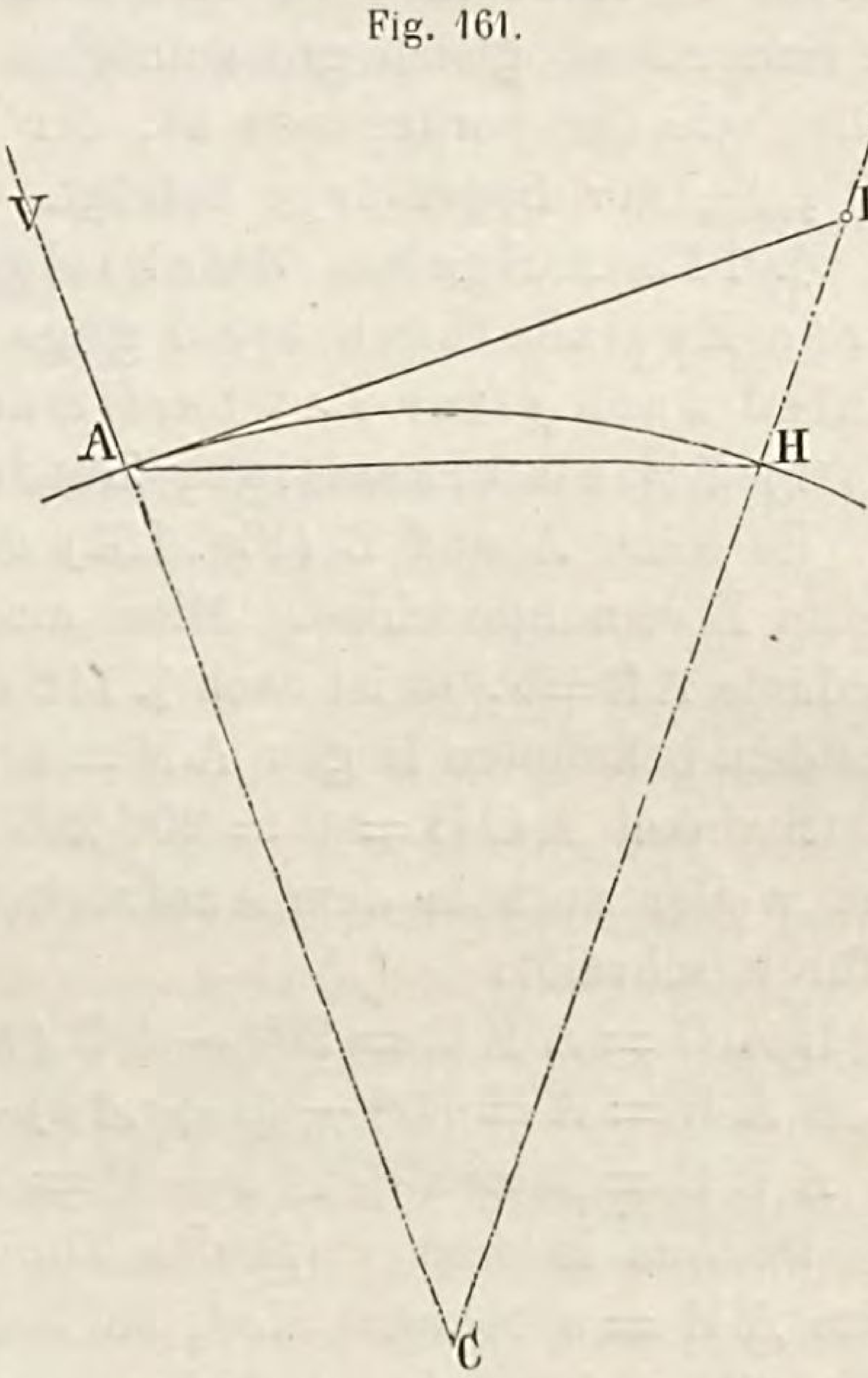
C. Trigonometrische Höhenmessungen.

§. 160. Die trigonometrische Höhenmessung besteht darin dass man die zu bestimmende Höhe mit zwei in der nämlichen Verticalebene liegenden Linien zu einem Dreiecke vereinigt, in welchem drei Stücke (worunter eine Seite) durch mittel- oder unmittelbare Messung gefunden werden können, und dass man aus diesen Daten die gesuchte Höhe nach den bekannten Regeln der Trigonometrie berechnet.

Man theilt die Lehre von diesen Messungen gewöhnlich in zwei Abschnitte, von denen der eine die Höhenbestimmungen aus grossen, der andere die aus kleinen Entfernungen behandelt. Als kleine Entfernungen werden hierbei diejenigen angesehen welche keine Rücksicht auf Strahlenbrechung und Erdkrümmung erfordern, und als grosse jene welche diese Rücksicht erheischen. Wir werden diese Eintheilung nicht machen, sondern sofort die Aufgaben behandeln welche grosse Entfernungen zwischen dem Höhenobjecte und dem Beobachtungsorte voraussetzen, da in der Lösung dieser Aufgaben auch die Lösung der übrigen enthalten ist.

Das gegenwärtige Capitel liesse sich überhaupt ganz kurz abmachen, wenn man bloss auf des Verfassers neue Theorie der Strahlenbrechung Rücksicht nehmen wollte, indem dann nur die Formel (268) in §. 149 zu discutiren wäre, wie es auch in §. 165 geschieht; da jedoch der bisherigen Gewohnheit der Geodäten einige Rechnung zu tragen ist, so geben wir zuerst die alten Entwickelungen und dann erst die neuen, mit dem Beifügen dass beide annähernd gleiche Resultate liefern, wenn man in den alten Formeln unseren Refractionscoefficienten aus §. 149 statt der in §. 148 angeführten unveränderlichen Constanten 2 k einsetzt.

Fig. 161.



§. 161. Aufgabe. Die Sehne eines grössten Kreisbogens der Erde welcher den Horizontalabstand zweier trigonometrischen Punkte misst, durch den Bogen und den Erdhalbmesser auszudrücken.

Sind A und B (Fig. 161) zwei Punkte der Erdoberfläche und stellt der Kreisbogen A H den wahren Horizont von A und B C eine Verticallinie vor, so ist der Bogen A H der Horizontalabstand der Punkte A und B. Diesen letzteren Abstand könnte man berechnen, wenn in dem schief-

winkeligen Dreiecke A B H die Seite A H und zwei Winkel bekannt wären; es handelt sich also hier, wie in vielen anderen Fällen der trigonometrischen Höhenbestimmungen, um die Berechnung der Sehne A H = s aus dem Bogen A H = b, wenn der Halbmesser A C = r bekannt ist und vorausgesetzt wird dass der Bogen b höchstens 8 bis 10 Meilen lang, d. h. nicht grösser ist, als die Seite eines Dreiecks erster Ordnung für eine Landesvermessung. Diese Voraussetzung kommt also darauf zurück dass der Bogen b im Vergleiche zu r sehr klein ist und im ungünstigsten Falle $\frac{1}{80}$ r beträgt. Drückt man den Winkel A C H im Bogenmasse aus, so wird C = b : r und folglich die Sehne

$$s = 2\,r \sin\frac{C}{2} = 2\,r \sin\left(\frac{b}{2\,r}\right)$$

Da das Verhältniss von b : 2 r höchstens $\frac{1}{160}$ beträgt, so ist genau genug

$$\sin\left(\frac{b}{2\,r}\right) = \frac{b}{2\,r} - \frac{1}{6}\left(\frac{b}{2\,r}\right)^3$$

und folglich auch, wenn man substituirt und reducirt:

$$s = b - \frac{1}{24}\,\frac{b^3}{r^2} \tag{316}$$

Setzt man beispielsweise den Bogen b = 32 666,08 Toisen und r = = 3 266 608 Toisen, also das Verhältniss von b : r = 1 : 100, so wird

$$s = 32\,666{,}08 - 0{,}137 = 32\,665{,}943 \text{ Toisen}$$

woraus zu entnehmen ist dass man fast in allen Fällen den Bogen b und die Sehne s als gleich gross ansehen darf, da selbst in einem so ungünstigen Falle, wie der vorliegende ist, der Unterschied zwischen Sehne und Bogen nur $\frac{1}{240\,000}$ der Bogenlänge beträgt.

§. 162. Aufgabe. Zwei trigonometrische Punkte sind durch ihren Horizontalabstand gegeben: man soll ihren Höhenunterschied nach alter Art bestimmen.

1) Mittels einseitiger Zenithwinkel.

Es seien A und B (Fig. 161) diese zwei Punkte und H B = h der gesuchte Höhenunterschied. Misst man in A den scheinbaren Zenithwinkel der Linie AB = z, so ist nach §. 148 der wahre Zenithwinkel VAB = z + Δ z. Aus dem bekannten Bogen A H = b folgt, wenn A C = r gesetzt wird, der Centriwinkel A C H = C = 206 265 (b : r) Secunden. Es ist somit, wenn man weiter noch in dem Ausdruck r = 2 (Δ z) = k C (Gl 264, Seite 297) ν für k schreibt:

$$H\,A\,C = A\,H\,C = 90^0 - \tfrac{1}{2}\,C \text{ (wegen der Senkrechten von C auf A H)}$$
$$B\,A\,H = A = 90^0 - (z + \Delta\,z) + \tfrac{1}{2}\,C = 90^0 - \left(z - \tfrac{1}{2}\,(1 - \nu)\,C\right)$$
$$A\,B\,H = B = z + \Delta\,z - C = z - \tfrac{1}{2}\,(2 - \nu)\,C$$

Da nun in dem verticalen Dreiecke A B H die Winkel A, B und die Seite A H = s bekannt sind, so findet man hieraus, wenn $\frac{1}{2}(1 - \nu) = \mu$ und $\frac{1}{2}(2 - \nu) = \mu' = \mu + \frac{1}{2}$ gesetzt wird, die gesuchte Höhe

$$h = s \cdot \frac{\sin A}{\sin B} = s \cdot \frac{\cos(z - \mu\,C)}{\sin(z - \mu'\,C)} \tag{317}$$

Vernachlässigt man den Einfluss der Erdkrümmung, d. h. sieht man das in Fig. 161 enthaltene Dreieck A B H als ein bei H rechtwinkliges und folglich den Centriwinkel C als null an, so wird nach Gl (317) die Höhe

$$h = s \cot (z + \Delta z) = s \cot (z + \tfrac{1}{2} \nu C) \qquad (318)$$

und darf man auch, wegen des unbedeutenden Horizontalabstands s, die Refraction Δz ausser Acht lassen, so erhält man

$$h = s \cot z = s \operatorname{tg} A \qquad (319)$$

wobei A den Höhenwinkel der Linie A B vorstellt. Will man bloss die Refraction, aber nicht die Erdkrümmung vernachlässigen, so wird

$$h = s \frac{\cos (z - \frac{1}{2} C)}{\sin (z - C)} \qquad (320)$$

2) Mittels gegenseitiger und gleichzeitiger Zenithwinkel. Unter dieser Bedingung kann der Refractionswinkel Δz oder dessen Werth $\frac{1}{2}\nu C$ aus den Gleichungen eliminirt werden, indem man nach Gl (265), in welcher z_1 den scheinbaren Zenithwinkel von B A in B vorstellt,

$$2 (\Delta z) = \nu C = 180^0 + C - z - z_1$$

setzt. Hierdurch wird alsdann

$$z + \Delta z - \tfrac{1}{2} C = 90^0 - \tfrac{1}{2} (z_1 - z)$$
$$z + \Delta z - C = 90^0 - \tfrac{1}{2} (z_1 - z + C)$$

und folglich geht die Gl (317) über in

$$h = s \frac{\sin \frac{1}{2} (z_1 - z)}{\cos \frac{1}{2} (z_1 - z + C)} \qquad (321)$$

Will man hier die Erdkrümmung vernachlässigen, so braucht man nur $C = 0$ zu setzen, wonach sich ergibt

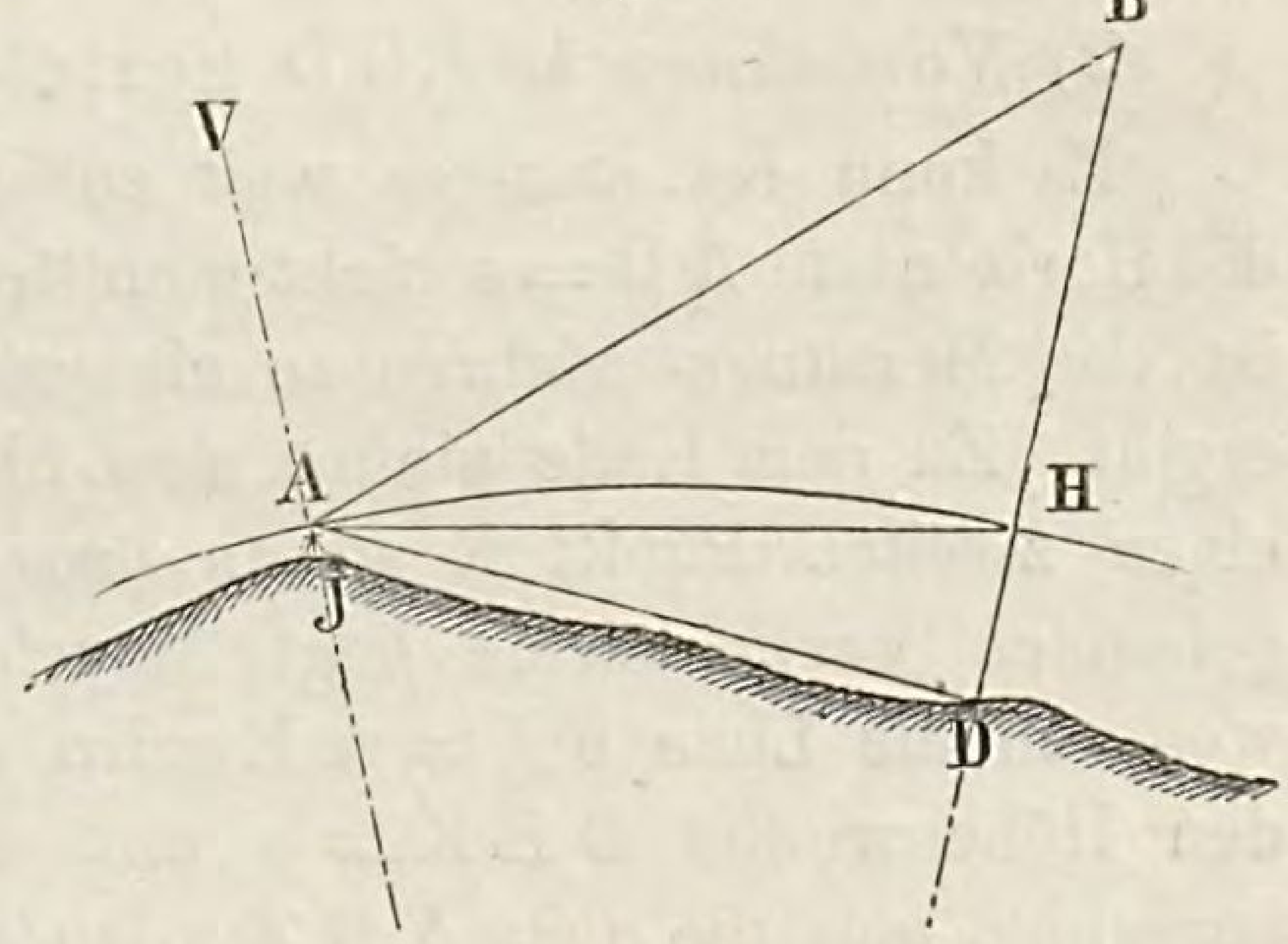
$$h = s \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (z_1 - z) \qquad (322)$$

ein Ausdruck der genau mit (319) übereinstimmt; denn wenn $C = 0$ und $\Delta z = 0$ ist, so wird $z_1 + z = 180^0$ und $\frac{1}{2} (z_1 - z) = 90^0 - z$; folglich $\operatorname{tg} \frac{1}{2} (z_1 - z) = \operatorname{cotg} z$.

§. 163. Aufgabe. Ein lothrechter Gegenstand ist gegeben, man soll dessen absolute Höhe bestimmen.

1) Von einem gegebenen Punkte aus (Fig. 162).

Fig. 162.



Ist B D die gesuchte Höhe und in A die Drehaxe des Theodolithenfernrohrs, so ist nach §. 162 die Höhe des Punkts B über A oder

$$B H = h = s \frac{\cos (z + \Delta z - \frac{1}{2} C)}{\sin (z + \Delta z - C)}$$

Für das Stück D H der Höhe B D hat man ganz ähnliche Betrachtungen wie im vorigen Paragraphen für B H anzustellen. Es wird nämlich, wenn der scheinbare Zenithwinkel der Linie A D = z′ ist, der wahre Zenithwinkel V A D = $z' + \Delta z$, und wenn V A H = $90^0 + \frac{1}{2}$ C:

$$H\,A\,D = z' + \Delta\,z - \tfrac{1}{2}\,C - 90^0$$

Ferner ist, da $B = z + \Delta\,z - C$, der Winkel

$$A\,D\,B = 180^0 - (z' + \Delta\,z - C)$$

und folglich aus dem schiefwinkligen Dreiecke A H D, mit Rücksicht auf die Bezeichnungen $\frac{1}{2}(1 - \nu) = \mu$ und $\frac{1}{2}(2 - \nu) = \mu'$, die Höhe

$$D\,H = h' = -\,s\,\frac{\cos\,(z' + \Delta\,z - \frac{1}{2}\,C)}{\sin\,(z' + \Delta\,z - C)} = -\,s\,\frac{\cos\,(z' - \mu\,C)}{\sin\,(z' - \mu'\,C)}$$

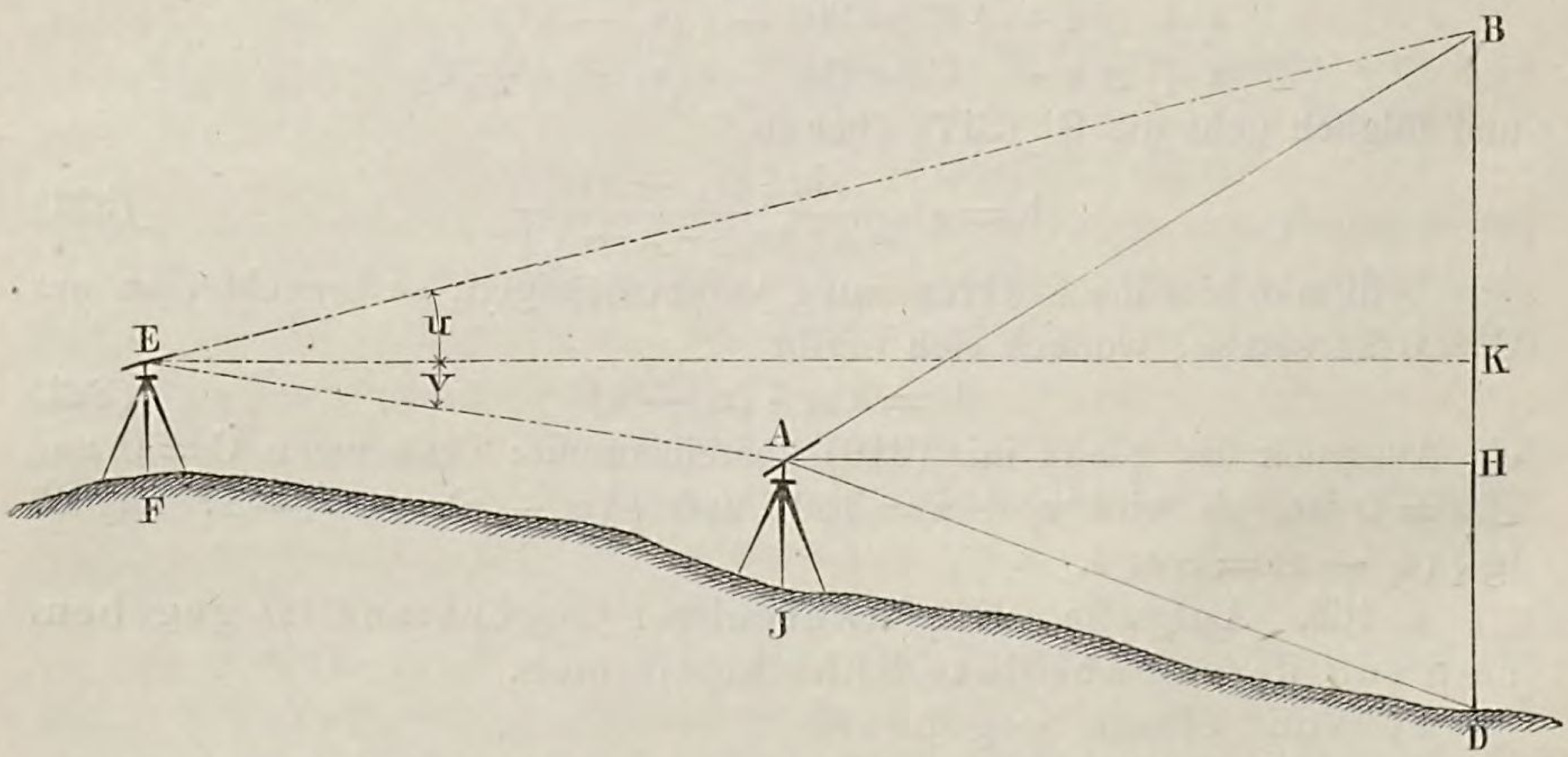
Addirt man die Werthe von h und h', so erhält man nach einigen nicht schwierigen Umformungen die gesuchte Höhe

$$B\,D = h + h' = \frac{s\,\sin\,(z' - z)\,\cos\,\frac{1}{2}\,C}{\sin\,(z' - \mu'\,C)\,\sin\,(z - \mu'\,C)} \qquad (323)$$

Liegt der Gegenstand B D dem Punkte A so nahe dass man die Erdkrümmung und Strahlenbrechung vernachlässigen darf, so wird

$$B\,D = s\,\frac{\sin\,(z' - z)}{\sin\,z'\,.\,\sin\,z} \qquad (324)$$

Fig. 163.



2) Von einer auf B D gerichteten Standlinie F J aus.

Es kann bei weniger weit entfernten Punkten vorkommen dass man die Horizontale A H = s nicht unmittelbar bestimmen kann: in diesem Falle ist das Messungsverfahren so einzurichten dass sich die Länge s mittelbar ergibt. Zu dem Ende nimmt man hinter dem Punkte A der Fig. 163 noch einen zweiten Punkt E so an dass die Gerade A E in einer durch B D gehenden Verticalebene liegt, macht die Instrumentenhöhe E F = A J, wodurch die Linie F J = A E wird und misst die Länge F J = l, so wie den Höhenwinkel B E K = u und den Tiefenwinkel K E A = v; hierauf berechnet man die Seite A B des Dreiecks A E B aus folgenden drei Stücken: der Seite A E = l, dem Winkel B E A = u + v und dem Winkel E B A = = E B K — A B K = 90° — (u + z), und folgert

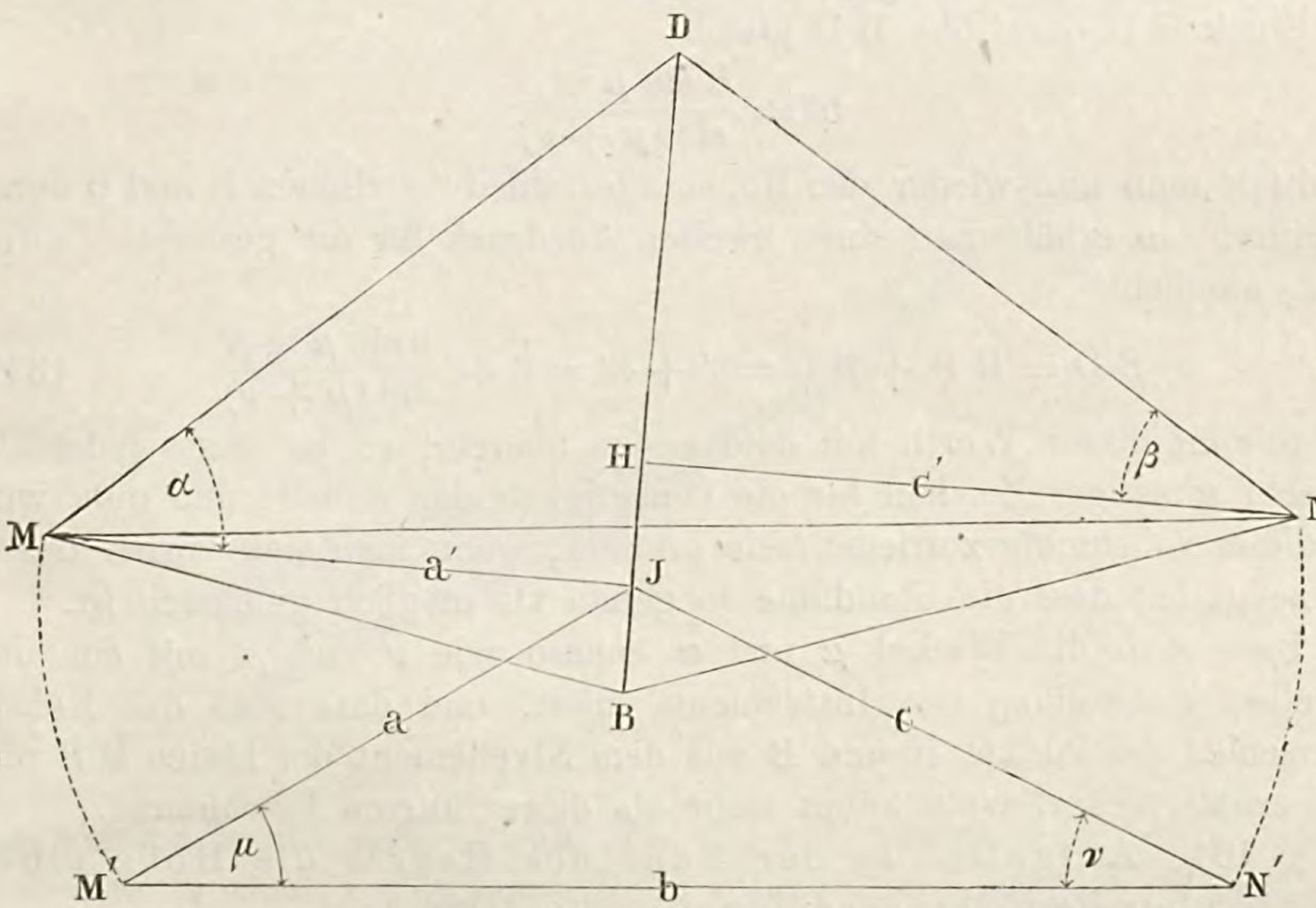
$$A\,B = l\,\frac{\sin(u+v)}{\cos(u+z)} \text{ und } A\,H = A\,B \sin z = l \sin z\,\frac{\sin(u+v)}{\cos(u+z)}$$

Nunmehr ist dieser Fall auf Nr 1 zurückgebracht; setzt man daher den Werth von A H für s in die Gleichung (324), so wird

$$B\,D = l\,\frac{\sin(z'-z).\sin(u+v)}{\sin z'.\cos(u+z)} \tag{325}$$

3) Von einer nicht durch B D gehenden Standlinie N′ N′ aus. Stellt B D die Höhe eines Thurms vor welcher rings von Häusern umgeben ist, so ist in der Regel weder das erste noch das zweite eben beschriebene Verfahren anwendbar, da beide voraussetzen dass man den Fusspunkt D der Verticallinie B D anvisiren kann. In diesem Falle muss man den horizontalen Abstand des Instruments von der zu messenden Höhe

Fig. 164.



mittelbar durch ein Dreieck bestimmen welches über der gegebenen Standlinie dadurch errichtet wird dass man die Verticallinie B D als dritten Eckpunkt annimmt. Man wird desshalb, nachdem die Basis M N (welche so liegen muss dass man von M und N aus nach der Spitze D visiren kann, und dass das horizontal projicirte Dreieck M N D von einem gleichseitigen nicht zu sehr abweicht) mit Messlatten gemessen und auf bekannte Weise auf den Horizont reducirt ist, die Horizontalprojectionen der Winkel $D\,M\,N = \mu$ und $D\,N\,M = \nu$ so genau als möglich messen und hieraus mit Hilfe der horizontalen Projection der Standlinie $M\,N = b$ die Projectionen der Dreieckseiten $M\,D = a$ und $D\,N = c$ berechnen, wodurch man erhält:

$$a = \frac{b \sin \nu}{\sin(\mu+\nu)}$$

$$c = \frac{b \sin \mu}{\sin (\mu + \nu)}$$

Wird hierauf in M der Höhenwinkel D M J $= \alpha$ gemessen, so findet sich das Stück J D der gesuchten Höhe B D gleich

$$h = \frac{b \sin \nu \operatorname{tg} \alpha}{\sin (\mu + \nu)}$$

Kann man von M aus nicht nach dem Fusspunkte B des Thurms visiren, so muss der Höhenunterschied zwischen M und B durch ein genaues Nivellement ermittelt werden. Ist dieser $=$ J B $=$ i gefunden, so wird die gesuchte Höhe

$$B\,D = J\,B + J\,D = i + h = i + \frac{b \sin \nu \operatorname{tg} \alpha}{\sin (\mu + \nu)} \tag{326}$$

Misst man in dem Punkte N auch den Höhenwinkel D N H $= \beta$, so ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreiecke D H N in welchem H N $=$ c ist, das Stück H D der Höhe B D gleich

$$h' = \frac{b \sin \mu \operatorname{tg} \beta}{\sin (\mu + \nu)}$$

Ermittelt man nun wieder den Höhenunterschied i′ zwischen N und B durch Nivelliren, so erhält man einen zweiten Ausdruck für die gesuchte Thurmhöhe, nämlich

$$B\,D = H\,B + H\,D = i' + h' = i' + \frac{b \sin \mu \operatorname{tg} \beta}{\sin (\mu + \nu)} \tag{327}$$

Stimmt dieser Werth mit dem ersten überein, so ist dieses jedenfalls ein sehr günstiges Zeichen für die Genauigkeit der Arbeit; und man wird mit dieser vollständig zufrieden sein können, wenn man sich vorher davon überzeugt hat dass die Standlinie so genau als möglich gemessen ist.

Dass man die Winkel μ und α ebenso wie ν und β mit ein- und derselben Aufstellung des Instruments misst, und dass man den Höhenunterschied der Punkte N und B aus dem Nivellement der Linien M B und M N erhält, bedarf wohl kaum mehr als dieser kurzen Erwähnung.

§. 164. Aufgabe. In der Nähe des Meeres die Höhe eines Punkts über dem Meeresspiegel zu bestimmen.

Die relativen Höhenbestimmungen der Hauptpunkte eines Landes welche man in der Regel mit der Landesvermessung vornimmt, werden in der Absicht gemacht die absolute Höhe jener Punkte über dem Meere zu erfahren. Hierzu muss die absolute Höhe wenigstens eines Punkts des trigonometrischen Netzes bekannt sein. Gewöhnlich wird diese Höhe durch Barometermessungen bestimmt; sicherer aber kann man diese absolute Höhe eines Punkts der in der Nähe eines Meeres mit geringer Ebbe und Fluth liegt, durch trigonometrische Messungen, und am sichersten durch Nivelliren finden. Hier soll das trigonometrische Verfahren beschrieben werden.

1) Mit Hilfe des Zenithwinkels der Meeresfläche.

Stellt in Fig. 165, S. 335 der Bogen B D den Meeresspiegel vor und

ist $AD = h$ die gesuchte Höhe des Punkts A, so kann man in A durch Anvisiren der fernsten Stelle B des Meeres den wahren Zenithwinkel

$$VAB = z + \varDelta z = z + \tfrac{1}{2} \nu C$$

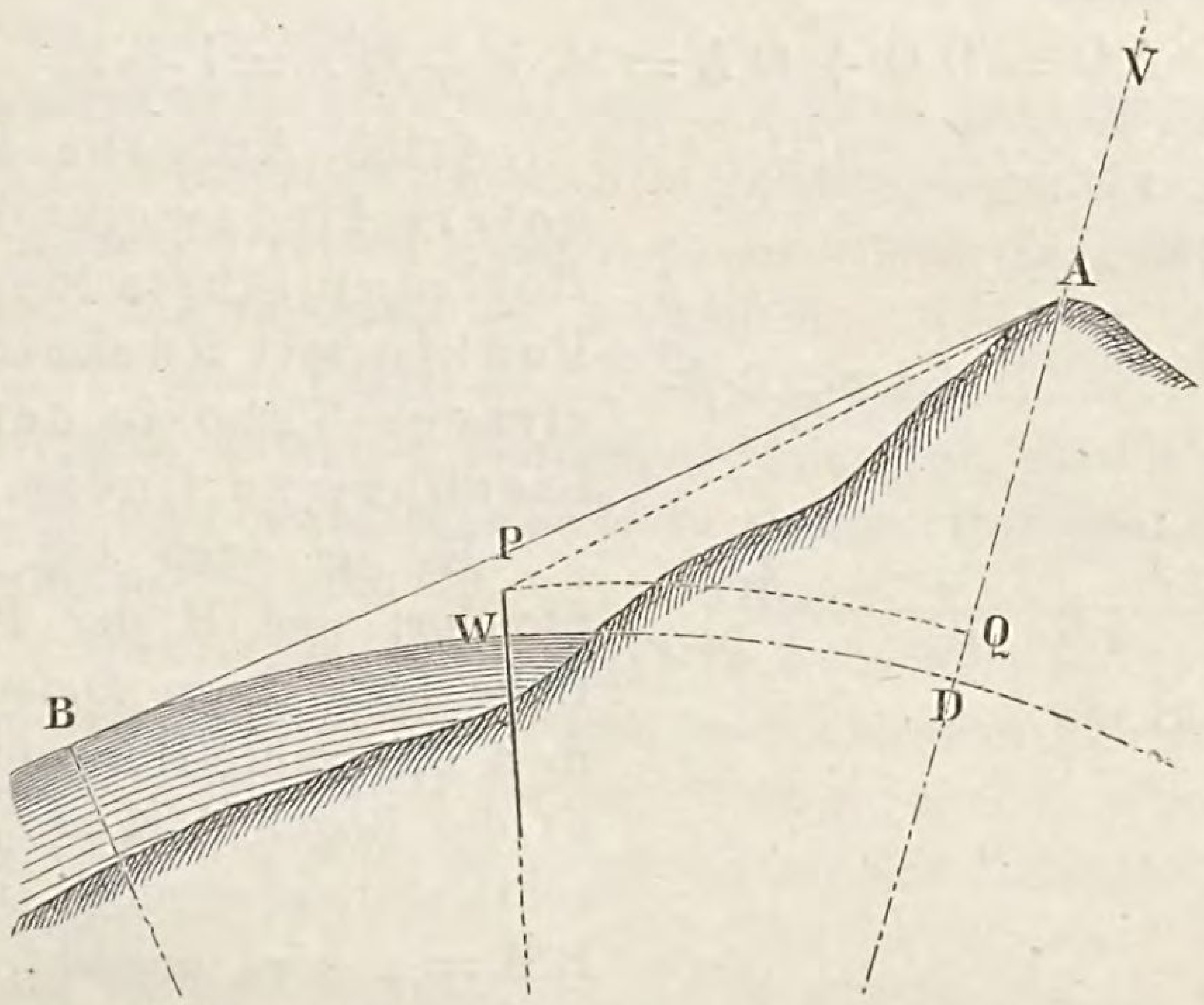
wobei z den scheinbaren Zenithwinkel und $\varDelta z = \frac{1}{2} \nu C$ die Refraction vorstellt, bestimmen und hieraus und aus dem Erdhalbmesser $BC = r$ die Höhe h berechnen. Aus dem rechtwinkligen Dreiecke ABC folgt die Höhe

$$h = CA - CD = \frac{r}{\sin(z + \varDelta z)} - r = \frac{1 - \sin(z + \varDelta z)}{\sin(z + \varDelta z)} r$$

aus einer bekannten trigonometrischen Formel

$$\frac{1 - \sin(z + \varDelta z)}{\sin(z + \varDelta z)} = \cot(z + \varDelta z) \operatorname{tg}\left(45^0 - \tfrac{1}{2}(z + \varDelta z)\right)$$

Fig. 165.



und hieraus ergibt sich, wenn $\varDelta z = \frac{1}{2} \nu C$ gesetzt und berücksichtigt wird dass in dem vorliegenden Falle z immer ein stumpfer Winkel und $\operatorname{cotg} x = - \operatorname{tg}(x - 90^0)$ ist:

$$h = r \operatorname{tg}(z + \tfrac{1}{2} \nu C - 90^0) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(z + \tfrac{1}{2} \nu C - 90^0) \qquad (328)$$

Da die Refraction $\varDelta z$ von dem Winkel C abhängt, dieser aber nicht unmittelbar gegeben ist, so hat man vorerst C zu berechnen. Hierzu dient das rechtwinklige Dreieck ABC welches

$$VAB = z + \varDelta z = z + \tfrac{1}{2} \nu C = 90^0 + C \text{ und } C = \frac{z - 90^0}{1 - \frac{1}{2} \nu} \qquad (329)$$

liefert. Setzt man diesen Werth von C in die letzte Gleichung (328), so wird

$$h = r \operatorname{tg} 2\left(\frac{z - 90^0}{2 - \nu}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{z - 90^0}{2 - \nu}\right) \qquad (330)$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

2) Höhenbestimmung mit Hilfe eines Pegels.

Stellt man am Ufer des Meeres einen geeigneten Pegel auf durch den man nicht nur den höchsten und niedrigsten, sondern auch für einen bestimmten Zeitraum den mittleren Stand des Wasserspiegels erfährt, so braucht man nur an einer vom Punkte A aus sichtbaren Stelle einen Pfahl P in das Meeresufer zu rennen, daran eine den mittleren Wasserstand bezeichnende Marke zu befestigen und schliesslich die Höhe des Berges über dieser Planke zu messen, um damit auch sofort dessen Höhe über dem Meere zu erhalten.

Bezeichnet in Fig. 165 die Linie P W den Pegel und W den Wasserstand auf welchen die Höhe A D des Punkts A bezogen werden soll, so findet man von A aus den Zenithwinkel $V A P = z + \frac{1}{2} \nu C$, und wenn der Horizontalabstand $P Q = s$ bekannt ist, nach Gl. (321) die Höhe $A Q = h_1$ und damit

$$A D = D Q + Q A = W P + Q A = i + h_1$$

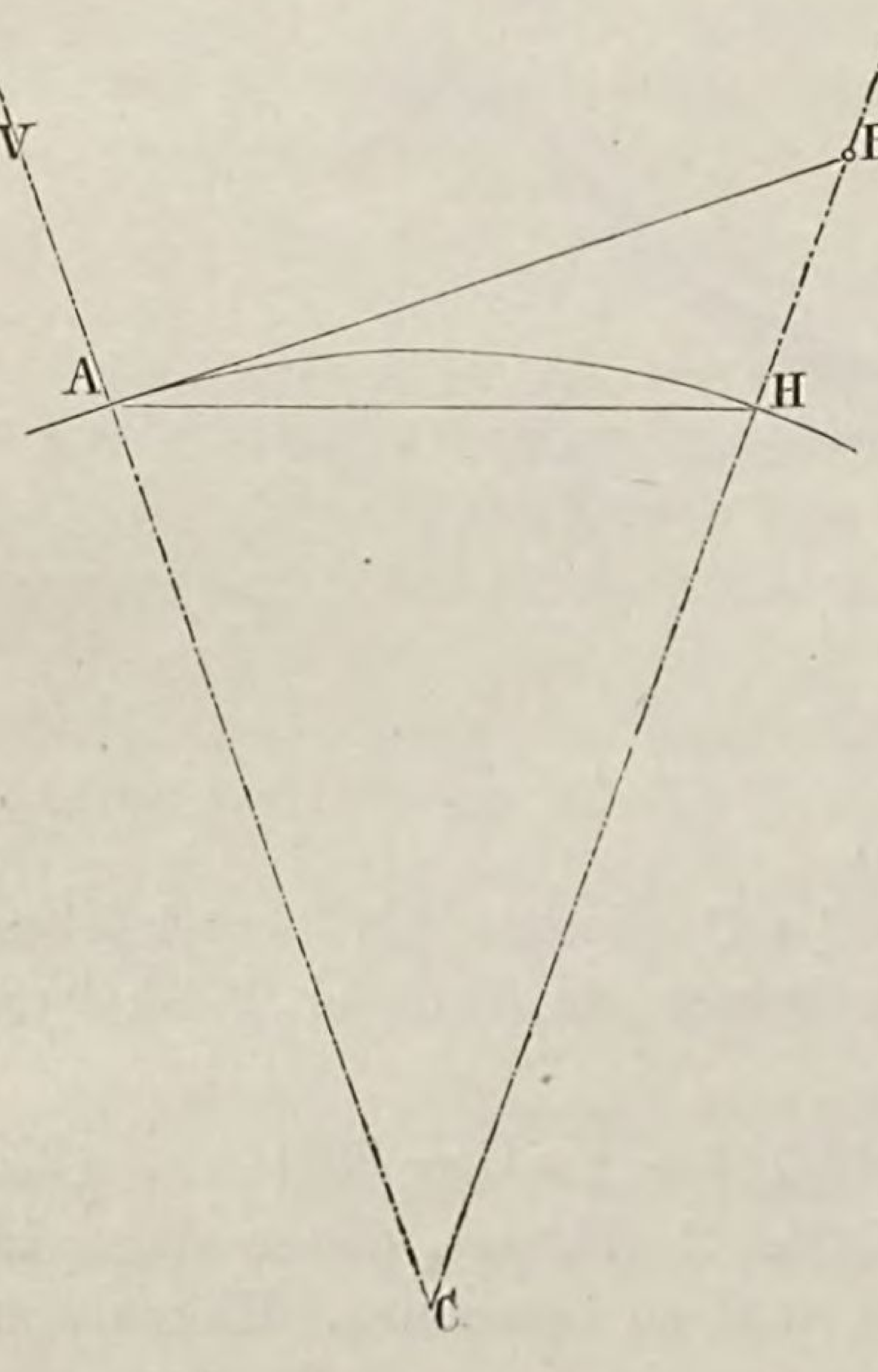


Fig. 166.

§. 165. Aufgabe. Den Höhenunterschied zweier durch ihren Horizontalabstand gegebenen Punkte mit Rücksicht auf die strenge Theorie der Strahlenbrechung zu finden.

Es sei nach Fig. 166 A der Standort und B der Punkt dessen Höhe über A zu finden ist. Zieht man die wahre Horizontale A H, so ist der Bogen $A H = r_0 \varphi$ als Horizontalabstand gegeben, und die Höhe $B H = x$ wird gesucht. Setzt man die in A beobachtete scheinbare Zenithdistanz von $B = z$ und behält die Bezeichnung des Verhältnisses von $5 \alpha : m$ mit ν und von $m (\cos^2 z + 1 - \nu) : \cos^2 z$ mit p bei, so ist die vorliegende Aufgabe sofort durch die Formel (268) in §. 149 gelöst, indem

$$x = r_0 \varphi \left(\cot z + \frac{\cos^2 z + 1 - \nu}{2 \sin^2 z} \varphi + \frac{2 \nu \cot z}{3 m \sin^2 z} \varphi^2 + \frac{\nu (p - 3) \cot^2 z}{6 m^2 \sin^2 z} \varphi^3 + \dots \right)$$

die gesuchte Höhe mit Rücksicht auf Erdkrümmung und Strahlenbrechung liefert. Man braucht letztere nicht besonders zu berechnen, da sie bereits in der Formel enthalten ist; es kommt nur darauf an für α, m und ν jedesmal die richtigen Werthe einzusetzen, was ebenfalls nach §. 149 geschehen kann.

In dem Ausdrucke für x ist die Refraction desshalb schon enthalten,

weil derselbe aus der Curve des vom Punkte B zum Beobachter in A gelangenden Lichtstrahls abgeleitet ist. Diese Art der Ableitung wird hier nicht zum ersten Male gemacht: sie wurde schon von Laplace, Puissant und Baeyer angewendet; aber die Resultate sind alle verschieden, und sowohl Laplace als Puissant stellen den Werth von x nur durch zwei Glieder einer überall mit demselben Gliede (cot z) beginnenden und nach Potenzen von φ fortschreitenden Reihe dar, während nicht selten noch das vierte Glied dieser Reihe einen merklichen Werth hat. (Siehe des Verfassers Abhandlung über die atmosph. Strahlenbrechung in Nr. 1589 der astron. Nachrichten, S. 80 ff.)

Um die Grösse der Glieder in dem Ausdrucke für x in einem bestimmten Falle zu überschauen, sei $z = 82^0 58'$, $r_0 = 3266\,600$ Toisen, $r_0\,\varphi = 9{,}1936$ geogr. Meilen, folglich $\varphi = 0{,}010715$. Lässt man für α, m, ν die in §. 149 angegebenen mittleren Werthe α_0, m_0, ν_0 gelten, so findet man zunächst $p = 0{,}41403$ und schliesslich

$$x = 4318{,}33 + 157{,}65 + 8{,}41 - 0{,}96 = 4483{,}43 \text{ Toisen.}$$

Wäre $z = 88^0$, $r_0 = 3266\,600$ Toisen, $\varphi = 0{,}02126$, also $r_0\,\varphi = 18{,}24$ Meilen, während α, m, ν wie vorhin bleiben, so setzt sich die gesuchte Höhe aus folgenden Gliedern zusammen; es ist nämlich

$$x = 1222{,}28 + 152{,}89 + 2{,}34 + 0{,}058 = 1377{,}57 \text{ Toisen.}$$

Will man die Höhe x unter Vernachlässigung der Strahlenbrechung berechnen, so hat man lediglich $\nu = 0$ zu setzen, wodurch das dritte und vierte Glied null und

$$x = r_0\,\varphi\left(\cot z + \tfrac{1}{2}\,(1 + 2\cot z^2)\,\varphi\right)$$

wird. Ganz derselbe Werth ergibt sich auch aus dem Näherungsausdrucke (320) wenn man in demselben $h = x$, $C = \varphi$, $s = r_0\,\varphi$ setzt, und den Quotienten $\cos\,(z - \tfrac{1}{2}\,\varphi) : \sin\,(z - \varphi)$ mittels des Maclaurin'schen Satzes nach φ entwickelt.

Wenn man in den Punkten A und B gleichzeitige und gegenseitige Zenithdistanzen z und z' nimmt, so kann man damit ausser dem Höhenunterschiede x auch den — x berechnen, indem man in der Hauptformel $r_0 + x$ für r_0, z' für z, ν' für ν und m' für m einsetzt; es ist aber nicht möglich, hier eben so wie in §. 162, Nr. 2 die Refraction zu eliminiren, und zwar desshalb nicht, weil unsere strengere Theorie der Strahlenbrechung die bisher geltende Hypothese, dass $\varDelta z = \varDelta z'$ sei, verwirft, indem sie zeigt dass diese Aenderungen der Zenithdistanzen stets etwas von einander verschieden sind, in der Art dass bei Gleichzeitigkeit und Gegenseitigkeit der Messung der dem unteren Punkte (A) zukommende Werth von $\varDelta z$ grösser ist als der zu dem oberen Punkte (B) gehörige Werth $\varDelta z'$.

Es würde zu weit führen unsere hierauf bezüglichen, in den astron. Nachrichten Nr 1589 enthaltenen Untersuchungen ausführlich mitzutheilen; ihre Ergebnisse dürfen wir aber dem Leser nicht vorenthalten. Wenn nämlich alle Buchstaben ihre bisherige Bedeutung behalten, so finden wir

$$\varDelta z = \tfrac{1}{2} \nu \varphi \left(1 - \frac{4\nu - m(5 - 6\nu)}{3\nu} p_0 \varphi - (\tfrac{1}{3} p + 1) p_0^2 \varphi^2 - \cdots\cdots \right)$$

$$\varDelta z' = \tfrac{1}{2} \nu \varphi \left(1 - \frac{8\nu + m(5 - 6\nu)}{3\nu} p_0 \varphi - (p - 5) p_0^2 \varphi^2 - \cdots\cdots \right)$$

$$\varDelta = \varDelta z - \varDelta z' = \tfrac{1}{3} p_0 \varphi^2 \left(2\nu + m(5 - 6\nu) + \nu(p - 9) p_0 \varphi + \cdots\cdots \right)$$

während die Summe $\varDelta z + \varDelta z' = r$ wird, wie es sein muss. Will man die Verhältnisse von $\varDelta z$, $\varDelta z'$ und $\varDelta$ zu r kennen lernen, so braucht man nur die vorstehenden Ausdrücke durch den Werth von r zu dividiren; es wird dann

$$\varDelta z = \tfrac{1}{2} r \left(1 + \frac{2\nu + m(5 - 6\nu)}{3\nu} p_0 \varphi + \frac{\nu(p - 5) + 2m(5 - 6\nu)}{3\nu} p_0^2 \varphi^2 + \cdots\cdots \right)$$

$$\varDelta z' = \tfrac{1}{2} r \left(1 - \frac{2\nu + m(5 - 6\nu)}{3\nu} p_0 \varphi - \frac{\nu(p - 5) + 2m(5 - 6\nu)}{3\nu} p_0^2 \varphi^2 + \cdots\cdots \right)$$

$$\varDelta = \frac{p_0 \varphi}{3\nu} r \left(2\nu + m(5 - 6\nu) + [\nu(p - 5) + 2m(5 - 6\nu)] p_0 \varphi + \cdots\cdots \right)$$

Bis jetzt fehlt es zwar noch an zahlreichen Beobachtungen welche unsere Formeln bestätigen, um so mehr aber sprechen die vorhandenen für dieselben. Zum Beweise dessen wollen wir hier eine Beobachtungsreihe mittheilen welche Baeyer und Hesse am Harz durchgeführt haben und ersterer in seiner Abhandlung über die Strahlenbrechung (Mém. de l'Acad. de St. Pétersb. VII[e] S. T. III. Nr 5) mitgetheilt hat. Die untere Station befand sich in Kupferkuhle bei Kroppenstedt, die obere auf der Spitze des Brocken. Die Zenithdistanzen wurden mit dreizehnzölligen Theodolithen gemessen; die Beobachtungen dauerten von $6^1/_2$ Uhr Morgens bis $5^1/_2$ Uhr Abends, und es fanden zwischen 6 und 9 Uhr Morgens sehr empfindliche und rasche Temperaturwechsel statt.

Station Kupferkuhle.

Nr	Zeit	Zenithdistanz z	Barometer	Thermometer	Corr. $\varDelta$ z
1	6h 35m	89° 0′ 2″ 94	331‴ 21	+ 8,4° R	184,43″
2	7 34	0 12,64	20	12,0	174,73
3	8 34	0 39,29	26	14,3	148,08
4	9 34	0 59,97	34	14,7	127,40
5	10 34	1 10,11	26	15,9	117,26
6	11 34	1 14,32	18	17,2	113,05
7	12 34	1 20,31	18	18,1	107,06
8	1 34	1 20,89	20	18,7	106,08
9	2 34	1 21,44	20	18,7	105,93
10	3 34	1 16,77	11	18,6	110,60
11	4 34	1 13,90	04	18,3	113,47
12	5 34	1 9,05	07	17,8	118,32

Station Brocken.

Nr	Zeit	Zenithdistanz z′	Barometer	Thermometer	Corr. Δ z′
1	6h 35m	91°20′19″42	295‴ 11	+ 8,8° R	137,77″
2	7 34	20 23,71	20	10,3	133,48
3	8 34	20 41,14	37	11,4	116,05
4	9 34	20 40,15	41	10,7	117,04
5	10 34	20 49,46	37	11,5	107,73
6	11 34	20 58,23	39	11,8	98,96
7	12 34	21 2,08	36	11,6	95,11
8	1 34	21 3,22	41	11,8	93,97
9	2 34	21 3,08	43	11,8	94,11
10	3 34	20 59,47	37	11,8	97,72
11	4 34	20 56,32	32	11,3	100,87
12	5 34	20 51,63	27	10,3	105,56

Vergleicht man die aus den Beobachtungen sich ergebenden Werthe von Δ z und Δ z′ welche nach der bisher üblichen Praxis als gleich anzusehen wären (und worauf auch Baeyer kein Gewicht gelegt hat), so fällt sofort auf dass die Werthe von Δ z′ kleiner sind als die entsprechenden von Δ z, wie es unsere Theorie verlangt; und schliesst man in jeder Reihe die drei ersten Beobachtungen wegen der erwähnten raschen Temperaturwechsel aus, so ergibt sich weiter dass die Differenzen der Correctionen von 9 bis $5\frac{1}{2}$ Uhr nur 9 bis 14 Secunden betrugen und dass die kleinste Differenz gegen 10 Uhr stattfand, welches nach unseren Erfahrungen die geeignetste Beobachtungsstunde am Vormittage ist. (Die eben erwähnten Differenzen sind zwar absolut genommen klein, relativ jedoch grösser als die Rechnung sie verlangt; vielleicht rühren diese Unterschiede von constanten mehrere Secunden betragenden Instrumentenfehlern, möglicherweise aber auch von einer Lothabweichung her welche fordert dass die Werthe von Δ z′ um etwa 6 Secunden vergrössert werden müssen.)

Die in §. 163 gelöste Aufgabe gestaltet sich nach unserer strengeren Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung wie folgt:

Nach der Formel (268) in §. 149, Seite 301 ist, wenn φ den Centriwinkel C in Fig. 162 vorstellt und der Erdhalbmesser r_0 bis zum Beobachtungspunkt A genommen wird, s gleich der Sehne des Bogens $r_0\,\varphi$ und daher nach 316

$$s = r_0\,\varphi\left(1 - \frac{\varphi^2}{24}\right) \text{ und } r_0\,\varphi = s\left(1 + \frac{(C \sin 1'')^2}{24}\right)$$

In der Regel kann $r_0\,\varphi = s$ gesetzt werden, da im ungünstigsten Falle der Bogen φ oder C sin 1″ den Werth 0,01 und folglich das zweite Glied des vorstehenden Klammer-Ausdrucks höchstens den Werth 0,0000042 annimmt. Unter dieser Voraussetzung und bei den in §. 163 und in Fig. 162 angewendeten Bezeichnungen ist

$$B\,H = h = s\left(\cot z + \frac{\cos^2 z + 1 - v}{2 \sin^2 z}\,\varphi + \frac{2\,v \cot z}{3\,m \sin^2 z}\,\varphi^2 + \cdots\right)$$

$$D\,H = h' = s\left(\cot z' + \frac{\cos^2 z' + 1 - v}{2 \sin^2 z'}\,\varphi + \frac{2\,v \cot z'}{3\,m \sin^2 z'}\,\varphi^2 + \cdots\right)$$

Zieht man den zweiten Theil h' vom ersten h ab, so ergibt sich der Ausdruck für B D, und man sieht sofort dass dieser nur im ersten Gliede

$$s\,(\cot z - \cot z') = \frac{s \sin (z' - z)}{\sin z' \,.\, \sin z}$$

mit dem in §. 163, Formel (324) dargestellten übereinstimmt und auch die Differenz der zweiten Glieder enthält, welche dort in Folge der Annahme gleicher Strahlenbrechungen für die Punkte B und D null wird. Ein brauchbarerer, d. h. der Wahrheit sehr nahekommender Werth für B D wird sich nur ergeben, wenn man die beiden Werthe von h und h' nach vorstehenden Formeln berechnet und den letzten vom ersten abzieht.

(Das Ausgleichen netzartig zusammenhängender trigonometrischer Höhenmessungen geschieht in ähnlicher Weise wie das von Nivellementsnetzen, wesshalb wir in dieser Hinsicht auf den Schluss des folgenden Abschnitts verweisen.)

D. Höhenmessen durch Nivelliren.

§. 166. Die trigonometrischen Höhenbestimmungen setzen immer die Kenntniss einer Standlinie voraus und ihre Genauigkeit hängt wesentlich von der Schärfe womit diese Linie gemessen wurde, und bei grossen Entfernungen von der Strahlenbrechung und der Erdkrümmung ab. Werden dergleichen Höhenbestimmungen gleichzeitig mit der Anlage eines Dreiecksnetzes für eine Landesvermessung vorgenommen, so veranlasst die Bestimmung der hier als Standlinien erscheinenden Dreiecksseiten und die Aufstellung der Theodolithe für die Messung der Verticalwinkel keine besonderen Kosten für die trigonometrische Höhenmessung, wesshalb diese schon aus ökonomischen Gründen mit der Triangulirung des Landes zu verbinden ist.

Handelt es sich um Höhen von Thürmen, Bäumen und anderen erhabenen Gegenständen welche in ausgedehnten Ebenen stehen, oder deren Spitzen unzugänglich sind, so ist wiederum die trigonometrische Höhenbestimmung die geeignetste, in vielen Fällen sogar die einzig mögliche.

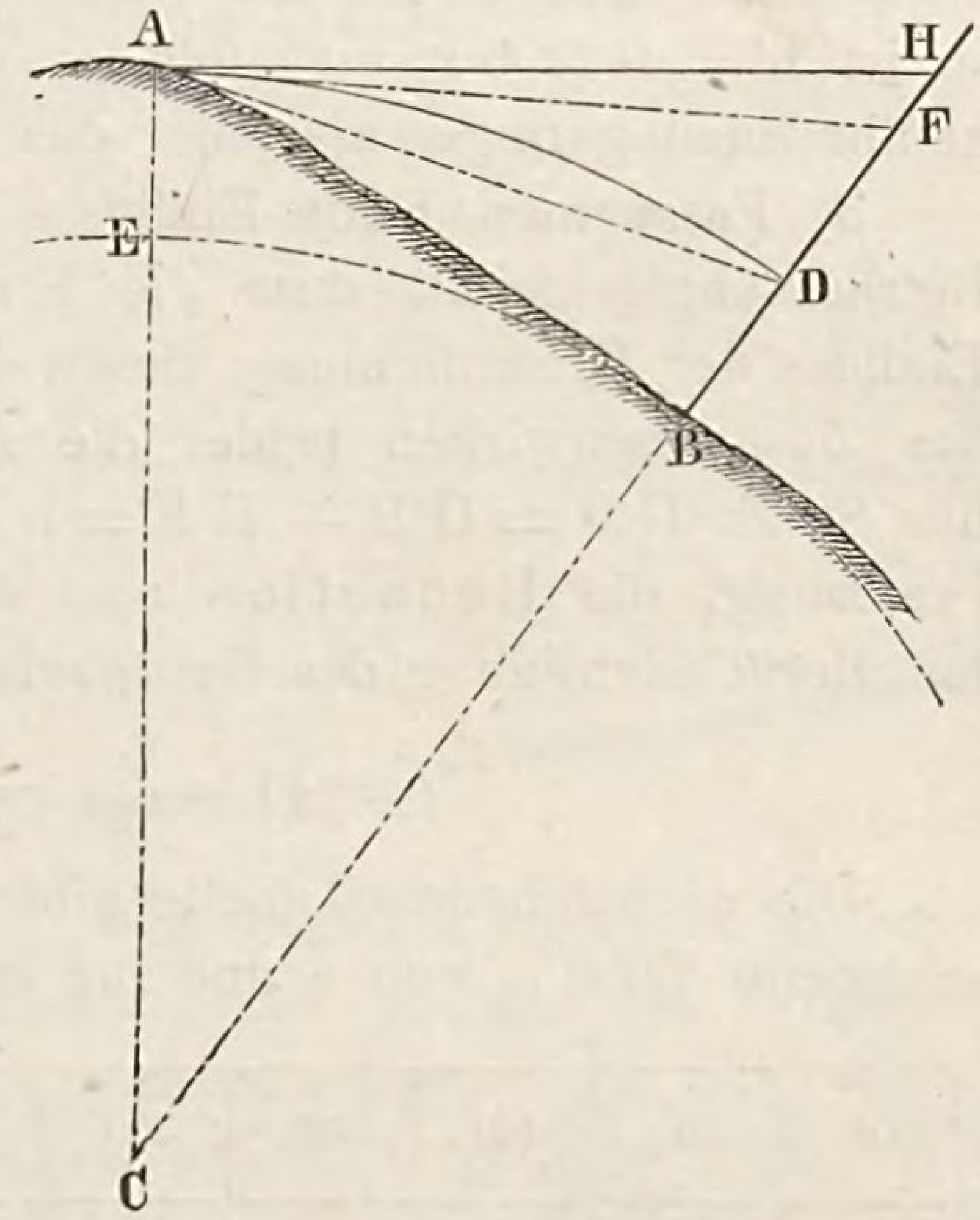
Wenn es aber, wie bei vielen technischen Unternehmungen, darauf ankommt die relative Höhenlage einer grossen Reihe von Punkten mit möglichster Genauigkeit zu bestimmen, während ihre gegenseitigen Entfernungen nur mit geringer Genauigkeit gemessen zu sein brauchen: so ist die trigonometrische Höhenmessung nicht mehr anwendbar, weil sie in Folge der nicht scharf gemessenen Standlinien und der veränderlichen Strahlenbrechung keine hinreichend genauen Resultate liefern kann. In solchen Fällen erscheint das Nivelliren welches keine Horizontalmessungen vor-

aussetzt und dessen Resultate fast immer von den nachtheiligen Einflüssen der Strahlenbrechung und Erdkrümmung befreit werden können, als die vorzüglichste Art der Höhenmessung.

§. 167. Aufgabe. Den Einfluss der Erdkrümmung und der Strahlenbrechung auf das Nivelliren darzustellen.

Im ersten Bande dieses Werks (S. 442) haben wir zur Erläuterung des Begriffs der Nivellirinstrumente angenommen, es handle sich bloss um die Ermittelung des Höhenunterschieds zweier nahe gelegenen Punkte, und unter dieser Voraussetzung war es nicht nöthig auf die Krümmung der Erde und die Brechung des Lichts in der Luft Rücksicht zu nehmen. Jetzt muss der Begriff des Nivellirens schärfer gefasst werden, damit man klar einsieht in welchem Zusammenhange die Erdkrümmung und Strahlenbrechung mit dem Nivelliren stehen, und in welchen Fällen deren Einflüsse beseitigt oder doch unschädlich gemacht werden können.

Fig. 167.



1) Der Höhenunterschied zweier Punkte ist der senkrechte Abstand ihrer wahren Horizonte. Sind A und B (Fig. 167) zwei Punkte der Erdoberfläche und A D, B E ihre von dem Erdmittelpunkte C aus beschriebenen und in der Verticalebene A B C liegenden wahren Horizontallinien, so bezeichnen die verticalen Linien A E und B D den gesuchten Höhenunterschied. Denkt man sich nun in dem Punkte A eine in der Ebene A B C liegende horizontale Visirlinie A H, wie sie ein Nivellirinstrument liefert, so ist diese eine Tangente zum wahren Horizont A D und gibt folglich auf einer in B lothrecht stehenden Nivellirlatte nicht die gesuchte Höhe B D, sondern (wenn man vorläufig von der Strahlenbrechung absieht) die Höhe B H an. Man findet somit den Höhenunterschied der Punkte A und B in diesem Falle um den Abstand D H des scheinbaren und wahren Horizonts zu gross. Bezeichnet man diesen Abstand mit h, die Entfernung der Latte vom Punkte A oder A H mit e und den Erdhalbmesser A C mit r_0, so ist nach einem bekannten geometrischen Satze $e^2 = h\,(2\,r_0 + h)$, und da hier h gegen $2\,r_0$ verschwindet,

$$h = \frac{e^2}{2\,r_0} \tag{331}$$

Um diese Grösse müsste jede Ablesung auf einer Nivellirlatte kleiner gemacht werden, wenn es nicht Nivellirmethoden gäbe welche diese Verbesserung wegen der Erdkrümmung überflüssig machen.

2) Die Wirkung der atmosphärischen Strahlenbrechung besteht darin dass sie (mit Bezug auf die vorige Figur) dem in A befindlichen Auge nicht den Punkt H sondern einen um den Refractionswinkel tiefer liegenden Punkt F sichtbar macht. Man wird also auch auf der Latte in B nicht die Höhe B H sondern B F ablesen welche um das Stück $H F = h'$ kleiner ist. Die Grösse h' welche den Einfluss der Strahlenbrechung auf die Entfernung e der Nivellirlatte von dem Punkte A bezeichnet, lässt sich wie folgt durch h ausdrücken. Denkt man sich nämlich die Linien A F, A D in Fig. 167 gezogen, so verhalten sich die äusserst kleinen Winkel $HAF = \Delta z$ und $H A D = \frac{1}{2}(A C B) = \frac{1}{2} C$ sehr nahe wie die Linien $H F = h'$ und $H D = h$, und da $\Delta z = \frac{1}{2} k C$, so wird

$$h' = k h = k \frac{e^2}{2 r_0} \qquad (332)$$

Setzt man nach Gauss die Refractionsconstante $k = 2 . 0{,}0653 = 0{,}1306$, so ist $h' = 0{,}1306\, h$ und folglich der Einfluss der Strahlenbrechung ungefähr 8mal geringer als jener der Erdkrümmung.

3) Fasst man beide Einflüsse zusammen, so ergeben die bisherigen Betrachtungen leicht dass die Strahlenbrechung den fehlererzeugenden Einfluss der Erdkrümmung theilweise aufhebt, und dass demnach durch das Zusammenwirken beider die Ablesung auf der Nivellirlatte nur um das Stück $D F = D H - H F = h - h' = c$ zu verbessern ist. Diese Verbesserung, die Reduction auf den wahren Horizont, ist demnach mit Berücksichtigung des Gauss'schen Coefficienten gleich

$$c = (1 - k) \frac{e^2}{2 r_0} = 0{,}4347 \frac{e^2}{r_0} \qquad (333)$$

Die nachstehende Tabelle gibt einen Ueberblick der Grösse c für verschiedene Werthe von e und für einen der mittleren Breite von Deutschland entsprechenden Erdhalbmesser r_0. Ihr Gebrauch ist sehr einfach: In der mit 0 bezeichneten zweiten Spalte stehen die Werthe von c welche den Entfernungen e in der ersten entsprechen, in der dritten jene Werthe

e	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
0	0,000	0,001	0,003	0,006	0,011	0,017	0,025	0,033	0,044	0,055
1000	0,068	0,082	0,098	0,115	0,134	0,153	0,174	0,197	0,221	0,246
2000	0,273	0,30	0,33	0,36	0,39	0,43	0,46	0,50	0,53	0,57
3000	0,61	0,65	0,70	0,74	0,79	0,83	0,88	0,93	0,98	1,04
4000	1,09	1,15	1,20	1,26	1,32	1,38	1,44	1,51	1,57	1,64
5000	1,70	1,77	1,84	1,91	1,99	2,06	2,14	2,21	2,29	2,37
6000	2,45	2,54	2,62	2,70	2,79	2,88	2,97	3,06	3,15	3,24
7000	3,34	3,43	3,53	3,63	3,73	3,83	3,94	4,04	4,15	4,25
8000	4,36	4,47	4,58	4,69	4,81	4,92	5,04	5,16	5,28	5,40
9000	5,52	5,64	5,77	5,89	6,02	6,15	6,28	6,41	6,54	6,68
10000	6,81	6,95	7,09	7,22	7,37	7,51	7,66	7,80	7,95	8,09

von c welche zu den Entfernungen e + 100 m gehören, u. s. w. Für e = 4700 m ist somit c = 1,51 m.

Unsere Theorie der terrestrischen Strahlenbrechung liefert unmittelbar den Ausdruck (333), wenn man in der Formel (268) des §. 149 die Zenithdistanz z = 90⁰ setzt; denn es wird dann, weil $r_0 \varphi = e$, und $\nu = k$ ist,

$$x = \tfrac{1}{2} r_0 \varphi^2 (1 - \nu) = (1 - k) \frac{e^2}{2 r_0} = c \qquad (334)$$

1. Die Methoden des Nivellirens.

§. 168. Beträgt der Höhenunterschied zweier Punkte nicht mehr als die Länge der Nivellirlatte und sind diese beiden Punkte nur so weit von einander entfernt dass eine einzige Aufstellung des Nivellirinstruments hinreicht jenen Unterschied zu finden, so nennt man das zur Bestimmung dieses Unterschieds nöthige Messverfahren ein einfaches Nivellement; sind aber mehrere Aufstellungen des Nivellirinstruments zur Auffindung des

Fig. 168.

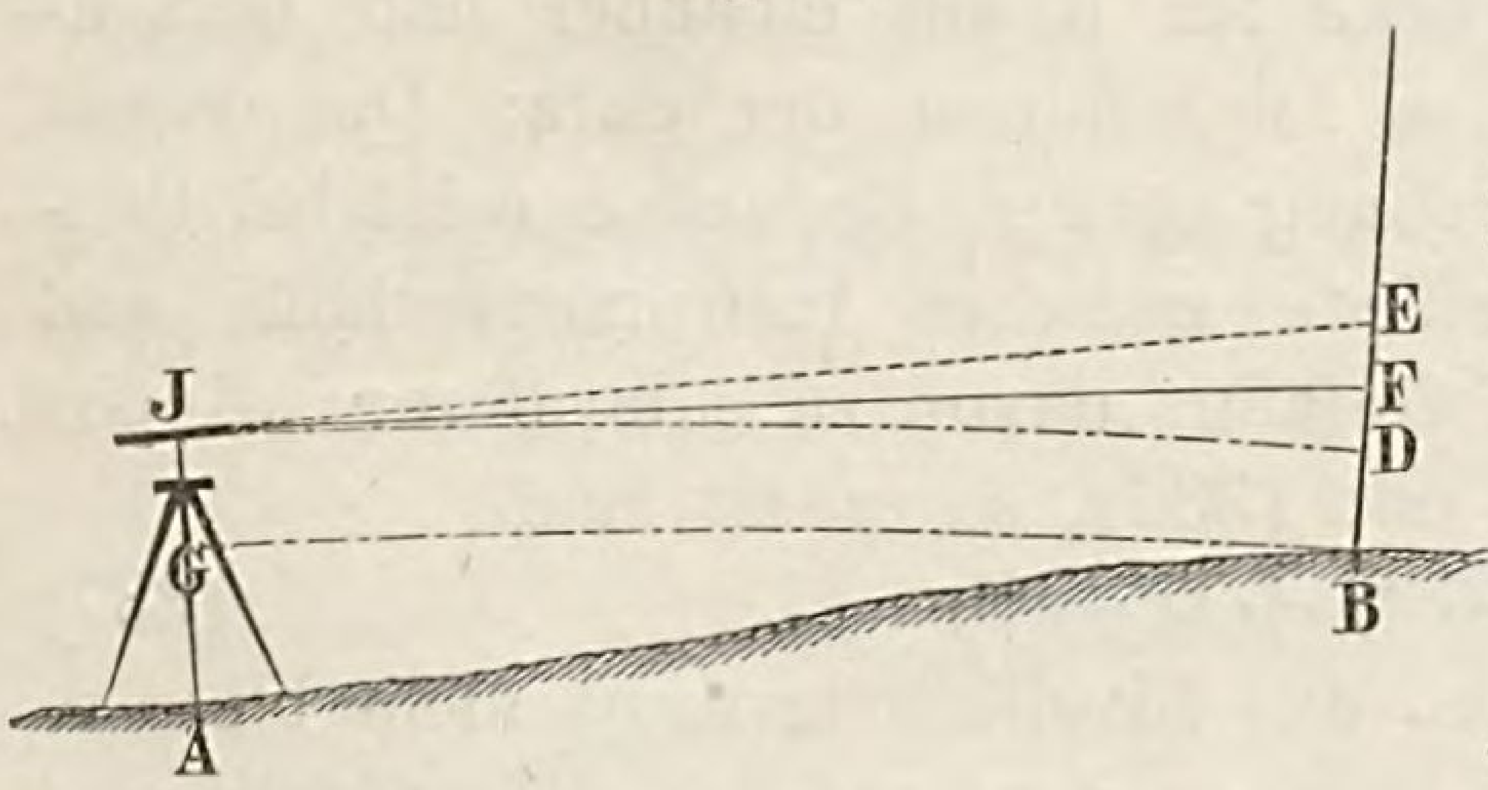
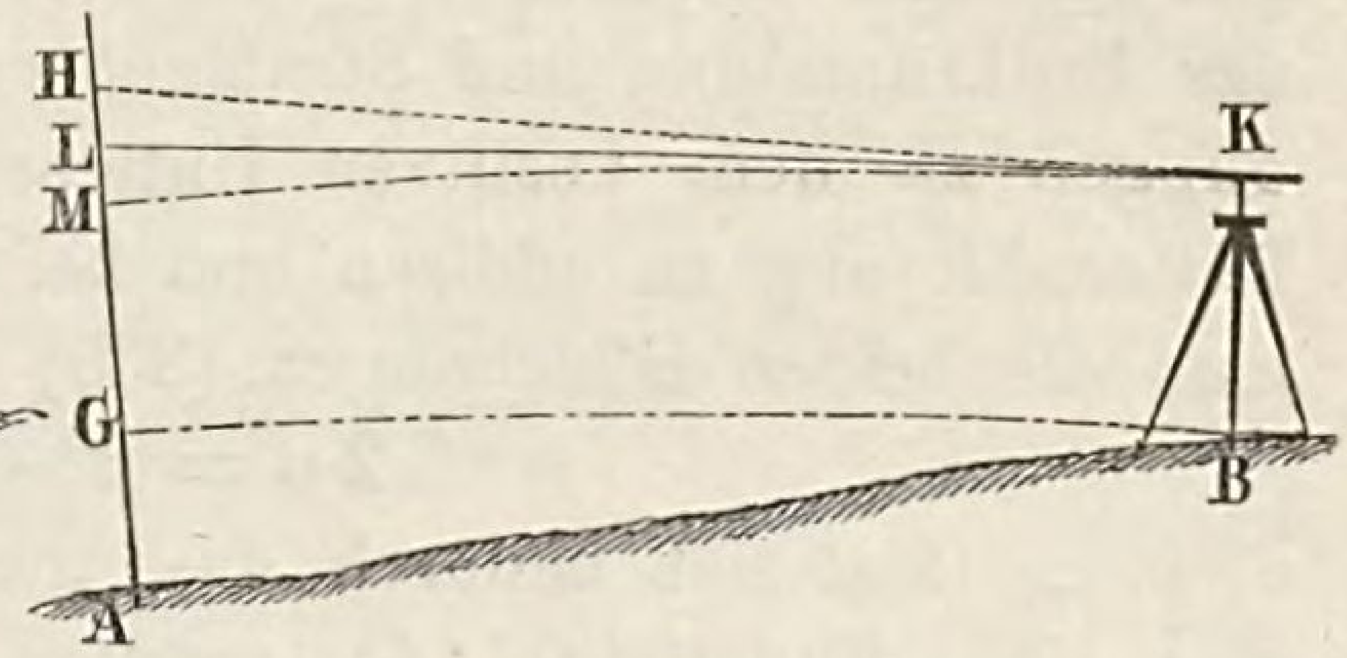


Fig. 169.



Höhenunterschieds zweier Punkte nöthig, weil dieselben entweder im Grundrisse oder im Aufrisse zu weit auseinander liegen, so heisst die Verbindung dieser einfachen Nivellemente für den genannten Zweck ein zusammengesetztes Nivellement. Die Nivellirmethoden (von der auf Seite 345 erwähnten besonderen Methode Stampfers abgesehen) unterscheiden sich lediglich durch die Lage des Standorts des Instruments gegen die einzunivellirenden zwei Punkte; und da der Standort nur entweder in einem der beiden Punkte oder zwischen denselben angenommen wird, so hat man auch nur zwei Arten des Nivellirens, nämlich das Nivelliren aus einem Endpunkte und das Nivelliren aus einem Zwischenpunkte zu betrachten.

§. 169. Aufgabe. Das Nivelliren aus einem Endpunkte.

Sind A und B (Fig. 168 und 169) die einzunivellirenden Punkte, und stellt B G die in der Verticalebene A B liegende wahre Horizontallinie des Punkts B, die Linie A J aber eine Verticale vor, so ist A G = u der gesuchte Höhenunterschied welcher sowohl von A als von B aus bestimmt werden kann. Stellt man das Instrument in A und die Latte in B auf (Fig. 168), so liefert das bekannte Verfahren eine Ablesung auf der Latte welche dem Lattenabschnitte B F = l entspricht, wenn F derjenige Punkt

der Latte ist welcher um den Refractionswinkel Δz unter der horizontalen Absehlinie J E des Instruments liegt. Zieht man durch den Punkt J die wahre Horizontallinie J D, so wird der Lattenabschnitt nach §. 167 auf den wahren Horizont, d. i. auf den Punkt D wo der Kreis J D die Latte trifft, reducirt, indem man c von l abzieht: es ist somit $BD = JG = l - c$ und folglich, wenn man die Instrumentenhöhe $AJ = i$ setzt, der gesuchte Höhenunterschied $AG = AJ - JG$ oder

$$u = i - l + c \tag{335}$$

Befindet sich das Nivellirinstrument in dem höher gelegenen Punkte B und die Latte über A (Fig. 169), so gelangt durch das horizontal gerichtete Fernrohr das Bild des Punkts L welcher um den Refractionswinkel ϱ unter der Visirlinie K H liegt, ins Auge. Steht dieser nun um die Länge l' von A ab und ist K M der wahre Horizont des in der Höhe $BK = i'$ aufgestellten Instruments, so ist auch, da die Reductionsgrösse c dieselbe bleibt: $AM = AL - LM = l' - c$ und folglich der gesuchte Höhenunterschied A G der Punkte A und B oder

$$u = l' - i' - c \tag{336}$$

Vergleicht man die beiden Ausdrücke für u mit einander und berücksichtigt dass B höher liegt als A, so folgt daraus der Satz: Die wegen der Erdkrümmung und Strahlenbrechung nöthige Reduction c ist bei Steigungen zu dem positiven Unterschiede zwischen Instrumentenhöhe und Lattenablesung zu addiren und bei Gefällen davon zu subtrahiren. Addirt man die beiden Gleichungen (335) und (336), so erhält man

$$2u = (l' - l) + (i - i') \tag{337}$$

d. h. es lässt sich dadurch dass man das Nivellirinstrument nicht bloss in dem einen Endpunkte (A), sondern auch in dem anderen (B) aufstellt und das Nivellirverfahren vollzieht, der Einfluss der Erdkrümmung und der Strahlenbrechung auf das Resultat der Messung beseitigen, was bei einer einzigen Aufstellung nicht möglich ist.

§. 170. Aufgabe. Das Nivelliren aus einem Zwischenpunkte.

Sind A und B (Fig. 170 Seite 345) die beiden gegebenen Punkte deren Höhenunterschied $BM = AH + BN = u$ ermittelt werden soll; steht ferner das Instrument auf einem in oder ausserhalb der Linie A B liegenden Punkte C welcher von B um die Länge e und von A um die Länge e' entfernt ist; setzt man weiter die Instrumentenhöhe $CD = i$ und die Ablesungen in $B = l$, in $A = l'$; und heissen endlich die Reductionen auf den wahren Horizont für den Punkt $B = c$ und für $A = c'$: so ist nach dem vorigen Paragraphen die Steigung

$$NB = i - l + c \text{ und das Gefälle } HA = l' - i - c'$$

Addirt man beide Gleichungen, so folgt daraus der Höhenunterschied

$$u = (l' - l) - (c' - c) \tag{338}$$

Für $e' = e$ wird $c' = c$ und folglich in diesem Falle

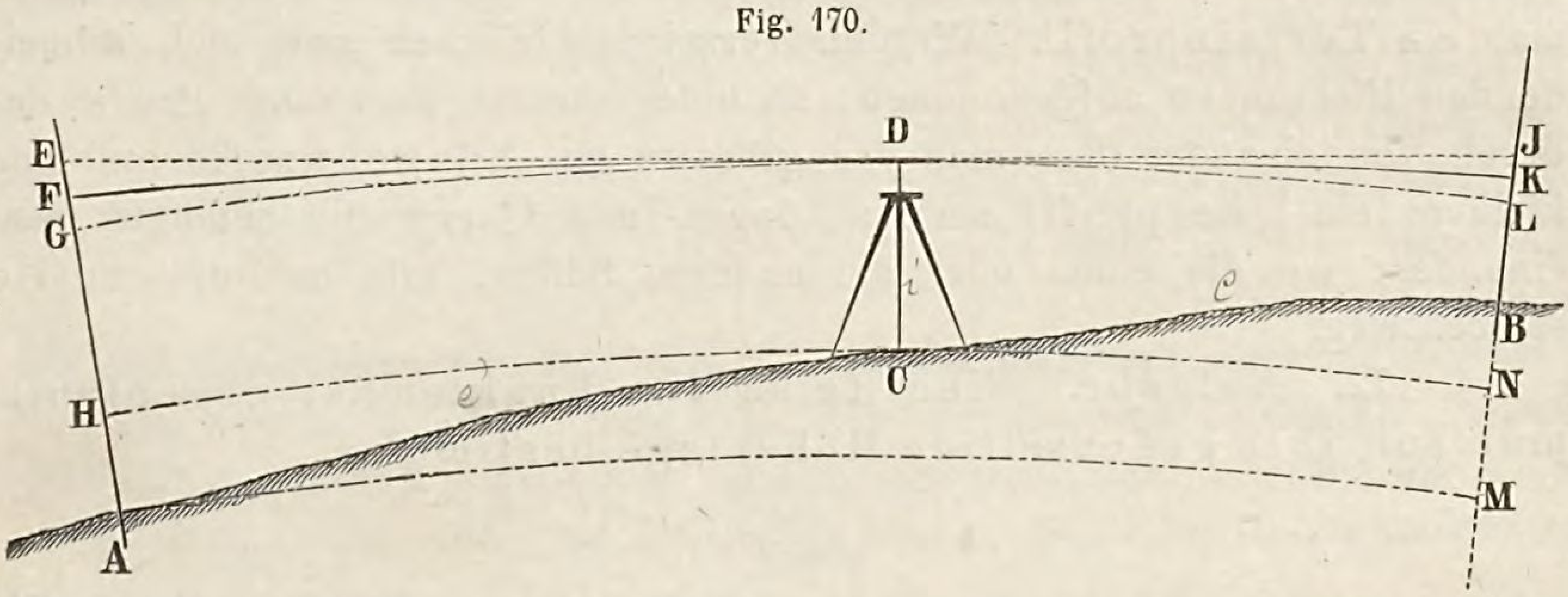
$$u = l' - l \tag{339}$$

Wenn man also das Nivellirinstrument in gleicher Entfernung von den

beiden Endpunkten einer Station aufstellt, so beseitigt man dadurch den Einfluss sowohl der Erdkrümmung und Strahlenbrechung, als auch den der Instrumentenhöhe auf das Messungsresultat. Diesen Vortheil gewährt keine andere Art des Nivellirens, und desshalb ist auch das „Nivelliren aus der Mitte einer Station“ jedem anderen Verfahren vorzuziehen, wenn nicht Localverhältnisse fordern sich in den Endpunkten aufzustellen.

Das Einhalten der Mitte der Station, d. i. gleicher Entfernungen von den Endpunkten, ist nicht strenge nöthig, da nach Gl (338) der Einfluss der ungleichen Entfernungen e′ und e nur dem Unterschiede der ihnen entsprechenden Reductionen c′ und c gleich kommt und diese Reductionen selbst für ziemlich grosse Entfernungen nur wenig betragen. Gesetzt, in einer Station stehe das Nivellirinstrument 80 Meter von dem einen und 70 Meter von dem anderen Endpunkte ab: so ist nach der in §. 167 mitgetheilten Tabelle (da die Reductionen den Quadraten der Entfernungen proportional sind) $c' = 0{,}44$ und $c = 0{,}33$ mm und daher $c' - c = 0{,}11$ mm, ein Fehler der bei den meisten Nivellementen nicht beachtet zu werden

Fig. 170.



braucht. Es genügt also vollständig wenn man die Mitte der Station nach dem Augenmasse bestimmt und dabei auf einen festen Standpunkt des Instruments Rücksicht nimmt. Dabei wird wiederholt erinnert dass diese Mitte nicht in der Verticalebene der einzunivellirenden Punkte zu liegen braucht, sondern nach der Beschaffenheit des Bodens beliebig ausserhalb jener Ebene liegen darf.

Mit dem im I Bande beschriebenen Stampfer'schen Nivellirinstrumente kann man nicht bloss nach den beiden hier betrachteten Methoden sondern auch noch auf eine besondere Art nivelliren. Diese Nivellirmethode gehört übrigens weniger hieher als in das Gebiet der trigonometrischen Höhenmessung, und da sie bereits im ersten Bande (Seite 482 und 483) beschrieben wurde, so kann sie hier übergangen werden.

2. Das Nivelliren der Linien.

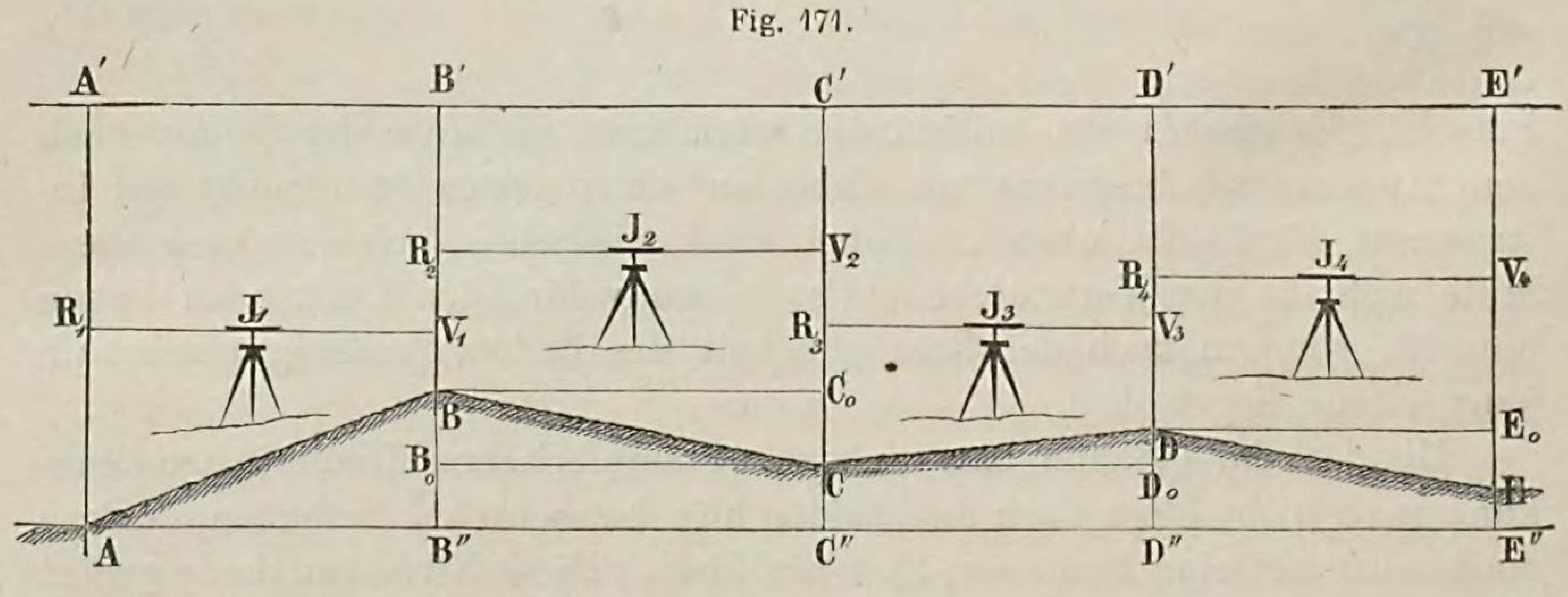
§. 171. Für technische Zwecke sind meist zusammengesetzte Nivellemente erforderlich um die gegenseitige Höhenlage von mehr als zwei

Punkten der Erdoberfläche zu erfahren. Liegen die einzunivellirenden Punkte alle in einer Verticalebene oder in einer lothrechten Cylinderfläche von ganz beliebiger Leitlinie: so heisst die Bestimmung der Höhenunterschiede aller Punkte der hierdurch bezeichneten geraden oder krummen Linie das Nivellement einer Linie. Sind dagegen die einzunivellirenden Terrainpunkte zwar nach verschiedenen Richtungen zerstreut aber doch durch gerade auf dem Boden liegende Linien mit einander verbunden: so nennt man die Bestimmung der Höhenunterschiede solcher Punkte das Nivellement einer Fläche.

Hat man eine gerade oder krumme Linie in bekannter Weise auf dem Felde abgesteckt und ausgemessen, so ist ihre Horizontalprojection gegeben; bestimmt man dazu auch die relative Höhenlage aller Punkte dieser Linie durch Nivelliren, so lässt sich ein Bild von dem Durchschnitte des Terrains mit der durch die Gerade oder Krumme gelegten lothrechten Ebene oder Cylinderfläche entwerfen und dadurch eine klare Vorstellung von der Form des Terrains nach der abgesteckten Richtung geben. Ein Bild welches die Erhöhungen und Vertiefungen des Terrains nach einer Linie darstellt, nennt man ein Terrainprofil. Werden Terrainprofile nach zwei sich schneidenden Richtungen aufgenommen, so unterscheidet man diese Profile dadurch von einander dass man das grössere ein Längenprofil und das kleinere ein Querprofil nennt; Längen- und Querprofile bedingen also einander: wo die einen oder die anderen fehlen, gibt es nur Profile schlechtweg.

§. 172. Aufgabe. Eine Reihe von Punkten ist abgepfählt, man soll ihre gegenseitige Höhenlage bestimmen.

Fig. 171.



Sind A, B, C, D, E die gegebenen Punkte, so bestimme man zunächst den Höhenunterschied zwischen A und B nach §. 170, indem man das Nivellirinstrument in J_1 nahezu gleichweit von A und B aufstellt und die Lattenabschnitte $A R_1 = r_1$ und $B V_1 = v_1$ abliest und aufzeichnet. Hierauf bringe man das Instrument nach J_2 zwischen B und C, nahezu gleichweit von beiden Punkten entfernt, verfahre wieder nach §. 170 und bemerke sich die Lattenabschnitte $B R_2 = r_2$ und $C V_2 = v_2$. Ebenso

findet man in dem Punkte J_3 zwischen C und D, $C R_3 = r_3$ und $D V_3 = v_3$, in dem Standpunkte J_4 zwischen D und E, $D R_4 = r_4$ und $E V_4 = v_4$, und in dem Standpunkte J_n der n^{ten} Station: $N R_n = r_n$ und $N_1 V_n = v_n$

Die Ablesungen $r_1, r_2, r_3, r_4 \ldots . r_n$ welche in den Stationen 1, 2, 3, 4.... n auf den rückwärts gelegenen Punkten A, B, C, D.... N gemacht wurden, nennt man Rückblicke und die Ablesungen $v_1, v_2, v_3, v_4 \ldots . v_n$ welche in denselben Stationen den vorwärts gelegenen Punkten B, C, D, E.... N_1 angehören, Vorblicke. Mit diesen Ablesungen ist die Aufnahme des Nivellements vollendet. Die Berechnung desselben erstreckt sich zunächt auf die Höhenunterschiede zwischen je zwei auf einander folgenden Punkten. Zieht man stets den Vorblick vom Rückblicke ab, so gibt das Vorzeichen der wirklich ausgerechneten Differenz an, ob von dem vorhergehenden Punkte zum folgenden eine Steigung oder ein Gefäll stattfindet; zieht man aber immer nur die kleinere Zahl von der grösseren ab, so ist zu der hierdurch erhaltenen positiven Differenz noch zu bemerken, ob sie eine Steigung oder ein Gefäll bezeichnet. In dem vorliegenden Falle geben Messung und Rechnung

von A bis B eine Steigung $B''B = r_1 - v_1 = + (r_1 - v_1)$
„ B „ C ein Gefäll $C^0C = v_2 - r_2 = - (r_2 - v_2)$
„ C „ D eine Steigung $D^0D = r_3 - v_3 = + (r_3 - v_3)$
„ D „ E ein Gefäll $E^0E = v_4 - r_4 = - (r_4 - v_4)$
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

Mit den Steigungen und Gefällen zwischen je zwei auf einander folgenden Punkten lassen sich sehr leicht die Höhenunterschiede zwischen je zwei getrennten Punkten berechnen. Denn zieht man durch die Punkte A, B, C, D, E... wagrechte und lothrechte Linien, so ist der Höhenunterschied

zwischen A und $B = B B'' = u_1 = r_1 - v_1$
„ A „ $C = C C'' = u_2 = r_1 - v_1 + r_2 - v_2$
„ A „ $D = D D'' = u_3 = r_1 - v_1 + r_2 - v_2 + r_3 - v_3$
„ A „ $E = E E'' = u_4 = r_1 - v_1 + r_2 - v_2 + r_3 - v_3 + r_4 - v_4$

und somit auch der Höhenunterschied zwischen dem Endpunkte der n^{ten} und dem Anfangspunkte der ersten Station gleich der algebraischen Summe aller Unterschiede zwischen Rück- und Vorblick. Bezeichnet man die Summe aller Unterschiede zwischen r und v von $r_1 - v_1$ bis $r_n - v_n$ mit $\Sigma(r-v)$, so lässt sich der eben ausgesprochene Satz in Zeichen so schreiben:

$$u = \Sigma (r - v) = \Sigma (r) - \Sigma (v) \qquad (340)$$

und es sagt die zweite der vorstehenden Gleichungen: man erhält den Höhenunterschied irgend zweier Punkte einer nivellirten Linie, wenn man von der Summe aller Rückblicke die Summe aller Vorblicke zwischen diesen zwei Punkten abzieht.

Die beiden Gleichungen (340) geben den Verticalabstand jedes Punkts der nivellirten Linie von einer Horizontalebene die durch den Anfangspunkt A geht. Statt dieser Horizontalebene kann man aber auch jede andere

wählen welche um eine beliebige Grösse über oder unter A liegt. Befindet sich diese Ebene welche man den Generalhorizont des Nivellements nennt, über allen Punkten des Längenprofils und insbesondere um die Grösse h über dem Punkte A, so ist der Abstand des Endpunkts der n^{ten} Station von dem allgemeinen Horizont $y = h - u$ und liegt der Generalhorizont unter allen Punkten des Profils, so ist $y = h + u$, daher allgemein der Abstand (oder die Cote) irgend eines Punkts vom Generalhorizont

$$y = h \mp u = h \mp \Sigma (r - v) \tag{341}$$

§. 173. Aufgabe. Ein Längenprofil herzustellen.

Die Erfüllung dieser Aufgabe erfordert verschiedene Verrichtungen, nämlich das Aufnehmen, die Berechnung, das Ausgleichen von Beobachtungsunterschieden zwischen den beiden Nivellements welche der Sicherheit halber gemacht werden müssen, und endlich das Auftragen der Beobachtungsergebnisse.

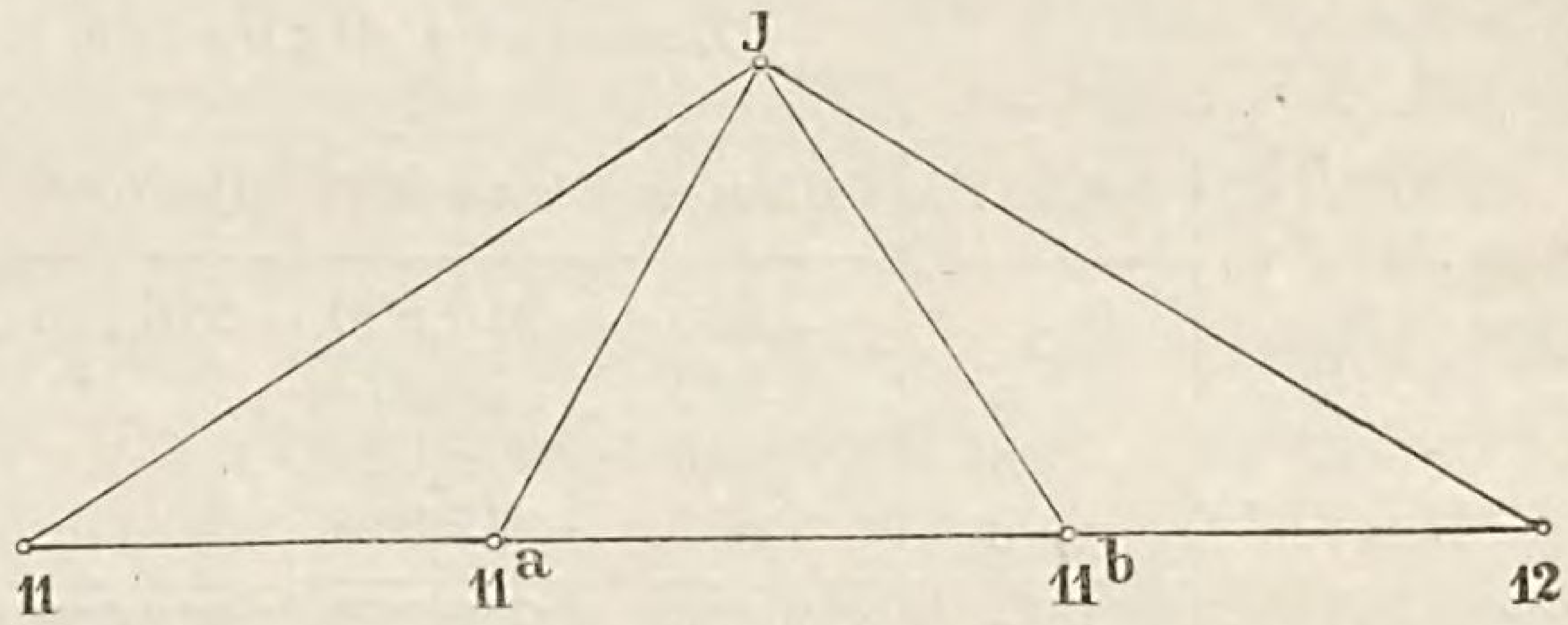
1. Aufnahme. Wenn die Richtung des Profils abgesteckt ist, besteht die nächste Arbeit in der Bezeichnung der einzunivellirenden Punkte. Dazu gehören erstens alle Punkte, in welchen die Durchschnittslinie ihre Richtung im verticalen Sinne ändert, wie z. B. in den Punkten A, B, C, D, E der Fig. 171 und zweitens jene Punkte welche gleiche grössere Abschnitte der Horizontalprojection bezeichnen. Diese letzteren Punkte nimmt man bloss desswegen mit in das Längenprofil auf, um die wagrechten Entfernungen der einzelnen Punkte besser übersehen zu können. Man macht daher diese Entfernungen von einander entweder = 100 Meter oder 200 Meter, und bezeichnet sie, von 0 anfangend, mit fortlaufenden Nummern, so dass man also bei jeder Nummer sofort die wagrechte Entfernung des Punkts vom Anfangspunkte der Linie kennt. Die mit Nummern bezeichneten Endpunkte gleicher Abschnitte der einzunivellirenden Linie nennt man Hauptpunkte, im Gegensatze zu den innerhalb derselben liegenden Brechungspunkten welche Zwischenpunkte heissen. Diese werden mit den Anfangsbuchstaben des Alphabets in der Art bezeichnet dass man diese Buchstaben der Nummer des vorausgehenden Hauptpunkts in Form eines Exponenten beifügt. Sind also z. B. zwischen den Hauptpunkten Nr 5 und 6 vier Zwischenpunkte zu bezeichnen, so heisst der erste an Nr 5 stehende Punkt: 5^a, der zweite 5^b, der dritte 5^c, und der vierte 5^d. Wegen der Pfähle vergleiche man §. 91 des ersten Bands.

Man begreift dass es wegen dieser an gleiche Horizontalabschnitte der zu nivellirenden Linie geknüpften Bezeichnungen der Punkte nöthig ist mit dem Abpflocken der Linie auch das Ausmessen derselben in horizontaler Richtung vorzunehmen. Letzteres geschieht in der Regel mit der Messkette, obwohl es besser wäre Messlatten anzuwenden um zwischen den Genauigkeiten der Horizontal- und Höhenmessungen ein besseres Verhältniss herzustellen. Es versteht sich übrigens von selbst dass man nicht bloss die Hauptabschnitte der Linie, sondern die horizontalen Entfernungen

aller Haupt- und Zwischenpunkte zweimal abmisst um sicher zu sein dass in diesen Messungen kein grober Fehler liegt.

Ist die ganze Linie abgepflockt und horizontal ausgemessen, so beginnt das Nivelliren in der schon bekannten Weise, nur mit dem Unterschiede dass man, wenn es das Terrain und die Entfernungen erlauben, von einem Standpunkte aus nicht bloss zwei Punkte, sondern so viele als man gut übersehen kann, einnivellirt. Sind also z. B. die Punkte Nr 11 und Nr 12 (Fig. 172) nur so weit von einander entfernt dass sie von dem Standpunkte J aus noch deutlich anvisirt werden können, und liegen die Zwischenpunkte 11^a und 11^b so dass man sie von J aus ebenfalls gut sehen kann: so wird die Latte nach einander in den Punkten 11, 11^a, 11^b, 12 abgelesen und hierauf die Station gewechselt. Da die Entfernungen von J nach 11 und 11^a oder von J nach 12 und 11^b ungleich sind, so gleicht sich streng genommen der Einfluss der Strahlenbrechung und Erdkrümmung in den Höhenunterschieden zwischen 11 und 11^a oder zwischen 12 und 11^b nicht aus; derselbe ist aber auch so gering dass er wohl übersehen werden darf. Denn wenn die Entfernung von J bis 11 sogar 300′ und bis 11^a nur 60′ beträgt, so ist der Fehler der durch Vernachlässigung der Correction $c' - c$ in den Höhenunterschied zwischen 11 und 11^a kommt, nach der Tabelle auf Seite 342 nur $= 0{,}2759$ Pariser Linien und daher um so weniger zu beachten, als er sich nicht durch das ganze Nivellement fortpflanzt, wie es der Fall wäre, wenn die Entfernungen des Instruments von den Endpunkten (Nr 11, Nr 12) der Station sehr ungleich gewählt würden.

Fig. 172.



Für die Herstellung eines brauchbaren Nivellements ist eine Aufzeichnung der Beobachtungen welche nicht leicht zu Irrungen Veranlassung gibt, sehr wichtig, wesshalb auf ein geeignetes Schema hierfür immerhin ein Gewicht zu legen ist. Das nachstehende erste Schema (Seite 350) kann wegen seiner Einfachheit und Uebersichtlichkeit besonders empfohlen werden.

In die erste Spalte werden die Punkte eingetragen auf denen die Nivellirlatte steht; in die zweite die Ablesungen auf dieser Latte; in die dritte und vierte die Steigungen und Gefälle von einem Punkte zum anderen; in die fünfte die Abstände der einnivellirten Punkte vom allgemeinen (über allen Punkten gelegenen) Horizont; in die sechste Bemerkungen welche sich auf die einnivellirten Punkte beziehen. Jeder Stationswechsel (hier bei 0^c, 1^b, 2^a) wird durch einen die beiden ersten Spalten durchschneidenden

Erstes Schema.

Punkt	Ablesung	Steigt	Fällt	Ordinate	Bemerkungen
0	2,685			100,000	Anfangspunkt
a	1,213	1,472		98,528	
b	0,156	1,057		97,471	
c	2,869		2,713	100,184	
c	3,456				
1	3,201	0,255		99,929	
a	0,345	2,856		97,073	
b	2,678		2,333	99,406	
b	1,234				
2	1,567		0,333	99,739	Strassenrand
2 + 1,4	2,345		0,778	100,517	Grabensohle
2 + 2,8	1,432	0,913		99,604	Grabenrand
a	0,987	0,445		99,159	

Querstrich angedeutet, und nur diese zwei Spalten nebst der letzten werden auf dem Felde ausgefüllt, alle übrigen zu Hause. Eine andere Art der Aufschreibung und Berechnung welche auch üblich ist und sich durch Einfachheit empfiehlt, ist in dem folgenden zweiten Schema vorgestellt.

Zweites Schema.

Punkt	Ablesung	Meereshöhe	Horizont	Bemerkungen
0	2,685	315,500	318,185	Anfangspunkt
a	1,213	316,972		
b	0,156	318,029		
c	2,869	315,316		
c	3,456	315,316	318,772	
1	3,201	315,571		
a	0,345	318,427		
b	2,678	316,094		
b	1,234	316,094	317,328	
2	1,567	315,761		Strassenrand
2 + 1,4	2,345	314,983		Grabensohle
2 + 2,8	1,432	315,896		Grabenrand
a	0,987	316,341		

Die zwei ersten Spalten stimmen mit denen des ersten Schemas vollständig überein; in die dritte wird die Höhe über Meer nach der des Anfangspunkts (welche übrigens nicht genau bekannt zu sein braucht) eingetragen; in der vierten stehen die Meereshöhen der horizontalen Visirebenen der Stationen; in der fünften Bemerkungen wie in der letzten Spalte des ersten Schemas. Die Meereshöhe des Horizonts ist stets gleich der Summe der Meereshöhe des Anfangspunkts plus der Ablesung auf demselben; demnach ist auch die Meereshöhe jedes folgenden Punkts leicht zu finden,

wenn man dessen Ablesung von der Höhe des Horizonts abzieht. Die vorstehenden Rechnungen werden sofort auf dem Felde gemacht und zu Hause nachgerechnet. Desshalb werden auch die Querstriche welche die Stationswechsel andeuten, durch die ersten vier Spalten gezogen.

2. Berechnung, nach dem ersten Schema. Die Steigungen, Gefälle und Ordinaten werden, wie bemerkt, zu Hause oder wenigstens nicht gleich unmittelbar nach jeder Beobachtung berechnet. Wie man dabei zu Werke geht, ergibt sich aus dem Schema selbst. Hier werden nur noch Controlen der Rechnung mitgetheilt. Nach den Gleichungen (340) soll $\Sigma(r) - \Sigma(v) = \Sigma(r - v)$ sein; in dem vorliegenden Falle ist

$$\Sigma(r) = r_1 + r_2 + r_3 = 2{,}685 + 3{,}456 + 1{,}234 = 7{,}375$$

$$\Sigma(v) = v_1 + v_2 + v_3 = 2{,}869 + 2{,}678 + 0{,}987 = 6{,}534$$

folglich $\Sigma(r) - \Sigma(v) = 7{,}375 - 6{,}534 = 0{,}841$; ferner ist $\Sigma(r - v) = 6{,}998 - 6{,}157 = 0{,}841$ und somit, wie es sein muss, der Unterschied aller Steigungen und Gefälle gleich dem Unterschiede aller Rück- und Vorblicke. Die Uebereinstimmung dieser beiden Differenzen kann man als ein günstiges Zeichen für die fehlerfreie Berechnung der Steigungen und Gefälle zwischen 0 und 2^a ansehen. Da nun von 0 bis 2^a eine Steigung von 0,841 stattfindet, und da der Abstand des Punkts 0 vom allgemeinen Horizont $= 100{,}00$ m angenommen wurde, so muss der Abstand des Punkts $2^a = 100 - 0{,}841 = 99{,}159$ m sein. Kommt man durch die Berechnung aller Ordinaten am Schlusse zu demselben Resultate, so kann man hierin wieder ein günstiges Zeichen für diesen Theil der Rechnung erblicken.

Die hier angedeuteten Proben sind auf jeder Seite der oft sehr ausgedehnten Nivellementstabellen vorzunehmen, wenn man nicht Gefahr laufen will einen grossen Theil der Ordinatenberechnungen wiederholen zu müssen; denn jeder Fehler in der Berechnung der Steigungen oder Gefälle, sowie jeder Fehler in einer Ordinate kehrt in allen Ordinaten wieder, da jede folgende aus der vorhergehenden bestimmt wird.

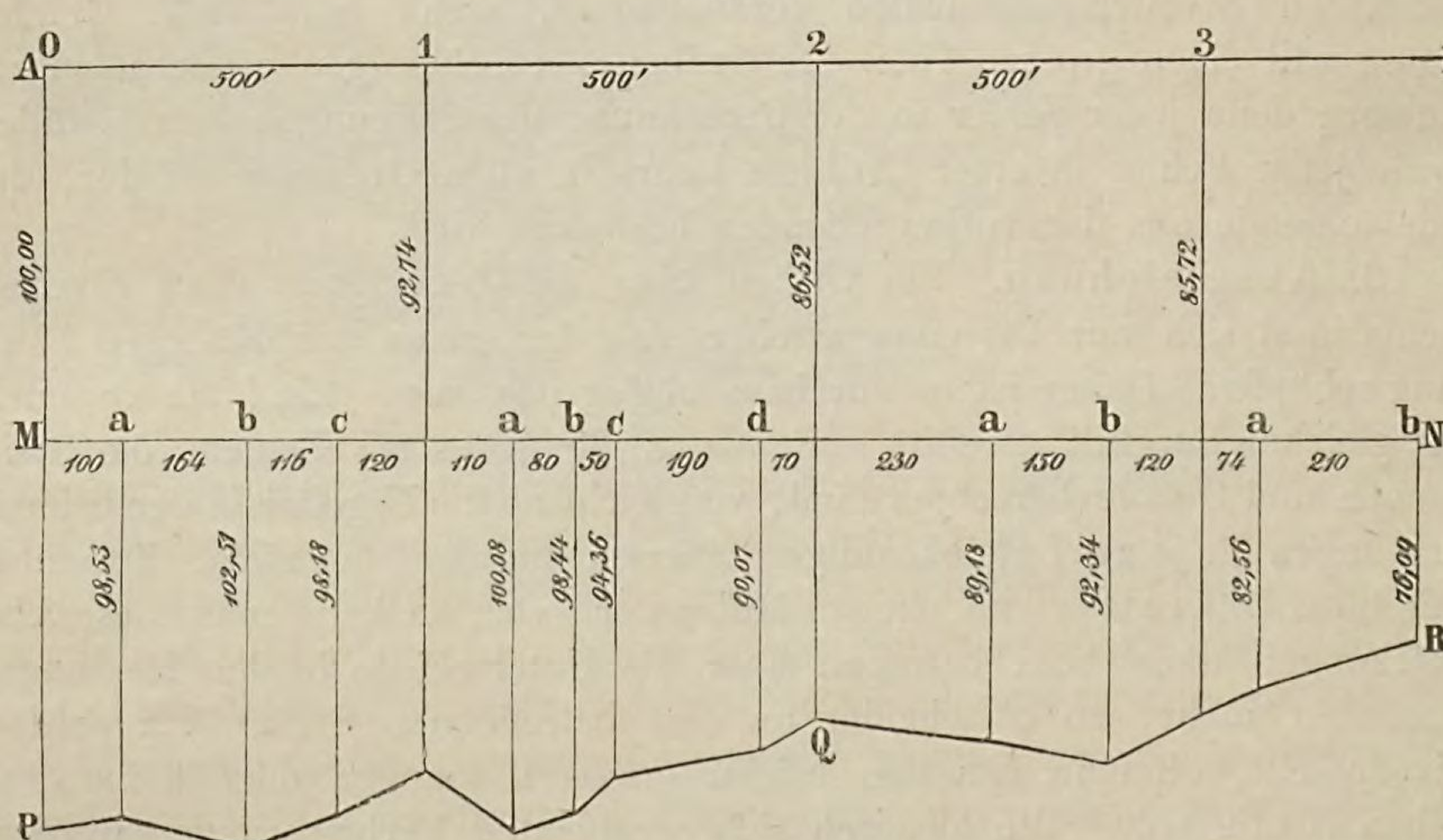
3. Ausgleichung. Ein Urtheil über die Genauigkeit eines Nivellements lässt sich nur aus einer zweiten von der ersten unabhängigen Messung schöpfen. Daher ist es durchaus nöthig dass man jede Linie zweimal mit gleicher Sorgfalt nivellirt und, wenn für jedes Nivellement die Steigungen und Gefälle berechnet sind, vergleicht ob die Ergebnisse der beiden Messungen für je zwei gleichnamige Stationen stimmen oder nicht. Kommen hier bloss Differenzen von einigen Millimetern vor, so kann man diese Abweichungen übersehen; betragen aber die Unterschiede in den Messungsresultaten mehr, so entscheidet an den betreffenden Stellen ein drittes Nivellement, ob eine von den beiden ersten Messungen oder keine derselben richtig war. Die hiedurch sich ergebenden Verbesserungen werden in die Nivellementstabellen eingetragen, und erst dann beginnt die Berechnung der Ordinaten für beide Nivellemente gesondert.

Den Unterschied welchen beide Rechnungen in der letzten Ordinate zeigen, dividirt durch die Länge der nivellirten Linie, sehen die meisten

Techniker als die relative Genauigkeit des Nivellements an, und nach diesem Verhältniss beurtheilen sie auch die Güte ihrer Arbeit. Durch sorgfältige Behandlung der Instrumente, genaues Einstellen und Ablesen, richtiges Aufschreiben etc. kann man es bald dahin bringen dass zwei Nivellemente von 50000 Meter Länge auf 0,1 Meter stimmen, also eine relative Genauigkeit von 1 : 500000 nach der hier angedeuteten falschen Auffassung der Sache haben. Eine solche Genauigkeit besitzt aber das Nivellement keineswegs im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wovon weiter unten die Rede ist.

Wenn zwei Nivellemente einer und derselben Linie nicht innerhalb der vorgeschriebenen Grenzen übereinstimmen, so werden wohl auch statt des eben angegebenen praktischen Verfahrens (die mehr als 3 bis 5 mm betragenden Differenzen durch eine dritte Messung in einzelnen Stationen zu verbessern und hierauf eines der beiden Nivellemente als das richtige anzusehen) Ausgleichungen der Differenzen durch Vertheilung des Gesammtfehlers über das ganze Nivellement vorgenommen. Die hiebei in Anwendung kommenden Methoden sind verschieden, unter allen aber ist wohl jene noch die annehmbarste welche das arithmetische Mittel der aus dem ersten und zweiten Nivellement hervorgegangenen Abstände der einnivellirten Punkte vom allgemeinen Horizont als die richtigen Ordinaten (Coten) dieser Punkte ansieht. Wir rathen jedoch dringend diese Ausgleichungen erst dann vorzunehmen, wenn in den einzelnen Stationen keine grösseren Fehler als von 3 bis 5 mm mehr vorkommen.

Fig. 173.



4. Auftragen. Unter dem „Auftragen eines Profils" versteht man die Zeichnung desselben aus den durch die Aufnahme und Berechnung des Nivellements gegebenen Stücken. Die Fig. 173 stellt ein Stück von einem

Längenprofile vor, wie es die Ingenieure in der Regel zeichnen und wozu die Ergebnisse der Aufnahme und Berechnung in der nachstehenden Tabelle enthalten sind.

Punkt	Entfernung	Ordinate	Punkt	Entfernung	Ordinate
0		100,00	1 c		
	100			190	
a		98,53	d		90,07
	164			70	
b		102,51	2		86,52
	116			230	
c		98,18	a		89,18
	120			150	
1		92,74	b		92,34
	110			120	
a		100,08	3		85,72
	80			74	
b		98,44	a		82,56
	50			210	
c		94,36	b		76,09

Zur Erläuterung der Zeichnung mögen folgende Bemerkungen dienen:

Alle Ordinaten werden von dem allgemeinen Horizont A H an abgemessen, obwohl die Zwischenpunkte nur bis an die dem Horizont parallele Linie M N gezogen sind. Diese Anordnung hat lediglich darin ihren Grund dass man durch sie einen schnelleren Ueberblick der horizontalen Entfernungen oder Abscissen der einnivellirten Punkte gewinnt. Der Massstab der Ordinaten ist 10mal grösser als jener der Abscissen; die Linie P Q R gibt also nur ein verzerrtes Bild des nivellirten Terraindurchschnitts. Durch diese Anordnung gewinnt man aber einen schnelleren Ueberblick der Höhenunterschiede, als es bei gleichen Massstäben für Abscissen und Ordinaten möglich wäre. Denn da für die Abscissen der Längenprofile nur kleine Massstäbe gewählt werden können, wenn man die Zeichnung nicht ungebührlich gross machen will, so würden sich die häufig ganz unbedeutenden Höhenunterschiede von einem Punkte zum anderen oft kaum erkennen lassen, wenn man sie in den Massstäben der Abscissen darstellen wollte. Das Verhältniss der Massstäbe für die Längen und Höhen wird den Umständen gemäss gewählt.

§. 174. Aufgabe. Ein Querprofil herzustellen.

Die Absicht in welcher Querprofile aufgenommen werden, besteht entweder in der Darstellung einer grösseren Terrainfläche nach ihren Erhöhungen oder Vertiefungen mittels horizontaler Schnittlinien, oder in der Benützung jener Profile zur Berechnung von Erdmassen welche von einer Stelle zur anderen zu versetzen sind. In dem ersteren Falle ist das Querprofil mit derselben Genauigkeit wie ein Längenprofil aufzunehmen, wesshalb dabei auch alle Regeln des vorigen Paragraphen zur Anwendung kommen; in dem letzteren Falle aber, wo überdiess die Querprofile nur eine geringe Länge haben, darf die Genauigkeit der Aufnahme eine etwas geringere sein als vorhin. Hier wird lediglich der zweite Fall behandelt.

1. Aufnahme. Die Aufnahme der Querprofile setzt die vollständige

Herstellung des Längenprofils, worauf sich jene beziehen, voraus. Damit ist bereits für jedes Querprofil die Bezeichnung und die Ordinate eines Punkts festgesetzt; denn man benennt das Querprofil am einfachsten nach dem Punkte des Längenprofils in welchem es dasselbe senkrecht oder schief schneidet, und der Abstand dieses Punkts vom allgemeinen Horizont ist aus dem Längennivellement bekannt.

Durch das Längenprofil wird jedes Querprofil in zwei Theile getheilt welche nach der Seite, auf welcher sie liegen, unterschieden werden. Um in jedem Falle beurtheilen zu können welches die rechte oder linke Seite eines Längenprofils ist, denkt man sich in dieses so gestellt dass das Auge von den niederen Nummern der Hauptpunkte nach den höheren sieht: rechts des Beobachters liegt alsdann auch die rechte und links die linke Seite nicht nur des Längenprofils, sondern auch der Querprofile.

Bei der Aufnahme der letzteren ist streng darauf zu sehen dass diese beiden Seiten nicht mit einander verwechselt werden; denn jede solche Verwechslung würde eine völlige Entstellung des geometrischen Bilds des Terrains zwischen dem vorhergehenden und nachfolgenden Querprofile zur Folge haben. Man soll sich desshalb angewöhnen die Skizze des Querprofils welche man bei dessen Aufnahme in das Notizbuch zeichnet, so anzulegen dass dem der in dieses Buch sieht, sofort die linke Seite des Querprofils zur Linken und folglich die rechte zur Rechten liegt.

Die erste Arbeit zur Aufnahme eines Querprofils besteht in der Absteckung seiner Richtung. Da diese fast durchweg senkrecht zur Axe des Längenprofils steht, so bedient man sich dazu des Winkelspiegels oder des Prismenkreuzes. Ist durch besondere Umstände eine schiefe Richtung bedungen, so wird deren horizontaler Neigungswinkel gegen die Axe des Längenprofils mit den bekannten Hilfsmitteln bestimmt und seine Grösse in das Notizbuch eingetragen. Hierauf folgt eine einfache Bezeichnung der Brechungspunkte durch Markpflöcke. Grundpfähle sind hier so lange unnöthig, als der Boden die Nivellirlatte trägt; nur wenn dieser weich ist, wendet man Grundpfähle an. Will man auf die Markpflöcke Zeichen setzen um die Punkte zu unterscheiden, so mag man es thun; nöthig sind sie aber aus dem Grunde nicht, weil sofort nach der Absteckung die Abscissen und Ordinaten aller Brechungspunkte des Querprofils gemessen und in das Notizbuch eingetragen werden, wie die Fig. 174 zeigt, bei welcher angenommen wurde dass zwei Stationen hinreichen das Querprofil aufzunehmen, und in der zugleich angedeutet ist, in welcher Weise Bemerkungen über die von dem Querprofile durchschnittenen Culturen, Bauwerke u. dgl. anzubringen sind. Es bedarf wohl kaum weiterer Erörterung wie zu verfahren ist, wenn zum Nivelliren mehr als zwei Aufstellungen des Instruments nöthig sind, sowie es sich von selbst versteht dass in vielen Fällen eine einzige Station hinreichen kann die Höhenunterschiede aller Punkte eines Querprofils zu finden.

2. Berechnen und Auftragen. Kommt es bloss darauf an das

Querprofil zu zeichnen ohne dass man den Abstand der Brechungspunkte desselben vom allgemeinen Horizont wissen will, so kann man entweder die Horizonte aller Aufstellungen des Instruments (hier die Linien A B, C D) als Abscissenaxen benützen und von ihnen aus die abgelesenen Höhen unmittelbar abtragen; oder man reducirt die Ablesungen für verschiedene Horizonte auf einen und denselben Horizont (hier z. B. auf A B, indem man zu den Ablesungen auf der rechten Seite des Profils den Abstand B C = 12,34 — 0,75 = 11′,59 addirt) und trägt die Brechungspunkte von diesem aus ab; oder endlich, man denkt sich durch den Hauptpunkt (hier 5^b)

Fig. 174.

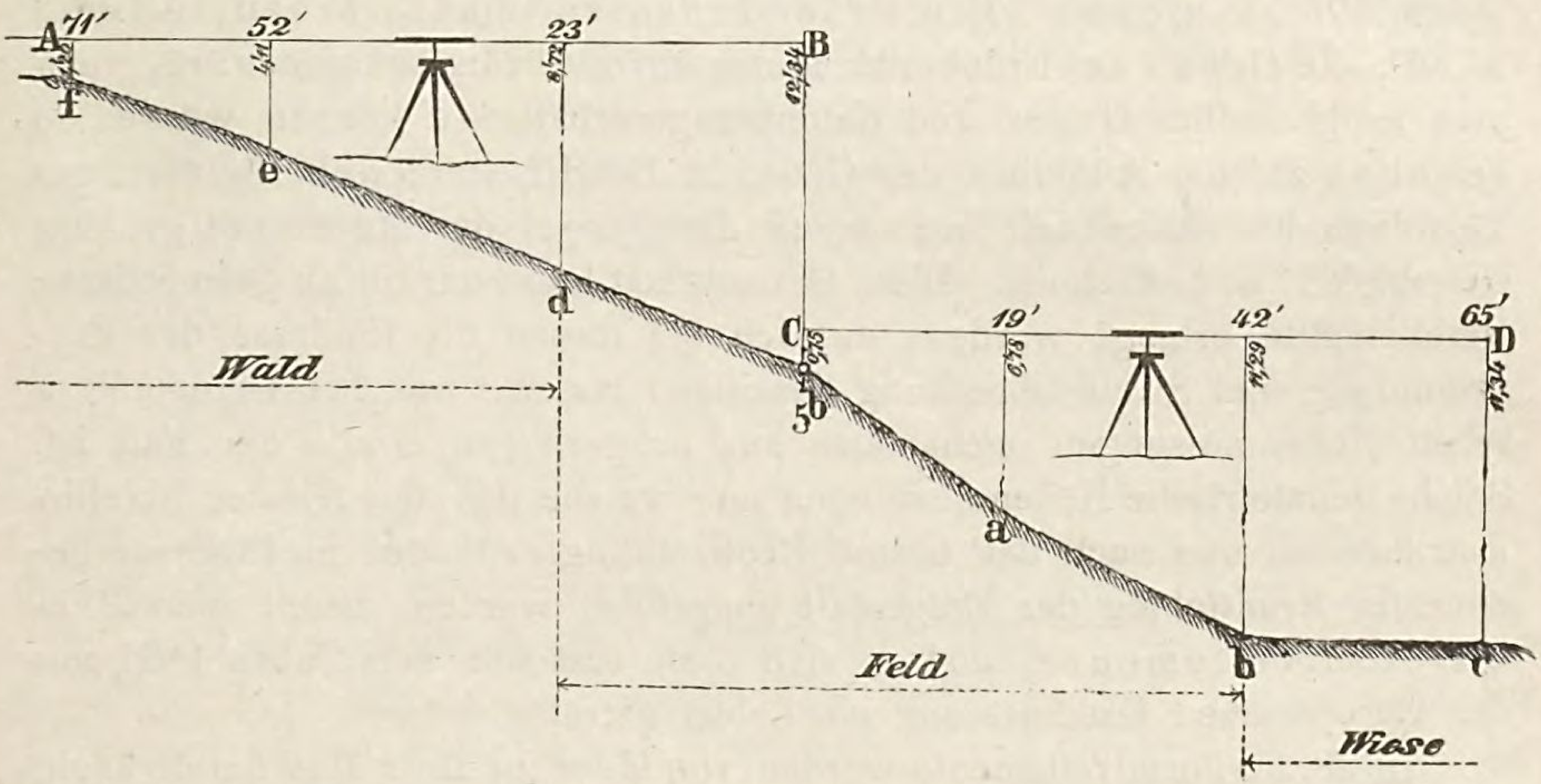
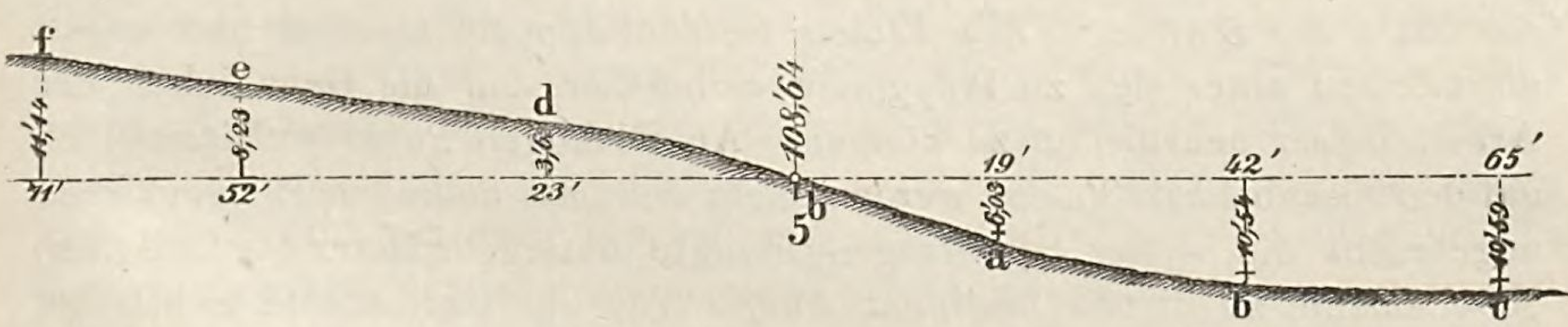


Fig. 175.



des Querprofils eine Horizontale gelegt und führt alle Abstände auf diese zurück, wobei es sich von selbst versteht dass diese Abstände bald positiv bald negativ werden. In dem vorliegenden Falle ergeben sich die Abstände welche in der Fig. 175 eingetragen sind.

Will man auch für ein Querprofil die Abstände seiner Brechungspunkte vom allgemeinen Horizont wissen, so berechne man erst die Abstände für den Horizont des Hauptpunkts (hier 5^b) und verbinde dieselben mit dem Abstande des Hauptpunkts (hier 108′,64) so wie es ihre Vorzeichen verlangen. Demnach ist in dem gewählten Beispiele der Abstand des Punkts

$a = 108',64 + 6',03 = 114',67$ und der von $d = 108',64 - 3',62 = 105',02$.

Was die Massstäbe betrifft nach denen die Querprofile gezeichnet werden, so bestehen hier keine festen Regeln: es kommt lediglich auf den Zweck an, dem diese Profile zu dienen haben. Werden die Querprofile in ähnlicher Weise verwendet wie Längenprofile, so zeichnet man sie auch so; dienen sie aber zur Berechnung von Erdmassen, so wählt man gewöhnlich einen grossen Massstab (in der Regel 1 : 100), damit man die einzelnen Dimensionen leicht abgreifen kann, und es versteht sich in diesem Falle von selbst dass die Abscissen und Ordinaten nicht nach zwei verschiedenen Massstäben aufgetragen werden dürfen.

§. 175. Aufgabe. Ein Präcisionsnivellement herzustellen.

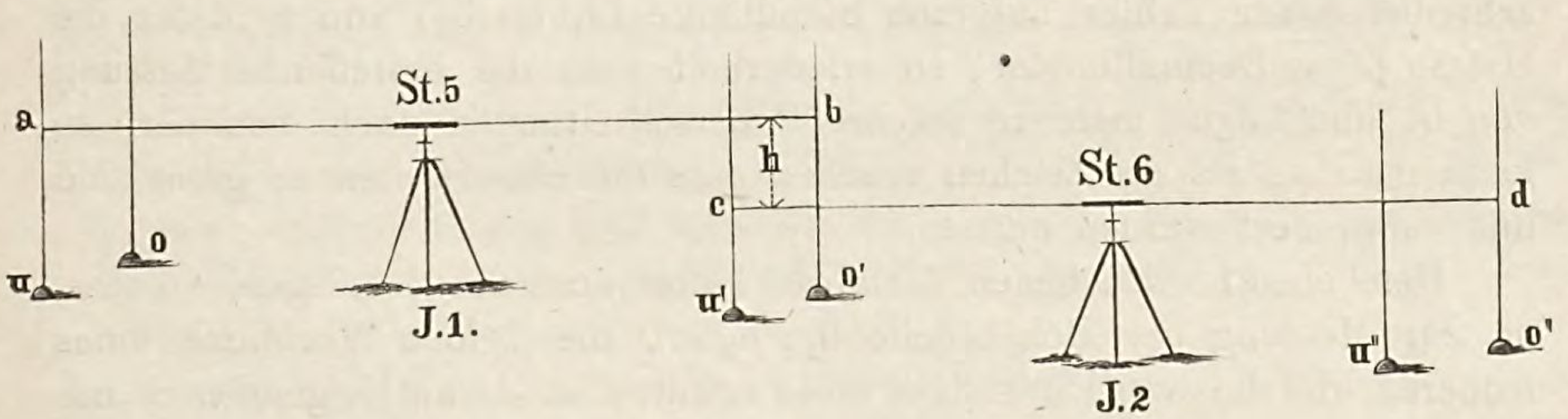
Da die Gestalt der Erdoberfläche nur unvollständig bekannt wäre, wenn man lediglich ihre Grösse und Krümmungsverhältnisse kennen würde, so gehört es zu den Aufgaben der Geodäsie die Höhenunterschiede wichtiger Terrainpunkte unter sich und gegen die Spiegel der Meere mit grösster Genauigkeit zu bestimmen. Diese Genauigkeit kann nur durch geometrische Nivellemente erlangt werden, da sich bei diesen die Einflüsse der Erdkrümmung und Strahlenbrechung beseitigen lassen, was bei trigonometrischen Höhenmessungen nicht oder nur in geringem Grade der Fall ist. Solche geometrische Höhenmessungen nun welche mit den feinsten Nivellirinstrumenten und nach den besten Beobachtungsmethoden im Interesse genauester Ermittelung der Erdgestalt ausgeführt werden, nennt man Präcisionsnivellemente, und es sind diese erst seit dem Jahre 1864 mit der Europäischen Gradmessung ins Leben getreten.

Die Präcisionsnivellemente werden von Meer zu Meer fast durchgängig auf Eisenbahnen und nur, wo Schienenwege fehlen, auf Landstrassen ausgeführt. Die Methode des Nivellirens ist die in §. 170 beschriebene „aus der Mitte der Station.“ Alle Linien werden doppelt nivellirt und so oft als möglich unter sich zu Polygonen verbunden, um die Genauigkeit der Arbeit besser beurtheilen zu können. An wichtigen Punkten, namentlich auf den Eisenbahnstationen, werden leicht sichtbare metallene Höhenmarken angebracht die später als Ausgangspunkte untergeordneter (technischer) Nivellemente zu dienen bestimmt sind. Was die Instrumente anbelangt, so erfordern dieselben keine neuen Constructionsprincipien, es kommt nur darauf an dass die Fernrohre eine starke optische Kraft besitzen, was bei 40 bis 50 mm Objectivöffnung und 30 bis 40maliger Vergrösserung der Fall ist, und dass die Libellen sehr empfindlich sind, d. i. auf 2 bis 3 Secunden Neigung mindestens 1 Millimeter Ausschlag geben. Sehr wünschenswerth ist es auch dass das Fadenkreuz drei Horizontalfäden enthält welche ein dreimaliges Ablesen der Höhen und damit auch eine Distanzmessung gestatten. Die Nivellirlatten, aufs genaueste bis auf Centimeter getheilt, werden mit Hilfe von Senkeln und Dosenlibellen lothrecht gehalten und von dem nivellirenden Ingenieur unmittelbar abgelesen. Beim Gebrauche

werden die Latten auf Fussplatten von cylindrischer Form gestellt. Jede Platte wiegt ein Kilogramm, besitzt unten drei Spitzen zur Befestigung im Boden, seitwärts ist ein umlegbarer Handgriff zum Tragen angebracht und auf der Oberfläche ruht ein halbkugelförmiger stählerner Knopf zum Aufsetzen der Latte deren unteres Beschläg mit einer entsprechenden Höhlung versehen ist. (Die bayerischen Instrumente von Ertel und Sohn in München sind in des Verfassers Abhandlungen über „Das bayerische Präcisionsnivellement" (Heft I, 1870 und Heft II, 1872), die hessischen und preussischen in der Schrift von Dr. O. Börsch „Die Nivellirinstrumente von Breithaupt und Sohn in Cassel" (Cassel 1871), die sächsischen von Prof. Weisbach im 16 Bande des „Civilingenieur" (Jahrgang 1870), die schweizerischen (und damit die württembergischen) von Kern in Aarau in der Abhandlung von Hirsch und Plantamour „Nivellement de précision de la Suisse" (Genf 1867 bis 1872) beschrieben.)

Die Ausführung der Methode des Nivellirens aus der Mitte hat sich in verschiedenen Ländern verschiedenartig gestaltet. In Bayern liess der Verfasser folgendes Verfahren einhalten. Um sofort ein doppeltes Nivellement

Fig. 176



von einem einzigen Standpunkte aus zu erhalten, wurden die Standpunkte der Latten verdoppelt und unmittelbar hinter einander zwei Paare von Punkten einnivellirt. Die Fig. 176 gibt hiervon eine klare Anschauung. Für den Standpunkt (5) des ersten Instruments (J_1) steht die Latte zuerst in u, dann in u′, hierauf in o′, dann in o, während die horizontale Visirebene (a b) dieselbe bleibt; für den Standpunkt (6) desselben Instruments oder auch eines zweiten (J_2) erfolgen die Ablesungen in der neuen Visirebene (c d) nach einander für die Punktpaare u′, u″ und o″, o′, und so wiederholt sich von Station zu Station das Ablesen von zwei Punktpaaren bis zum Schlusse der Arbeit. Insofern sich an die Punkte u, o; u′, o′; u″, o″... von verschiedener Höhenlage immer eine folgende Station anreiht, kann man diese Punkte Anbindepunkte und daher das von uns angewendete Verfahren ein „Nivellement mit doppelten Anbindepunkten" nennen. Durch dieses Verfahren erhält die Messung grosse Durchsichtigkeit und die operirenden Ingenieure sind in den Stand gesetzt schon während der Aufnahme die Beobachtungsfehler annähernd zu bestimmen und sofort zu verbessern.

Auch werden die beiden Nivellemente unter gleichen äusseren Bedingungen gemacht, was ihre Verbindung zu einem einzigen erleichtert.

Unser Nivellirverfahren zerlegt den Höhenunterschied H zwischen zwei Fixpunkten (Höhenmarken auf zwei benachbarten Eisenbahnstationen) in die Theile h_1, h_2, $h_3 \ldots h_n$, von denen der erste die Höhenlage der horizontalen Visirlinie über dem ersten Fixpunkt, der zweite den Höhenunterschied der Visirebene des ersten und zweiten Instrumentenstands, der dritte den Höhenunterschied der Visirebene des zweiten und dritten Stands u. s. w., endlich der Theil h_n die Höhenlage der Visirlinie des letzten Instrumentenstands über dem zweiten Fixpunkte gibt. Jeder der Theile h_1, h_2, $h_3 \ldots h_n$, deren algebraische Summe $= H$ ist, wird doppelt und zwar, um Theilungs- und Schätzungsfehler möglichst auszugleichen, auf zwei verschiedenen Stellen der Ziellatte gemessen: desshalb liegt eben die eine Fussplatte (u) tiefer als die andere (o). (Insofern an den 3 Fäden des Fadenkreuzes abgelesen wird, kann man auch sagen, jeder Theil h_1, $h_2 \ldots$ wird 6mal und an 6 verschiedenen Stellen der Latte bestimmt.)

Die Differenz der zwei Werthe eines Stücks h gibt den Fehler für den einzelnen Stand und die algebraische Summe aller dieser kleinen Differenzen den Schlussfehler der Strecke zwischen zwei Fixpunkten. Ueberschreitet dieser Fehler auf eine Standlänge (J_1 bis J_2) von a Meter die Grösse $\sqrt{a}$ Decimillimeter, so wiederholt man die betreffende Messung von h, und folgen mehrere solcher Ueberschreitungen nach einander, so kann man sie als ein Zeichen ansehen dass die Standweiten zu gross sind und verkleinert werden müssen.

Dem eben beschriebenen Verfahren haftet noch der Uebelstand an dass, da zur Messung der Höhentheile h_1, $h_2 \ldots$ die beiden Vorblicke eines früheren und die zwei Rückblicke eines unmittelbar darauf folgenden Stands gehören, die Fehler jener Vorblicke erst entdeckt werden können, wenn das eine Instrument, mit dem man arbeitet, bereits versetzt ist. Dieser Missstand kann aber, wie es bei dem bayerischen Präcisionsnivellement auch geschieht, dadurch gehoben werden dass man die Fussplatten u, o für die Latten so einrichtet, dass sich die eine (o) auf die andere (u) legen lässt, wodurch der Nullpunkt der Latte auf dem Stahlknopfe der oberen Platte stets um eine constante Grösse m (von etwa 3,5 cm) über dem Nullpunkte der Latte auf dem Stahlknopfe der unteren Platte liegt. Hat man nun zwei Vor- oder zwei Rückblicke gemacht und ist die Differenz derselben $= m$, so braucht man die Messung nicht zu wiederholen; weicht aber diese Differenz wesentlich von dem Werthe m ab, so macht man neue Ablesungen an Stelle der alten und verbessert so den erkannten Fehler. Selbstverständlich muss das Auflegen und Abheben der oberen Platte vorsichtig geschehen und der Raum zwischen beiden Platten stets rein gehalten werden.

Bei den Beobachtungen bringt man die Luftblasen nie ganz zum Einspielen, sondern liest deren Stände an beiden Enden ab und berechnet

daraus die Ablesung für den horizontalen Stand. So wird man nicht bloss vor Ablesefehlern an der Latte bewahrt, sondern gewinnt auch Zeit auf dem Felde welche kostbarer ist als die im Arbeitszimmer. Die wirklichen Ablesungen können in lithographirte Papiere wie folgt eingetragen werden:

Linie A — B. Instrument Nr I. 1873, April 20. Bilder deutlich.

Nummer des Stands und der Latte, Schlussfehler u. s. w.	Rückblicke					
	Tiefere		Fussplatte	Höhere		
	Libelle		Latte	Libelle		Latte
	Ocul.	Obj.		Ocul.	Obj.	
1	2	3	4	5	6	7
Stand Nr. 5	169	168	18145	164	174	17800
Latte Nr. III	164	173	15500	162	176	15155
Schlussfehler — 01	8		12860	24		12520
5285			46505			45475
5280			15502			15158

Zu diesem Schema ist Folgendes zu bemerken: Erstens enthält es nur eine Hälfte der Aufschreibung eines Stands (Nr 5), indem die zweite Hälfte für die „Vorblicke“ der hier dargestellten für die „Rückblicke“ gegenübersteht und formell nur darin verschieden ist dass die Spalten nicht wie hier, sondern so auf einander folgen: 5, 6, 7; 2, 3, 4; 1. Zweitens sind die Ablesungen an den Enden der Luftblase (Ocularende, Objectivende) in Zehnteln eines Scalentheils, d. i. in Zehntel-Pariser-Linien eingetragen (169 Z. = 16,9‴ P.) und es sind die oberen (in der 1 Zeile stehenden) vor den drei Fadenablesungen auf der Latte und die unteren (in der 2 Zeile stehenden) nach diesen Ablesungen gemacht. Letztere sind in Zehntel-Millimetern ausgedrückt (18145 Z. M M = 1,8145 m). Drittens geben die Ablesungen nach den beiden äusseren Fäden (18145 — 12860 = 5285 und 17800 — 12520 = 5280) die Entfernung der Latte vom Instrumente welche zur Reduction der Beobachtungen nothwendig ist: wenn die Differenzen welche in Spalte 1 vorgetragen werden (hier 5285 und 5280) nur wenig von einander abweichen, so liegt auch hierin eine Controle der Beobachtung. Viertens gibt es auch bei Libellenablesungen eine Controle: wenn man nämlich von den für einen Blick (hier Rückblick) erhaltenen vier Zahlen die beiden kleineren von den grösseren über's Kreuz abzieht und zwei gleiche oder nahezu gleiche Differenzen erhält, so sind diese Ablesungen richtig; die Summe dieser Differenzen (hier 8 und 24) kann man in die Spalte der kleineren Zahlen (hier 2 und 5) eintragen und zu diesen Zahlen addiren, es müssen dann die Summen beider Libellenspalten ein-

ander gleich sein (hier 169 + 164 + 8 = 168 + 173). Fünftens geben die Differenzen der Lattenablesungen auf der höheren und tieferen Fussplatte stets deren Dicke sehr nahe an (hier 18145 — 17800 = 345 Z. MM = 3,45 cm, 15502 — 15158 = 344 Z. MM = 3,44 cm).

Die Berechnung des Nivellements aus den Beobachtungsdaten muss stets doppelt geschehen, um Irrungen vorzubeugen. Die auszuführenden und hier nicht weiter zu beschreibenden einfachen Rechnungsoperationen können folgendermassen controlirt werden: Das Mittel d der drei Fadenablesungen a, b, c eines Rück- oder Vorblicks wird schon vor dem Eintragen in die Rechenliste auf dem Felde aus $\frac{1}{3}(a + b + c)$ doppelt gerechnet, im Bureau kann man aber auch noch die Differenzen $a - b$ und $b - c$ bilden und hieraus $d = b + \frac{1}{3}(a - b) - \frac{1}{3}(b - c)$ und den Lattenabschnitt der beiden äusseren Fäden $a - c = (a - b) + (b - c)$ bestimmen.

Bezeichnen R und r die wegen der Neigung der Libellenaxe schon verbesserten mittleren Lattenablesungen der Rückblicke, V und v die der Vorblicke, und stellen R und V die Ablesungen über den tieferen, r und v jene über den höheren Fussplatten vor, so müssen für alle Ablesungen zwischen zwei auf einander folgenden Fixpunkten die Gleichungen erfüllt werden:

$$H = \Sigma V - \Sigma R = \Sigma v - \Sigma r \qquad (342)$$

$$\Sigma V + \Sigma r = \Sigma R + \Sigma v \qquad (343)$$

wovon man die eine Controle (342) in der ersten, die andere (343) in der zweiten Rechenliste ausführen kann.

Gehören allgemein zu den Blicken R, r, v, V eines Stands die Ausschläge $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so sind in der ersten Rechenliste die Grössen $\gamma - \beta$ und $\delta - \alpha$, in der zweiten die Unterschiede $\alpha - \beta$ und $\gamma - \delta$ zu bilden. Der Controle wegen kann man aus der ersten Liste auch die Differenz $(\gamma - \beta) - (\delta - \alpha)$ und aus der zweiten die Summe $(\gamma - \delta) + (\alpha - \beta)$ herstellen lassen und zusehen, ob beide einander gleich sind. Unterscheidet man die Ablesungen R, r, V, v durch die Marken , und ,, als solche welche einem vorhergehenden und dem unmittelbar darauf folgenden Instrumentenstande angehören, so ist der Unterschied h der Visirhöhen zweier sich folgenden Stände

$$h = V_{,} - R_{,,} = v_{,} - r_{,,} \qquad (344)$$

$$\text{und } V_{,} + r_{,,} = R_{,,} + v_{,} \qquad (345)$$

Genügen die Vor- und Rückblicke der vorletzten Gleichung nicht, ergeben dieselben vielmehr die besonderen Werthe

$$h' = v_{,} - r_{,,} \text{ und } h'' = V_{,} - R_{,,} \qquad (346)$$

so wird der Standfehler $\varepsilon = h' - h''$ entweder aus der Gleichung $\varepsilon = (v_{,} - V_{,}) + (R_{,,} - r_{,,})$ oder aus der $\varepsilon = (v_{,} + R_{,,}) - (V_{,} + r_{,,})$ berechnet.

Aus den nach (346) gefundenen Werthen von h′ und h″ ergibt sich $\frac{1}{2}(h' + h'')$ als der wahrscheinlichste Werth von h, und aus

$$h' - h = \tfrac{1}{2}(h' - h'') = + \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

$$h'' - h = \tfrac{1}{2}(h'' - h') = - \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels beider Messungen $= \pm \frac{1}{2}\varepsilon$,

während der Fehler einer einzigen Beobachtung nach den Formeln (5) und (9), Seite 11 und 12 dieses Bands, $= \pm \frac{1}{2} \varepsilon \sqrt{2} = \pm \varepsilon : \sqrt{2}$ ist.

Bei nur zwei Messungen ist der Fehler des arithmetischen Mittels jedenfalls sehr unsicher bestimmt, wenn aber viele Lattenabschnitte $h_1, h_2, h_3 \ldots h_n$ mit den mittleren Beobachtungsfehlern $\frac{1}{2}\varepsilon_1, \frac{1}{2}\varepsilon_2, \frac{1}{2}\varepsilon_3 \ldots \frac{1}{2}\varepsilon_n$ zu einer Summe H, dem Höhenunterschiede zwischen zwei Fixpunkten vereinigt werden, so wird der mittlere Fehler m dieser Summe um so genauer erhalten, je grösser die Zahl der zu H gehörigen Stücke ist und es wird

$$m = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \ldots + \varepsilon_n^2} \qquad (347)$$

wenn die Messungen nicht mehr mit constanten sondern nur noch mit zufälligen Beobachtungsfehlern behaftet sind. Sind alle ε einander gleich, so wird der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen $= n\,\varepsilon^2$ und daher jetzt

$$m = \pm \frac{1}{2} \varepsilon \sqrt{n} \qquad (348)$$

Nennt man die Entfernung zwischen zwei Fixpunkten A und die durchschnittliche Länge einer der n Stationen zwischen diesen Fixpunkten a, so ist $n\,a = A$ und daher durch Einsetzung des Werths von n in (348):

$$m = \pm \frac{1}{2} \varepsilon \sqrt{\frac{A}{a}} \qquad (349)$$

Erwägt man ferner dass der mittlere Fehler $\frac{1}{2}\varepsilon$ einer Lattenablesung der Zielweite a proportional und $= k\,a$ ist, wobei k die Tangente des Neigungswinkels der Visirlinie gegen den Horizont vorstellt, so kann man diesen Werth von $\frac{1}{2}\varepsilon$ in (349) setzen und erhält dann

$$m = \pm k \sqrt{A\,a} \qquad (350)$$

Hieraus lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

1) Für ein und dasselbe Instrument (d. i. für einen constanten Werth von k) und bei gleichbleibender Zielweite (a) wächst der mittlere Fehler des Nivellements mit der Quadratwurzel der Länge der nivellirten Strecke.

2) Für ein und dasselbe Instrument und dieselbe Länge der nivellirten Strecke wächst der mittlere Fehler des Nivellements mit der Quadratwurzel der Zielweite.

3) Je kleiner man die Zielweite macht, desto mehr Stationen sind nöthig und desto mehr Arbeit erfordert folglich das Nivellement: man wird daher mit Rücksicht auf den zweiten Satz die Zielweite weder sehr gross noch sehr klein annehmen, wenn auch der Boden hierin keine Grenzen setzen würde. (Auf Eisenbahnen kann man Zielweiten von 50 bis 100m, auf Thalstrassen von 20 bis 50m, auf Gebirgsstrassen von 10 bis 20m anwenden.)

Die Genauigkeit der Präcisionsnivellemente wird in der Regel durch den einer Strecke von 1 Kilometer Länge zukommenden mittleren Fehler ausgedrückt. Nennt man diesen Fehler m', so ist derselbe nach Gl (350) $= \pm k \sqrt{1000 \,.\, a}$, während der Fehler m auf die Strecke von A Meter oder D Kilometer $= \pm k \sqrt{1000\,D\,a}$ ist; dividirt man beide Ausdrücke für m' und m durch einander, so wird

$$m' = \pm \frac{m}{\sqrt{D}} \tag{351}$$

Wenn demnach ein Nivellement von 9 Kilometer Länge mit einer Differenz von 1 Centimeter abschliessen würde, so betrüge der mittlere Fehler pro Kilometer $\pm \frac{1}{3} . 10 = \pm 3{,}33$ Millimeter. Man hat sich hier die Länge von 9 Kilometer entweder als den Umfang eines Polygons zu denken dessen Endpunkt um 1 Centimeter höher oder tiefer als der Anfangspunkt gefunden wurde, oder auch als die doppelte Länge einer einfachen Linie welche hin und zurück nivellirt für den Anfangspunkt einen Höhenunterschied von 1 Centimeter ergab.

Bei technischen Nivellementen beträgt der Fehler m' pro Kilometer 10 bis 20 Millimeter, bei den für die europäische Gradmessung ausgeführten Präcisionsnivellementen überschreitet er dagegen selten 5 mm, häufig beträgt er weniger als 1 mm. So ist er z. B. auf einem grossen von Bayern und Württemberg gemeinsam nivellirten Polygon Nördlingen-Augsburg-Kempten-Lindau-Friedrichshafen-Ulm-Aalen-Nördlingen welches 495 Kilometer lang ist, wovon 270 auf Bayern und 225 auf Württemberg treffen, gerade 5 mm, indem der Anschlussfehler m = 0,1117 m = 111,7 mm beträgt. Schneidet man hieraus das kleinere bayerische Polygon Kempten-Augsburg-Ulm-Kempten von 266 Kilometer Länge mit nur 9,8 mm Anschlussfehler heraus, so berechnet sich der mittlere Fehler pro Kilometer auf $\pm$ 0,6 mm. Dagegen folgt der mittlere Fehler aus der Schleife um das Fichtelgebirge welche 241 Kilometer lang ist und mit 0,108 m schliesst, allerdings zu 7 mm; es rührt aber dieser immerhin noch sehr geringe Fehler wesentlich von der Strecke her welche von der Anziehung der Berge Ochsenkopf, Schneeberg, Waldstein, Kornberg u. a. wahrscheinlich in der Weise beeinflusst wird dass die auf den Schwererichtungen senkrecht stehenden Niveauflächen in jener Gegend einander nicht mehr parallel sind. Ist dieses aber der Fall, so darf man auch nicht erwarten dass eine Nivellementsschleife sich völlig schliesst (Vergl. Bauernfeind im Generalbericht der europäischen Gradmessung für 1871, S. 99 und Zachariae, Astronomische Nachrichten, Bd 80, S. 305 und „Die geodätischen Hauptpunkte" übersetzt von Lamp, S. 281 bis 296.) Ueberdiess wird auch der Umstand den Schlussfehler der Fichtelgebirgsschleife vergrössert haben dass auf starken Steigungen und namentlich auf den schiefen Ebenen zwischen Neuenmarkt und Münchberg sowie zwischen Oberkotzau und Eger die terrestrischen Strahlenbrechungen an gleichweit entfernten Endpunkten der Stationen ungleich waren, während sie bei der Nivellements-Berechnung der Theorie gemäss als gleich vorausgesetzt wurden. Denn die Störungen in der sphäroidischen Gestalt und die Lothabweichungen des Fichtelgebirgs können zusammengenommen keinen Schlussfehler von 0,108 auf 244772 Meter bewirken.

§. 176. Aufgabe. Eine Reihe zusammenhängender Präcisions-Nivellements-Schleifen auszugleichen.

Unter einer Nivellementsschleife oder einem Nivellements-

polygon verstehen wir eine in wag- und lothrechtem Sinne vielfach gebrochene und in sich selbst zurückkehrende sehr lange einfach oder doppelt nivellirte Linie. Dergleichen Schleifen hängen in der Regel durch eine, oft auch durch zwei Strecken zusammen, und jede Strecke einer Schleife ist wieder aus einer sehr grossen Zahl von Nivellementsstationen zusammengesetzt, so dass man sich eine Strecke nicht als gerade sondern als vielfach gebrochene Linie vorzustellen hat. Berechnet man die Coten aller Punkte auf bekannte Weise, so findet man dass die des Anfangs- und Endpunkts, obgleich sie einem und demselben Punkte angehören, nicht gleich sondern um mehr oder weniger verschieden sind. Den Unterschied dieser zwei Coten nennt man den Schlussfehler der Schleife oder des Polygons, und es rührt dieser Fehler in der Regel nur von den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern her, in besonderen Fällen hat aber ein Theil des Schlussfehlers auch einen anderen Grund, nämlich die von der Anziehung der Gebirgsmassen herrührende Lothabweichung und das damit zusammenhängende Nichtparallelsein der Niveauflächen der Erde. Indem wir uns begnügen im vorausgehenden Paragraphen auf die den letzteren Punkt betreffende Literatur hingewiesen zu haben, setzen wir bei den folgenden Erörterungen voraus dass der gefundene Schlussfehler eines Polygons nur von den zufälligen Beobachtungsfehlern herrühre, und dass daher in einer zusammenhängenden Reihe von Nivellementsschleifen die Schlussfehler, wie sie gefunden wurden, auszugleichen sind, und zwar erstens nach der Methode der kleinsten Quadrate und zweitens nach einem Näherungsverfahren.

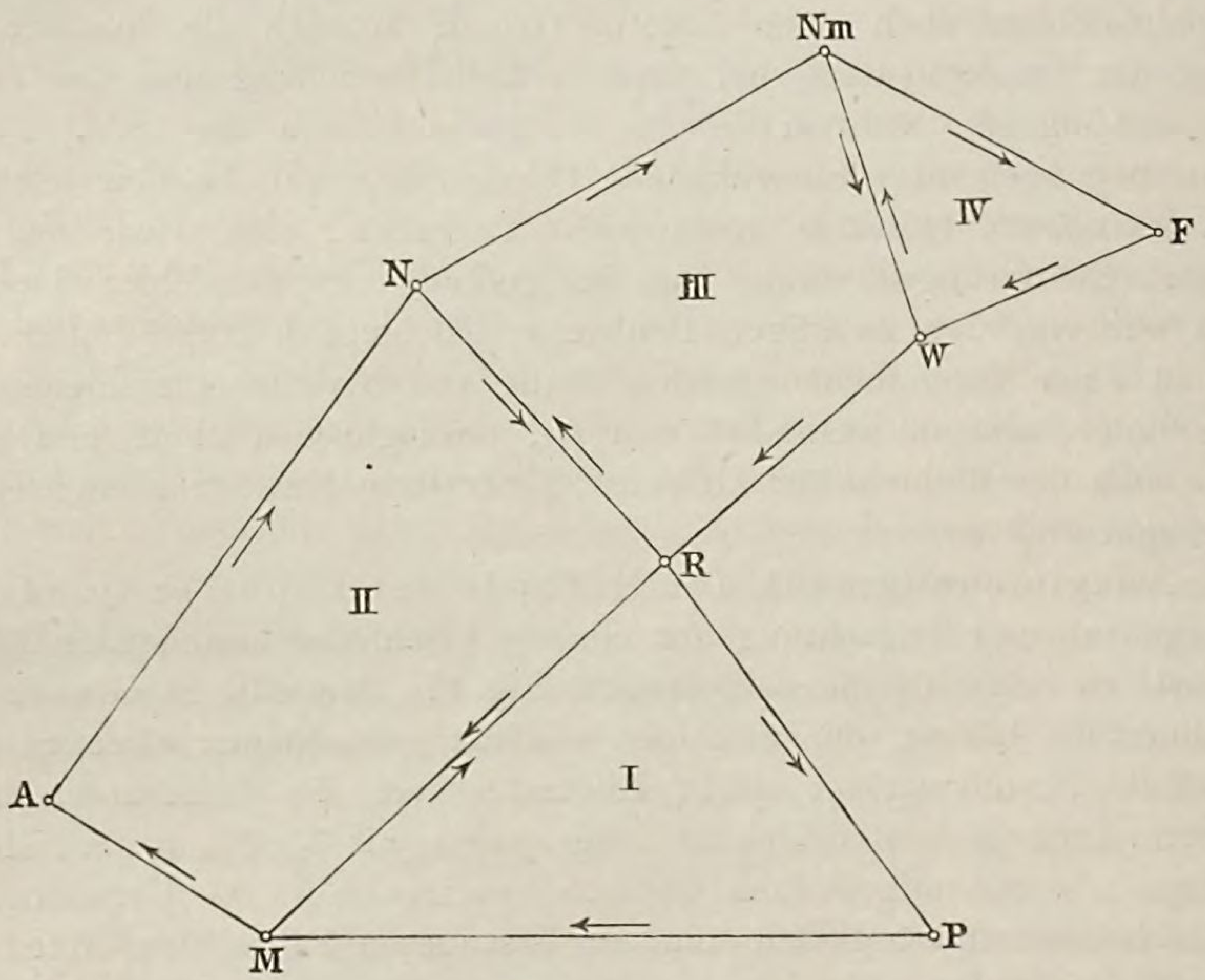
1. Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Wir legen unserer Betrachtung nur ein aus 4 Schleifen bestehendes Höhennetz, wie es Seite 364 die beigedruckte Fig. 177 darstellt, zu Grunde und bezeichnen die Längen der einzelnen vielfach gebrochenen Strecken R P, P M, M A ... mit s_1, s_2, s_3 ... Kilometer und die Höhenunterschiede zwischen Anfangs- und Endpunkt einer jeden mit d_1, d_2, d_3 Meter. So lange wir mit allgemeinen Grössen operiren soll das Vorzeichen in dem Buchstaben mit begriffen sein, in besonderen Fällen bezeichnen wir ein Gefälle mit plus (+) und eine Steigung mit minus (—). Den Schlussfehler oder die algebraische Summe aller Höhenunterschiede d einer Schleife heissen wir Δ und fügen diesem Buchstaben die Ordnungszahl der letzteren als Marke bei. Die Verbesserungen der Höhenunterschiede d_1, d_2, d_3 ... werden mit v_1, v_2, v_3 ... Meter bezeichnet. Die Längen der Umfänge der einzelnen Schleifen sollen S_1, S_2, S_3, S_4 und die Summe aller Streckenlängen S heissen. Die Gewichte der ermittelten Höhenunterschiede werden den Streckenlängen umgekehrt proportional und gleich p_1, p_2, p_3 ... gesetzt. Hienach sind in dem vorliegenden Falle folgende Bedingungen zu erfüllen:

$$+(d_1+v_1)+(d_2+v_2)+(d_3+v_3)=0$$
$$-(d_3+v_3)+(d_4+v_4)+(d_5+v_5)+(d_6+v_6)=0 \qquad (352)$$

$$- (d_6 + v_6) + (d_7 + v_7) + (d_8 + v_8) + (d_9 + v_9) = 0$$
$$- (d_8 + v_8) + (d_{10} + v_{10}) + (d_{11} + v_{11}) = 0 \qquad (352)$$
$$p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + p_3 v_3^2 + p_4 v_4^2 + \ldots + p_{11} v_{11}^2 = \text{min.} \qquad (353)$$

Es darf als selbstverständlich angesehen werden dass, wenn man in der Schleife I, von links nach rechts fortschreitend, den Höhenunterschied d_3 als positiv ansieht, in der Schleife II bei gleicher Drehung von links nach rechts derselbe Höhenunterschied negativ wird, und dass Gleiches von den Höhenunterschieden d_6 und d_8 gilt. Mit Rücksicht hierauf ergibt die Addition der ersten 4 Gleichungen (352) sofort die Bedingung dass auch der Umfang aller Schleifen sich schliessen muss, wenn die einzelnen auf Null ausgeglichen sind. Es ist daher eine besondere Bedingungsgleichung hiefür (wie solche

Fig. 177.



in den Astronomischen Nachrichten Nr 2052 noch aufgestellt wird) überflüssig, da sie schon in den vorausgehenden Gleichungen enthalten ist. Setzt man in dem Gleichungssystem (352) für die algebraische Summe der zu einer Schleife gehörigen d das Zeichen Δ, so gestaltet sich dasselbe wie folgt:

$$\begin{aligned} \Delta_1 + v_1 + v_2 + v_3 &= 0 \\ \Delta_2 - v_3 + v_4 + v_5 + v_6 &= 0 \\ \Delta_3 - v_6 + v_7 + v_8 + v_9 &= 0 \\ \Delta_4 - v_8 + v_{10} + v_{11} &= 0 \end{aligned} \qquad (354)$$

Man kann diese 4 Gleichungen nach einander mit den willkührlichen Constanten k_1, k_2, k_3, k_4 multipliciren und in Verbindung mit der Gleichung (353) nach v_1, v_2, $v_3 \ldots$ differentiiren, um die Fehlergleichungen zu erhalten:

$$\left.\begin{array}{llll}
p_1 v_1 + k_1 = 0 & \text{oder } v_1 = - \dfrac{k_1}{p_1} & = - \dfrac{k_1 s_1}{S} \\
p_2 v_2 + k_1 = 0 & \text{,, } v_2 = - \dfrac{k_1}{p_2} & = - \dfrac{k_1 s_2}{S} \\
p_3 v_3 + k_1 - k_2 = 0 & \text{,, } v_3 = - \dfrac{k_1 - k_2}{p_3} & = - \dfrac{(k_1 - k_2) s_3}{S} \\
\vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \\
p_{11} v_{11} + k_4 = 0 & \text{,, } v_{11} = - \dfrac{k_4}{p_{11}} & = - \dfrac{k_4 s_{11}}{S}
\end{array}\right\} \quad (355)$$

Werden nun diese Werthe von v_1 bis v_{11} in das vorstehende Gleichungssystem (354) gesetzt und die Umfänge S_1, S_2, S_3, S_4 eingeführt, so gelangt man zu den Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
\varDelta_1 S = + S_1 k_1 + s_3 k_2 \\
\varDelta_2 S = - s_3 k_1 + S_2 k_2 - s_6 k_3 \\
\varDelta_3 S = \qquad\quad - s_6 k_2 + S_3 k_3 - s_8 k_4 \\
\varDelta_4 S = \qquad\qquad\qquad\quad - s_8 k_3 + S_4 k_4
\end{array}\right\} \quad (356)$$

welche nach §. 26, Gl (55) aufgelöst, die Constanten k_1, k_2, k_3, k_4 liefern. Mit diesen findet man weiter die Verbesserungen v_1 bis v_{11} nach (355) und damit durch Addition zu den Werthen der d die richtigen Höhenunterschiede $d_1 + v_1$, $d_2 + v_2$, $d_3 + v_3$. . . welche alle Schleifen und eine beliebige Verbindung derselben auf Null ausgleichen.

Will man den mittleren Fehler für die Längeneinheit (den Kilometer) aller Nivellementslinien berechnen, so geschieht dieses entweder aus der Zahl n der Polygone, deren Umfängen S_1, S_2, S_3... und den Schlussfehlern $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, $\varDelta_3$. . . nach der Formel

$$m^2 = \frac{1}{n}\left(\frac{\varDelta_1^2}{S_1} + \frac{\varDelta_2^2}{S_2} + \frac{\varDelta_3^2}{S_3} + \ldots + \frac{\varDelta_n^2}{S_n}\right) \quad (357)$$

oder aus der Zahl n_1 der Strecken, deren Längen s_1, s_2, s_3 . . . und den Schlussfehlern v_1, v_2, v_3 . . . nach der Formel

$$m^2 = \frac{1}{n_1}\left(\frac{v_1^2}{s_1} + \frac{v_2^2}{s_2} + \frac{v_3^2}{s_3} + \ldots + \frac{v_{n_1}^2}{s_{n_1}}\right) \quad (358)$$

Wir geben der zweiten Formel den Vorzug, weil in ihr jede Strecke nur einmal in Rechnung kommt, während in der ersten den zur Verbindung der einzelnen Polygone unter sich dienenden Strecken sowohl in den Schlussfehlern $\varDelta$ als in den Umfängen S ein doppeltes Gewicht beigelegt wird, wozu kein Grund vorhanden ist.

Beispiel. Wendet man die vorstehenden Formeln auf die in Fig. 177 ihrem Zusammenhange nach dargestellten vier Schleifen I, II, III, IV des bayerischen Präcisionsnivellements zwischen München und Hof an, so sind folgende Werthe als gegeben zu betrachten:

Von R nach P die Länge $s_1 = 125{,}771$ km und die Neigung $d_1 = + \ 35{,}8723$ m
„ P „ M „ „ $s_2 = 179{,}025$ „ „ „ $d_2 = -217{,}5062$
„ M „ R „ „ $s_3 = 147{,}266$ „ „ „ $d_3 = +181{,}6541$
„ M „ A „ „ $s_4 = \ 60{,}597$ „ „ „ $d_4 = + \ 32{,}0958$

Von A	nach N	die Länge	$s_5 = 174{,}047$ km	und die Neigung	$d_5 = +179{,}5981$ m
„ N	„ R	„ „	$s_6 = 101{,}083$	„ „ „	$d_6 = -\ 30{,}0005$
„ N	„ N_m	„ „	$s_7 = 134{,}879$	„ „ „	$d_7 = -\ 38{,}6664$
„ N_m	„ W	„ „	$s_8 = 80{,}112$	„ „ „	$d_8 = -\ 48{,}8053$
„ W	„ R	„ „	$s_9 = 87{,}034$	„ „ „	$d_9 = +\ 57{,}4440$
„ N_m	„ F	„ „	$s_{10} = 96{,}768$	„ „ „	$d_{10} = -100{,}1619$
„ F	„ W	„ „	$s_{11} = 67{,}892$	„ „ „	$d_{11} = +\ 51{,}4646$

Aus den Werthen von s_1 bis s_{11} und d_1 bis d_{11} folgen die weiteren:

$S_1 = 452{,}062$ km und $\Delta_1 = +0{,}0202$ m
$S_2 = 482{,}993$ „ $\Delta_2 = +0{,}0393$
$S_3 = 403{,}108$ „ $\Delta_3 = -0{,}0252$
$S_4 = 244{,}772$ „ $\Delta_4 = +0{,}1080$
$S = 1254{,}474$ „ $\Delta = +0{,}1423$

wobei Δ den Schlussfehler des Umfangs aller vier Schleifen von 926,013 km Länge (4,68 mm auf 1 km) vorstellt.

Werden die vorstehenden Werthe in die Normalgleichungen (356) eingesetzt und diese aufgelöst, so erhält man

$$k_1 = 0{,}10473;\quad k_2 = 0{,}14947;\quad k_3 = 0{,}07385;\quad k_4 = 0{,}57763$$

und hiemit nach dem Gleichungssystem (355) die Verbesserungen

$v_1 = -0{,}0105$ m;	$v_5 = -0{,}0207$ m;	$v_9 = -0{,}0051$ m
$v_2 = +0{,}0149$	$v_6 = +0{,}0061$	$v_{10} = +0{,}0446$
$v_3 = +0{,}0052$	$v_7 = +0{,}0079$	$v_{11} = -0{,}0313$
$v_4 = -0{,}0072$	$v_8 = -0{,}0321$	$[vv] = 0{,}004965$

Bringt man diese Verbesserungen an den Werthen von d_1 bis d_{11} nach dem Gleichungssystem (352) an, so werden die ausgeglichenen Neigungsverhältnisse in der Schleife

Nr I:	Nr II:	Nr III:	Nr IV:
$d_1' = +\ 35{,}8618$	$d_3' = -181{,}6593$	$d_6' = +30{,}0066$	$d_8' = +\ 48{,}7732$
$d_2' = -217{,}5211$	$d_4' = +\ 32{,}0886$	$d_7' = -38{,}6723$	$d_{10}' = -100{,}2065$
$d_3' = +181{,}6593$	$d_5' = +179{,}5774$	$d_8' = -48{,}7732$	$d_{11}' = +\ 51{,}4333$
$\Delta_1' = 00{,}000$	$d_6' = -\ 30{,}0066$	$d_9' = +57{,}4389$	$\Delta_4' = 0{,}0000$
	$\Delta_2' = 0{,}0001$	$\Delta_3' = 0{,}0000$	

Die berechneten Verbesserungen gleichen somit die Beobachtungsfehler in den einzelnen wie in zwei drei oder mehr verbundenen Schleifen vollständig aus, und wenn man damit nach der Formel (358) den mittleren Kilometerfehler (mittl. Fehler für 1 Kilometer) berechnet, so wird dieser

$$m = \sqrt{\frac{1}{11}\left[\frac{v\,v}{s}\right]} = \pm 2{,}228\,\text{mm} \tag{359}$$

Dieser Fehler würde viel kleiner werden, wenn nicht der Schlussfehler Δ_4 der Fichtelgebirgsschleife so gross wäre. Es ist zu vermuthen dass dieser Fehler nicht bloss von den zufälligen Fehlern allein herrührt, sondern theilweise in den bereits auf Seite 362 besprochenen Anziehungen der Gebirgsmassen und Ungleichheiten der atmosphärischen Strahlenbrechung an den Stationsenden seinen Grund hat.

Könnte man den mittleren Fehler μ berechnen welcher in einer Schleife auf Rechnung dieser Störungen der Anziehung und Strahlenbrechung zu setzen ist, so würde sich der mittlere Fehler m_1 der Beobachtungen aus der Gleichung $m^2 = m_1{}^2 + \mu^2$ finden lassen und daher gleich sein

$$m_1 = \sqrt{m^2 - \mu^2} \tag{360}$$

2. Ausgleichung nach einem von Bauernfeind angegebenen Näherungsverfahren. Dieses Verfahren geht von der Erwägung aus dass es sich eigentlich nicht rechtfertigen lässt die auf eine Nivellementsschleife verwendete vorzügliche Arbeit durch die minder gute einer anderen Schleife zu trüben oder diese durch jene zu verdecken. Es hängt desshalb die Ausgleichung bei dem Polygon an welches den stärksten Kilometerfehler hat und vertheilt diesen Fehler über den ganzen Umfang der Schleife proportional den Längen der Seiten derselben. Nach dieser Schleife kommt diejenige Nachbarschleife zur Ausgleichung welche unter diesen beiden den grössten Kilometerfehler hat. In dieser zweiten Schleife wird die Anschlussseite beibehalten, wie sie sich aus der Schleife Nr I ergeben hat, und es kommt demnach nur mehr der durch die verbesserte Anschlussstrecke abgeänderte Schlussfehler der Schleife Nr II auf dem um die Anschlussseite s' verminderten Umfange S_{II} zur proportionalen Vertheilung. Dasselbe geschieht in gleichmässiger Weise bei den Schleifen Nr III, Nr IV . . . welche mit den Schleifen Nr II, Nr III . . . in den Seiten s'', s''' . . . zusammenhängen. Kommt es vor dass eine auszugleichende Schleife mit zwei Seiten an eine schon ausgeglichene Schleife gebunden ist, so bleiben die Neigungsverhältnisse in diesen zwei Seiten so wie sie aus der ersten Ausgleichung hervorgegangen sind, und es wird der übrig bleibende Schlussfehler nur mehr auf die noch übrigen Seiten vertheilt. Mit dem hier beschriebenen Verfahren ist angenommen dass die Gewichte p_1 p_2 p_3 . . . der nivellirten Strecken deren Längen s_1 s_2 s_3 . . . umgekehrt proportional seien. Denn wäre nur ein einziges Polygon mit 4 Strecken auszugleichen, deren beobachtete Höhenunterschiede d_1 d_2 d_3 d_4 und deren Verbesserungen v_1 v_2 v_3 v_4 sind, so hätte man die Bedingungsgleichungen

$$(d_1 + v_1) + (d_2 + v_2) + (d_3 + v_3) + (d_4 + v_4) = 0$$
$$p_1 v_1 v_1 + p_2 v_2 v_2 + p_3 v_3 v_3 + p_4 v_4 v_4 = \text{min.}$$

zu erfüllen, von denen die erste, wenn man den Schlussfehler $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = \Delta$ setzt und mit k multiplicirt, auch so geschrieben werden kann:

$$\Delta\, k = (v_1 + v_2 + v_3 + v_4)\, k$$

Hieraus folgt durch Differentiiren und Substituiren:

$$v_1 = -\frac{k}{p_1} = -\frac{s_1}{S} k; \quad v_2 = -\frac{k}{p_2} = -\frac{s_2}{S} k; \quad v_3 = -\frac{k}{p_3} = -\frac{s_3}{S} k;$$
$$v_4 = -\frac{k}{p_4} = -\frac{s_4}{S} k$$
$$\Delta\, S = -(s_1 + s_2 + s_3 + s_4)\, k = -k\, S$$

somit $k = -\Delta$, die auf die Längeneinheit (den Kilometer) treffende Verbesserung $v = \Delta : S$, und schliesslich

$$v_1 = -s_1\,v;\quad v_2 = -s_2\,v;\quad v_3 = -s_3\,v;\quad v_4 = -s_4\,v$$

Damit ist aber bewiesen dass aus der gemachten Annahme über die Grösse der Gewichte eine den Strecken proportionale Vertheilung der Fehler folgt; umgekehrt berücksichtigen wir auch die Gewichte, ohne dass von ihnen besonders die Rede ist, wenn wir die Fehler, wie hier geschieht, nach den Streckenlängen vertheilen.

Wenden wir das vorstehend beschriebene Verfahren auf die bereits nach der strengen Methode behandelten 4 bayerischen Präcisions-Nivellementsschleifen, jedoch in der Art an, dass wir mit der vierten Schleife (um das Fichtelgebirge) welche den stärksten Schluss- und Kilometerfehler hat beginnen, dann zur dritten übergehen und bis zur ersten fortschreiten, so ist hier, wenn $w_1\ w_2\ w_3 \ldots w_{11}$ die dem Näherungsverfahren entsprechenden Verbesserungen der Neigungen $d_1\ d_2\ d_3 \ldots d_{11}$ bedeuten, der Einheitswerth der Verbesserung für die Schleife Nr IV oder

$$e_4 = \frac{\Delta_4}{S_4} = \frac{0{,}1080}{224{,}772} = 0{,}0004412 \tag{361}$$

Damit werden die Verbesserungen der Strecken 8, 10 und 11:

$$w_8 = -e_4\,s_8 = -0{,}0353;\ w_{10} = -e_4\,s_{10} = -0{,}0427;\ w_{11} = -e_4\,s_{11} = -0{,}0300$$

und die Streckenneigungen selbst:

$$\begin{aligned} d_8' &= +\ \ 48{,}8053 - 0{,}0353 = +\ \ 48{,}7700 \\ d_{10}' &= -100{,}1619 - 0{,}0427 = -100{,}2046 \\ d_{11}' &= +\ \ 51{,}4646 - 0{,}0300 = +\ \ 51{,}4346 \end{aligned} \tag{362}$$

Die Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Fehlerquadrate des Polygons Nr IV ergibt sich demnach wie folgt:

$$[p\,w\,w]_4 = e_4^2\,(s_8 + s_{10} + s_{11}) = e_4^2\,S_4 = \frac{\Delta_4^2}{S_4} = 0{,}00004756 \tag{363}$$

In der Schleife Nr III ist der Einheitswerth der Verbesserungen:

$$e_3 = \frac{\Delta_3 - w_8}{S_3 - s_8} = \frac{-0{,}0252 + 0{,}0353}{403{,}108 - 80{,}112} = 0{,}0000312 \tag{364}$$

und mit diesem Werthe erhält man die Verbesserungen selbst wie folgt:

$$w_6 = -e_3\,s_6 = -0{,}0032;\ w_7 = -e_3\,s_7 = -0{,}0042;\ w_9 = -e_3\,s_9 = -0{,}0027$$

Hieraus ergeben sich folgende Streckenneigungen:

$$\begin{aligned} d_6' &= +30{,}0005 - 0{,}0032 = +29{,}9973 \\ d_7' &= -38{,}6644 - 0{,}0042 = -38{,}6686 \\ d_9' &= +57{,}4440 - 0{,}0027 = +57{,}4413 \end{aligned}$$

und weiter erhält man die Summen der Fehlerquadrate für die Strecken 6, 7 und 9:

$$[p\,w\,w]_3 = e_3^2\,(s_6 + s_7 + s_9) = e_3^2\,(S_3 - s_8) = \frac{(\Delta_3 - w_8)^2}{S_3 - s_8} = 0{,}00000032 \tag{365}$$

In der Schleife Nr II ist der Einheitswerth der Verbesserungen

$$e_2 = \frac{\Delta_2 - w_6}{S_2 - s_6} = \frac{0{,}0393 + 0{,}0032}{482{,}993 - 101{,}083} = 0{,}0001113 \tag{366}$$

und dieser gibt folgende Verbesserungen der Streckenneigungen:

$$w_3 = -e_2 s_3 = -0{,}0164;\quad w_4 = -e_2 s_4 = -0{,}0068;\quad w_5 = -e_2 s_5 = -0{,}0194$$

Damit ergeben sich die verbesserten Streckenneigungen:

$$d_3' = -181{,}6541 - 0{,}0164 = -181{,}6705$$
$$d_4' = +\ 32{,}0958 - 0{,}0068 = +\ 32{,}0890$$
$$d_5' = +179{,}5981 - 0{,}0194 = +179{,}5787$$

und es wird weiter die Summe der Fehlerquadrate für die Strecken 3 bis 5:

$$[p\,w\,w]_2 = e_2^2(s_3+s_4+s_5) = e_2^2(S_2-s_6) = \frac{(\Delta_2-w_6)^2}{S_2-s_6} = 0{,}00000473 \qquad (367)$$

In der Schleife Nr I ist der Einheitswerth der Verbesserungen

$$e_1 = \frac{\Delta_1 - w_3}{S_1 - s_3} = \frac{0{,}0292 + 0{,}0164}{452{,}064 - 147{,}266} = 0{,}0001201$$

und es werden damit die Verbesserungen gefunden:

$$w_1 = -e_1 s_1 = -0{,}0151;\quad w_2 = -e_1 s_2 = -0{,}0215$$
$$d_1' = +\ 35{,}8723 - 0{,}0151 = +\ 35{,}8572$$
$$d_2' = -217{,}5062 - 0{,}0215 = -217{,}5277$$

Hiernach wird die Summe der mit p multiplicirten Fehlerquadrate in s_1 und s_2:

$$[p\,w\,w]_1 = e_1^2(s_1+s_2) = e_1^2(S_1-s_3) = \frac{(\Delta_1-w_3)^2}{S_1-s_3} = 0{,}00000439 \qquad (368)$$

Fasst man die Fehlerquadratsummen $[p\,w\,w]_1$ bis $[p\,w\,w]_4$ in eine $[p\,w\,w]$ zusammen und bestimmt nach (358) den mittleren Kilometerfehler, so wird dieser

$$m = \sqrt{\frac{[p\,w\,w]}{11}} = \sqrt{\frac{0{,}000057}{11}} = \pm 2{,}278\,\text{mm} \qquad (369)$$

Hieraus entnimmt man selbst dass nach des Verfassers Näherungsverfahren der mittlere Kilometerfehler (2,278) nur ganz unmerklich grösser wird als nach der strengen Methode (2,228), und es kann auf Grund von vergleichenden Berechnungen hinzugefügt werden dass dieses immer der Fall ist. Das hier mitgetheilte Näherungsverfahren schliesst sich der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate für eine einzelne Schleife von beliebig vielen Seiten ganz an, und wäre es möglich alle Polygone nur mit je einem einzigen Punkte zu verknüpfen, so müsste es ausschliesslich angewendet werden. In allen übrigen Fällen kommt die Näherungsmethode der strengen um so näher je kürzer die die Schleifen verbindenden Seiten sind. Man sollte daher bei der Anlage des Höhennetzes eines Landes hierauf Rücksicht nehmen. Aber auch ohne diese Rücksicht werden die Unterschiede in den ausgeglichenen Werthen so gering dass sie unter allen Umständen vernachlässigt werden können, und es lässt sich daher erwarten dass das hier erörterte Näherungsverfahren in allen den Fällen wenigstens angewendet wird, wo die Zahl der auszugleichenden Nivellementsschleifen so gross ist dass die hierauf zu verwendende Arbeit in keinem Verhältnisse mehr steht zu der dadurch erreichten Leistung.

3. Das Nivelliren der Flächen.

§. 177. Eine Fläche ist nivellirt, sobald man die Höhen aller bemerkenswerthen Punkte derselben bestimmt und in den Horizontalplan eingetragen hat. Damit liefert aber dieser Plan noch kein Bild von dem Zusammenhange der Erhöhungen und Vertiefungen oder von der Form des Terrains; denn aus den eingeschriebenen Ordinaten der einnivellirten Punkte lässt sich die Gestalt einer vielfach gekrümmten Fläche eben so wenig genau erkennen, als es möglich ist sich aus den bloss in Zahlen ausgedrückten wagrechten Entfernungen eingemessener Punkte den Grundriss der von ihnen gebildeten Figuren in allen Theilen richtig vorzustellen. Man bedarf also eines graphischen Mittels das die Höhen der Terrainpunkte eben so anschaulich darstellt als ein Situationsplan die Umfangslinien der Parzellen, und dieses Mittel ist in den Horizontalcurven gegeben.

Denkt man sich nämlich die nach ihren Erhöhungen und Vertiefungen darzustellende Terrainfläche durch wagrechte gleich weit von einander abstehende Ebenen geschnitten, und die Durchschnittslinien auf den Horizontalplan der Fläche projicirt, so übersieht man mit diesen Linien sofort alle Punkte von gleicher Höhenlage und erkennt aus ihren Zwischenräumen die Neigungsverhältnisse des Terrains dem sie angehören. Diese wagrechten Schnittlinien (Horizontalcurven, Niveaucurven, Schichtenlinien, Höhencurven etc.) sind für alle Arten von Terrainstudien, namentlich für diejenigen welche zum Zwecke technischer Unternehmungen gemacht werden, sehr wichtig, wesshalb sie auch ausführlich behandelt zu werden verdienen. Für manchen Leser mögen überdiess die folgenden geschichtlichen Notizen über ihre Erfindung nicht ohne Interesse sein.

Die Idee horizontale Curven zur bildlichen Darstellung der Oberflächen des Terrains anzuwenden rührt von dem französischen Geographen Buache her. Derselbe legte im Jahre 1737 der Akademie der Wissenschaften in Paris, deren Mitglied er war, eine von ihm fünf Jahre früher aufgenommene Karte des Departements La Manche vor worin er die gleichen Tiefen des Meeres, also auch die Gestalt der Meeresküste, durch solche Curven bezeichnete. In seiner dazu geschriebenen Abhandlung welche erst in den Denkschriften vom Jahre 1752 unter dem Titel „Essais de géographie physique“ gedruckt wurde, äusserte er: „Der Gebrauch den ich von den Sondirungen des Meeres gemacht habe, um seine Tiefen auszudrücken, und den vor mir Niemand gemacht hat, scheint sehr geeignet zu sein die Neigungsverhältnisse der Ufer genau darzustellen“ In einer späteren Arbeit „Parallèle de fleuves de quatre parties du monde“ vervollständigte er seine Idee mit den Worten: „Ich habe mir vorgenommen auf dem Terrainrelief des Globus (den er damals anfertigte) Linien zu ziehen welche der Oberfläche des Meeres parallel laufen (also horizontal sind), wie ich es für das Innere des Meeres schon bei dem Relief der Manche gethan habe. Indem man Erhebungen des Meeres über sein wirkliches Niveau

voraussetzt, lassen sich die Landstriche erkennen welche durch die allmählige Zunahme der Wassermasse bedeckt würden."

Buache hat seine Idee nicht weiter verfolgt, und darum gilt der Ingenieur Ducaila in Genf als der Erste welcher die Darstellung des Terrains durch Horizontalcurven zu einer Methode erhob und ins Leben einführte. Er that dieses in einer besonderen Abhandlung hierüber die er unter dem 4 Mai 1771 der Akademie der Wissenschaften in Paris überreichte, und in einem 11 Jahre später erschienenen grösseren Werke: „Expression des nivellements ou methode nouvelle pour marquer rigoureusement, sur les cartes terrestres et marines, les hauteurs et les configurations du terrain" par M. Ducaila. Paris, 1782. Ducaila erkennt hier ausdrücklich an dass er die von Buache gegebenen Andeutungen kannte, glaubt aber dass dieser gelehrte Geograph die Fruchtbarkeit seiner Idee nicht vollständig zu würdigen wusste, da er bei drei Unterredungen mit ihm im Jahre 1771 die Priorität derselben nicht in Anspruch nahm. „Seine bedeutenden Arbeiten, fügt Ducaila bei, sein Alter, seine Gebrechlichkeit hatten ihn ganz ausser Stand gesetzt meinen Erörterungen lange zu folgen, und er sagte mir mehrere Male und noch bei meiner Abreise dass er nichts davon begreife, obgleich seine Herren Collegen mit seiner Arbeit zufrieden gewesen seien." (Vergl. Zach's „Monatliche Correspondenz", Bd 2, S. 148 u. ff.)

Es kann nun sehr wohl sein dass dieser alte Mann sich nicht mehr genau der Arbeiten erinnerte welche er vor 40 Jahren gemacht hatte, und dass er auch den Umfang ihrer technischen Anwendung nicht mehr ermessen konnte; gleichwohl gebührt ihm das Verdienst der Erfindung der Horizontalcurven, während Ducaila als Derjenige anzusehen ist der diesem vorzüglichen Mittel der Terrainzeichnung Geltung zu verschaffen wusste.

A. Das Abstecken der Horizontalcurven.

§. 178. Aufgabe. Die einem gegebenen Punkte angehörende Horizontalcurve abzustecken.

Der gegebene Punkt befinde sich auf der Oberfläche eines Hügels und sei durch einen Grundpfahl bezeichnet. Ueber demselben stelle man die Nivellirlatte und in passender Entfernung das Nivellirinstrument auf. Hierauf richte man das Fadenkreuz auf die Latte und lese die Visirhöhe ab. Nun lasse man die Latte in einem zweiten, etwa 30 Meter vom ersten entfernten und dem Augenmasse nach gleich hoch gelegenen Punkte aufstellen, richte das Fernrohr wieder darauf ein und lese ab. Ist diese Ablesung der vorigen gleich, so liegt der zweite Punkt gerade so hoch als der erste; ist sie aber kleiner oder grösser, so muss die Latte auf dem Terrain so lange ab- oder aufwärts verrückt werden, bis die Ablesungen gleich werden. Der also gefundene Terrainpunkt wird mit einem Grundpfahle bezeichnet dessen Oberfläche genau in der Horizontalebene des gegebenen Punkts liegen muss. Kann man vom Instrumente aus noch den

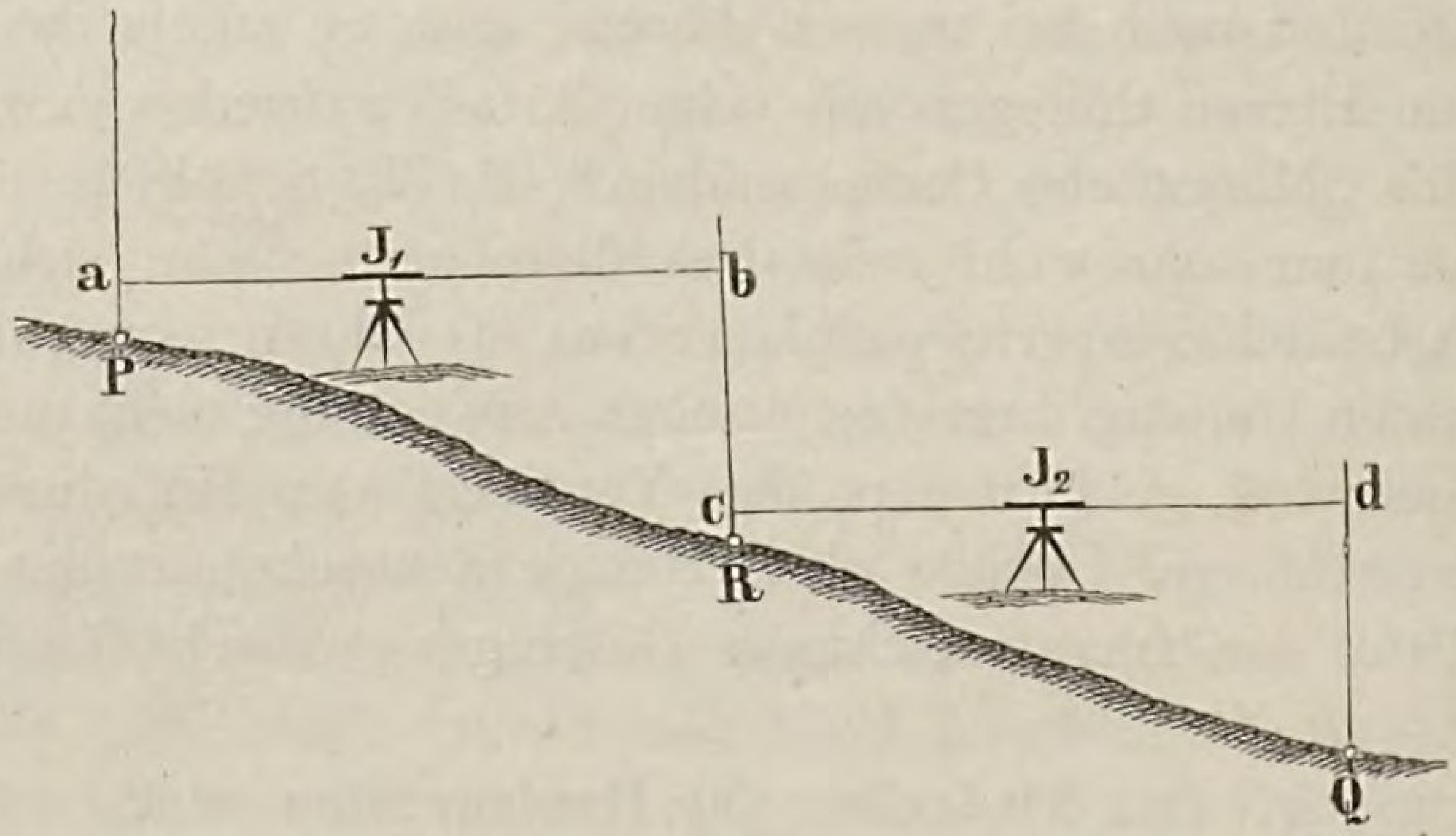
Theil des Hügels übersehen, auf den der dritte Punkt trifft, so bestimme man denselben gerade so wie den zweiten und bezeichne ihn auch wie diesen. Muss hierauf die Station gewechselt werden, so lasse man die Latte auf dem Punkte Nr 3 stehen, wähle einen neuen Standpunkt und verfahre nun gerade so, als ob dieser Punkt der Anfangspunkt wäre.

§. 179. Aufgabe. Ein Punkt ist auf dem Felde und durch seine Cote gegeben: man soll, von ihm ausgehend, eine Horizontalcurve von bestimmter Höhe abstecken.

Heisst der Abstand des gegebenen Fixpunkts P von dem über dem Terrain gelegenen allgemeinen Horizont z und jener der Curve $z + \eta$, so kommt es zunächst bloss darauf an irgend einen Punkt Q aufzusuchen der um die Grösse η tiefer liegt als der Fixpunkt; denn ist dieser Punkt gefunden so erfolgt die weitere Absteckung der Curve nach der im vorhergehenden Paragraph gegebenen Anleitung.

Ist η kleiner als die Lattenhöhe, so kann man Q mit einer einzigen

Fig. 178.



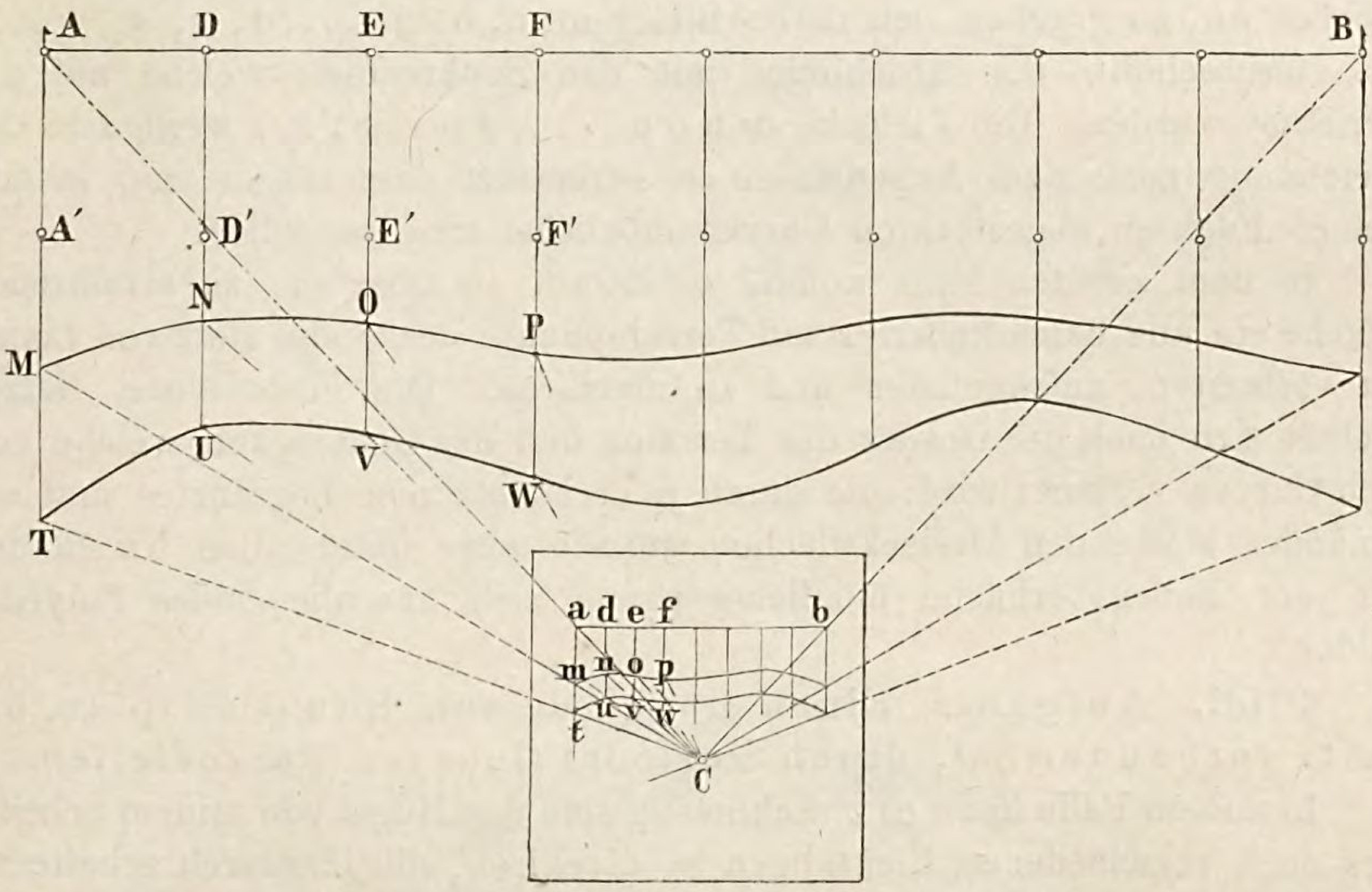
Aufstellung des Instruments finden, ausserdem müssen zwei oder mehrere Stationen gemacht werden; in jedem Falle aber ist es leicht einen Punkt anzugeben der den Abstand $z + \eta$ hat. Denn angenommen, bei der ersten Aufstellung des Instruments werde auf dem Fixpunkte der Lattenabschnitt $P a = l$ (Fig. 178) und auf dem Zwischenpunkte R der Abschnitt $R b = l'$ abgelesen, so liegt R um $l' - l$ tiefer als P. Ist nun $\eta = l' - l + \xi$ und ist ξ kleiner als die Lattenhöhe, so stelle man das Instrument in J_2 so auf dass die Latte in R möglichst nahe am Fusse von der Absehlinie getroffen wird, stelle das Fernrohr und die Libelle ein und lese ab. Heisst die Ablesung h, so muss nunmehr durch Probiren die Latte auf einen Punkt gebracht werden welcher eine Ablesung $h' = h + \xi$ liefert. Dieser Punkt Q wird mit einem Grundpfahle bezeichnet, und nachdem der Höhenunterschied zwischen ihm und dem Fixpunkte durch ein zweites Nivellement controlirt ist, kann die ihm angehörige Curve nach §. 178 abgesteckt werden. Wäre der Abstand der gesuchten Horizontalcurve $z - \eta$ gewesen,

so hätte man zunächst einen um die Grösse η über P gelegenen Punkt S bestimmt und hierauf auch wieder das Verfahren des vorigen Paragraphen angewendet um die Curve selbst zu erhalten.

B. Das Aufnehmen der Horizontalcurven.

§. 180. Bei der Aufnahme von Horizontalcurven lassen sich zwei Fälle unterscheiden: entweder sind nämlich wirklich abgesteckte Horizontallinien in verjüngtem Masse graphisch darzustellen, oder es sind auf einer gegebenen Terrainfläche bloss die Messungen zu machen nach denen die Horizontalschnitte dieser Fläche construirt werden können. Der erste Fall kommt selten und in der Regel nur dann vor, wenn es sich bloss um eine

Fig. 179.



oder einige Curven handelt, und wenn mit der Aufnahme dieser Curven auch die der Horizontalprojection des Terrains, worauf sie liegen, verbunden wird. Der zweite Fall dagegen ist derjenige welcher das eigentliche Nivelliren der Flächen ausmacht und uns daher insbesondere beschäftigt.

Die Methoden nach denen Situationspläne oder Horizontalprojectionen aufgenommen werden, sind aus dem zweiten Abschnitte der Lehre von den Messungen bekannt; es genügt desshalb für den ersten Fall die Bemerkung dass es die Aufnahme wirklich abgesteckter Horizontalcurven sehr erleichtert, wenn man bei der Absteckung Querprofile anwendet welche auf einer geraden Axe senkrecht stehen und gleichweit von einander entfernt sind, wie dieses in Fig. 179 angedeutet ist. In derselben stellt die Linie A B eine Gerade vor welche nahezu horizontal ist und auf der die gleichen

Abschnitte A D, D E, E F von 20 oder 30 Meter Länge abgemessen sind. Die Linien A A′, D D′, E E′, F F′ stehen senkrecht zu A B, und es sind dieselben auf dem Felde durch Absteckpfähle sichtbar gemacht, damit der Messgehilfe nach Anleitung des Geometers die Nivellirlatte in den Richtungen dieser Linien so weit versetzen kann, bis er die Curvenpunkte M, N, O, P, T, U, V, W gefunden hat. Sollen nun diese Punkte z. B. mit dem Messtische aufgenommen werden, so bestimme man auf dem Felde von den beiden Punkten A und B aus durch Vorwärtsabschneiden den Punkt C, von dem aus sich die beiden Curven übersehen lassen, trage auf dem Bilde von A B = a b die Abstände A D = a d, D E = d e, E F = e f ab, errichte in diesen Punkten die Senkrechten a m, d n, e o, f p, stelle den Messtisch über C auf, orientire ihn nach A und B, und visire nach und nach die abgesteckten Punkte der beiden Curven an, so ergeben sich deren Bilder m, n, o, p, t, u, v, w als Durchschnitte der Absehlinien mit den Senkrechten welche auf a b errichtet wurden. Die Vielecke m n o p, t u v w werden in der Zeichnung nach dem Augenmasse so verbessert dass sie die nur in einzelnen Punkten abgesteckten Curven möglichst treu darstellen.

In dem zweiten Falle kommt es darauf an über die zu nivellirende Fläche ein alle bemerkenswerthen Terrainpunkte deckendes Netz von Linien zu verbreiten, aufzunehmen und zu nivelliren. Die Form dieses Netzes richtet sich nach der Gestalt des Terrains und der Genauigkeit welche von den Curven verlangt wird: die durch je drei Netzlinien begrenzten und aneinander stossenden Dreiecksflächen müssen aber unter allen Umständen ein der Bodenoberfläche möglichst genau sich anschliessendes Polyeder bilden.

§. 181. Aufgabe. Einen Hügel dessen Situationsplan bereits vorhanden ist, durch Horizontalcurven darzustellen.

In diesem Falle kann es zweckmässig sein den Hügel von seinem Scheitel aus nach verschiedenen Richtungen zu nivelliren, die hierdurch erhaltenen Profile durch gleichweit abstehende Horizontalebenen zu schneiden, die Schnittpunkte auf die in den Horizontalplan eingetragenen Richtungen der Profile zu projiciren, die einer Horizontalebene angehörenden Projectionen zu Polygonen zu verbinden und diese in die gesuchten Curven selbst überzuführen. Dieses Verfahren zieht folgende Arbeiten nach sich.

1) Das Abstecken der Profile. Man wählt diese so dass sie sowohl die stärksten als die schwächsten Neigungen der Hügelfläche treffen; denn in diesen Richtungen ist die Natur des Terrains am schärfsten ausgesprochen. Darin liegt auch zugleich ein Anhaltspunkt für die Anzahl der Profile, ein anderer hängt von der verlangten Genauigkeit der Terrainzeichnung ab. Der Scheitel P des Hügels und alle Brechungspunkte der Profile werden wie bei einem Längennivellement mit Grund- und Beipfählen bezeichnet, während auf dem äussersten, von dem Scheitel aus noch sichtbaren Punkte jedes Profils eine Signalstange mit einer Bezeichnung des

Profils (nach der Fig. 180 mit den Buchstaben A, B, C, D, E, F, G) aufgestellt ist.

2) Das Aufnehmen der Profile. Dazu gehört erstens die Messung der Richtungswinkel der Linien P A, P B.... P G in Bezug auf eine feste gerade Linie P Q, welche sowohl auf dem Terrain als in dessen Horizontalplan gegeben sein muss; zweitens das Abmessen der horizontalen Entfernungen der Brechungspunkte der Profile vom Scheitel P aus, und endlich drittens das Einnivelliren aller dieser Punkte welches ebenfalls von dem Grundpfahle des Scheitels auszugehen hat. Die Art der Ausführung dieser Arbeiten ist bekannt.

Fig. 180.

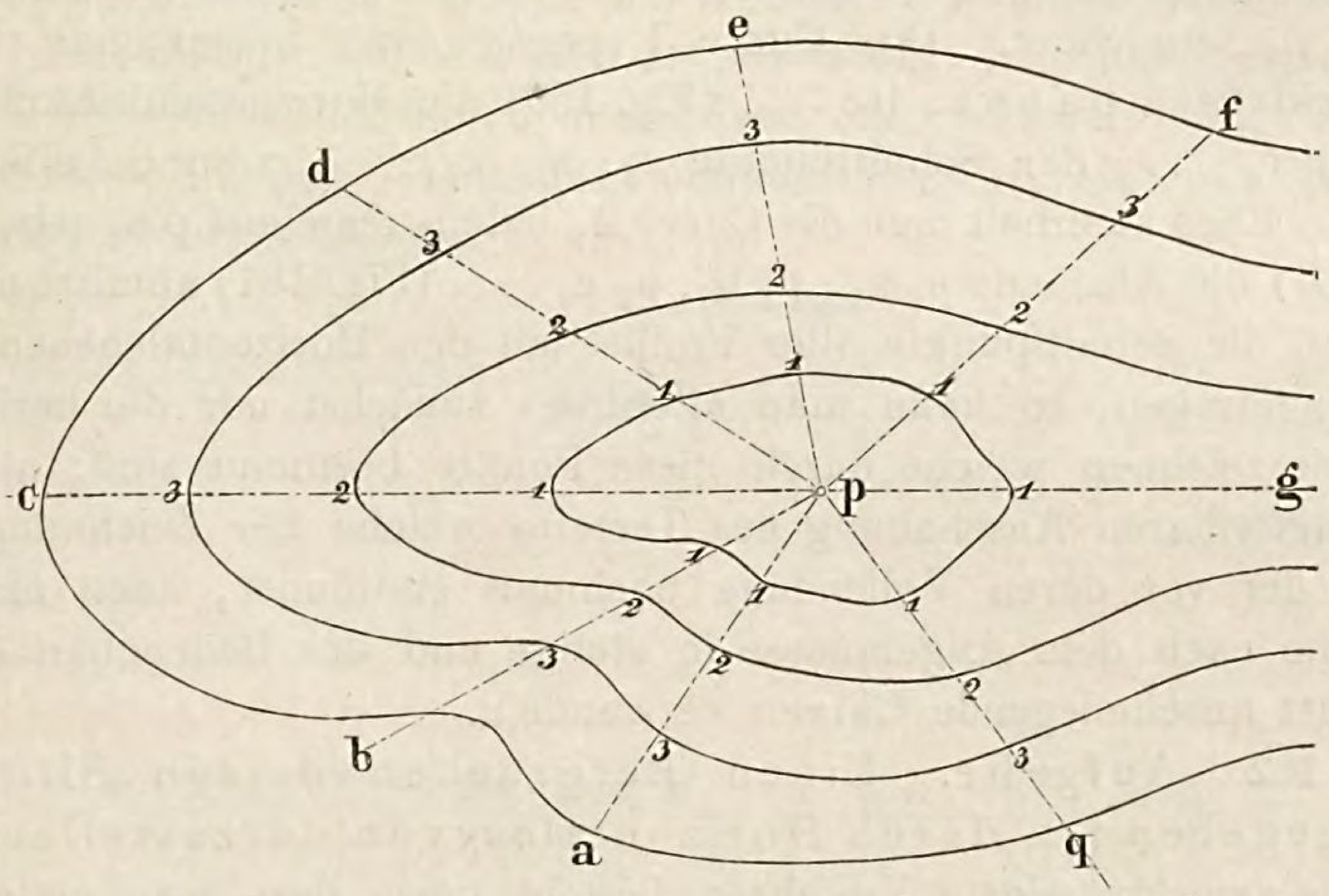
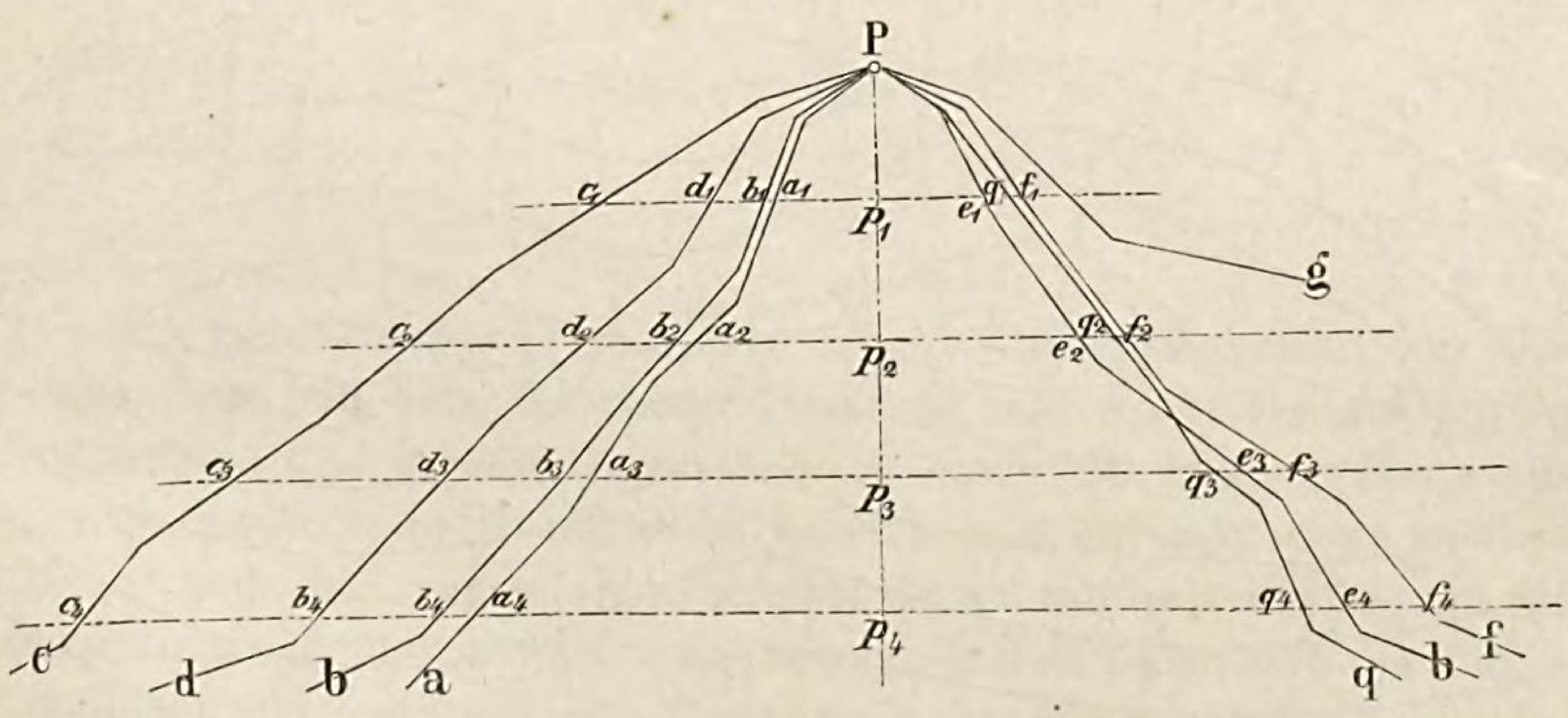


Fig. 181.



3) Das Zeichnen der Curven. Streng genommen gehört die Anweisung zu dieser Verrichtung in die Lehre vom Plan- und Kartenzeichnen; da jedoch das Aufnehmen der Horizontalcurven in mehrfacher Hinsicht

erst durch die Zeichnung derselben recht klar wird, so wird es erlaubt sein hier der genannten Abtheilung vorzugreifen.

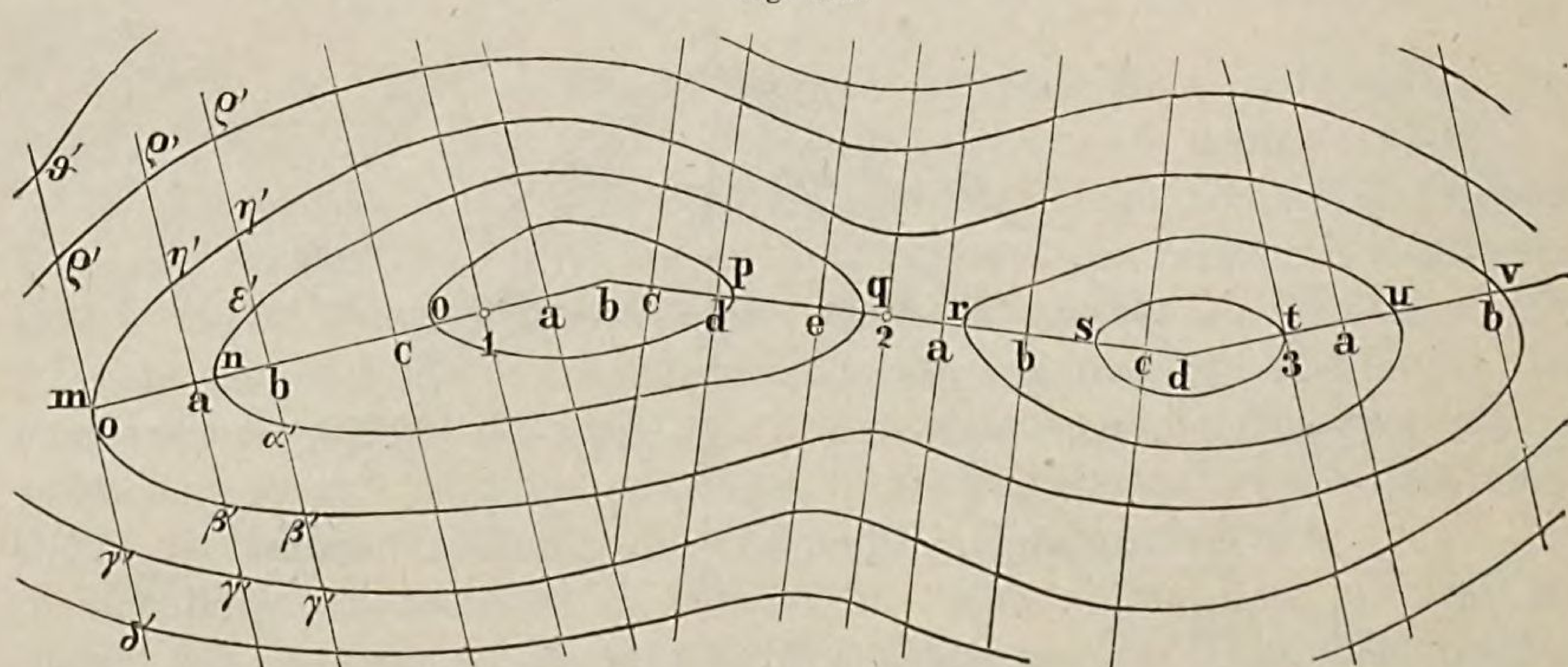
Die Profile des Terrains zeichnet man so dass die Abscissen in dem Massstabe des Horizontalplans, die Ordinaten aber 5 oder 10mal grösser dargestellt werden. Man kann diese Profile einzeln, oder, wie hier in Fig. 181 geschehen ist, vereinigt darstellen, so zwar dass sie alle den Scheitelpunkt p gemein haben. Die Profile P A, P B, P C sind hier durch p a, p b, p c und die horizontalen Schnittebenen deren Abstände von p an gezählt sind und 10, 20, 30, 40 Fuss betragen, durch 1, 2, 3, 4 bezeichnet. Die Curve 1 ergibt sich, indem man auf den Profilrichtungen p a, p b, p c (Fig. 180) die Horizontalabstände p_1 a_1, p_1 b_1, p_1 c_1, ... der Schnittpunkte a_1, b_1, c_1, ... vom Scheitel p aus abträgt. Eben so erhält man die Curve 2, indem man auf p a, p b, p c (Fig. 180) die Abstände p_2 a_2, p_2 b_2, p_2 c_2 (Fig. 181) abmisst u. s. w. f.

Sind die Schnittpunkte aller Profile mit den Horizontalebenen in den Plan eingetragen, so kann man allerdings zunächst nur die horizontalen Polygone zeichnen welche durch diese Punkte bestimmt sind; allein aus der unmittelbaren Anschauung des Terrains welche der Zeichnung voranging, oder vor deren Vollendung nochmals stattfindet, kann man diese Polygone nach dem Augenmasse in stetige und der Bodenoberfläche sich möglichst anschmiegende Curven verwandeln.

§. 182. Aufgabe. Einen Bergrücken dessen Situationsplan gegeben ist, durch Horizontalcurven darzustellen.

Das zweckmässigste Verfahren besteht darin dass man erstens nach

Fig. 182.

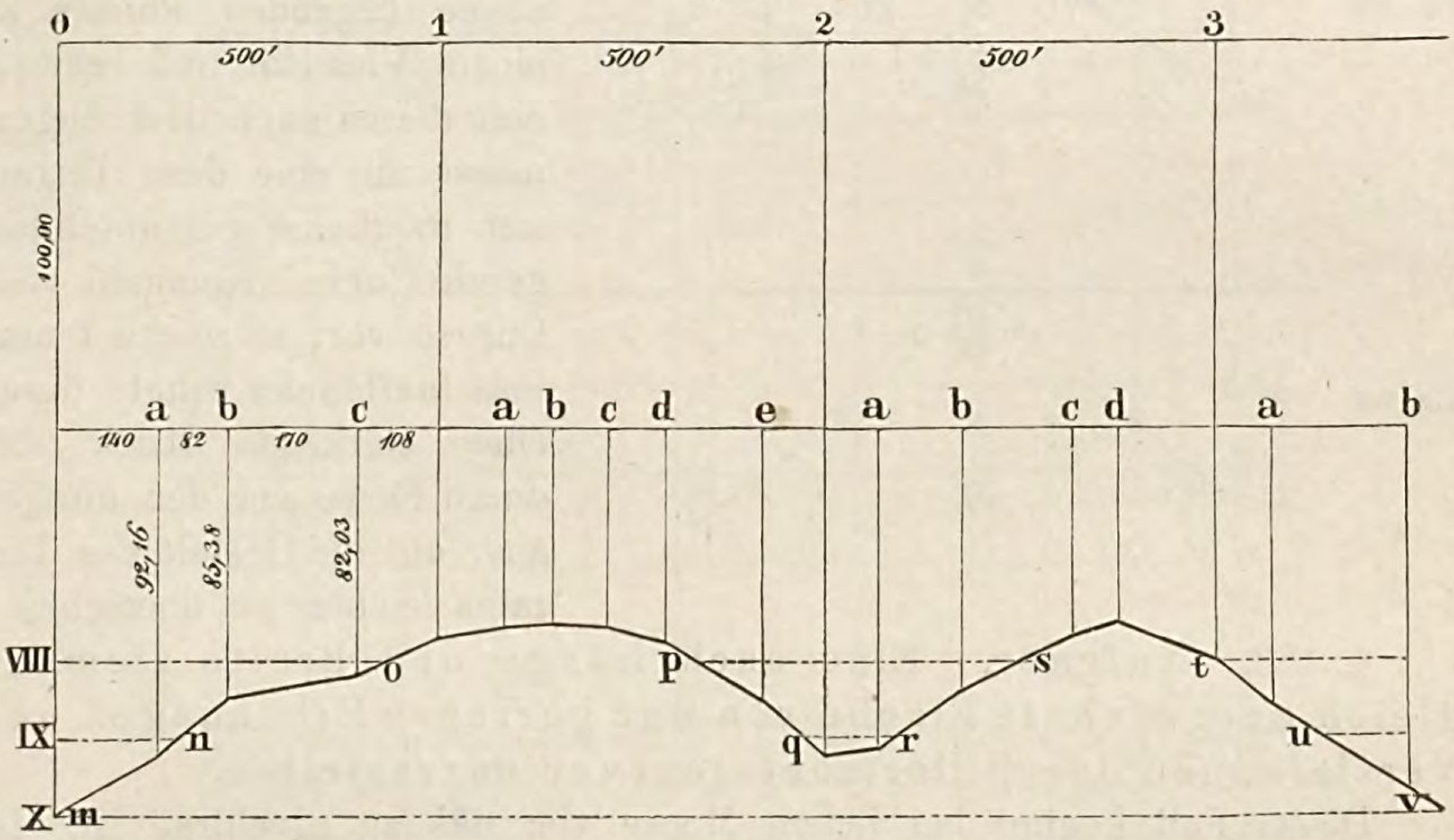


der Länge des Rückens eine Operationslinie aussteckt und nivellirt, zweitens Querprofile aufnimmt welche sich über die ganze Breite des Bergrückens erstrecken und drittens aus diesen Längen- und Querprofilen die Horizontalcurven construirt.

1) Die Operationslinie wird zwischen zwei in dem Plane genau bezeichneten Fixpunkten ausgesteckt. In ihrer Horizontalprojection bildet

sie ein offenes Polygon mit langen Seiten welche sich so viel als möglich der Wasserscheide des Bergrückens nähern. Die Eckpunkte werden durch Signalstangen bezeichnet und die Winkel mit dem Theodoliten, die Seiten mit Messlatten gemessen. Hiernach lässt sich die Horizontalprojection derselben in den Situationsplan der aufzunehmenden Terrainfläche eintragen: in Fig. 182 stellt 0 1 2 3 die Operationslinie vor. Ausserdem wird die ausgesteckte Operationslinie wie die Axe eines Längenprofils abgepflockt und zweimal vermessen und nivellirt. Nach der Berechnung des Nivellements erfolgt das Auftragen nach §. 173, wobei es sich von selbst versteht dass die horizontalen Entfernungen im Massstabe des Situationsplans und die Ordinaten etwa 5 oder 10mal grösser zu zeichnen sind. In Fig. 183 welche das Längenprofil der Operationslinie ist, sind die Höhen 10mal grösser als die Längen.

Fig. 183.



2) Die Querprofile stehen in der Regel senkrecht zur Operationslinie, weil sie sich bei dieser Richtung am leichtesten auf dem Terrain ausstecken und in den Horizontalplan eintragen lassen. Fordert aber die Natur des Terrains schiefe Richtungen, so wählt man diese und misst ihre Neigungswinkel gegen die Operationslinie, um sie ebenfalls in dem Horizontalplane genau angeben zu können. Das Abstecken, Aufnehmen, Berechnen und Zeichnen der Querprofile geschieht nach §. 174, wozu nur noch zu bemerken ist dass dem vorliegenden Zwecke eine mit dem Längenprofil übereinstimmende und in den Fig. 184, 185, 186, S. 378 angedeutete Zeichnung am besten entspricht.

3) Die Construction der Curven aus dem Längenprofil, den Querprofilen und dem Situationsplane ist sehr einfach. Man schneidet nämlich zuerst das Längenprofil durch horizontale Linien welche die Abstände der Schnittebenen haben, um die Projectionen (m, n, o, p, q, r, s, t, u, v)

aller Curvenpunkte zu erhalten welche in der Operationslinie selbst liegen, und trägt diese Projectionen in die Horizontalprojection der Operationslinie über. Ebenso schneidet man mit horizontalen Linien von der Höhe der Schnittebenen alle Querprofile und projicirt die Schnittpunkte auf die im Horizontalplane eingetragenen Richtungen dieser Profile. (Für das Querprofil Nr 0 ergeben sich z. B. die Punkte ϑ, ϱ, γ, δ, welche im Horizontalplane mit ϑ', ϱ', γ', δ' bezeichnet sind.) Schliesslich verbindet man die in einer Horizontalebene liegenden Punkte zu einem Vielecke und verwandelt dieses nach dem Augenmasse in eine dem Terrain sich möglichst gut anschmiegende Curve. Kommen viele Curven vor, so zeichnet man jede fünfte oder zehnte durch einen stärkeren Strich oder durch Farbe vor den übrigen aus, um die Gestalt des Terrains leichter zu übersehen.

Fig. 184

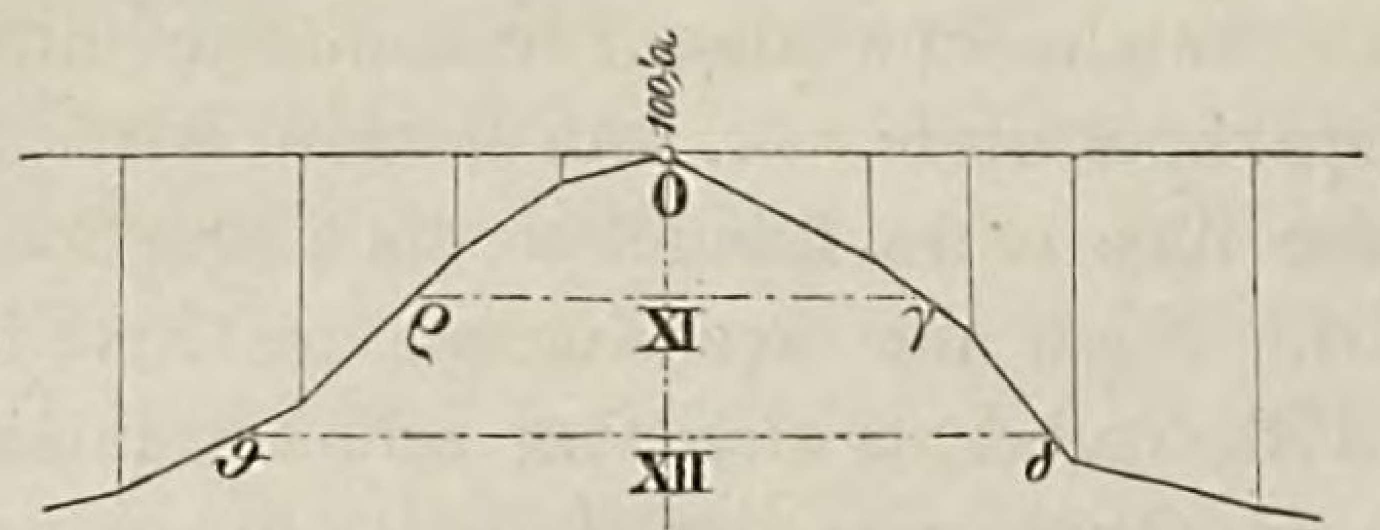


Fig. 185.

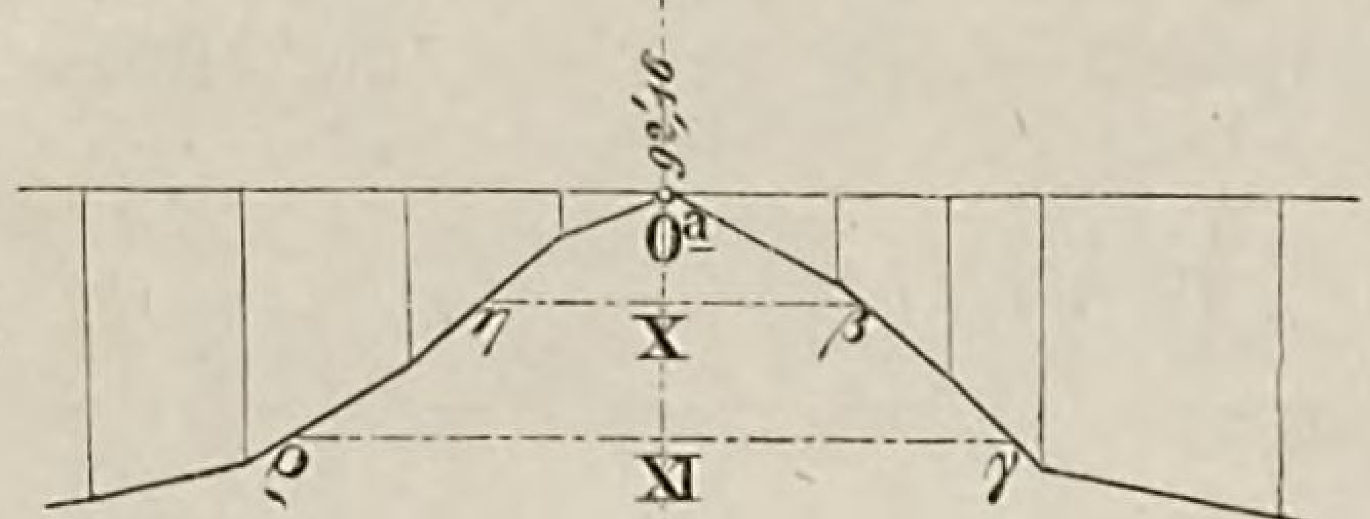
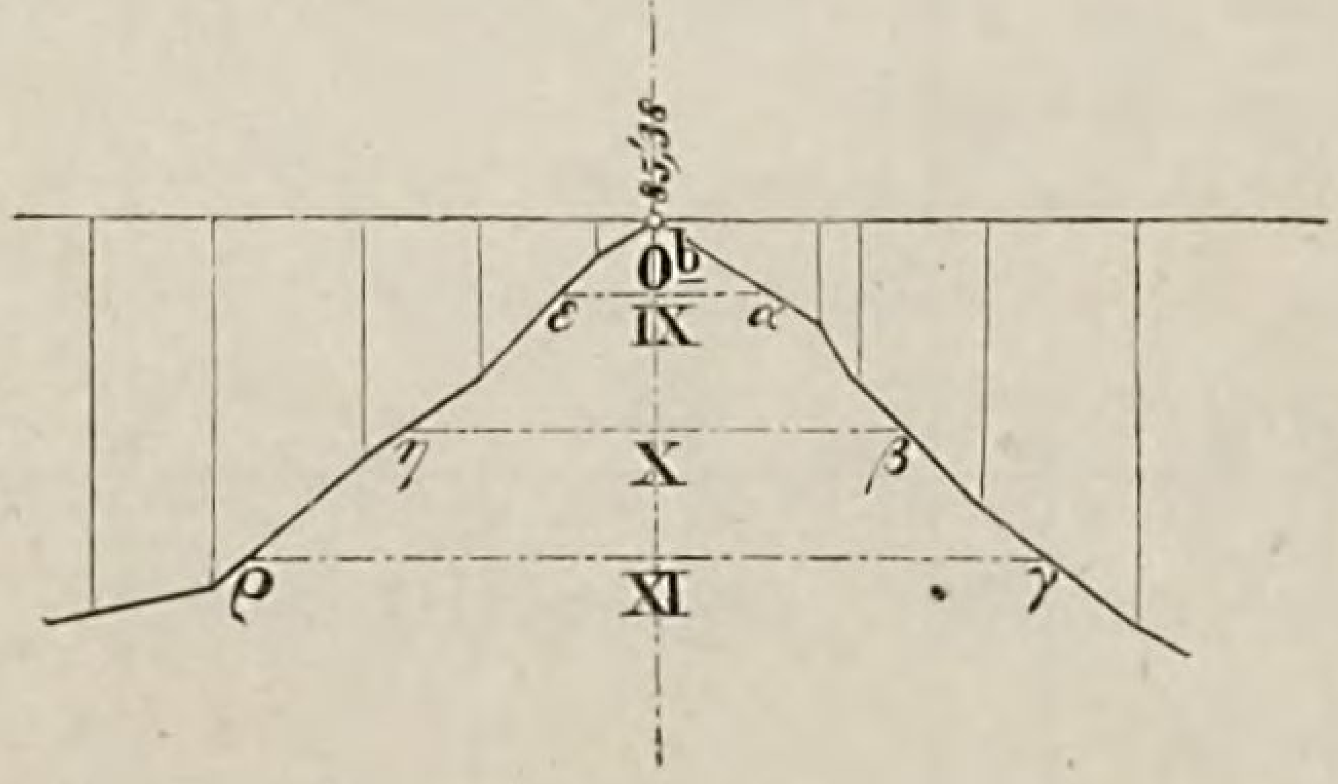


Fig. 186.



§. 183. Aufgabe. Eine nach Länge und Breite ziemlich gleich ausgedehnte Fläche von nur geringen Erhöhungen und Vertiefungen durch Horizontalcurven darzustellen.

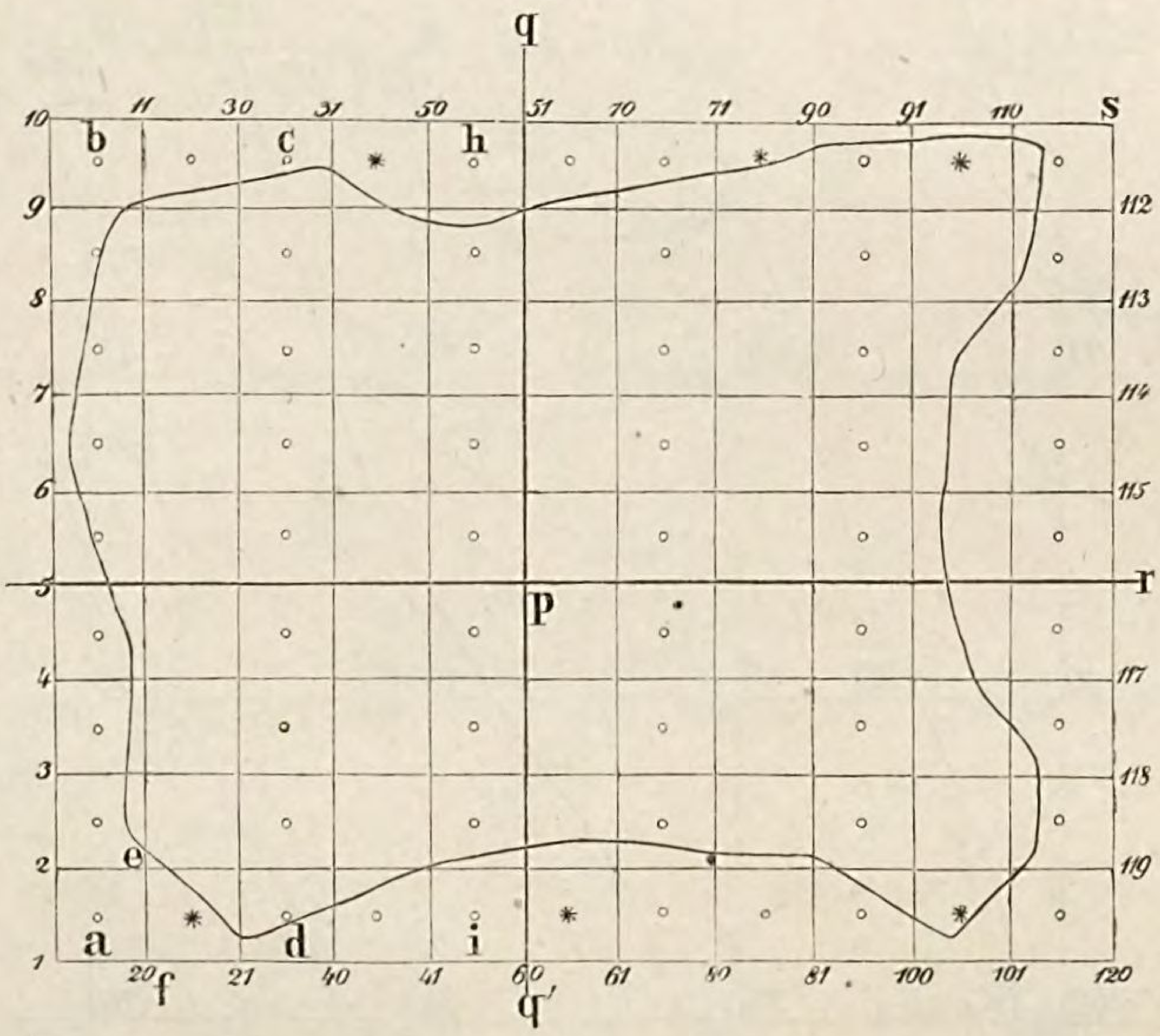
Dieser Fall kommt bei jedem Moose vor das zu nivelliren ist. Ist dessen Horizontalplan gegeben, so überziehe man dasselbe mit einem Quadratnetze dessen Seiten nach Umständen 300 bis 500 Fuss oder 100 Meter lang und (der leichteren Zeichnung wegen) den von Süd nach Nord und von Ost nach West laufenden Randlinien des Plans parallel sind.

1) Die Aussteckung des Netzes kann keine Schwierigkeit machen, sobald man auf einem Fixpunkte P der auch im Plane gegeben ist (p, Fig. 187), die Mittagslinie P Q, p q nach §. 157 ausgemittelt und mit Signalen bezeichnet hat. Auf dieser Mittagslinie misst man zunächst die Quadratseiten genau ab, errichtet in dem Fixpunkte mit dem Theodoliten eine Senkrechte P R, p r zu ihr, misst auch auf dieser die Quadratseiten genau ein und steckt dann in ziemlich weit entfernten Netzpunkten, z. B. Q, q und R, r, Parallelen zur Mittagslinie und ihrem Perpendikel ab. Misst man auf diesen Parallelen Q S, q s und R S, r s die Quadratseiten ebenfalls genau ab und bezeichnet ihre Endpunkte wie vorhin mit Grund-

und Beipfählen, so kann man durch Rückwärtsverlängern derselben das ganze Netz herstellen ohne neue Längen messen zu müssen, vorausgesetzt dass das Terrain übersehbar ist. Kommen einzelne Hindernisse vor welche das Visiren erschweren, so wird man dieselben leicht zu überwinden wissen.

2) Das Nivelliren der Netzpunkte geschieht mit der geringsten Anzahl von Aufstellungen auf die in Fig. 187 angedeutete Weise: indem man nämlich das Instrument stets nahezu in der Mitte eines Quadrats aufstellt, kann man von jedem in der Figur mit einem Ringe (o) bezeichneten Standpunkte aus alle vier Ecken des Quadrats anvisiren und hierdurch, wie diese Punkte beweisen, die Anzahl der Stationen auf die Hälfte derjenigen reduciren welche nöthig wären, wenn man jede einzelne Linie für sich

Fig. 187.

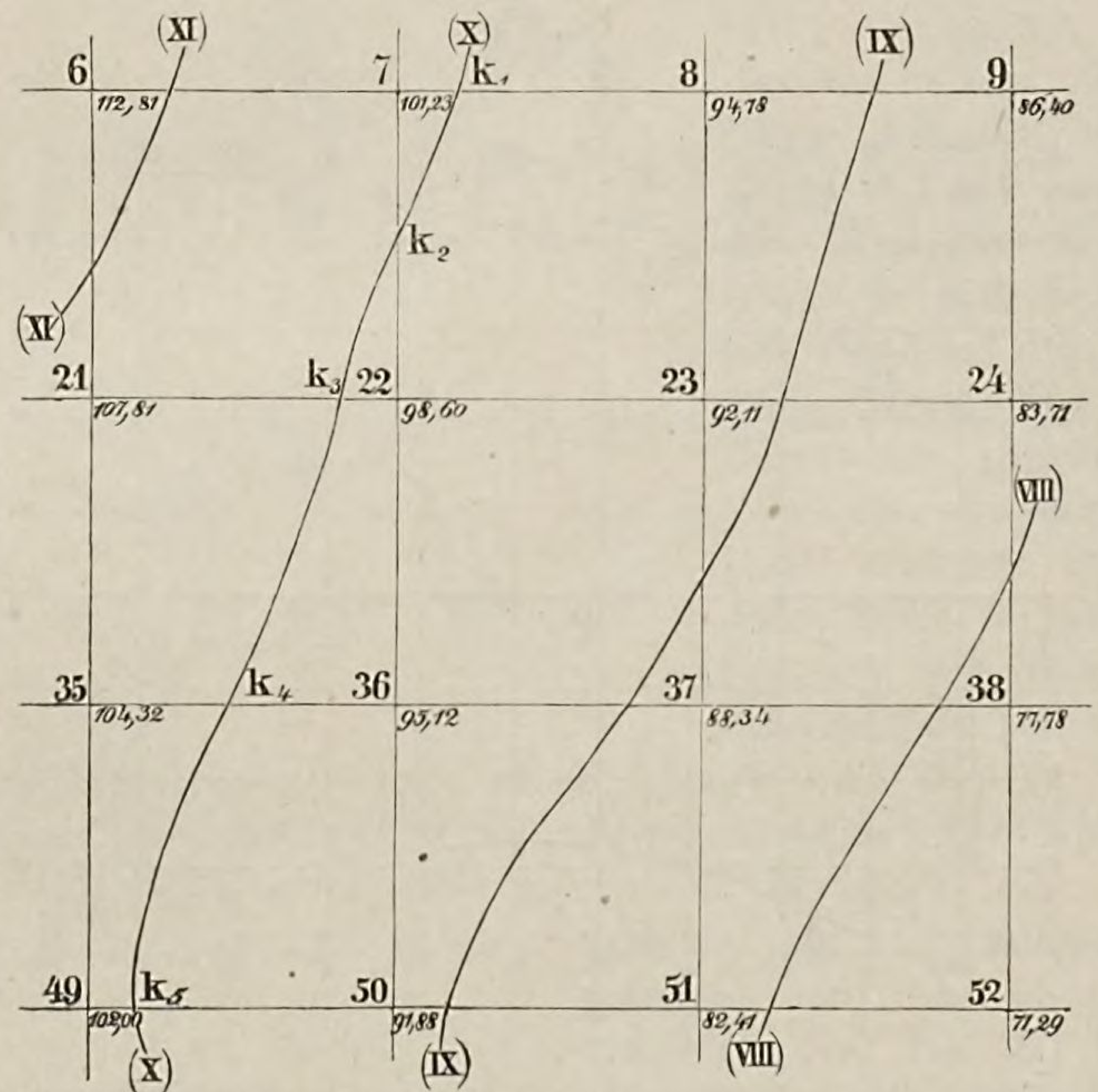


nivelliren wollte. Die mit Sternchen (*) bezeichneten Stationspunkte sind nicht durchaus nothwendig, aber indem sie zwei Stationsreihen zu einer geschlossenen Abtheilung (z. B. a b c d, c d i h) machen, gewähren sie eine Controle des Nivellements welche man nicht unbenützt lassen darf. Es müssen nämlich, da die letzten Punkte (e, f) einer Abtheilung (a b c d) zugleich die Anfangspunkte derselben sind, die Abstände der zweimal nivellirten Anfangs- und Endpunkte einander gleich sein, wenn richtig gearbeitet wurde. Da diese Controle jedoch keine Garantie dafür leistet dass nicht zwei gleiche aber entgegengesetzte Fehler in einer Abtheilung gemacht wurden, so ist gleichwohl noch die Herstellung eines Gegennivellements anzurathen, bevor die definitive Berechnung der Abstände aller Netzpunkte vom allgemeinen Horizont nach §. 174 vorgenommen wird.

3) Die Bestimmung der Horizontalcurven geschieht auf Grund der bekannten Horizontal- und Verticalabstände der Netzpunkte. Angenommen, die Abstände der Schnittebenen seien (der vorhandenen alten Figur wegen) Vielfache von 10 Fuss, also die Coten der Ebenen I, II, III, IV X beziehungsweise 10, 20, 30, 40 100′ und es stelle die Fig. 188 einen Theil des nivellirten Netzes mit 400′ langen Seiten vor: so findet man z. B. die Curve X in folgender Weise. Diese Curve schneidet die Linie von 7 auf 8 in einem Punkte k_1 dessen Abstand x_1 vom Punkte Nr 7 sich aus der leicht zu bildenden Proportion ergibt:

$$(101{,}23 - 94{,}78) : (101{,}23 - 100) = 400 : x_1$$

Fig. 188.



Die Curve X geht auch durch die Seite 7 auf 22 in einem Punkte k_2 dessen Abstand x_2 vom Punkte Nr 7 aus

$$(101{,}23 - 98{,}60) : (101{,}23 - 100) = 400 : x_2$$

folgt. Ebenso schneidet die Curve X die Seite 21 auf 22 in einem Punkte k_3 dessen Abstand x_3 vom Punkte Nr 21 aus der Proportion folgt:

$$(107{,}81 - 98{,}60) : (107{,}81 - 100) = 400 : x_3$$

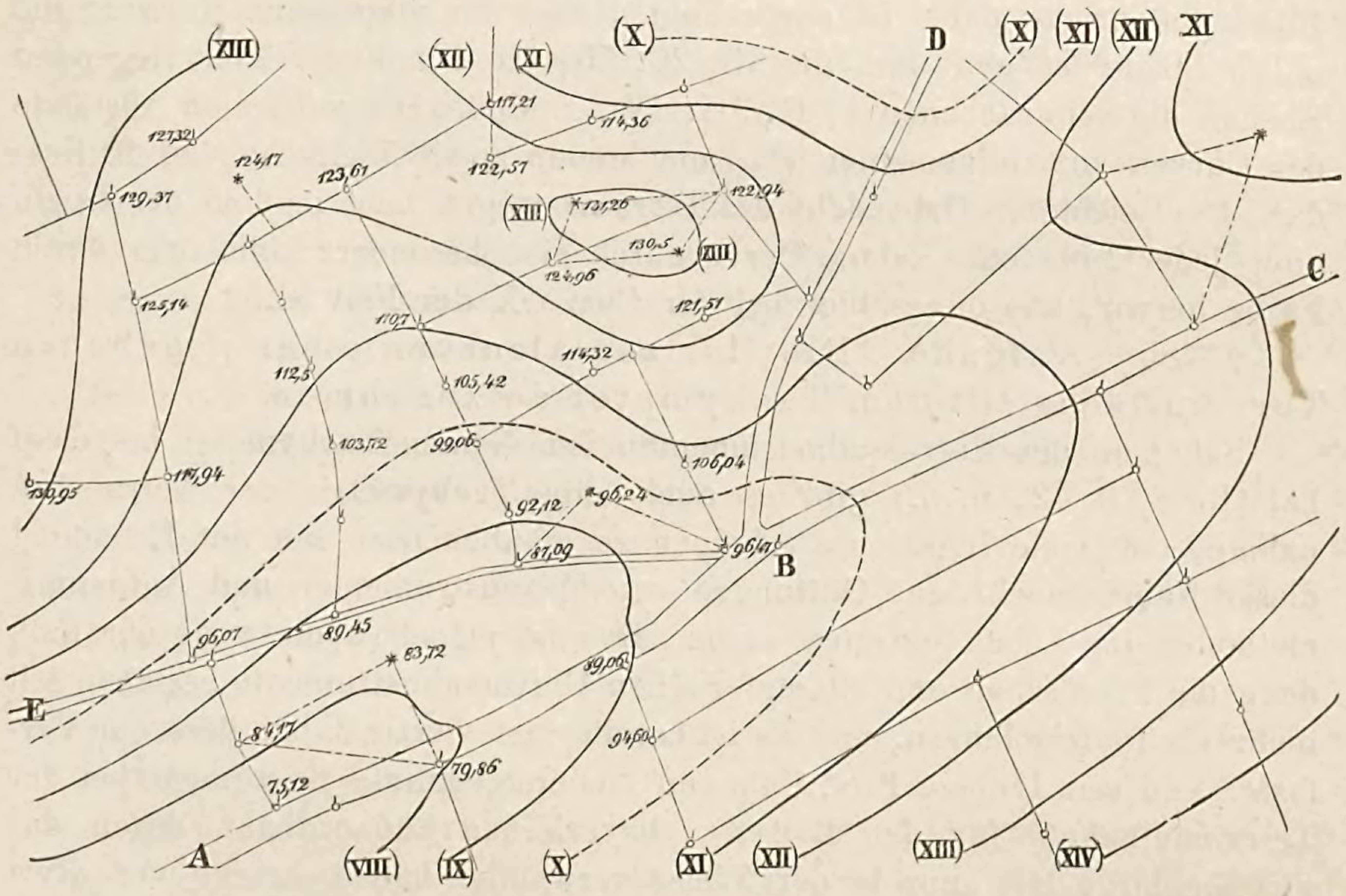
Sowie man durch Berechnen und Abtragen der Horizontalabstände x_1, x_2, x_3 die Punkte k_1, k_2, k_3 findet, so erhält man durch Fortsetzung dieser Arbeit auch die Punkte k_5, k_6, k_7, ... der Curve Nr X und folglich diese selbst. In gleicher Weise wird jede andere Curve bestimmt; so in Fig. 188 die Curven Nr VIII, IX und Nr XI.. Aus diesem Verfahren

entnimmt man leicht auf welcher Voraussetzung die Anlage des Netzes beruht, nämlich darauf dass man von einem Netzpunkte zum anderen eine gerade Linie legen kann welche mit dem Terrain zusammenfällt. Wird diese Bedingung bei Quadratseiten von 400 Fuss Länge nicht erfüllt, so müssen die Seiten kürzer genommen werden; im günstigsten Falle darf man sie auf 500′ ausdehnen, weil grössere Stationen als von 500′ Seite für die gewöhnlichen Nivellirinstrumente nicht geeignet sind.

§. 184. Aufgabe. Eine durchschnittene Terrainfläche deren Situationsplan gegeben ist, in Horizontalcurven darzustellen.

Wenn, wie hier, die Fläche beträchtliche und rasch wechselnde Erhöhungen und Vertiefuugen hat, auch in viele auf dem Plane genau dar-

Fig. 189.



gestellte Parzellen getheilt ist, so macht man am zweckmässigsten die Grenzen der Grundstücke und der Wege zum Netze für das Nivellement dieser Fläche. Als Netzpunkte gelten zunächst die Marksteine und andere auf dem Terrain befindliche und in dem Plane eingetragene Fixpunkte; ausser diesen schlägt man an den Stellen wo es nöthig erscheint (und dieses ist überall der Fall, wo man von einem Punkte zum anderen keine Gerade legen kann welche in das Terrain fällt) Grund- und Beipfähle in den Boden, und misst sie durch Dreiecke oder Coordinaten in Bezug auf die gegebenen Fixpunkte ein, um sie in dem Situationsplane verzeichen zu können. Die Längenmessung kann mit der Kette allein oder mit Latten und Winkelprisma, oder auch mit dem Distanzmesser geschehen; in dem letzteren Falle in Verbindung mit der Höhen- und Winkelmessung, wozu das Ertel'sche Universalinstrument vortrefflich sich eignet.

Ist das Netz in seiner Horizontalprojection festgestellt, so nivellirt man alle seine mit Pfählen bezeichneten Punkte zweimal ein, berechnet deren Abstände vom allgemeinen Horizont und bestimmt daraus nach §. 183 die Durchgänge der Horizontalcurven zwischen je zwei Punkten, indem man ihre horizontale Entfernung welche dazu nöthig ist, dem Plane entnimmt. Hiernach werden folgende Bemerkungen genügen die Fig. 189 näher zu erläutern.

Die mit Sternchen bezeichneten Punkte sind ihrer Horizontalprojection nach durch Dreiecke bestimmt welche an die auf dem Felde vorhandenen Marksteine angeschlossen wurden, und um die Figur nicht mit Zahlen zu überladen, sind die Coten nur in der linken Hälfte derselben eingeschrieben. Die römischen Ziffern bezeichnen die horizontalen Schnittebenen und die Horizontalcurven; dabei ist angenommen dass der allgemeine Horizont die nullte Ebene ist und dass die 10, 20, 30, 40 Fuss tiefer liegenden Ebenen die Schnittebenen I, II, III, IV ... sind. Die verticalen Abstände der Curven vom allgemeinen Horizont stellen somit Vielfache von 10 Fuss dar. Der leichteren Uebersicht des Terrains wegen hebt man in der Zeichnung jede fünfte oder zehnte Curve durch eine besondere Linie oder durch Farbe hervor, wie dieses hier bei der Curve X der Fall ist.

§. 185. Aufgabe. Die Horizontalcurven einer gegebenen Terrainfläche mit dem Tachymeter aufzunehmen.

Seit man den Universalinstrumenten den Namen Tachymeter beigelegt hat (Bd I, S. 422 u. ff.) gibt es auch eine Tachymetrie der Terrainaufnahme, und viele Ingenieure scheinen zu glauben dass mit der Erfindung dieser Namen auch neue Gattungen von Messinstrumenten und Aufnahmsmethoden ins Leben getreten seien. Das ist jedoch keineswegs der Fall, denn die Ertel'schen und Stampfer'schen Universalinstrumente bestehen seit mehr als fünfzig Jahren, und es ist bereits fast vierzig Jahre dass der Verfasser und sein College Prof. Culmann das erstgenannte Instrument bei der Terrainaufnahme für den Bau der bayerischen Südnordbahn durch das Fichtelgebirge fast ganz in der Weise verwendet haben welche vor etwa fünfzehn Jahren von Porro in Italien und Moinot in Frankreich so lebhaft empfohlen wurde. Nur vom Rechenschieber der gegenwärtig ein wesentliches Zugehör des Tachymeters ist, haben Culmann und Bauernfeind damals (1841 bis 1844) keinen Gebrauch gemacht.

Wenn der Verfasser in den vorstehenden §§. 181 und 182 zwei Methoden der Horizontalcurven-Aufnahme beschrieben hat welche sich auf Herstellung von Längen- und Querprofilen gründen, so hat er dieses gethan, weil diese Methoden dem Anfänger die beste Einsicht in das Wesen der Schichtenpläne geben und weil sie in Ermangelung von Universalinstrumenten und genauen Situationsplänen die einzigen anwendbaren Methoden sind. Es ist daher ungenau, wenigstens in Bezug auf Bayern nicht richtig, was Ingenieur C. Heuser in seinem Aufsatze über die Aufnahme des Terrains nach Moinot (Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-

Vereins zu Hannover, Bd XVII, 1871, S. 445) sagt dass die bisher meist übliche Methode der Terrainaufnahme im Ausstecken und Nivelliren einer oder mehrerer Basislinien und Aufnehmen weit ausgedehnter Querprofile mit Kette und Nivellirinstrument oder mit der Setzlatte bestanden habe.

Eben so wenig als mit dieser Aeusserung kann sich der Verfasser mit der anderen Behauptung des Herrn C. Heuser (a. a. O. S. 446) einverstanden erklären dass das in §. 184 erläuterte Verfahren der Aufnahme von Schichtenplänen die Parzellengrenzen zu Grunde zu legen, nicht empfehlenswerth sei. Dieses Verfahren ist im Gegentheile in technischer und ökonomischer Beziehung ganz besonders angezeigt, wenn die nöthigen Voraussetzungen gegeben sind und es richtig angewendet wird. Die Voraussetzungen sind aber dauerhafte Vermarkung der Grundstücke und genaue Situationspläne (Steuerblätter) in hinreichend grossem Massstabe (mindestens 1 : 5000), und das richtige Verfahren besteht nicht darin „dass man sich an die zufällige Lage der Parzellengrenzen bindet“ sondern diese nur mitbenützt, und ausserdem so viele Punkte auf dem Felde mit Pfählen bezeichnet und mit der Kette oder dem Distanzmesser einmisst dass in der That ein Dreiecksnetz entsteht dessen Ebenen ein möglichst nahe mit der Bodenoberfläche zusammenfallendes Polyeder bilden.

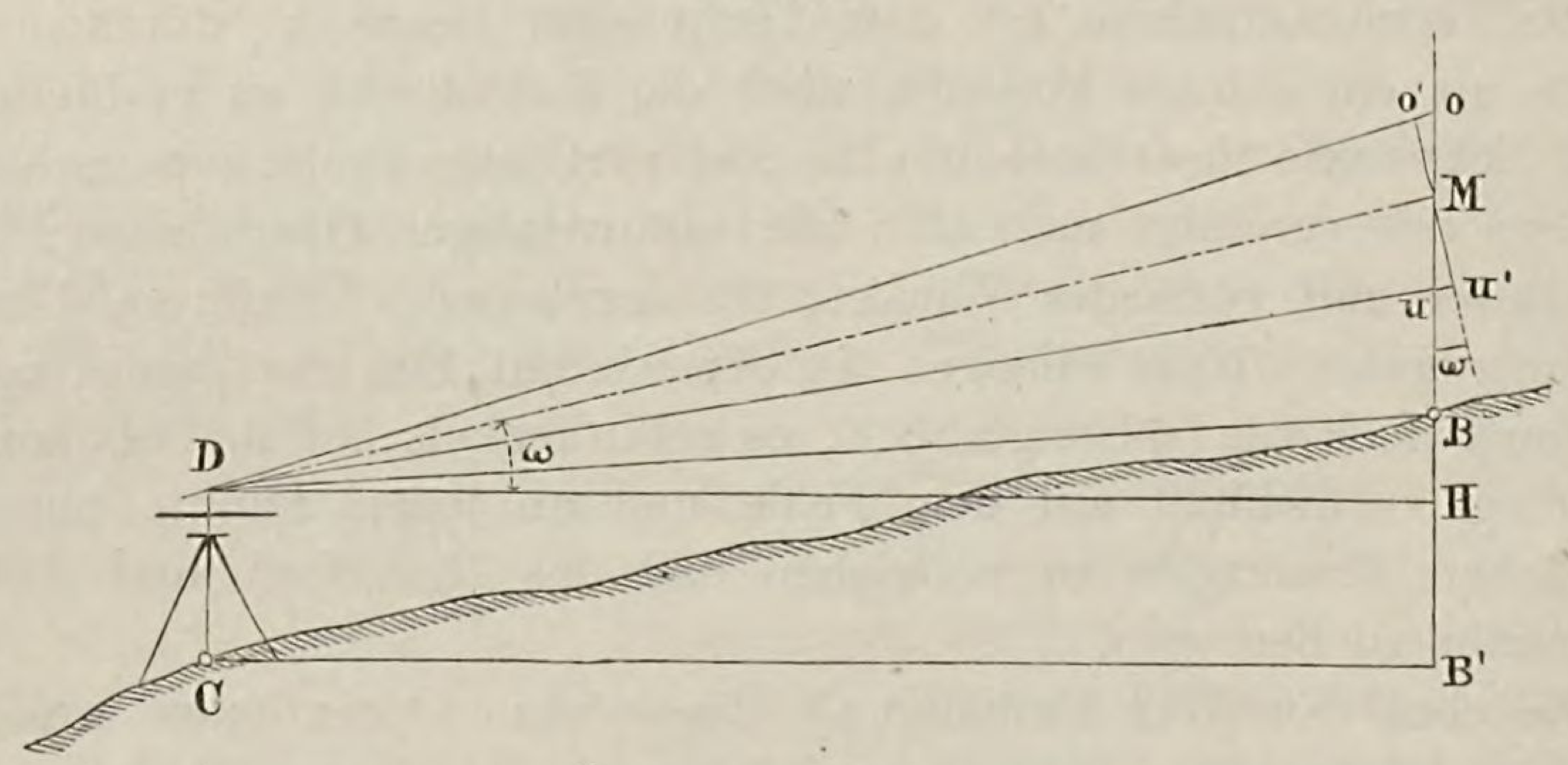
Die Terrainaufnahme mit dem Tachymeter bezweckt durchaus nichts anderes als ein solches Polyeder über die Bodenfläche zu verbreiten und dessen Eckpunkte ihrer horizontalen und verticalen Projection nach zu bestimmen; nur vereinigt man hier alle nothwendigen Operationen: Messen horizontaler und verticaler Winkel, Distanzmessen, Nivelliren, Reduciren und Auftragen zu einer einzigen, in der Absicht Zeit zu sparen, während wir immer noch wie früher glauben, es sei in technischer und ökonomischer Beziehung vortheilhaft auf dem Felde und an jedem Punkte nur die erforderlichen Messungen zu vollziehen und das Reduciren und Auftragen im Zimmer zu besorgen.

Die eben erwähnte Vereinigung sämmtlicher Operationen welche der Tachymetrie eigen ist, bringt es mit sich dass zu jedem Tachymeter drei Ingenieure und eben so viele Lattenträger erfordert werden: der erste Ingenieur leitet die Aufnahme, verfertigt die Handrisse des Netzes und bezeichnet die Punkte auf denen die Latten aufzustellen sind; der zweite Ingenieur handhabt das Instrument, stellt es auf, liest ab und dictirt seine Beobachtungen dem dritten Ingenieur der sie in ein gehörig vorbereitetes Tagebuch einträgt und von Zeit zu Zeit seine Rolle mit dem zweiten Ingenieur wechselt. Die Breite der aufzunehmenden Zonen richtet sich nach den Umständen und kann mehrere hundert Meter betragen; ist kein Situationsplan vorhanden so müssen nothwendig einige Grundlinien mit Messlatten genau abgemessen werden, weil nur auf diesem Wege eine richtige Horizontalaufnahme der Hauptpunkte zu Stande kommen kann, indem die Genauigkeit der Distanzmessung hiefür nicht ausreicht. Alle Hauptpunkte werden durch Grund- und Beipfähle markirt, die Nebenpunkte

lässt man in der Regel auf dem Felde ohne Bezeichnung und numerirt sie lediglich im Beobachtungshefte fortlaufend; besser ist es aber, auch diese Nebenpunkte mit kleinen Markpflöcken zu bezeichnen.

Auf jedem Hauptpunkte wird zunächst der vorhergehende und der nachfolgende Hauptpunkt beobachtet, worauf sich die Beobachtung der Nebenpunkte anschliesst. Die Winkel werden nach Richtungen gemessen (Bd II, S. 250), und es wird die Ausgangsrichtung nach Norden mit Hilfe der am Tachymeter befindlichen Bussole bestimmt. Zählt man also die Horizontalwinkel von Nord über Ost bis zu 400⁰ (wir setzen hier ein Tachymeter von Moinot voraus), so soll der Azimuthalwinkel am zweiten Endpunkte einer Hauptlinie theoretisch um 200⁰ vom Azimuthe im ersten Endpunkte verschieden sein, praktisch tritt ein solcher Unterschied nur zufällig einmal ein; überschreitet jedoch die Differenz den erwähnten Betrag um mehr als einen halben Centesimalgrad, so wird die Messung auf dem ersten Endpunkte wiederholt. Die so gemessenen Winkel dienen zur Berechnung der Coordinaten der Hauptpunkte, die zur Fehlerfortpflanzung nicht geeigneten Nebenpunkte unterwirft man keiner solchen Controle und trägt sie auch nur mit Transporteuren auf.

Fig. 190.



Die gesuchte horizontale Entfernung e′ eines Punkts von der Instrumentenaxe wäre nach Formel (164) und Fig. 302, Seite 410 des I Bands, gleich $e \cos^2 \omega$, wenn e die an der lothrecht gestellten Latte abgelesene Entfernung und ω den Höhen- oder Tiefenwinkel vorstellt; da jedoch nach der Bemerkung auf Seite 426 des genannten Bands der Tachymeter stets nur Zenithwinkel angibt, so ist hier $e' = (200\ l) \sin^2 \alpha$ weil $\omega = 90^0 - \alpha$ und $e = 200\ l =$ dem zweihundertfachen Betrage des wirklichen Lattenabschnitts $o\ u = l$ (Fig. 190) ist.

Die horizontalen Entfernungen e′ kann man auf dem Rechenschieber der eine Scala der Quadrate der Sinus von $\alpha = 40^0$ bis $\alpha = 160^0$ enthält, bei richtiger Einstellung sofort ablesen; und dasselbe ist mit den lothrechten Abständen M H des vom Mittelfaden des Fernrohrs gedeckten Punkts M vom Instrumentenhorizonte der Fall, weil für $\alpha < 100^0$ der Abstand

$MH = h = e' \cot \alpha$ und für $\alpha > 100^0$ der Abstand $M'H = h' = -e' \cot \alpha = e' \operatorname{tg} (\alpha - 100^0)$ ist, nach der Beschaffenheit des Terrains aber die Werthe von α stets zwischen 50^0 und 150^0 liegen und auf dem Rechenschieber die Tangenten aller Winkel von 0^0 bis 50^0 und die Cotangenten von 50^0 bis 100^0 aufgetragen sind.

4. Bemerkungen und Aufgaben über das Nivelliren.

§. 186. Die wichtigsten Anwendungen des Nivellirens bestehen in der Aufnahme von Terrainprofilen und Horizontalcurven; es gibt aber noch viele andere Anwendungen dieses Zweiges der Messkunst welche ebenfalls wichtig sind. Einige derselben sind in den nachfolgenden Aufgaben und in den Abschnitten IV und V enthalten, während die übrigen so einfach gelöst werden können dass wir es nicht für nöthig halten sie hier besonders aufzuführen. Dagegen mögen für manche Anfänger im Nivelliren die nachstehenden Winke zur Ueberwindung von Hindernissen oder zur Vermeidung von Messungsfehlern nicht überflüssig sein.

1. Wenn man genau nivelliren will, so ist es zunächst nöthig einen in allen Theilen geregelten Gang der Arbeit festzusetzen, einzuüben und unabänderlich festzuhalten. Dieser Gang hängt von der Beschaffenheit des Instruments und von der anzuwendenden Methode des Nivellirens ab und wird nach Anleitung der §§. 168 bis 170 bestimmt.

2. Wesentliche Sorgfalt ist auf das richtige Einstellen des Fadenkreuzes und auf das deutliche und richtige Aufschreiben der abgelesenen Visirhöhen zu verwenden. Die Aufzeichnungen im Notizbuche müssen so vollständig und leserlich sein dass jeder andere Sachverständige das Nivellement danach berechnen und auftragen kann.

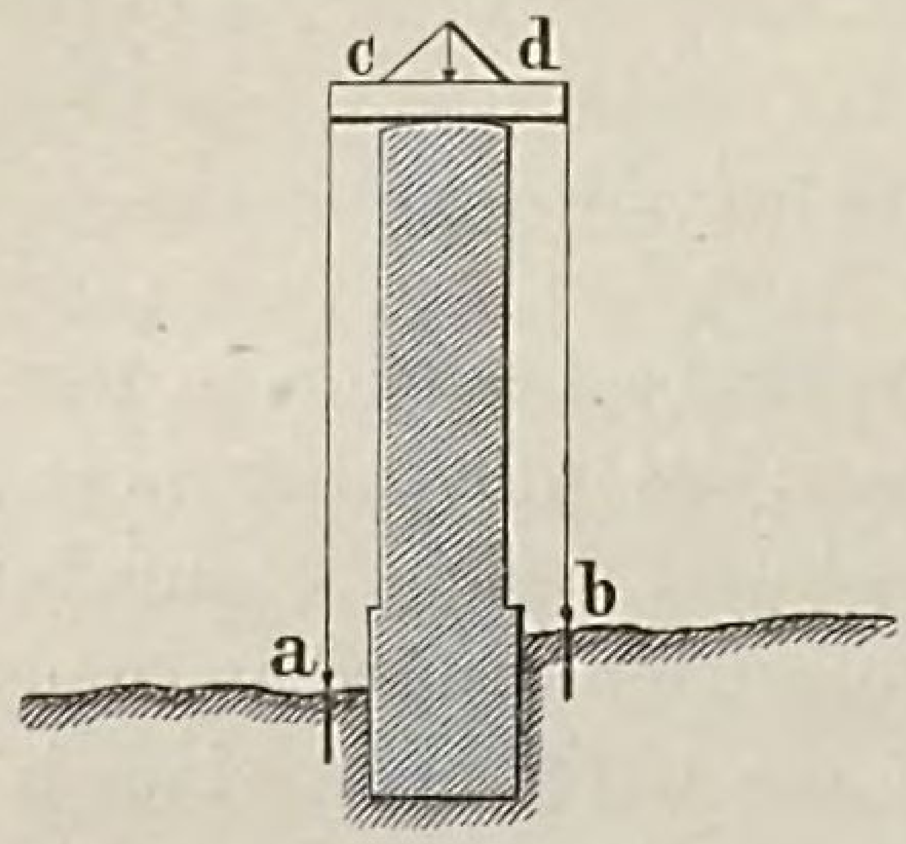
3. Man darf die Mühe nicht scheuen vor jedem Nivellement das Instrument zu untersuchen und es nöthigenfalls zu berichtigen. Bei grösseren Arbeiten macht man dergleichen Untersuchungen jeden Morgen. Dabei hat man sich auch zu überzeugen ob alle Theile des Instruments ihre Schuldigkeit thun, z. B. die Schrauben und Federn. Gehen die Schraubenspindeln zu leicht, so ziehe man entweder ihre geschlitzten Muttern an, oder tauche die Spindeln in zerlassenes Wachs dem ein wenig Talg zugesetzt ist. Grosse Reibung zwischen Stahl und Kupfertheilen wird durch Olivenöl oder Klauenfett gemindert.

4. Nach beendigter Arbeit wird das Instrument, wenn es nass geworden sein sollte, getrocknet und hierauf vorsichtig eingepackt. Während der Ruhestunden und zur Nachtzeit nimmt dasselbe der Ingenieur zu sich um es der Neugierde Unberufener zu entziehen. Auf Reisen soll es vor Erschütterungen so viel als möglich bewahrt werden.

5. Hat man in bedecktem Terrain zu nivelliren so wird das hinderliche Gebüsch oder Gestrüpp in der Richtung der Visirlinien abgehackt; führt das Nivellement durch einen Wald, so kann man sich in der Regel

einen Standpunkt suchen der zwei Punkte einzunivelliren gestattet ohne dass man Bäume fällen lässt; wird die Linie von Hecken, Planken oder anderen Zäunen durchschnitten und kann man sich nicht hoch genug aufstellen um über sie wegzusehen, so bringt man in denselben Lücken an, durch welche visirt werden kann; hohe Mauern werden in diesem Falle dadurch überschritten, dass man vor und hinter denselben Grundpfähle (a, b Fig. 191) schlägt und deren Höhenunterschied mit Hilfe einer horizontal gelegten Latte (c d) durch Nivellirlatten oder Senkel (a c, b d) abmisst.

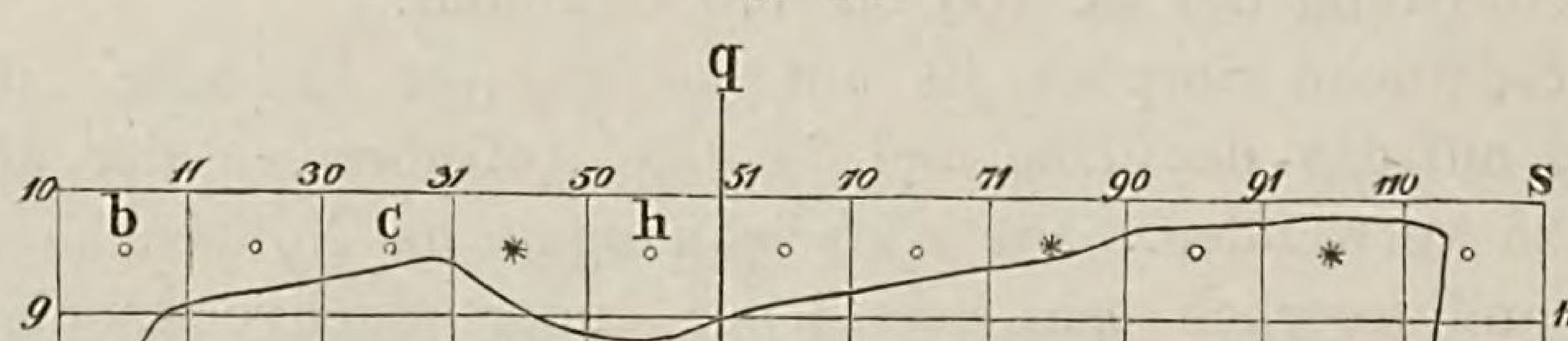
Fig. 191.



6. Wird die Richtung eines Längen- oder Querprofils von einem Bache oder kleineren Flusse geschnitten, so verfährt man mit der Aufnahme gerade so als ob kein Wasser vorhanden wäre, da im Sommer die Arbeiter die Nivellirlatte auch im Wasser halten können. An grossen Flüssen und Strömen hat man indessen nach der im Abschnitte V gegebenen Anleitung zu verfahren.

7. Wenn eine Moor- oder Sumpffläche zu nivelliren ist, so muss dieselbe vor allen Dingen mit einer Reihe von Punkten umgeben werden

Fig. 192.



welche noch (wie in Fig. 192 die Pfähle Nr 1, 2, 3 . . 20, 21, 40, 41 . . . 30, 31, 50, 51 . . . 112, 113, 114 . . .) auf festem Boden stehen. Von dieser Umfangslinie aus nivellirt man nach Innen so viele Punkte an, als nur

immer angeht; die übrigen sind entweder im Winter, wenn der Boden gefroren ist, einzunivelliren, oder es ist für geeignete Standpunkte des Instruments durch Einschlagen von je drei Pfählen zu sorgen.

8. Den schädlichen Einflüssen der Witterung lässt sich nur zum Theil begegnen: sind die daraus zu befürchtenden Störungen zu gross, so muss die Arbeit eingestellt werden. Den nachtheiligen Einwirkungen der directen Sonnenstrahlen auf die Libelle, das Objectiv des Fernrohrs und die Gläser der Canalwage werden durch Schirme beseitigt; dagegen können die daraus hervorgehenden Luftzitterungen und scheinbaren Bewegungen der Nivellirlatte eben so wenig weggeschafft werden, als die Störungen welche helle Wände durch Zurückstrahlung des Sonnenlichts gegen das Fernrohr oder die Canalwage verursachen.

9. Jedes als Grundlage des Entwurfs eines Erd- oder Wasserbauwerks dienende Längenprofil muss auf feste Punkte bezogen werden welche nicht wie Grund- und Beipfähle der Zerstörung aus Unvorsichtigkeit oder Muthwillen unterliegen. Dergleichen Fixpunkte sollen nicht über 100 Meter von einander entfernt sein, und es können dazu benützt werden: Felsvorsprünge, Sockel von Gebäuden, massive Treppenstufen, Trottoirplatten, Fachbäume etc. und in Ermangelung solcher natürlicher Gegenstände starke eichene Pfähle welche ungefähr 1 Meter tief in den Boden gerammt, oben mit einem Nagel versehen und wohl verwahrt werden. Bei der Ausführung eines Bauentwurfs gehen alle Nivellemente von diesen Fixpunkten aus.

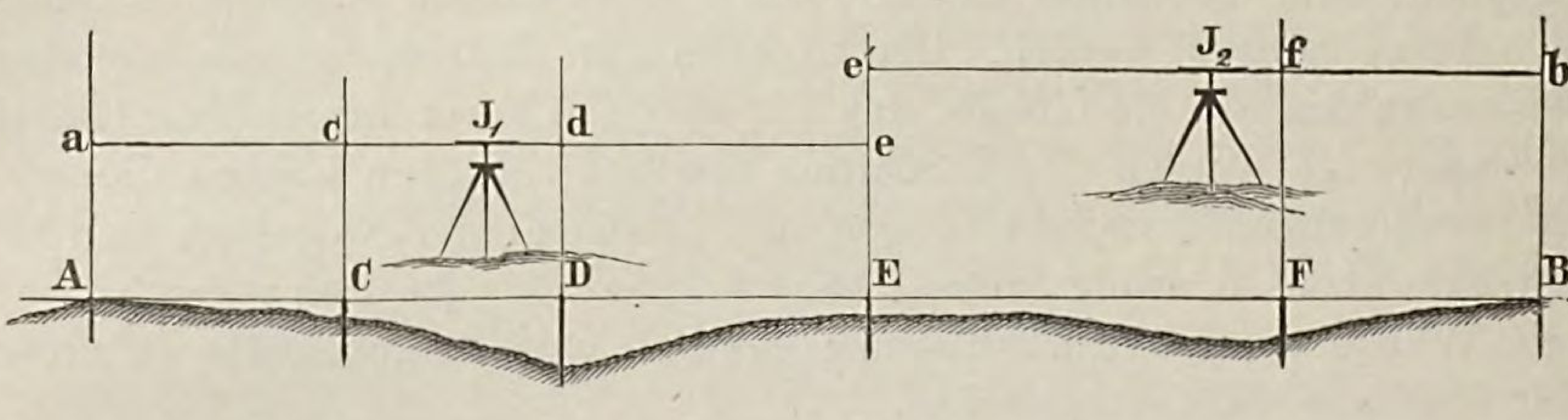
10. Kein Längennivellement darf als richtig angesehen werden welches nicht durch ein zweites Nivellement oder durch sich selbst controlirt ist. Eine Controle der letzteren Art bietet jede in sich selbst zurückkehrende Linie, wenn der berechnete Abstand des Endpunkts derselben mit dem des Anfangspunkts genau oder doch sehr nahe übereinstimmt. Möglich bleibt es aber bei dieser Controle immer dass in dem Nivellement zwei gleiche und entgegengesetzte Fehler stecken welche sich bei der Berechnung aufheben. Diese Fehler werden jedoch entdeckt, wenn man die Linie zurück nivellirt. Darum ist ein zweites Nivellement stets die beste Prüfung des ersten.

§. 187. Aufgabe. Eine horizontale gerade Linie von bestimmter Höhenlage abzustecken.

Ist die Richtung der Geraden durch zwei Punkte (A, B Fig. 193) und ihre Höhe durch einen Fixpunkt (C) gegeben, so schaltet man vor Allem zwischen den beiden Endpunkten (A, B) so viele Punkte (D, E, F . . .) ein, als nöthig erachtet werden um die gesuchte Horizontallinie gehörig festzulegen. In allen Punkten der Linie werden Pfähle eingeschlagen welche so lang sind dass sie sicher über die abzusteckende Horizontale reichen. Hierauf nivellirt man den Fixpunkt (C) an und lässt die nächst gelegenen Pfähle der Linie (z. B. A, D, E) so tief in den Boden schlagen oder oben absägen dass sie bei horizontaler Absehlinie dieselbe Ablesung auf der Latte geben wie der Punkt C. Sind alle von der ersten Station aus sichtbaren

Pfähle in dieser Weise geordnet, so betrachtet man einen derselben als Fixpunkt der zweiten Station und verfährt wie vorhin. Eben so kann man in einer dritten oder vierten Station zu Werke gehen.

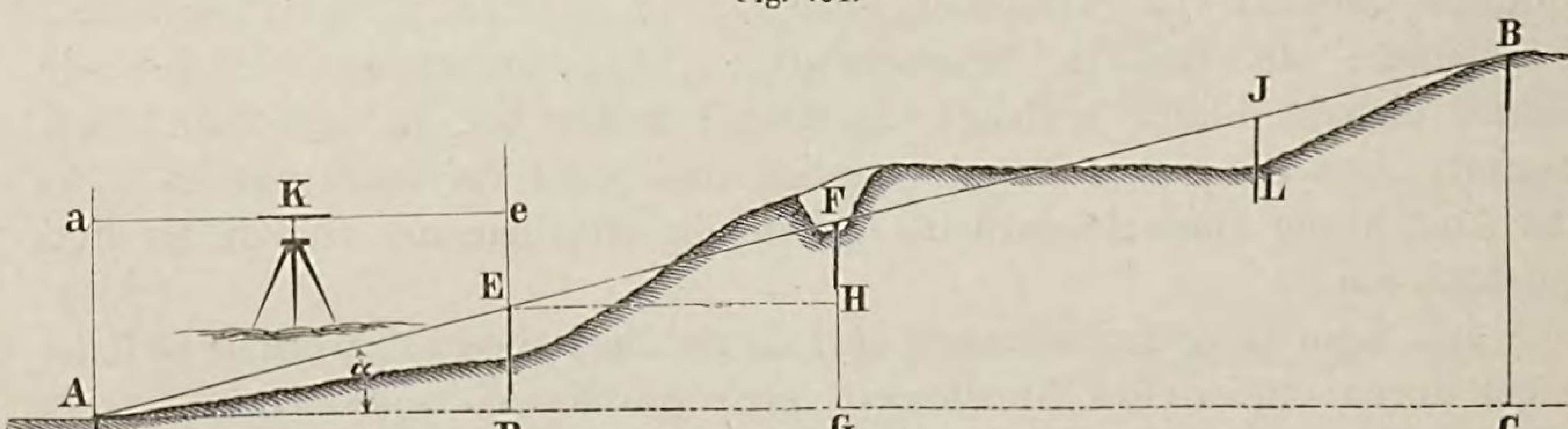
Fig. 193.



§. 188. **Aufgabe. Auf dem Felde eine gerade Linie von bestimmter Neigung abzustecken.**

Die abzusteckende Gerade sei in ihrer horizontalen und verticalen Projection durch die Punkte A und B (Fig. 194) bestimmt; der Höhenunterschied

Fig. 194.



zwischen A und B sei $= h$ und die horizontale Entfernung von A bis B $= A\,C = l$. Es ist somit die relative Steigung von A bis B oder

$$p = \operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{l} \tag{370}$$

Steht der erste in die Linie A B eingerichtete Pfahl E D von A um die Länge $A\,D = \lambda$ ab, so ist die absolute Steigung von A bis E oder

$$D\,E = \eta = \lambda \operatorname{tg}\alpha$$

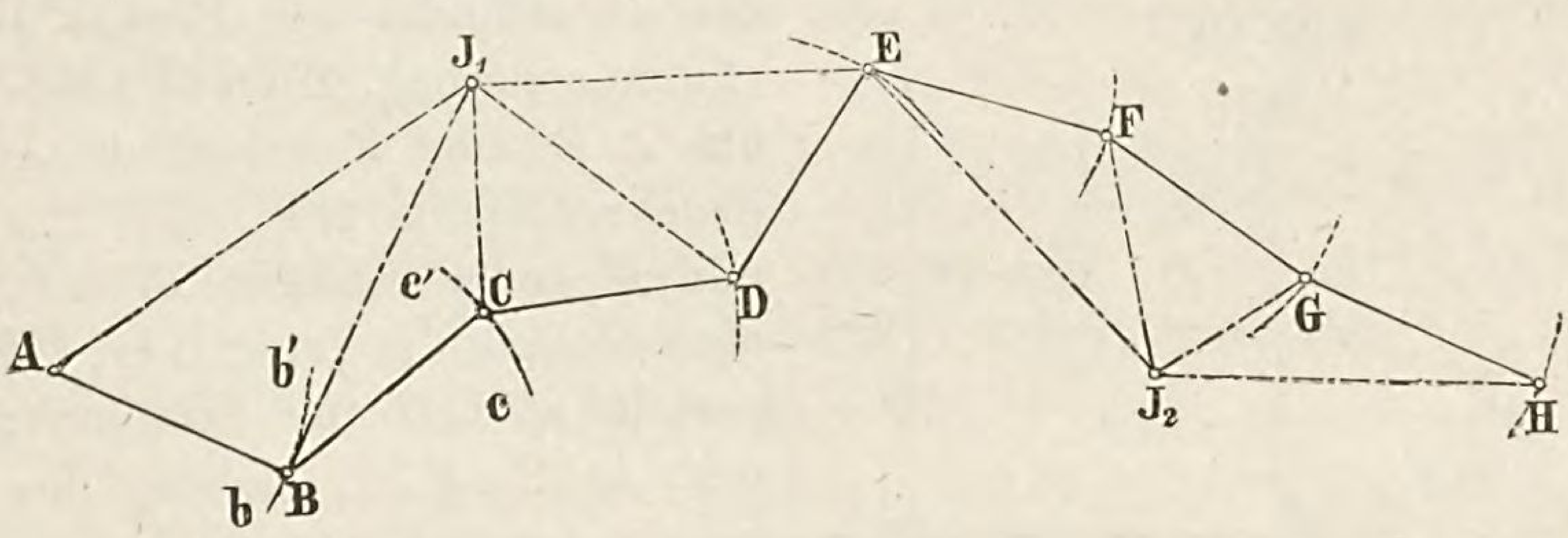
Um nun den Pfahlkopf E in die richtige Höhe zu bringen, stelle man das zwischen A und D befindliche Nivellirinstrument auf die über A stehende Latte ein, lese die Höhe $A\,a = z$ ab und lasse nun den Pfahl D E so lange tiefer schlagen oder oben absägen, bis die Visirhöhe $E\,e = z - \eta$ wird. Ebenso verfährt man bei der Bestimmung des Punkts F, wobei entweder die aus der Gleichung $F\,G = \eta' = \lambda' \operatorname{tg}\alpha$ folgende Höhe η' von A aus, oder die Höhe $F\,H = \eta' - \eta$ von E aus aufgetragen wird. Liegt der Punkt F, wie in Fig. 194, unter der Terrainfläche, so muss man diese bis auf eine entsprechende Tiefe ausgraben lassen um den Pfahl in der richtigen Höhe einsetzen zu können. Lägen einzelne Punkte der abzusteckenden Geraden wie E und J, sehr hoch über dem Terrain, so dass sich die Latte

nicht gut auf die Pfahlköpfe stellen liesse, so würde man neben die Höhenpfähle E D, J L Grundpfähle schlagen und diese in Bezug auf A oder B einnivelliren um danach die Abstände der Punkte E und J vom Terrain zu berechnen und von den Grundpfählen aus abzumessen.

§. 189. Aufgabe. An einem Bergabhange eine Linie von bestimmter Neigung abzustecken.

1. Wir wollen den unteren Endpunkt und die relative Neigung p der Linie als gegeben ansehen und annehmen dass die horizontale Entfernung von einem Punkte zum anderen eine Kettenlänge l betrage. Demnach ist die absolute Steigung von einem Punkt zum nächst höheren n = l p. Ist A (Fig. 195) der gegebene unterste Punkt, so stelle man das Nivellirinstrument (J_1) etwa 50 bis 60 Meter von A entfernt so auf dass man einige der abzusteckenden Punkte (A, B, C, D, E) gut übersehen kann. Stellt man die Absehlinie auf die Latte in A ein und liest die Höhe N ab, so muss die Ablesung auf dem um l entfernten Punkte B offenbar N — l p werden. Um diesen Punkt zu finden, lasse man den einen Kettenstab in A festhalten und mit dem anderen bei angespannter Kette einen Kreisbogen b b′ beschreiben.

Fig. 195.



Auf diesem Bogen wird die Nivellirlatte einige Male versuchsweise aufgestellt, bis man einen Punkt gefunden hat, auf dem bei horizontaler Absehlinie die Ablesung = N — l p ist. Nun setze man den einen Kettenstab in den mit einem Pfahle bezeichneten Punkt B ein und führe den anderen Stab bei angespannter Kette in dem von B aus beschriebenen Kreisbogen c c′ so lange herum, bis die Latte auf einen Terrainpunkt C kommt der die Ablesung N — 2 l p liefert. In gleicher Weise findet man D und E. Muss hierauf die Station gewechselt werden, so betrachtet man den letzten Punkt E als Anfangspunkt der Operation und wiederholt dieselbe ein oder mehrere Male in der eben beschriebenen Weise, bis man die Höhe erreicht hat auf welche die geneigte Linie abgesteckt werden soll. Zur Aufnahme ihrer horizontalen Projection dient eine der im Abschnitte II beschriebenen Methoden.

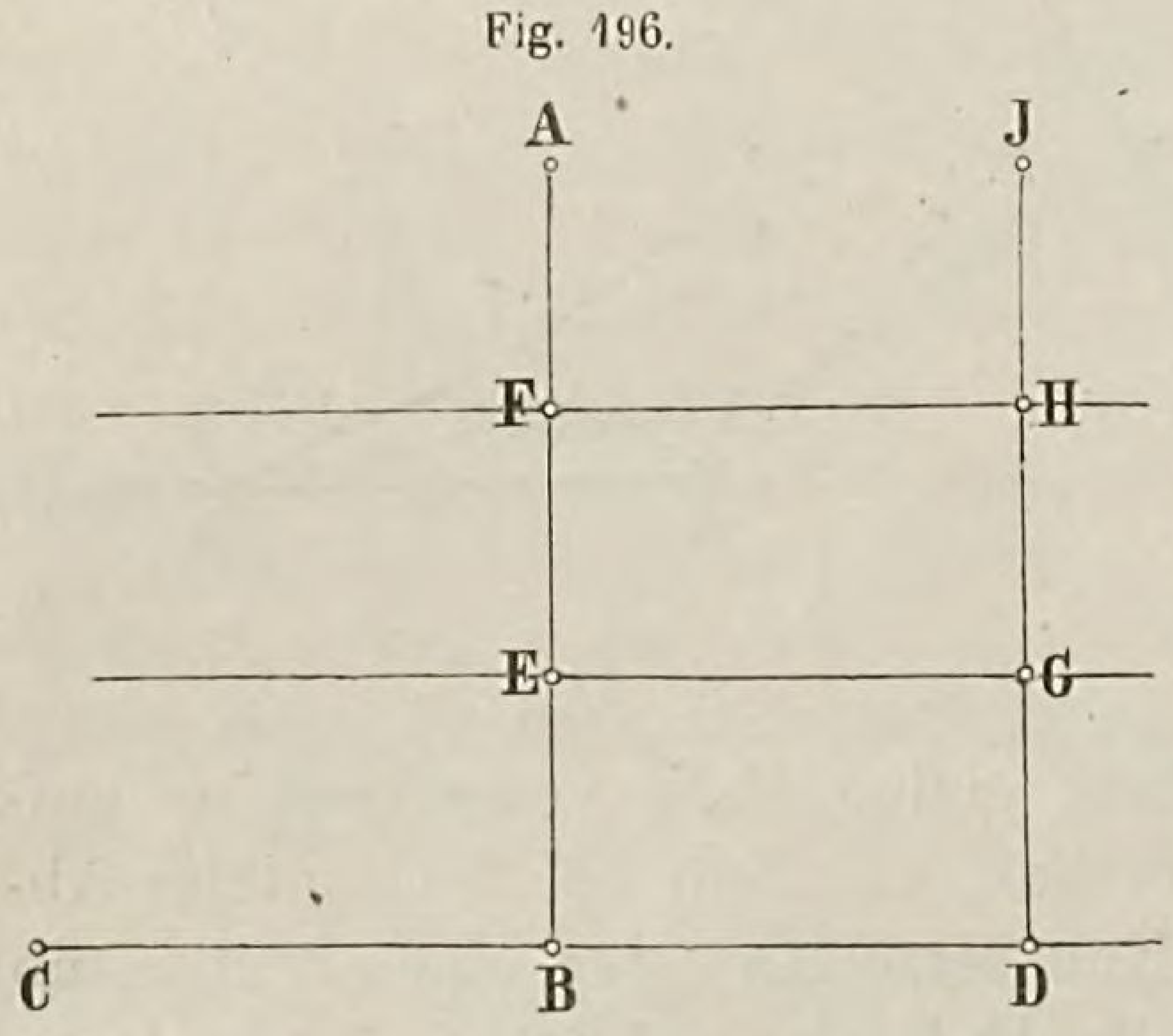
2. Sind die beiden Endpunkte der geneigten Linie gegeben und heisst der untere Endpunkt A, der obere Z, so stecke man von A aus eine Linie mit der Steigung p und von Z aus eine Linie mit dem Gefälle p nach

Anleitung der vorigen Nummer ab. Beide Linien werden sich in einem Punkte M schneiden, und es besteht nun die gesuchte Linie aus den Zweigen A M und M Z. Wäre der Bergabhang durch Horizontalcurven dargestellt. deren Ebenen um gleiche Höhen von einander abstehen, so könnte man die zwischen A und Z gelegene geneigte Linie auf dem Plane nach ihrer Horizontalprojection bestimmen und diese Projection auf das Terrain übertragen; diese Bestimmung würde aber offenbar mehr Mühe verursachen als das unmittelbare Abstecken der geneigten Linie, wesshalb letzteres vorzuziehen ist, so lange es sich bloss um eine einzige geneigte Linie von mässiger Ausdehnung handelt. Anders gestaltet sich jedoch die Sache, wenn die Linie bestimmt werden soll, nach welcher eine Strasse oder Eisenbahn am vortheilhaftesten zu führen ist; in diesem Falle leisten die Horizontalcurven wesentliche Dienste.

§. 190. Aufgabe. Eine Ebene abzustecken welche mit dem Horizont einen gegebenen Winkel bildet.

Stellt in Fig. 196 die Linie A B die Richtung vor nach welcher die abzusteckende Ebene mit dem Horizont einen Winkel α bilden soll, so errichte man zunächst auf A B die Senkrechte C D und stecke in dieser Richtung nach §. 187 eine horizontale Gerade ab deren Höhenlage durch den Grundpfahl des Punkts B bestimmt sein mag. Hierauf messe man auf A B eine hinreichende Anzahl gleicher Theile B E, E F ab und stecke auf bekannte Weise durch diese Punkte die Linie E G, F H ... parallel zu C D ab. Weiter errichte man in E, F ... Höhenpfähle und bringe deren Köpfe nach §. 188 in eine Gerade welche die Neigung α gegen den Horizont hat. Eben so verfahre man mit den Punkten G, H ... in der Geraden D J welche mit A B parallel läuft und folglich auf C D senkrecht steht. Durch Erweiterung der Horizontallinien E G, F H ..., oder durch Verlängerung der geneigten Geraden B A, D J ..., kann man die abzusteckende Ebene so weit als man will ausdehnen. Die Richtigkeit des Verfahrens wird sich der Leser sofort selbst klar machen, wenn er mit den einfachsten Sätzen der Stereometrie vertraut ist.

Fig. 196.

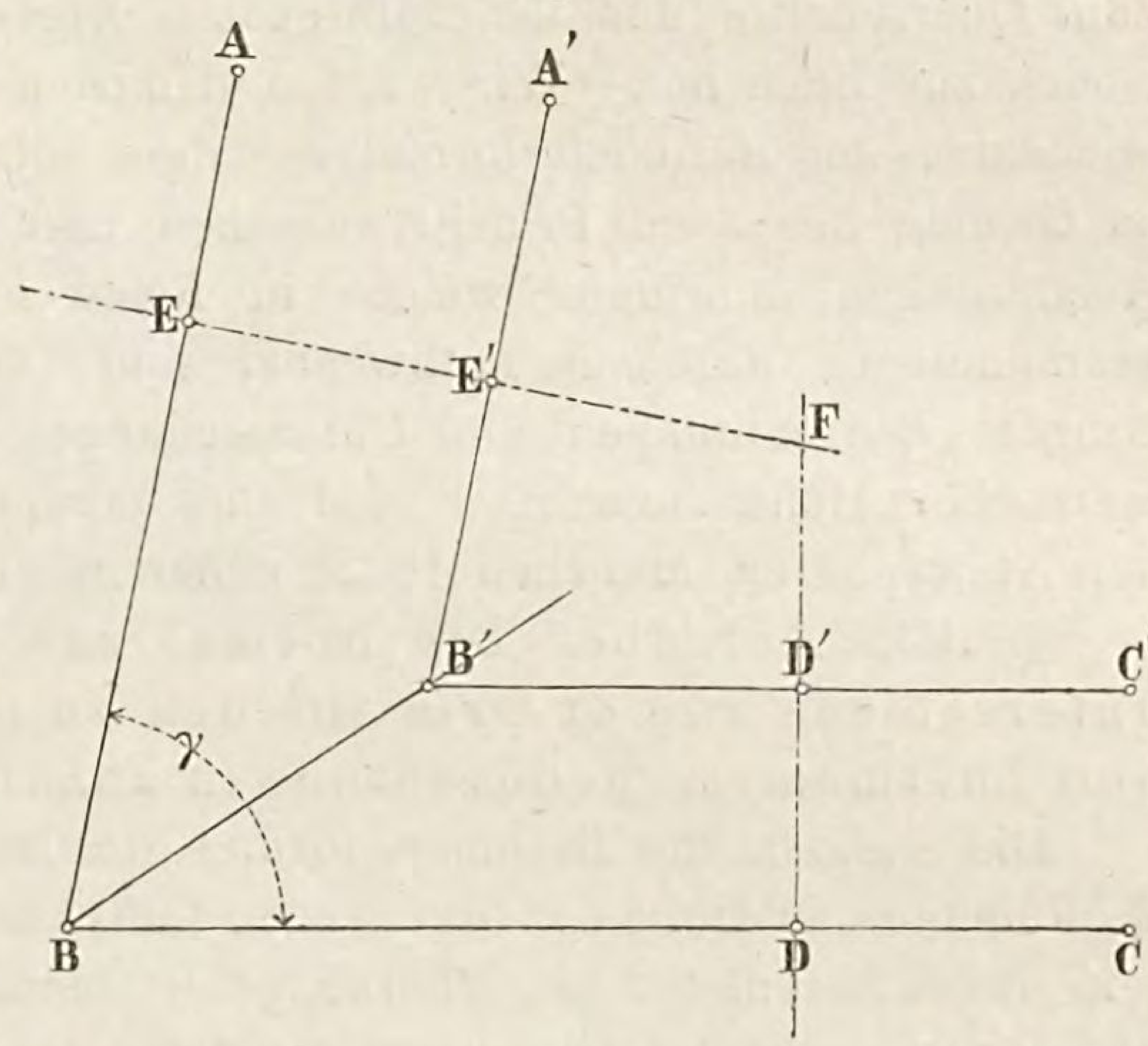


§. 191. Aufgabe. Die Durchschnittslinie zweier gegen den Horizont geneigter Ebenen abzustecken.

Die Winkel welche die beiden gegebenen Ebenen mit dem Horizont bilden, seien α und β; der Winkel den die Schnitte dieser Ebenen mit einer Horizontalebene einschliessen, heisse γ, und es sei die Lage dieses Winkels für eine bestimmte Horizontalebene durch die Schenkel A B, B C

(Fig. 197) gegeben. Vor allem wird man senkrecht auf die gegebenen Geraden A B, B C die Linien D F, E F abstecken und aus den Neigungswinkeln α und β berechnen, wie weit die Schnitte A′ B′, B′ C′ einer zweiten Horizontalebene A′ B′ C′ die um eine beliebige Grösse h über der ersten A B C liegt, von A B, B C nach den Richtungen E E′, D D′ abstehen. Es ist aber, wenn die Ebene A B B′ A′ die Neigung α und C B B′ C′ die Neigung β hat: $EE' = h : \operatorname{tg} \alpha$ und $DD' = h : \operatorname{tg} \beta$, und es lassen sich folglich die Punkte E′, D′ leicht abstecken. Zieht man durch E′, D′ zu A B, B C die Parallelen A′ E′, C′ D′ und bestimmt ihren Schnittpunkt B′, so stellt B B′ die Horizontalprojection der gesuchten Kante vor. Die Höhe des Punkts B′ über B ist selbstverständlich = h, und man braucht desshalb nur in B′ einen Pfahl einzusetzen dessen Kopf um die Grösse h über B liegt, um die Durchschnittslinie selbst zu erhalten. Es bedarf wohl kaum der Erwähnung dass man die Grösse h ziemlich gross zu nehmen hat, um die Durchschnittslinie möglichst genau zu finden.

Fig. 197.



E. Barometrisches Höhenmessen.

§. 192. Es ist die Aufgabe dieses Abschnitts der Lehre von den Messungen die Beziehungen zwischen dem Höhenunterschiede zweier Orte und den an ihnen beobachteten Barometer- und Thermometerständen durch eine Gleichung (die Barometerformel) auszudrücken worin alle auf das Endresultat einwirkenden Umstände berücksichtigt sind.

Am ausführlichsten wurde diese Formel zuerst von Laplace und später von Poisson, Gauss und Bessel entwickelt. Im Jahre 1854 glaubte G. S. Ohm in seinen „Grundzügen der Physik" darauf aufmerksam machen zu müssen dass die auf den Barometer drückende lothrechte Luftsäule nicht cylindrisch angenommen werden dürfe, wie bis dahin stets geschehen, sondern dafür ein Luftkegel zu setzen sei, dessen Seiten die Richtung der Schwere haben und dessen Spitze somit im Mittelpunkte der Erde liegt. Auf diese gewiss richtige Annahme gestützt, entwickelte Ohm eine einfachere Barometerformel, verfiel jedoch dabei in den Fehler den auf die kegelförmige Luftsäule von ihrer Umgebung ausgeübten Seitendruck nicht

zu berücksichtigen. Dieser Druck hebt aber einen Theil des lothrechten Drucks eines isolirten Luftkegels auf und bewirkt dass die von der Atmosphäre umschlossene kegelförmige Luftsäule auf ihre Grundfläche mit dem Gewichte eines Luftcylinders von gleicher Basis und Höhe drückt, gleichwie in einem kegelförmigen Wassereimer der Druck auf den horizontalen Boden gleich ist dem Gewichte einer Wassersäule welche die Bodenfläche zum Querschnitte und den lothrechten Abstand des Wasserspiegels vom Boden zur Höhe hat. Wir werden demnach bei der nachfolgenden Entwickelung der Barometerformel von dem allen bisherigen Entwickelungen zu Grunde liegenden Princip ausgehen und an diesen Formeln nur jene Aenderungen anbringen welche in Folge neuerer Versuche und Massbestimmungen durchaus nothwendig sind, und worüber wir uns in der Schrift „Beobachtungen und Untersuchungen über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen und die räumlichen Temperaturänderungen der Atmosphäre“, München 1862, näher ausgesprochen haben.

§. 193. Aufgabe. Die Formel zur Berechnung des Höhenunterschieds zweier Orte aus den an ihnen angestellten Baro- und Thermometerbeobachtungen abzuleiten.

Die Aufgabe die Barometerformel abzuleiten verlangt: den Luftdruck als Function der Höhe der drückenden Luftsäule darzustellen, für den Druck sein durch Barometer und Thermometer bestimmbares Mass zu setzen, und aus der so gebildeten Gleichung die Höhe des Beobachtungsorts zu suchen. Zu dem Ende bezeichnen wir mit

r den Halbmesser der Erdkugel bis an die Meeresfläche,
z die Höhe irgend eines Punkts der Atmosphäre über dem Meere,
p den Druck der Luft an diesem Punkte auf die Flächeneinheit,
g die Intensität der Schwere in der Höhe z über dem Meere,
ϱ die Dichtigkeit der durchaus trockenen Luft an dieser Stelle,
τ die mittlere Temperatur der Luftsäule in Centigraden, und mit
α den Ausdehnungscoefficienten der Luft für einen solchen Grad.

In der analytischen Mechanik wird gezeigt dass zwischen den drei auf eine flüssige Materie wirkenden und nach den rechtwinkligen Axen der x, y, z zerlegten Kräften X, Y, Z, dem Drucke p und der Dichtigkeit ϱ folgende Differentialgleichung stattfinden muss:

$$dp = \varrho\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

In dem vorliegenden Falle legt man am besten die Axe der z in die Richtung der Schwere, also die der x und y wagrecht, wodurch die horizontalen Seitenkräfte X und Y null werden und Z = — g wird. Es folgt also aus der allgemeinen Gleichung des Gleichgewichts der Flüssigkeiten

$$dp = -\varrho\,g\,dz \qquad (371)$$

während aus der Physik der Gase eine Beziehung zwischen p und ϱ, nämlich

$$p = k\,\varrho\,(1 + \alpha\,\tau) \qquad (372)$$

bekannt ist, worin k einen constanten Coefficienten bezeichnet. Durch Division beider Gleichungen wird ϱ eliminirt und es entsteht

$$\frac{d\,p}{p} = -\frac{g\,d\,z}{k\,(1 + \alpha\,\tau)} \tag{373}$$

Ist g_0 die Schwere an der Meeresfläche, so wird dieselbe in der Höhe z über dem Meere aus physikalischen Gründen:

$$g = \frac{g_0\,r^2}{(r + z)^2}$$

und hiemit ergibt sich die Differentialgleichung des Luftdrucks:

$$\frac{d\,p}{p} = -\frac{g_0\,r^2}{k\,(1 + \alpha\,\tau)} \cdot \frac{d\,z}{(r + z)^2}$$

Die Temperatur τ der hier betrachteten Luftsäule nimmt mit der Höhe ab, und es ist nach unseren Untersuchungen höchst wahrscheinlich dass diese Abnahme dem Höhenunterschiede proportional ist, so dass also die Temperatur τ mit hinreichender Genauigkeit durch das Mittel der an den beiden Stationen beobachteten Lufttemperaturen T und t dargestellt werden kann. Demnach ist für jeden bestimmten Fall τ constant und der natürliche Logarithmus von p oder

$$\text{Log}\,p = \frac{g_0\,r^2}{k\,(1 + \alpha\,\tau)\,(r + z)} + C$$

Für einen Punkt der um die Höhe z′ über dem Meeresspiegel liegt, sei der Luftdruck p′, so gilt für diesen Punkt und Druck die Gleichung:

$$\text{Log}\,p' = \frac{g_0\,r^2}{k\,(1 + \alpha\,\tau)\,(r + z')} + C$$

und es ergibt sich durch Abziehen der letzten Gleichungen von einander:

$$\text{Log}\,\frac{p}{p'} = \frac{g_0\,r^2\,(z' - z)}{k\,(1 + \alpha\,\tau)\,(r + z)\,(r + z')}$$

Setzt man $z' - z = h$ und berücksichtigt erstens dass genau genug

$$(r + z)\,(r + z') = r^2\left(1 + \frac{2\,z + h}{r}\right)$$

ist, und zweitens dass, wenn m den Modul 0,4342945 des gemeinen oder briggischen Logarithmensystems (log) bezeichnet, $m\,\text{Log}\,p = \log p$ ist, so folgt aus der vorletzten Gleichung

$$h = \frac{k}{m\,g_0}\,(1 + \alpha\,\tau)\left(1 + \frac{2\,z + h}{r}\right) \cdot \log\frac{p}{p'} \tag{374}$$

Für die Drückungen p, p′ lassen sich die an den Punkten z, z′ beobachteten Barometerstände B, b einführen, wenn man sie mit Hilfe der daselbst beobachteten Quecksilbertemperaturen T′, t′ auf eine und dieselbe Temperatur (am einfachsten auf 0^0) reducirt und hiebei die Aenderung der Schwere mit der Höhe berücksichtigt. Bezeichnet nämlich

D die Dichte des Quecksilbers bei 0^0 an der Meeresfläche,
γ den Ausdehnungscoefficienten des Quecksilbers für 1^0 C,
B_0 den auf 0^0 reducirten Barometerstand der unteren Station,
b_0 den reducirten Barometerstand der oberen Station, und
g′ den Werth der Schwere an dieser Station,

so ist aus physikalischen Gründen (da g D = dem absoluten Gewicht):

$$p = g\,D\,B_0,\ p' = g'\,D\,b_0,\ g : g' = (r + z')^2 : (r + z)^2$$

$$B = B_0\,(1 + \gamma\,T'),\ b = b_0\,(1 + \gamma\,t')$$

und folglich, wenn man in dem Verhältnisse g : g′ eine schon einmal angewendete erlaubte Abkürzung eintreten lässt:

$$\frac{p}{p'} = \frac{g\,B_0}{g'\,b_0} = \left(1 + \frac{2\,h}{r}\right) \cdot \frac{1 + \gamma\,t'}{1 + \gamma\,T'} \cdot \frac{B}{b} \qquad (375)$$

Da γ nur $\frac{1}{5550}$ ist und die Werthe von T′ und t′ wohl selten 25⁰ überschreiten, so darf man $(\gamma\,T')^2$ gegen 1 vernachlässigen, und es ist daher

$$\frac{1 + \gamma\,t'}{1 + \gamma\,T'} = (1 + \gamma\,t')\,(1 - \gamma\,T') = 1 - (T' - t')\,\gamma \qquad (376)$$

demnach auch, mit Rücksicht auf die Kleinheit des Werths 2 h gegen r,

$$\log\frac{p}{p'} = \log\frac{B}{b} + \log\left(1 - (T' - t')\,\gamma\right) + 2\,m\,\frac{h}{r} \qquad (377)$$

Was den Coefficienten k betrifft welcher in dem Ausdrucke für h (Nr 374) noch enthalten ist, so stellt derselbe nach Gleichung (372) das Verhältniss des Luftdrucks p zur Dichtigkeit ϱ dieser Luft bei der Temperatur τ derselben vor. Dieses Verhältniss haben Biot und Arago im Jahre 1806 bestimmt, und es lag der daraus hervorgegangene Werth von k allen bisherigen Barometerformeln, namentlich denen von Laplace, Poisson, Gauss und Bessel zu Grunde. Die neueren Bestimmungen von Régnault welche mit Recht für genauer gehalten werden, liefern einen etwas grösseren Werth für k, wesshalb wir hier diesen anwenden. Es ist nämlich für $\tau = 0^0$ und unter 45⁰ Breite bei 0,76 m Barometerstand:

$$k = \frac{p}{\varrho} = \frac{0{,}76\,.\,13{,}596}{0{,}00129273} = 7993{,}13\,\mathrm{m}$$

Da nun die Schwere g_0 unter der Breite ψ zu jener unter der Breite 45⁰ in dem Verhältniss von $(1 - 0{,}0026\cos 2\,\psi) : 1$ steht, also

$$\frac{1}{g_0} = \frac{1}{1 - 0{,}0026\cos 2\,\psi} = 1 + 0{,}0026\cos 2\,\psi = 1 + \beta\cos 2\,\psi$$

ist, so wird nunmehr der erste Factor der Formel Nr 374 in Meter:

$$\frac{k}{m\,g_0} = \frac{7993{,}13}{0{,}4342945}\,(1 + 0{,}0026\cos 2\,\psi) = 18404{,}9\,(1 + 0{,}0026\cos 2\,\psi)$$

und folglich durch Einsetzung dieses und des Werths Nr 377 in Nr 374

$$h = 18405\left(1 + \tfrac{1}{2}\,\alpha\,(T + t)\right)\left(1 + \beta\cos 2\,\psi\right)\left(1 + q\right)$$

$$\left[\log\frac{B}{b} - m\,\gamma\,(T' - t') + 2\,m\,\frac{h}{r}\right] \qquad (378)$$

worin $\alpha = 0{,}003665$, $\beta = 0{,}0026$, $\gamma = 0{,}0001802$, $2\,m = 0{,}86859$, $q = (2\,z + h) : r$ und $m\,\gamma\,(T' - t') = \log\left(1 - (T' - t')\right)$ ist.

Dieser Ausdruck für h ist noch wegen des Einflusses der Luftfeuchtigkeit zu verbessern. Laplace, Poisson, Gauss u. A. bringen dieselbe nach einem mittleren Feuchtigkeitszustande der Luft in Rechnung, indem sie so-

wohl die barometrische Constante k als den Coefficienten α etwas grösser nehmen als trockene Luft sie fordert, während Bessel erst das Maximum des Wasserdampfs, das die Luft vermöge ihrer Temperatur aufnehmen kann, nach einem von Laplace gegebenen Ausdrucke berechnet und von dessen Druck denjenigen Theil in der Formel berücksichtigt welcher den Angaben der auf den beiden Stationen beobachteten Psychrometer entspricht. Dieses Verfahren hat eine sehr verwickelte Rechnung zur Folge welche kaum im richtigen Verhältniss zu der dadurch erzielten Genauigkeit steht und desshalb, wie wir glauben, durch die nachstehende einfachere Entwickelung ersetzt werden darf. Bezeichnet nämlich

p' den Druck der den Raum 1 ausfüllenden atmosphärischen Luft,
p'' den Druck des darin befindlichen Wasserdampfs,
v' den in dem Raume 1 des Gemisches enthaltenen Raum trockener Luft,
v'' den in demselben Raume 1 sich befindenden Raum Wasserdampf,
d' die Dichtigkeit des Gemisches von trockener Luft und Wasserdampf,
d'' die Dichtigkeit des Wasserdampfs, beide in Bezug auf trockene Luft:

so muss nach dem Dalton'schen Gesetze und nach dem Gesetze von Mariotte

$$d' = v' + v''\,d''; \qquad v' = \frac{p'}{p' + p''}; \qquad v'' = \frac{p''}{p' + p''}$$

und daher auch, wenn man diese Werthe einführt und $p' + p'' = p$ setzt,

$$d' = 1 - (1 - d'')\,\frac{p''}{p}$$

sein. Da nun $d'' = 0{,}6235$, also sehr nahe $= \frac{5}{8}$, so wird das Verhältniss der Dichtigkeiten der trockenen und feuchten Luft

$$\frac{1}{d'} = 1 : \left(1 - \frac{3}{8} \cdot \frac{p''}{p}\right) = 1 + \frac{3}{8}\,\frac{p''}{p}$$

womit der aus den Barometerständen abgeleitete Werth von h multiplicirt werden muss, da der Höhenunterschied der beiden Stationen in demselben Masse zunimmt, als die feuchte Luft leichter ist als die trockene. Nennt man nun σ', σ'' und b', b'' die an den beiden Stationen beobachteten Dampfspannungen und Barometerstände, und setzt

$$\varphi = \frac{p''}{p} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma'}{b'} + \frac{\sigma''}{b''}\right)$$

so geht der Ausdruck Nr 378 in den folgenden über:

$$h = 18405\left(1 + \tfrac{1}{2}\,\alpha\,(T + t)\right)\left(1 + \beta\cos 2\psi\right)\left(1 + q\right)\left(1 + \tfrac{3}{8}\,\varphi\right)$$
$$\left[\log\frac{B}{b} - \frac{4}{5} \cdot \frac{T' - t'}{10000} + 2m\,\frac{h}{r}\right] \qquad (379)$$

wenn man $\alpha = 0{,}00367$ und die Luft- und Quecksilbertemperaturen in Centigraden einsetzt; und es wird für Temperaturen nach Réaumur:

$$h = 18405\left(1 + \tfrac{1}{2}\,\alpha\,(T + t)\right)\left(1 + \beta\cos 2\psi\right)\left(1 + q\right)\left(1 + \tfrac{3}{8}\,\varphi\right)$$
$$\left[\log\frac{B}{b} - \frac{T' - t'}{10000} + 2m\,\frac{h}{r}\right] \qquad (380)$$

wobei der Ausdehnungscoefficient der Luft $\alpha = 0{,}00458$ für 1^0 R ist. Diese vollständigen Barometerformeln unterscheiden sich von den bisherigen erstens durch die Berichtigung der Constanten, zweitens durch Einführung des Feuchtigkeitsfactors und drittens durch die Vermeidung jener willkürlichen Annahmen über die Constanten welche ausser Bessel alle früheren Autoren über barometrische Höhenmessungen in der Absicht gemacht haben eine grössere Uebereinstimmung dieser und der trigonometrischen Höhenmessungen zu bewirken.

Vor fünfzehn Jahren hat Herr R. Radau in Paris in die vorstehende Formel einige Abkürzungen eingeführt, indem er die beiden Factoren der Temperatur und der Feuchtigkeit zu einem einzigen vereinigte, die Reduction der beobachteten Barometerstände auf Null in sinnreicher Weise vereinfachte, $h\,(2\,z + h) = z'^2 - z^2$, $z' = 18382\,(\log 762 - \log b)$, $z = 18382\,(\log 762 - \log B)$ setzte. Es würde indessen hier zu weit führen diese Abkürzungen näher zu erläutern; man findet sie begründet in der Abhandlung „Sur la formule barometrique" im Moniteur scientifique, Quesneville, 176e livraison du 15 avril 1864.

Eine mit der vorstehenden Formel (379) ziemlich übereinstimmende hat Professor Rühlmann in seinem Werke „Die barometrischen Höhenmessungen etc." Leipzig 1870, Nr 41 auf Seite 44 aufgestellt, und er hat danach 6 hypsometrische Tafeln berechnet welche von den unserigen aus dem Jahre 1862 stammenden ebenfalls nur wenig abweichen. Die Unterschiede liegen in zwei Annahmen des Professors Rühlmann, von denen die eine zwar richtig aber von keiner praktischen Bedeutung, die andere jedoch theoretisch unzulässig ist. Herr Rühlmann berücksichtigt nämlich bei der Berechnung der barometrischen Constanten K den ungefähr 0,04 Procent in Volumtheilen betragenden Kohlensäuregehalt der Atmosphäre und gelangt dadurch zu einem Werthe für $K = 18400{,}2$ Meter, während wir ohne diese Rücksichtnahme $K = 18404{,}9$ Meter fanden. Zugestanden nun dass die Constante 18400 den Versuchen von Régnault besser entspricht als 18405 so ist doch das Verhältniss beider so wenig von 1 verschieden $(1 \pm 0{,}0003)$ dass man in der Praxis von diesem Unterschiede absehen darf. Dagegen ist es ungerechtfertigt, wenn Prof. Rühlmann das letzte Glied der Barometerformel welches den Einfluss der Schwere auf die Barometerstände beider Stationen ausdrückt, nur zu $\frac{5}{8}$ unseres Werthes $2\,m\,h : r$ annimmt, weil er glaubt auf diese Weise die Anziehung der Gebirgsschichten zwischen diesen Stationen besser zu berücksichtigen als es schon durch den auch bei ihm vorkommenden Factor $(1 + q)$ der Formeln (379) und (380) geschieht. Da das Glied $2\,m\,h : r$ auf etwa $1 : 400$ anzuschlagen ist, Rühlmann dafür aber nur $1 : 640$ setzt, so werden die nach seiner Formel berechneten Höhen in dem Verhältnisse von $1{,}00157 : 1{,}00250$ d. i. um 0,09 Procent kleiner als nach unserer Formel; und da Rühlmann die Höhe h in dem einen Falle um 0,03 und in dem anderen um 0,09 Procent zu klein erhält, so werden die nach ihm bestimmten Höhen über-

haupt um 0,12 Procent zu klein gefunden, was auch dem Verhältnisse der den Rühlmann'schen und Bauernfeind'schen Tafeln zu Grunde liegenden (die Schwerecorrectionen der Barometerstände in sich schliessenden) Coefficienten 18429 und 18451 entspricht. Zwar liegt auch dieser Unterschied noch innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der barometrischen Höhenmessungen; da er aber dem grösseren Theile nach auf einer falschen Annahme beruht, so muss er dieser Annahme wegen beanstandet werden, was auch von Professor Jordan (Seite 495 des ersten Bands seines Handbuchs) geschehen ist. Wir ziehen desshalb unsere Formeln und Tafeln vor.

§. 194. Aufgabe. Die Barometerformel für eine bequeme Berechnung der Höhen mittels Tafeln umzugestalten.

Zur schnellen Berechnung des Höhenunterschieds zweier Stationen, an denen gleichzeitige Baro- und Thermometerbeobachtungen gemacht wurden, bedient man sich gewöhnlich der drei hypsometrischen Tafeln von Gauss welche allgemein bekannt sind. Da aber diese Tafeln auf ungenauen Werthen der Constanten k und α, sowie auf der Annahme eines mittleren Feuchtigkeitszustands der Atmosphäre und einer mittleren Meereshöhe der unteren Station beruhen, so konnten dieselben seit Régnaults Dichtigkeitsbestimmungen nicht mehr genügen und mussten daher durch neue ersetzt werden. Wir haben diese Tafeln im Jahre 1862 umgearbeitet und durch drei weitere vermehrt, aus denen der $\log\left(1+\frac{3}{8}\varphi\right)$ entnommen werden kann; und dieses Unternehmen setzte folgende Umwandlung der Formel Nr 380 voraus.

Man kann nämlich zunächst die Gl 380 mit 0,86859 multipliciren und mit dem Werthe von $r = 6366740$ m dividiren, wodurch man mit Hilfe einer erlaubten Abkürzung der rechten Seite der Gleichung erhält:

$$0{,}86859 \cdot \frac{h}{r} = \frac{0{,}86859}{6366740} \cdot 18404{,}9 \left(1 + 0{,}00229\,(T+t)\right)\left[\log\frac{B}{b} - \frac{T'-t'}{10000}\right]$$

Hiermit wird der letzte Factor der Formel Nr 380, nämlich

$$\left[\log\frac{B}{b} - \frac{T'-t'}{10000} + 0{,}86859\,\frac{h}{r}\right] =$$

$$= \left[\log\frac{B}{b} - \frac{T'-t'}{10000}\right]\left(1{,}0025 + 0{,}0000057\,(T+t)\right)$$

und folglich (für Meter und Réaumur'sche Temperaturgrade):

$$\log h = \log 18404{,}9 + \log\left[1{,}0025 + 0{,}0000057\,(T+t)\right] +$$

$$+ \log\left[1 + 0{,}00229\,(T+t)\right] + \log\left(1 + 0{,}0026 \cos 2\,\psi\right) +$$

$$+ \log\left[1 + \frac{2z+h}{r}\right] + \log\left(1 + \tfrac{3}{8}\,\varphi\right) + \log\left[\log\frac{B}{b} - \frac{T'-t'}{10000}\right] \quad (381)$$

Die ersten drei Glieder dieses Ausdrucks für log h sind nach Gauss's Vorgange in unserer ersten hypsometrischen Tafel enthalten deren Eingang die Summe $T+t$ der Lufttemperaturen bildet. Die mit A und A' bezeichneten Verticalspalten geben die Summe der drei ersten Logarithmen

der rechten Seite für Meter und Pariser Fuss. Der vierte Logarithmus, nämlich $\log (1 + 0{,}0026 \cos 2\,\psi) = \log G$ findet sich in der zweiten Tafel welche mit der von Bessel übereinstimmt. Das Argument ist hier die geographische Breite ψ der Stationen. Die dritte Tafel gibt das fünfte Glied der Formel (381). Die vierte Tafel enthält alle den Temperaturen von -16^0 bis $+26^0$ R entsprechenden Spannungen des Wasserdampfs und dient also dazu, für jede am Psychrometer beobachtete Nasskälte t_1 den zugehörigen Dampfdruck σ' sowohl in Pariser Linien als in Millimetern zu finden. In der fünften Tafel sind die Werthe des Glieds $\mu\,(t - t_1)\,b$ der August'schen Psychrometerformel $\sigma = \sigma' - \mu\,(t - t_1)\,b$ enthalten, in welcher σ den Dunstdruck der feuchten Luft, t deren Temperatur und b den Barometerstand bezeichnet. Man kann aus dieser Tafel den Werth von $\mu\,(t - t_1)\,b$ und mit Hilfe der vorstehenden Formel und dem aus der vorhergehenden Tafel genommenen Werthe von σ' den von σ sowohl in Pariser Linien als in Millimetern finden. Die sechste Tafel endlich enthält die Werthe von $\log (1 + \frac{3}{8}\,\varphi)$, und man findet diese, wenn man mit dem Mittelwerthe des Dunstdrucks an den beiden Stationen in die oberste Horizontalreihe und mit dem Mittel der Barometerstände in die erste Verticalreihe eingeht.

§. 195. Aufgabe. Mit Hilfe der neuen hypsometrischen Tafeln den Höhenunterschied zweier Stationen zu berechnen, für welche folgende Grössen gegeben sind:

Höhe der unteren Station über dem Meere oder $z = 815{,}36$ m;
Geographische Breite der Mitte beider Stationen oder $\psi = 47^0\,40'$;
Barometerstände: $B = 307{,}43'''$, $b = 270{,}10'''$;
Quecksilbertemperaturen: $T' = 12{,}5^0$ R, $t' = 5{,}7^0$ R;
Lufttemperaturen: $T = 10{,}9^0$ R, $t = 4{,}9^0$ R;
Nasskälten der Psychrometer: $T_1 = 9{,}6^0$ R, $t_1 = 4{,}8^0$ R.

Man berechnet zuerst das letzte Glied des Ausdrucks Nr 381, nämlich

$$\log \left[\log \frac{B}{b} - \frac{T' - t'}{10000}\right] = \log u$$

fügt hierzu die Summe A der drei ersten Glieder welche die erste Tafel mit dem Eingange T + t liefert; dazu kommt das vierte Glied aus Tafel 2 mit dem Argument ψ; hierzu das fünfte aus Tafel 3, und endlich das sechste welches die Tafeln 4 bis 6 ergeben. Die Summe aller dieser Glieder ist log h, zu dem also nur noch die Zahl h aus den Logarithmentafeln zu suchen ist. Die Rechnung stellt sich folgendermassen:

$$\begin{array}{rr}
\log B = \log 307{,}43''' = 2{,}48775 & T' = 12{,}5^0 \\
\log b = \log 270{,}10''' = 2{,}43152 & t' = 5{,}7^0 \\
\hline
0{,}05623 & 6{,}8^0 \\
-\ 68 & \\
\hline
u = 0{,}05555 &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rll}
\log u = & 8{,}74468 - 10 & \\
A = & 4{,}28148 & \ldots \text{(1 Taf. Arg. } T + t = 15^0{,}8) \\
\hline
 & 3{,}02616 & \\
 & -\ 11 & \ldots \text{(2 Taf. Arg. } \psi = 47^0\ 40') \\
\hline
\log h_1 = & 3{,}02605 & \\
 & +\ 18 & \ldots \text{(3 Taf. Arg. } h_1 = 3 \text{ und } z = 800\,\text{m}) \\
 & +\ 204 & \ldots \text{(4 5 6 Taf. mit den Arg. } T_1,\ t_1,\ B,\ b \\
 & & \quad \text{und } 3{,}64''' \text{ und } 290''') \\
\hline
\end{array}
$$

$$\log h = 3{,}02827;\ h = 1067{,}26\,\text{m};\ h + z = 1882{,}62\,\text{m}$$

(Die Berechnung des sechsten Glieds oder des $\log(1 + \frac{3}{8}\varphi)$ geschah folgendermassen: Man suchte den mittleren Dunstdruck für beide Stationen. Nach der vierten Tafel ist σ' für die untere Station $= 4{,}620'''$ und für die obere $= 3{,}076'''$; nach der fünften Tafel $\mu(t - t_1)\,b$ für die untere Station $= 0{,}390'''$ und für die obere $= 0{,}027'''$, daher σ für unten $= 4{,}620 - 0{,}390 = 4{,}230'''$ und für oben $= 3{,}076 - 0{,}027 = 3{,}049'''$, folglich der gesuchte Dunstdruck $= \frac{1}{2}(4{,}230 + 3{,}049) = 3{,}64'''$. Ferner war $\frac{1}{2}(B + b) = 288{,}77'''$, wofür man hier auch $290'''$ setzen konnte. Mit den Argumenten $3{,}64'''$ und $290'''$ lieferte die sechste Tafel wie vorstehend angenommen ist:

$$\log(1 + \tfrac{3}{8}\varphi) = 0{,}00168 + 0{,}00034 + 0{,}00002 = 0{,}00204.)$$

§. 196. Aufgabe. Einen Näherungsausdruck für den Feuchtigkeitsfactor der Barometerformel aufzustellen.

Bei genauen Barometermessungen hat man den Factor $(1 + \frac{3}{8}\varphi)$ auf die in den vorausgehenden Paragraphen beschriebene Weise und mit Anwendung unserer hypsometrischen Tafeln 4, 5, 6 in Rechnung zu bringen; wenn aber Barometermessungen ohne Psychrometerbeobachtungen zu berechnen sind, also der genannte Feuchtigkeitsfactor nicht auf Grund besonderer Messungen bestimmt werden kann, so darf man ihn doch keineswegs der Einheit gleich setzen, was auf die Luftfeuchtigkeit keine Rücksicht nehmen hiesse, sondern muss ihn mit einem gewissen Mittelwerthe welcher der Jahreszeit der Beobachtung entspricht, in Rechnung bringen, wie ja auch Laplace, Gauss, Poisson u. A. nur die mittlere Feuchtigkeit der Atmosphäre berücksichtigten, indem sie sowohl den barometrischen als den Temperatur-Coefficienten um so viel vergrösserten, als nothwendig war um sie mit den Ramond'schen Höhenmessungen in Uebereinstimmung zu bringen.

Wenn man nun weiss dass der Dunstdruck in unserem Klima sich ziemlich regelmässig ändert, d. h. vom Januar bis Mai von etwa 4 bis 8 mm steigt, im Juni, Juli und August 10 bis 11 mm beträgt und dann nach und nach wieder auf 4 mm fällt, so kann man, wie es Prof. Jordan gethan hat, nach graphischer Ausgleichung der von den meteorologischen Stationen gelieferten monatlichen Mittel der Luftfeuchtigkeit, nachstehende Tafel (IV) berechnen welche bei mangelnden Psychrometerbeobachtungen die drei hypsometrischen Tafeln 4, 5, 6 zu ersetzen geeignet ist.

Hypsometrische Ersatztafel (IV) für $\log(1+\frac{3}{8}\varphi)$.

Die Logarithmen, in Einheiten der fünften Decimale, gelten für die Mitte des betreffenden Monats, und die horizontalen Eingänge bezeichnen das Mittel aus dem an der unteren und oberen Station beobachteten Barometerstande B und b.

Monat	Mittlerer Barometerstand in Millimetern			
	500	600	700	760
Januar	0,00130	0,00110	0,00090	0,00090
Februar	130	110	90	90
März	140	120	100	90
April	180	150	130	120
Mai	230	200	160	150
Juni	300	250	210	200
Juli	330	290	250	230
August	330	300	250	240
September	320	270	230	210
October	260	220	190	170
November	200	170	140	130
December	160	130	110	100

Mit dieser Tafel würde man das in §. 195 berechnete Beispiel, wenn die Nasskälte T_1 und t_1 unbekannt, dafür aber die Beobachtungszeit (August) bekannt wäre, wie folgt zu Ende führen. Nach Einrechnung des Logarithmus aus der 3 Tafel ist $\log h_1 = 3{,}02623$, und da $\frac{1}{2}(B+b) = 650$ mm, so muss nach der Ersatztafel (IV) zu diesem Logarithmus noch der von $\log(1+\frac{3}{8}\varphi) = 0{,}00275$ hinzugefügt werden, wodurch $\log h_1 = 3{,}02898$ und $h_1 = 1069$ m statt 1067,3 m wird. Hätte man die Tafel (IV) gar nicht benüzt, so würde man für trockene Luft $h_1 = 1062{,}3$ m gefunden haben.

§. 197. Regeln für barometrische Höhenmessungen.

Zuverlässige Höhenmessungen erfordern zwei vorzügliche, mit einem Normalbarometer verglichene Reisebarometer und zwei August'sche Psychrometer. Diese Instrumente werden an den beiden Stationen so aufgestellt dass sie gegen das directe Sonnenlicht und so viel als möglich gegen die Strahlung des Bodens oder der Wände, an welche man sie manchmal hängt, geschützt sind. Den nöthigen Schatten gewähren am besten grosse hohe Schirme, die Strahlung gegen die Thermometer vermindern am meisten kleine auf Pfählen errichtete Tische von 1,5 bis 2 Meter Höhe. Die Aufstellung soll mindestens eine halbe Stunde vor Beginn der regelmässigen Beobachtungen welche durchaus gleichzeitig stattfinden müssen, vollendet sein, und man soll die Beobachtungszeiten mindestens 15 Minuten von einander abstehen lassen, damit das Ablesen der Instrumente mit der nöthigen Sorgfalt geschehen kann. Der am Barometer befindliche Thermometer welcher die Temperatur des Quecksilbers anzeigt, wird vor dem Barometerstande

abgelesen, damit die Körperwärme den Thermometerstand nicht erhöht. Der Psychrometer gibt zugleich die Lufttemperatur und die Nasskälte. Genaue Aufzeichnung der Ablesungen versteht sich von selbst. Die hier gegebene Einrichtung der Beobachtungsjournale wird genügen.

Station N

Beobachtungszeit			Psychrometer		Barometer			Windrichtung	Bemerkungen
Monat	Tag	St	Trockn.	Feucht. Th	Qu. Temp	Non I	Non. II		
Aug.	20	8	10^{0}9,	9,6^0	12,5^0	329,40‴	21,72‴	S W W	Himmel bedeckt
„	„	8½	12,1	10,3	13,0	38	75	W	Wind sehr schwach

Kann man nur wenige gleichzeitige Beobachtungen machen, so sollen dieselben wo möglich am Vormittage gegen 10 Uhr und am Nachmittage gegen 4 Uhr stattfinden, weil die Erfahrung lehrt dass die aus diesen Beobachtungen abgeleiteten Höhenunterschiede am besten mit jenen übereinstimmen welche man auf trigonometrischem Wege oder durch Nivelliren erhält. Man nimmt allgemein an dass zu diesen Zeiten der Zustand der Atmosphäre mehr ins Gleichgewicht getreten sei; wir aber glauben dass die Thermometer gegen 10 und 4 Uhr die Lufttemperaturen am richtigsten geben, weil der Einfluss der Bodenwärme auf sie um diese Zeiten am geringsten ist. Ist dem Beobachter die Wahl der Stationen überlassen, so soll er wo möglich isolirte Punkte wählen und namentlich Thalabhänge, zumal in der Nähe grosser Gebirge, vermeiden, weil die längs dieser Abhänge stattfindenden Luftströmungen nicht gleichmässig auf die an beiden Stationen aufgestellten Thermometer wirken. Jedenfalls dürfen die Stationen in horizontaler Richtung nicht zu weit auseinander liegen, damit die Aenderungen in dem Zustande der Atmosphäre nicht einseitig bloss auf einer Station fühlbar werden, und wohl auch aus dem Grunde, weil an südlich gelegenen Punkten die drückende Luftsäule höher und folglich auch schwerer ist als an nördlichen Stationen, wenn diese auch mit jenen in einer Horizontalebene sich befinden. Beobachtungen welche bei starkem Winde oder bei Gewittern gemacht werden, geben in der Regel unrichtige Höhenunterschiede, da diese Ursachen schnelle und bedeutende, jedoch nicht immer gleichzeitige Aenderungen der Barometerstände hervorbringen. Solche Beobachtungen schliesst man daher mit Recht aus. Hat man dergleichen aber längere Zeit fortgesetzt, so wird man durch Vergleichung finden dass in Thälern der Nordwind durchschnittlich ein Steigen, der Südwind ein Fallen des Barometers bewirkt, auf Bergspitzen jedoch oft das Entgegengesetzte stattfindet.

Da bei weit entfernten Stationen die Aenderungen der Barometerstände sehr häufig ebenfalls nicht gleichzeitig erfolgen, und da anzunehmen ist

dass bei grossen Breitendifferenzen der Stationen auch bei ganz ruhiger Luft die drückenden Luftsäulen ungleich hoch sind, also die Barometerstände nicht mehr unter der Voraussetzung gemessen werden welche bei der Entwickelung der Barometerformel gemacht wurde: so soll man barometrische Höhenmessungen nicht zwischen weit entfernten Stationen und namentlich nicht zwischen Stationen deren Breiten sehr verschieden sind, vornehmen. Als grösste Entfernungen dürften vielleicht zwei deutsche Meilen und beziehungsweise acht Bogenminuten in dem Falle anzusehen sein dass nur einige wenige gleichzeitige Beobachtungen zur Bestimmung des Höhenunterschieds zweier durch ein Gebirg getrennten Punkte dienen sollen. Diese Maximalentfernungen können aber auf fünf Meilen oder zwanzig Bogenminuten ausgedehnt werden, wenn man den Höhenunterschied zweier zu beiden Seiten eines Gebirgs liegenden Orte aus jahrelang fortgesetzten baro- und thermometrischen Beobachtungen abzuleiten hat. Wenn dagegen die Orte auf einer weit ausgedehnten Ebene liegen und eine grössere Reihe von gleichzeitigen Beobachtungen angestellt wird, so übt eine Entfernung von 8 bis 10 Meilen noch keinen schädlichen Einfluss, wie des Verfassers „Beobachtungen und Untersuchungen über die Eigenschaften und die praktische Verwerthung der Naudet'schen Aneroïdbarometer," München 1874, Seite 52 bis 56, nachweisen.

§. 198. Genauigkeit der barometrischen Höhenmessungen. Ueber diese Frage herrschen die verschiedenartigsten Ansichten: Einige schreiben diesen Messungen eine sehr grosse Genauigkeit zu und empfehlen sie selbst zu Nivellementen für Flüsse; Andere sprechen ihnen dagegen jede Zuverlässigkeit ab und verwerfen den Barometer als Höhenmessinstrument; die Mehrzahl aber bekennt sich weder zu dieser noch jener extremen Ansicht und wendet die barometrischen Höhenmessungen an, ohne viel nach dem Grade ihrer Genauigkeit zu fragen; Wenige nur haben sich auf Grund eigener Messungen hierüber geäussert. Der Verfasser fand sich hierdurch im Jahre 1857 veranlasst, eine Reihe von Beobachtungen über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen anzustellen und deren Ergebnisse in der bereits oben (§. 192) angeführten Schrift die hier theilweise wieder benützt wird, zu veröffentlichen.

Die Beobachtungsfehler welche von wesentlichem Einflusse auf das Resultat der Höhenbestimmung sind, können gemacht werden: bei der Messung der Lufttemperaturen (T, t), der Quecksilbertemperaturen (T′, t′), der Barometerstände (B, b), und es können diese Fehler welche wir mit d T, d t u. s. w. bezeichnen wollen, sowohl positiv als negativ sein. Für den vorliegenden Zweck kann man die Höhe zwischen zwei Stationen genau genug durch die Gleichung ausdrücken:

$$h = k\,(1 + \alpha\,\tau)\,(\log B - \log b - \gamma\,\tau')$$

worin die Constante $k = 18404{,}9$ m und der Coefficient $\alpha = 0{,}0023$ für $\frac{1}{2}{}^0$ R, ferner $\tau = T + t$, $\tau' = T' - t'$ und $\gamma = 0{,}0000978 = 0{,}0001$ ist, wenn τ' in achtzigtheiligen Graden ausgedrückt ist. Diese Gleichung liefert, wenn

man sie erst logarithmisirt und dann nach den oben bezeichneten Veränderlichen differentiirt:

$$\frac{d\,h}{h} = \frac{\alpha \,.\, d\,\tau}{1 + \alpha\,\tau} + \frac{d\,(\log B - \log b - \gamma\,\tau')}{\log B - \log b - \gamma\,\tau'}$$

oder, wenn man $\log B - \log b - \gamma\,\tau' = u$ und den Modul des briggischen Logarithmensystems $= m$ setzt:

$$\frac{d\,h}{h} = \frac{\alpha \,.\, d\,\tau}{1 + \alpha\,\tau} + \frac{m}{u}\left(\frac{d\,B}{B} - \frac{d\,b}{b} - \frac{\gamma\,d\,\tau'}{m}\right)$$

Berücksichtigen wir dass $1 + \alpha\,\tau$ von 1 nur wenig verschieden ist und dass $d\,\tau = d\,T + d\,t = \pm 2 \,.\, d\,t$ gesetzt werden kann, so wird das erste Glied dieses Ausdrucks $= 0{,}0046 \,.\, d\,t$; und wird quantitativ $d\,B = d\,b$ und $d\,T' = d\,t'$, qualitativ aber $d\,b$ dem $d\,B$ und $d\,t'$ dem $d\,T'$ entgegen gesetzt, so findet sich der grösste relative Fehler:

$$\frac{d\,h}{h} = \pm\left(0{,}0046 \,.\, d\,t + \frac{m}{u}\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{b}\right) d\,b + \frac{2\,\gamma}{u}\,d\,t'\right) \quad (382)$$

und, wenn man diese Gleichung mit $h = k\,(1 + \alpha\,\tau)\,u$ multiplicirt, der grösste absolute Fehler:

$$d\,h = \pm\,k\,(1 + \alpha\,\tau)\left(2\,\alpha\,d\,t \,.\, \log\frac{B}{b} + m\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{b}\right) d\,b + 2\,\gamma\,d\,t'\right) \quad (383)$$

Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

1) Der relative Fehler der barometrischen Höhenbestimmung wächst mit den Fehlern welche in der Messung der Temperaturen und der Barometerstände gemacht werden.

2) Die Fehler in den Barometerständen und den Quecksilbertemperaturen wirken um so nachtheiliger, je kleiner der zu bestimmende Höhenunterschied ist.

3) Die fehlerhafte Bestimmung der Lufttemperatur gibt einen und denselben relativen Fehler für grosse und kleine Höhen; ihr Einfluss ist also bei kleinen Höhen bedeutender als bei grossen.

4) Unter sonst gleichen Umständen wird der relative Fehler um so grösser, je höher die untere Station über dem Meere liegt.

5) Der absolute Fehler der Höhe wächst wohl auch mit der Grösse der Fehler $d\,b$, $d\,t$, $d\,t'$ und mit der Höhe h, aber dieser letzteren nicht proportional, sondern in geringerem Masse als die Höhe. So findet man z. B.

für $B = 322'''$, $b = 300'''$, $T + t = 24^0$ R die Höhe $h = 597$ m
für $B = 322'''$, $b = 250'''$, $T + t = 10^0$ R die Höhe $h = 2075$ m

Ist nun in beiden Messungen $d\,b = 0{,}1'''$ und $d\,t = d\,t' = 0{,}5^0$ R, so erhält man den grössten absoluten Fehler der Höhe 597 m = 8,74 m und den der Höhe 2075 m = 12,43 m, während dieser letztere = 30,39 m sein müsste, wenn die absoluten Fehler den Höhen proportional wären.

Der absolute oder relative Fehler einer einzigen Messung kann, ohne dass die Beobachter etwas versäumten, sehr bedeutend werden:

a) weil die Genauigkeit der Ablesung der Barometerstände nicht wohl grösser als 0,1‴ anzunehmen ist und die Fehler d B und d b ebenso oft ungleiche als gleiche Zeichen haben können;

b) weil die Temperatur der Luft wegen der Wärmestrahlung des Erdbodens nicht sicher bestimmt werden kann und die Fehler d T und d t namentlich am Morgen und Abend, sowie zur Zeit des Wärmemaximums (gegen 2 Uhr) sogar mehr als 2° R betragen und qualitativ gleich sein können; endlich

c) weil die Thermometer welche die Temperatur des Quecksilbers anzeigen sollen, bei Reisebarometern selten in dem Quecksilber selbst stecken, daher auch hier die Fehler d T′, d t′ leicht 1° R betragen und einander entgegengesetzt sein können.

Unsere im August 1857 am grossen Miesing angestellten correspondirenden Messungen ergaben in dieser Beziehung folgende Resultate:

1) Unter 100 Messungen betrugen die grössten Fehler in der Strecke

zwischen	I	und	III	auf	1850,8′	Höhe:	+ 31,5′	oder	0,0170	
„	III	„	V	„	1809,0	„	— 39,6	„	0,0219	
„	I	„	V	„	3659,8	„	+ 46,4	„	0,0127.	

2) Die durchschnittlichen Fehler dieser 100 Messungen waren:

zwischen	I	und	III	auf	1850,8′	Höhe:	± 10,1′	oder	0,0055
„	III	„	V	„	1809,0	„	11,4	„	0,0063
„	I	„	V	„	3659,8	„	15,7	„	0,0043.

3) Die Fehler der arithmetischen Mittel aus 100 Messungen betrugen:

zwischen	I	und	III	auf	1850,8′	Höhe:	± 1,3′	oder	0,00070
„	III	„	V	„	1809,0	„	1,5	„	0,00082
„	I	„	V	„	3659,8	„	2,0	„	0,00053.

4) Die Fehler der arithmetischen Mittel aus je 4 in Zeit von $1\frac{1}{2}$ Stunden angestellten correspondirenden Messungen waren in der Strecke:

I —III	von 9—$10\frac{1}{2}$ Uhr Vorm. ± 6,6′	und von 3—$4\frac{1}{2}$ Uhr Nachm.	= ± 9,4′
III— V	„ „ „ „ 7,0	„ „ „ „ „	= 5,5
I — V	„ „ „ „ 13,4	„ „ „ „ „	= 7,5.

Dieses letztere Ergebniss, verbunden mit der Beobachtung dass in allen anderen Stunden die Fehler grösser waren als zwischen 9—$10\frac{1}{2}$ und 3—$4\frac{1}{2}$ Uhr, veranlasst uns zu dem Ausspruche dass vier oder fünf gleichzeitige Beobachtungen, auf zwei Stationen von geringer horizontaler Entfernung, bei guter Witterung und gegen 10 oder 4 Uhr in Zwischenräumen von etwa 20 Minuten angestellt, den Fehler des arithmetischen Mittels bei 500 Meter Höhenunterschied auf etwa 2 Meter, und bei 1000 Meter Höhenunterschied auf etwa 3 Meter einschränken werden. Wir sind demnach der Meinung dass sorgfältig angestellte, correspondirende Barometermessungen noch immer ein sehr zu empfehlendes Mittel sind für die Bestimmung der Höhen von bewohnten Orten, Bergspitzen, Gebirgsüber-

gängen, Quellen, See'n, Fundorten von Pflanzen und Petrefacten, Grenzen geologischer Formationen, ferner zu vorläufigen Terrainuntersuchungen behufs der Anlage von Strassen und Eisenbahnen, und endlich selbst zur Darstellung der Gebirge mittels Horizontalcurven; wir sind aber auch entschieden der Ansicht dass überall da, wo Höhenunterschiede genauer als in den vorher bezeichneten Fällen bestimmt sein müssen, dieses nur durch trigonometrische und insbesondere nivellatorische Messungen geschehen kann.

§. 199. Aufgabe. Die gebräuchlichsten Methoden der Höhenmessung mit dem Federbarometer darzustellen.

1) Die Formel (201) des ersten Bands, womit man eine bei der Temperatur t^0 am Federbarometer von Naudet gemachte Ablesung B auf die der Temperatur 0^0 entsprechende Länge A_0 der Quecksilbersäule des Normalbarometers zurückführen kann, gestattet die Anwendung der Barometerformel (380) auf die Höhenmessung mit dem Federbarometer unter folgenden Abänderungen. Zunächst ist das vorletzte Glied 0,0001 $(T' - t')$ des letzten Factors welches die Verbesserung der Quecksilbersäule wegen der Temperatur betrifft, und dann auch das letzte Glied welches sich auf die Abnahme des Quecksilbergewichts mit der Höhe bezieht, hier null; ausserdem kann man, wenn die Luftfeuchtigkeit nicht beobachtet wird, den Factor $(1 + \frac{3}{8}\varphi)$ der Einheit gleich setzen, oder log $(1 + \frac{3}{8}\varphi)$ aus der Ersatztafel Nr IV, Seite 400 nehmen. Mit Rücksicht darauf dass der in der ersten Tafel stehende Logarithmus A die Schwerecorrection der Quecksilbersäulen enthält, welche für Federbarometer null ist, ist es rathsam den Factor $(1 + \frac{3}{8}\varphi) = 1$ zu setzen. Hienach geht die Formel (380) in die folgende über:

$$h = 18405\left(1 + 0{,}00229\,(T + t)\right)(1 + 0{,}0026\cos 2\psi)(1 + q)\log\frac{A_0}{a_0} \quad (384)$$

wobei das Verhältniss $(2z + h) : r$ mit q, der Barometerstand auf der unteren Station mit A_0, und der auf der oberen mit a_0 bezeichnet ist. In den meisten Fällen wird man auch den dritten und vierten Factor welche sich auf die Aenderung der Schwerkraft mit der geographischen Breite und der lothrechten Höhe beziehen, weglassen können; behalten wir sie aber vorläufig bei, so kann man mit unseren drei ersten hypsometrischen Tafeln die Höhe sehr einfach berechnen, indem die erste mit dem Eingange $T + t$ die Summe der Logarithmen der beiden ersten Factoren, die zweite die Verbesserung wegen der geographischen Breite und die dritte wegen des Höhenunterschieds beider Stationen gibt.

Ist z. B. am Polytechnikum in München, wofür $z = 516{,}7$ m und die Breite $\psi = 48^0\,12'$, der Barometerstand $A_0 = 716{,}15$ mm, $T = 16{,}9^0$ R, dann an der Höhenmarke auf der Eisenbahnstation Sauerlach $a_0 = 707{,}74$ mm und $t = 15{,}7^0$ R beobachtet worden, so beträgt $T + t = 32{,}6^0$ R und man hat, um h zu finden, folgende Berechnung anzustellen: Es ist

$$\log A_0 = \log 716{,}15 = 2{,}85500$$
$$\log a_0 = \log 707{,}74 = 2{,}84987$$
$$u = \log A_0 - \log a_0 = 0{,}00513$$

$\log u = 7{,}70998$

Aus der hypsom. Tafel I folgt mit dem Eingange $T + t$: $A = 4{,}29736$

$2{,}00734$

„ „ „ „ II „ „ der Breite $\psi = 48^0$: -12

$\log h' = 2{,}00722$

„ „ „ „ III „ „ $\log h' = 2{,}0$ und $z = 500$: $+8$

$\log h = 2{,}00730$

Daraus ergibt sich die gesuchte Höhendifferenz $h = 101{,}695$ m

Ohne die Verbesserungen aus den hypsometrischen Tafeln II und III wird $\log h = 2{,}00734$ und $h = 101{,}705$ m

Man kann also hier das Product $(1 + \beta \cos 2\psi)(1 + q) = 1$ setzen und die abgekürzte Formel anwenden:

$$h = 18405 \left(1 + 0{,}0029\,(T + t)\right) \log \frac{A_0}{a_0} \tag{385}$$

oder, wenn man $\log A_0 - \log a_0 = u$ schreibt und A aus der ersten hypsometrischen Tafel nimmt, die noch kürzere Formel:

$$\log h = A + \log u \tag{386}$$

Hienach sind die folgenden Beobachtungen berechnet welche der Verfasser behufs eines Versuchs über die Genauigkeit der Höhenmessung mit dem Federbarometer in den ersten Tagen des Octobers 1872 angestellt und theilweise schon auf Seite 505 des ersten Bands mitgetheilt hat. Die gleichzeitigen Beobachtungen in München wurden vom Mechaniker Bürker gemacht und sind auf die Cote der steinernen Sockelbank am Mittelbau des Polytechnikums welche (nach Bauernfeind „Das bayerische Präcisionsnivellement“ zweite Mittheilung, S. 29, Fixpunkt Nr 747) 345,33 m beträgt und 516,67 m Meereshöhe entspricht, bezogen. Für die Centralstation München und die übrigen Stationen ergaben sich als Mittel aus je 4 in Zeitabständen von 15 Minuten gemachten Ablesungen folgende Beobachtungsdata:

			mm	C		mm	C
1	Octbr. 2, Vm	München	B = 716,15;	T = 20,2⁰	Gr. Hessellohe	b = 712,44;	t = 18,3⁰
2	„ 2, Mtt	„	B = 716,15;	T = 20,7	Sauerlach	b = 707,74;	t = 19,6
3	„ 2, Nm	„	B = 715,88;	T = 15,6	Holzkirchen	b = 701,53;	t = 14,4
4	„ 4, Nm	„	B = 712,50;	T = 15,6	Aibling	b = 715,30;	t = 16,1
5	„ 5, Vm	„	B = 716,56;	T = 12,7	Rosenheim	b = 722,57;	t = 13,2
6	„ 5, Nm	„	B = 718,88;	T = 14,9	Fischbach	b = 722,79;	t = 15,1

Aus diesen Daten liess sich die nachstehende Tabelle berechnen:

Nr	Auf der Strecke	beträgt der Höhenunterschied nach		ist die Differenz zwischen beiden Messungen
		der Barometermessung	dem Präcisions-Nivellement	
		m	m	m
1	München-Gr Hesselohe	+ 44,62	+ 45,50	— 0,88
2	„ -Sauerlach	+ 101,71	+ 102,68	— 0,97
3	„ -Holzkirchen	+ 171,20	+ 169,46	+ 1,74
4	„ -Aibling	— 33,31	— 34,19	+ 0,88
5	„ -Rosenheim	— 70,03	— 67,73	— 2,30
6	„ -Fischbach	— 45,85	— 48,70	+ 2,85

Unter der erlaubten Voraussetzung dass die durch das Präcisionsnivellement erhobenen Höhenunterschiede den barometrisch gemessenen gegenüber als absolut richtig gelten können, folgt aus denselben der mittlere Fehler einer aus 4 Beobachtungen zusammengesetzten Messung:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n}} = \pm 1{,}694\,\mathrm{m}$$

und der mittlere Fehler einer einzigen vollständigen Messung:

$$m' = m\sqrt{4} = \pm 3{,}388\,\mathrm{m}$$

Wollte man die am 5 October angestellten Beobachtungen ausschliessen, weil an diesem Tage der Barometerstand um 4 mm sich änderte, so würde sich für die übrigen Messungen ein mittlerer Fehler $m = \pm 1{,}356\,\mathrm{m}$ und $m' = m\sqrt{4} = \pm 2{,}712\,\mathrm{m}$ ergeben. Nach dem ersten Resultate das der Praxis besser entsprechen dürfte als das zweite, könnte man also aus 4 in etwa einer Stunde angestellten Beobachtungen, zu denen an einer Centralstation ebenso viele correspondirende Beobachtungen gemacht werden, die Höhe eines Punkts über dieser Station bis auf etwa 2 m genau finden, vorausgesetzt dass derselbe nicht mehr als etwa 200 m über der Station und nicht mehr als 75 Kilometer von dieser entfernt liegt.

Wie wichtig die correspondirenden Beobachtungen sind, ergibt am besten ein Vergleich der am 5 October für Rosenheim und Fischbach erhaltenen Aufschreibungen. Wollte man Fischbach aus Rosenheim berechnen, so fände man für diese Station eine tiefere Lage, während Fischbach in Wirklichkeit 19 m über Rosenheim liegt; durch dieses Verfahren würde das in der Zwischenzeit der Beobachtungen eingetretene Steigen des Barometers um 2,3 mm nicht berücksichtigt und daher ein der Wirklichkeit widersprechendes Resultat gefunden werden.

2) Wenn man in die allgemeine Barometerformel (379) folgende für Deutschland gültige mittlere Werthe einführt: nämlich die Breite $\psi = 50^0$, die Höhe der Stationen über dem Meere $z + \frac{1}{2} h = 500\,\mathrm{m}$, den Luftdruck

$p = 720$ mm, den Dunstdruck $p'' = 7{,}2$ mm, den Werth von $p'' : p$ oder $\varphi = 0{,}01$, so geht dieselbe über in

$$h = 18464 \left(1 + \alpha \frac{T + t}{2}\right) \log \frac{B_0}{b_0} \qquad (387)$$

wobei B_0 und b_0 die auf 0^0 reducirten Barometerstände vorstellen und deren Verbesserungen wegen der Schwereabnahme zwischen beiden Stationen vernachlässigt werden. Setzt man mit Babinet

$$B_0 : b_0 = \left(1 + \frac{B_0 - b_0}{B_0 + b_0}\right) : \left(1 - \frac{B_0 - b_0}{B_0 + b_0}\right)$$

so wird nach der bekannten Reihe für $\log (1 + y) - \log (1 - y) = 2\,M\,(y + \frac{1}{3} y^3 + \ldots)$ und mit Rücksicht darauf dass hier y nur einen kleinen Werth hat, also das zweite Glied vernachlässigt werden kann:

$$\log \frac{B_0}{b_0} = 2\,M \cdot \frac{B_0 - b_0}{B_0 + b_0} = 0{,}86859 \cdot \frac{B_0 - b_0}{B_0 + b_0} \qquad (388)$$

$$h = 16038 \left(1 + \alpha \frac{T + t}{2}\right) \frac{B_0 - b_0}{B_0 + b_0} \qquad (389)$$

Diese „Babinet'sche Formel mit neuem Coefficienten" liefert Werthe welche von den aus einer auch das zweite Glied mit $\frac{2}{3}\,M\,y^3$ berücksichtigenden Formel berechneten erst bei 1000 Meter Höhenunterschied um mehr als einen Meter abweichen: sie kann daher bis zu sehr beträchtlichen Höhen als eine Näherungsformel angewendet werden. (Vergl. Jordan, Handbuch der Vermessungskunde, Bd I, Seite 504 u. ff.)

3) Die Babinet'sche Formel lässt noch eine weitere Vereinfachung zu die sich auf folgende Betrachtung stützt. Schreibt man nämlich in Gl. (389) für $B_0 + b_0$ die Hälfte dieses Werthes an, so stellt $\frac{1}{2}(B_0 + b_0)$ den mittleren Barometerstand Σ zwischen beiden Stationen vor, und es muss dann auch vom Coefficienten 16038 m die Hälfte mit 8019 m genommen werden, wenn die Gleichung richtig bleiben soll. Setzt man schliesslich wieder τ für das arithmetische Mittel $\frac{1}{2}(T + t)$ und bezeichnet den Unterschied der Barometerstände $B_0 - b_0$ mit $\varDelta$, so geht die vorstehende Formel in folgende über:

$$h = 8019\,(1 + \alpha\,\tau) \cdot \frac{\varDelta}{\Sigma} = C\,\varDelta \qquad (390)$$

Nennt man C den barometrischen Coefficienten und berechnet sich diesen für verschiedene Temperaturen τ und Barometerstände nach der Formel

$$C = 8019 \cdot \frac{1 + \alpha\,\tau}{\Sigma} \qquad (391)$$

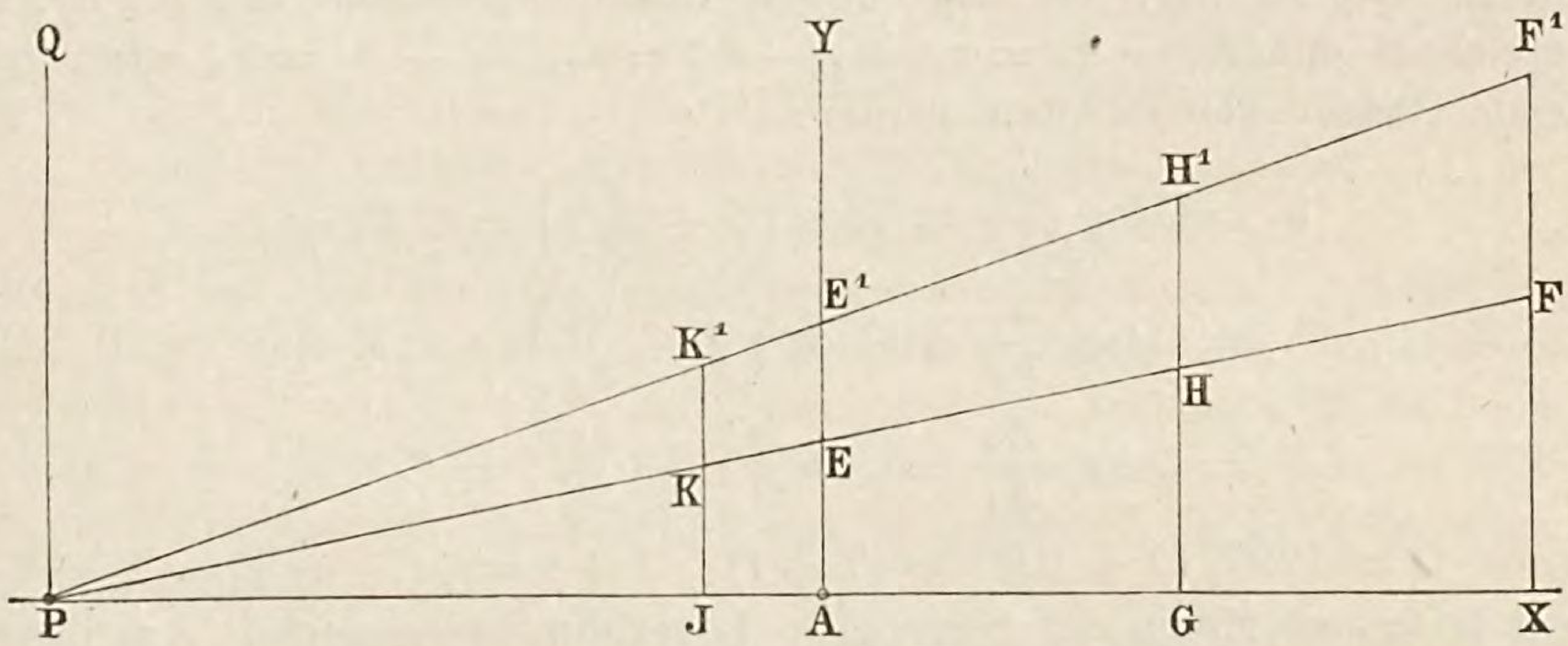
so kann man mit ihm und der Differenz $B_0 - b_0$ der beobachteten Barometerstände den Höhenunterschied h der beiden Stationen durch einfache Multiplication finden. Da für $\varDelta = 1$ der Coefficient $C = h$ wird, so ist dieser Coefficient C nichts anderes als die Höhendifferenz h in Meter für 1 Millimeter Unterschied der Barometerstände. Professor Jordan hat hiefür eine Tafel hergestellt die wir in den Anhang unseres Buchs um so mehr aufgenommen haben, als er uns nur in der Publication einer solchen

Tafel die seit dem Jahre 1875 mit der Constanten 8013 statt 8019 berechnet vorliegt, zuvorgekommen ist. Wir fügen lediglich noch eine Bemerkung über die graphische Darstellung des Werthes von C bei, die sich uns bei der Berechnung der oben erwähnten Tafel sofort aufgedrängt hat. Wenn man nämlich von den beiden Factoren des Products 8019 $(1 + \alpha\tau)$ den ersten mit $\alpha = 0{,}003665$ multiplicirt und den zweiten damit dividirt, so wird dieses seinem Werthe nach ungeänderte Product gleich $29{,}39\,(272{,}8 + \tau)$ und folglich, wenn man die absolute Temperatur $272{,}8 + \tau = \Theta$ setzt, der barometrische Coefficient der Babinet'schen Formel

$$C = 29{,}39 \cdot \frac{\Theta}{\Sigma} \qquad (392)$$

Hieraus folgt dass der Höhenunterschied C für 1 Millimeter Barometerdifferenz der absoluten Temperatur der Luft direkt und dem Luftdruck umgekehrt proportional ist. Nach der vorstehenden Formel wird $C = 0$ wenn $\Theta = 272{,}8 + \tau = 0$ ist, d. h. die durch die vorstehende Gleichung dargestellte Gerade $C = a + b\,\tau$ schneidet die Abscissenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystems (Fig. 198), worin die Coefficienten oder

Fig. 198.



Höhenunterschiede C für 1mm als Ordinaten aufgetragen sind, in einem Punkte P welcher die Abscisse $\tau = -272{,}8^0$ C hat.

Berechnet man für $\tau = 0$ (oder $\Theta = 272{,}8^0$ C) und für $\Sigma = 760$ mm aus der Gl (392) den Werth von C so wird dieser $= 10{,}55$ m, und trägt man diesen Werth auf der Ordinatenaxe $=$ A E auf, so gibt die Gerade P E F für alle Temperaturen von $\tau = -272{,}8^0$ C bis $\tau = +30^0$ C die Werthe von C bei 760mm Luftdruck an, z. B. für $\tau =$ A G $= +34^0$ C den Werth G H $= 11{,}87$ m und für $\tau =$ A J $= -5^0$ C den Werth J K $= 10{,}36$ m. Behält man dieselben Temperaturen bei, nimmt aber den Luftdruck $\Sigma = 600$ mm an, so wird für $\tau = 0$ der Werth C $=$ A E' $=$ 13,36m; für $\tau = +34^0$ C der Werth von C $=$ G H' $= 15{,}03$ m, und für $\tau = -5^0$ C der Werth C $=$ J K' $= 13{,}12$ m. Stellen nun 600 und 760mm die Grenzen der bei Höhenmessungen vorkommenden Barometerstände und -5^0 C und $+34^0$ C die Grenzen der Lufttemperaturen vor, bei welchen

noch gemessen wird, so schwankt der Coefficient C der Babinet'schen Formel zwischen 10 und 15 Meter, und es ist hieraus ohne Weiteres zu entnehmen, wie gewagt es ist für die hypsometrische Aufnahme eines grösseren Landstrichs und eine bestimmte Jahreszeit nur einen und denselben Werth des Coefficienten C, z. B. 11,1 Meter, wie es geschehen, anzuwenden und die Höhenunterschiede je zweier Stationen lediglich aus der Formel $h = 11{,}1\,(A_1 - A_2)$ zu berechnen, worin A_1 und A_2 die Ablesungen der berichtigten Federbarometer in den Punkten I und II sind. (Vergl. Schreiber, das Flächennivellement mit Aneroïdbarometern, Separatabdruck aus Band XXI des „Civilingenieur," Leipzig 1875.)

4) Wenn es sich lediglich um kleine Höhenunterschiede und geringe Horizontalabstände handelt, so kann man in der Formel (384) nicht bloss die beiden Factoren für die geographische Breite $(1 + \beta \cos 2\,\psi)$ und für die mittlere Stationenhöhe $(1 + q)$ einzeln oder im Product der Einheit gleich nehmen, sondern auch in dem Wärmefactor $(1 + \alpha\,\tau)$ für $T + t$ das doppelte Mittel der auf mehreren Punkten 0, 1, 2, 3 in kurzen Zeitintervallen abgelesenen Lufttemperaturen T_0, T_1, T_2, T_3 einsetzen, so dass, wenn man die auf einander folgenden Ablesungen auf dem Federbarometer mit A_0, A_1, A_2, A_3, die zugehörigen Höhenunterschiede mit h_1, h_2, h_3 bezeichnet und $A_0 - A_1 = u_1$, $A_1 - A_2 = u_2$, $A_2 - A_3 = u_3$ setzt, folgende Gleichungen erhalten werden:

$$h_1 = C \log \frac{A_0}{A_1} = C \log \left(1 + \frac{u_1}{A_1}\right) = C\,M\,\frac{u_1}{A_1}$$

$$h_2 = C \log \frac{A_1}{A_2} = C \log \left(1 + \frac{u_2}{A_2}\right) = C\,M\,\frac{u_2}{A_2}$$

$$h_3 = C \log \frac{A_2}{A_3} = C \log \left(1 + \frac{u_3}{A_3}\right) = C\,M\,\frac{u_3}{A_3}$$

worin $C = 18405\,(1 + 0{,}00229\,(T + t))$, $T + t = \frac{1}{2}\,(T_0 + T_1 + T_2 + T_3)$ und M = dem Modul des briggischen Logarithmensystems ist. Aus diesen Gleichungen folgt die Proportion

$$h_1 : h_2 : h_3 = \frac{u_1}{A_1} : \frac{u_2}{A_2} : \frac{u_3}{A_3} \tag{393}$$

welche erkennen lässt wie man die Höhenunterschiede h_1, h_2, h_3 aus den auf den Punkten 0, 1, 2, 3 gemachten Beobachtungen durch Proportional-Interpolation finden kann. Benützen wir beispielsweise die oben angeführten am 2 October 1872 Vormittags zwischen 9 und 12 Uhr in München, Grosshessellohe und Sauerlach angestellten Beobachtungen:

$$A_0 = 716{,}15 \qquad A_1 = 712{,}44 \qquad A_2 = 707{,}74 \qquad T_0' = 20{,}7^0\,C$$
$$T_0 = 20{,}2^0\,C \qquad T_1 = 18{,}3^0\,C \qquad T_2 = 19{,}6^0\,C$$

so ist $T + t = \frac{1}{2}\,(T_0 + T_1 + T_2 + T_0') = 39{,}4^0\,C = 31{,}5^0\,R$; ferner $u_1 = A_0 - A_1 = 3{,}71$ und $u_2 = A_1 - A_2 = 4{,}70$. Hiermit findet man zunächst $\log C$ aus der hypsometrischen Tafel I mit dem Eingange $31{,}5^0\,R = 4{,}29634$, während $\log M = 9{,}63778 - 10$ ist. Man erhält somit

$$\log h_1 = \log (C\,M) + \log \frac{u_1}{A_1} = 1{,}65074 \text{ und hieraus } h_1 = 44{,}745\,m$$

$$\log h_2 = \log (C\,M) + \log \frac{u_2}{A_2} = 1{,}75635 \quad " \quad " \quad h_2 = 57{,}063\,m$$

Hiernach ist die Summe $h_1 + h_2 = 101{,}808$ m, während sie nach dem Präcisionsnivellement $= 102{,}68$ m ist; es bleibt also noch die Differenz von 0,872 m auf h_1 und h_2 im Verhältniss von 447 : 571 zu vertheilen, d. h. es ist $h_1 = 45{,}13$ und $h_2 = 57{,}55$ m zu setzen. Diese letzteren Werthe von h_1 und h_2 hätte man übrigens unmittelbar wie folgt finden können.

Es ist, wenn man $u_1 : A_1 = v_1$; $u_2 : A_2 = v_2$ und $u_3 : A_3 = v_3$ setzt:

$$H = h_1 + h_2 + h_3 = C\,M\,(v_1 + v_2 + v_3) \qquad (394)$$

Wenn nun in einem gegebenen Falle die Brüche v_1, v_2, v_3 berechnet und addirt werden, so soll $\log H = \log C\,M + \log (v_1 + v_2 + v_3)$ sein. Ist dieses nicht der Fall, so denke man sich das Product $C\,M$ noch mit einem Factor k multiplicirt welcher die Gleichheit von H und $k\,C\,M\,(v_1 + v_2 + v_3)$ und also auch von $\log H$ und $\log k\,C\,M\,(v_1 + v_2 + v_3)$ herstellt. Dieser Faktor k lässt sich somit aus der Gleichung

$$\log k = \log H - \log C\,M\,(v_1 + v_2 + v_3) \qquad (395)$$

berechnen, und wenn er bestimmt ist, so wird

$$h_1 = k\,C\,M\,v_1;\ h_2 = k\,C\,M\,v_2;\ h_3 = k\,C\,M\,v_3$$

Hier ist $v_3 = 0$; $H = 102{,}68$; $v_1 = 0{,}005207$; $v_2 = 0{,}006641$; daher

$$\log k = 2{,}01149 - 2{,}00776 = 0{,}00373 \text{ und } k = 1{,}0086$$

$$h_1 = 45{,}13;\ h_2 = 57{,}55;\ h_1 + h_2 = H = 102{,}68\,m.$$

Hätte man das hier beschriebene Interpolationsverfahren auch noch auf den Punkt Holzkirchen, also nicht bloss auf einen grösseren Höhenunterschied ($H = 169{,}46$ m), sondern auch auf einen grösseren Zeitraum für die Beobachtungen (Morgens 9 Uhr bis Abends 6 Uhr) ausdehnen wollen, so hätte sich, da für Holzkirchen $A_3 = 701{,}53$ und $T_3 = 14{,}4^0$ C war, die Rechnung wie folgt gestellt:

$$T + t = \tfrac{1}{2}(T_0 + T_1 + T_2 + T_3) = 36{,}2^0\,C = 29^0\,R$$

$$\log C = 4{,}29401 \text{ nach Tafel I mit } T + t = 29^0\,R$$

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0{,}005207 + 0{,}006641 + 0{,}008852 = 0{,}0207$$

$$\log k = 2{,}22907 - 2{,}24776 = 9{,}98131 \text{ und } k = 0{,}95788$$

$$h_1 = 42{,}63;\ h_2 = 54{,}37;\ h_3 = 72{,}46;$$

$$H = h_1 + h_2 + h_3 = 169{,}46\,m$$

Die Unterschiede zwischen der barometrischen Höhenmessung und dem Präcisionsnivellement ergeben sich hiernach wie folgt:

München-Grosshessellohe $h_1 = 42{,}63$ Bar. $= 45{,}50$ Niv.; $\varDelta = -2{,}87$ m
Grosshessellohe-Sauerlach $h_2 = 54{,}37$ " $= 57{,}18$ " ; $\varDelta = -2{,}87$
Sauerlach-Holzkirchen $h_3 = 72{,}46$ " $= 66{,}78$ " ; $\varDelta = +5{,}68$

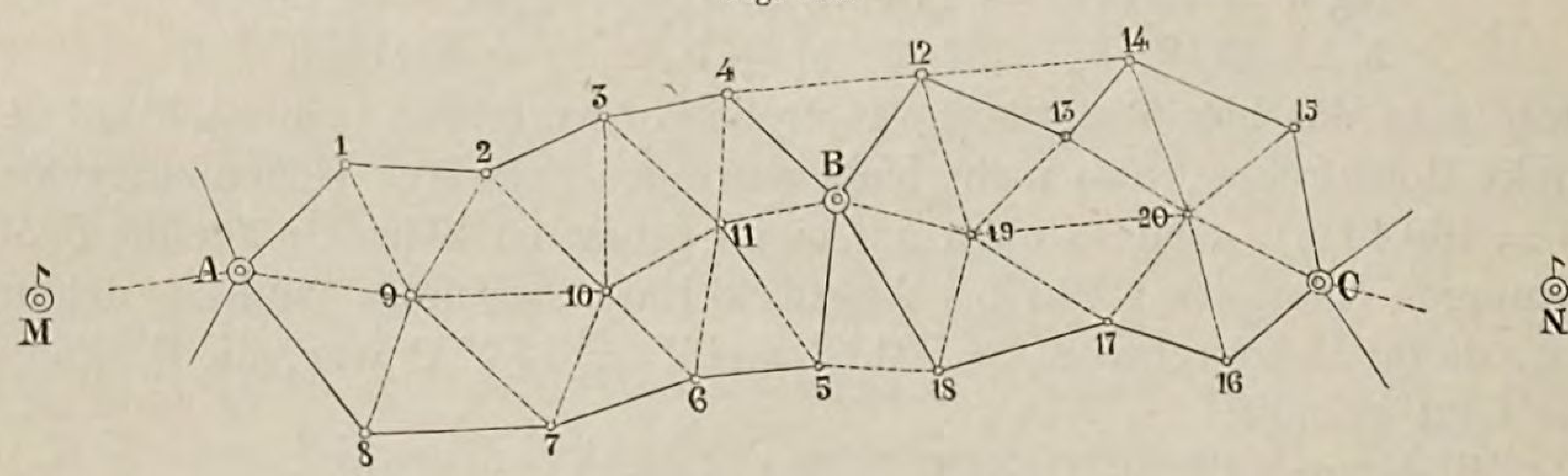
Diese Unterschiede sind somit weit grösser als vorhin für die Strecke München-Sauerlach und sprechen deutlich aus dass man das Höhenmessen durch Interpoliren nur auf geringe Höhen anwenden darf und in kurzer Zeit ausführen muss.

Die Interpolationsmethode eignet sich namentlich zur Aufnahme durchschnittenen oder gebirgigen Terrains mittels Horizontalcurven, wenn für dieses Terrain nach einer oder mehr Richtungen Eisenbahn- oder Präcisions-Nivellemente bestehen, an die man die Barometermessungen anknüpfen und auf die man sie zurückführen kann. Die hier beschriebene Methode hat, richtig angewandt, den grossen Vorzug dass sie keine gleichzeitigen Beobachtungen mit einem zweiten Federbarometer oder einem Quecksilberbarometer, ja nicht einmal eine Vergleichung des Federbarometers mit dem Normalbarometer erfordert; allein sie setzt viele und gut bestimmte Höhen-Fixpunkte, also das voraus was in der Regel nicht vorhanden ist, wenn man ein Terrain in Bezug auf seine Tauglichkeit für eine Strasse oder Eisenbahn erst kennen lernen will.

In diesem letzteren Falle bleibt nichts übrig als für die vorhin erwähnten durch geometrisches Nivellement bestimmten Fixpunkte einen Ersatz dadurch zu schaffen dass man dergleichen Punkte durch vielfältige Beobachtungen mit dem Federbarometer und Vergleichen derselben mit gleichzeitigen Angaben von Quecksilberbarometern auf ihrer Meereshöhe nach bekannten Standorten herstellt und dann die übrigen Punkte zwischen diesen genauer bestimmten Orten auf die eben angegebene Weise einschaltet.

Es seien z. B. in Fig. 199 M und N zwei Städte deren Meereshöhe

Fig. 199.



aus trigonometrischen Messungen oder aus lange fortgesetzten Barometerbeobachtungen bekannt sind, und auf denen die Beobachtungen am Quecksilber-Barometer noch immer fortgesetzt werden. Zwischen diesen Städten sei das Terrain auf eine gegebene Breite seiner Höhenlage nach darzustellen, und zwar auf Grund von Messungen die mit zwei Federbarometern angestellt wurden. Beide Federbarometer seien vor der Messung unter sich und mit den Quecksilberbarometern in M und N verglichen, und werden nach der Aufnahme in gleicher Weise wieder untersucht. Die beiden Ingenieure welche die verlangte Höhenaufnahme besorgen, seien auf dem Punkte A angelangt und machen daselbst auf ihren Instrumenten Nr I und Nr II die betreffenden Ablesungen, das Instrument Nr II durchwandert hierauf die Punkte 1, 2, 10, 11, 3, 4, B, 5, 6, 7, 8, 9 und kommt nach entsprechender Zeit wieder in A an; alsdann macht das Instrument I das bisher Standbarometer war und von Viertelstunde zu Viertelstunde beob-

achtet wurde, die Runde von A über B nach A, während das Instrument II jetzt die Function eines Standbarometers übernimmt. Ist Nr I wieder in A eingetroffen, so sind die Beobachtungen für die Strecke A B geschlossen und werden nun für die folgenden Strecken B C, C D ... in gleicher Weise wiederholt, bis man am Ende des darzustellenden Terrainbezirks angelangt ist. Dass die Höhen der Punkte A, B, C ... wegen der grossen Zahl von Beobachtungen welche auf ihnen angestellt wurden und denen gleichzeitige Beobachtungen der Standbarometer in M und N entsprechen, genauer gefunden werden können als die aller übrigen Punkte, ist für sich klar.

Die Beobachtungen zur Darstellung der Höhenverhältnisse des zwischen M und N eingeschlossenen Terrains lassen sich auch in anderer Weise anordnen. Wenn es z. B. darauf ankäme die in der Richtung A B C ... gelegenen und die vorläufige Traçe einer Strasse oder Eisenbahn markirenden Punkte 9, 10, 11, 19, 20 ... genauer zu bestimmen als die ausserhalb dieser Linie gelegenen Punkte, so dürfte man nur, nachdem das Instrument I in A als Standbarometer aufgestellt ist und beobachtet wird, den Wanderbarometer Nr II nach 1, 2, 3, 4, B, 11, 10, 9 bringen und beobachten, dann Nr II in A als Standbarometer aufstellen und Nr I als Wanderbarometer nach 8, 7, 6, 5, B, 11, 10, 9 bringen und beobachten. Ebenso würde man von B aus zunächst das Polygon 12, 13, 14, 15, C, 20, 19, B, dann 18, 17, 16, C, 20, 19, B mit dem Federbarometer nivelliren, und von C aus in gleicher Weise fortfahren. Es ist klar dass hierdurch die Punkte der Axe 9, 10, 11, 19, 20 ... doppelt so oft bestimmt werden als alle übrigen mit Ziffern bezeichneten Terrainstellen.

5) Weiteres über Aneroïdbarometer und ihre Verwerthung zu technischen Zwecken, namentlich auch zur Aufnahme von Schichtenplänen in dem Falle wo schon ein Netz von Hauptfixpunkten vorliegt, ist in des Verfassers oben (§. 197, Seite 402) genannter Schrift und in mehreren anderen Werken zu finden, besonders in: Schoder, Hilfstafeln zur barometrischen Höhenbestimmung nebst Anleitung zur Untersuchung und zum Gebrauch der Federbarometer, Stuttgart 1874; Jelinek, über die Constanten der Aneroïde und über Aneroïde mit Höhenscalen, Wien 1875; Jordan, Handbuch der Vermessungskunde Bd I, und dessen Tafeln für barometrische Höhenmessungen, Stuttgart 1877; Schreiber, Handbuch der barometrischen Höhenmessungen, mit einem Atlas von 18 Foliotafeln, Weimar 1877; Herzog, Praktische Anleitung zum Höhenmessen mit Dosenbarometern, Leipzig 1873; Koppe, die Aneroïdbarometer von J. Goldschmid, Zürich 1877; Marcks & Balke, das Terrainrelief, seine Aufnahme und Darstellung, Berlin 1877. (Die hier aufgezählten Schriften haben verschiedenen wissenschaftlichen und praktischen Werth, und sind auch nicht die einzigen welche man zu Rathe ziehen kann.)

Vierter Abschnitt.

Die Grubenmessungen.

A. Technische Ausdrücke der Bergleute und Markscheider.

§. 200. Der geordnete Betrieb der Bergwerke fordert dass man die vorhandenen Lagerstätten nutzbarer Mineralien und die zu ihrer Ausbeutung dienenden Grubenanlagen aufnehmen und bildlich darstellen, sowie die Grenzen von denen die Erstreckung solcher zur Ausbeutung bestimmten Fundstätten, das Grubenfeld, umschlossen ist, auf der Erdoberfläche sowohl als im Erdinneren ihrer Grösse und Lage nach abstecken kann. Derjenige Theil der allgemeinen Vermessungskunde welcher sich mit diesen für bergmännische Zwecke nothwendigen Vermessungen befasst, wird Markscheidekunde genannt (von Mark = Grenze); das Vermessungsgeschäft selbst heisst Markscheiden und derjenige welcher es ausübt, ein Markscheider.

Es handelt sich also auch hier, wie in den beiden vorausgehenden Abschnitten, um Aufnehmen und Abstecken, und so lange der Markscheider nicht in der Grube sondern im freien Felde (über Tage) arbeitet, sind seine Hilfsmittel und Operationen von denen des praktischen Geometers nicht verschieden, oder sollten es wenigstens nicht sein. Eine Verschiedenheit der Instrumente und Messmethoden tritt nur bei Arbeiten in den engen und lichtlosen Grubenräumen ein welche die Anwendung mancher geodätischen Instrumente und Operationen unmöglich machen. Doch hat man auch hier in den letzten Jahrzehnten Mittel und Wege zu finden gewusst, wenigstens die hauptsächlichsten Instrumente der Geodäsie, Theodolith und Nivellirinstrument, in ihrer Construction den localen Verhältnissen anzupassen, so dass jeder wissenschaftlich gebildete Markscheider gegenwärtig auch bei seinen unterirdischen Arbeiten den geodätischen Instrumenten den unbedingten Vorzug einräumt vor den bisher allgemein und fast ausschliesslich verwendeten Markscheide-Instrumenten, dem Hängecompass und Gradbogen welche an vielen Orten ganz unzuverlässige oder doch nur ungenaue Hilfsmittel zur Messung horizontaler und verticaler Winkel darbieten.

In die Lehrbücher der Markscheidekunst wird in der Regel auch die Lehre von den Horizontal- und Verticalmessungen im freien Felde, oder nach bergmännischem Ausdrucke, die Lehre von den Tagemessungen aufgenommen und entweder im Sinne der praktischen Geometer auf die vollkommeneren Messinstrumente der Neuzeit, oder im Sinne der alten Markscheider auf deren unbehilfliche und ungenaue Werkzeuge gegründet. Da wir aber diese Messungen im ersteren Sinne bereits abgehandelt haben, so werden sie nachfolgend nur in so weit berührt werden als sie bei der

Ausführung unter Tage eines abgeänderten Verfahrens bedürfen, oder als Tagmessungen selbst in unmittelbaren Zusammenschluss mit Grubenmessungen gebracht werden müssen.

Da die Markscheidekunst wesentlich nur für den Bergbau vorhanden ist und vorzugsweise von Bergleuten ausgeübt wird, so begreift sich leicht dass in derselben viele bergmännischen Ausdrücke üblich sind welche zunächst dem praktischen Geometer und dem Ingenieur erklärt werden müssen, wenn diese dergleichen Ausdrücke bei den ihnen zukommenden Vermessungen und Absteckungen grosser Tunnel- oder Stollenbauten richtig anwenden oder doch verstehen sollen. Diese Kunstwörter beziehen sich zum Theil auf geognostische Verhältnisse, insofern sie die Lagerstätten der Mineralien betreffen; zum Theil bezeichnen sie die technischen Anlagen und Arbeiten welche zur Aufsuchung und Gewinnung der brauchbaren Mineralien dienen; und theilweise werden sie zur Bezeichnung geometrischer Begriffe gebraucht. Wir theilen nachstehend eine grössere Anzahl bergmännischer Kunstwörter mit, ohne jedoch die Verpflichtung zu übernehmen sie auch da beizubehalten, wo es bereits allgemein gebräuchliche gute Namen zur Bezeichnung von hieher gehörigen Dingen und Begriffen gibt.

§. 201. Geometrische Ausdrücke. Eine söhlige Linie oder Ebene ist mit einer wagrechten, eine seigere mit einer lothrechten Linie oder Ebene gleich bedeutend. Demnach bedeutet Seigerteufe eine in die Tiefe gehende Loth- oder Verticallinie und Seigerebene eine Loth- oder Verticalebene. Unter einer flachen oder tonnlägigen Linie oder Ebene wird jede gegen den Horizont geneigte Linie oder Ebene verstanden. Je nachdem der Anfangs- oder der Endpunkt einer geraden Linie höher liegt, sagt man die Linie fällt oder steigt (in der Richtung vom Anfangs- zum Endpunkt), und der Neigungswinkel welchen die Linie oder Ebene mit einer Horizontalebene durch den gedachten Anfangspunkt einschliesst, heisst das Steigen oder Fallen (auch Fallwinkel). Denkt man sich durch den einen Endpunkt einer geneigten Linie eine horizontale gelegt, und den andern Endpunkt darauf projicirt, so heisst dessen Projection der Seigerpunkt, während die Horizontalprojection der Linie selbst deren Ebensohle oder auch kurzweg Sohle genannt wird. Zieht man durch den Anfangspunkt der Ebensohle die Mittagslinie und denkt sich diese rechtsinnig (in der Bewegungsrichtung des Uhrzeigers) bis zum Zusammenfallen mit der Richtung der Ebensohle gedreht, so heisst dieser Drehwinkel das Streichen oder der „Streichwinkel der flachen oder tonnlägigen Linie."

Zieht man auf einer Lager- oder Schichtenebene oder auf der ebenen Seitenfläche einer Kluft eine wagrechte oder söhlige Linie, so heisst diese die Streichlinie der Ebene. Misst man in der vorhin angegebenen Weise den horizontalen Winkel dieser Linie mit dem Meridian, so hat man den „Streichwinkel des Lagers oder der Kluft," wobei gewöhnlich hervorzuheben ist, ob der magnetische oder astronomische Meridian den

Ausgangspunkt der Messung bildet; im erstern Falle ist die Abweichung des magnetischen Meridians von der wahren oder astronomischen Mittagslinie beizufügen, um das wahre Streichen festsetzen zu können.

Eine in der Lagerebene senkrecht zur Streichlinie gezogene Gerade heisst die Falllinie der Ebene und der Neigungswinkel dieser Linie gegen den Horizont der Fallwinkel der Lagerstätte, zu welcher jene Ebene gehört. Die Ebene des Fallwinkels nennt man die Fallebene der Lagerstätte; der Streichwinkel der Fallebene heisst auch das Kreuzstreichen der Lagerstätte. Die Lage einer Ebene ist durch Streichen und Fallen vollständig bestimmt, sobald noch bekannt ist, nach welcher Weltgegend hin die Falllinie sich neigt oder „einschiesst“ oder „ihre Tonnlage wirft.“ Zur Bestimmung des Fallens gibt man immer nur den spitzen Winkel an, unter Beifügung der Weltgegend. Zieht man durch den Anfangspunkt einer Ebensohle ausser der Mittagslinie auch die Ostwestlinie und projicirt auf dieses ebene Coordinatensystem die Ebensohle, so heisst die Projection auf die Mittagslinie die Breite, und die Projection auf die Ostwestlinie die Länge der söhligen Linie. Man unterscheidet Breiten und Längen je nach der Lage in einem der 4 Quadranten durch positive und negative Vorzeichen in der Weise dass östliche Längen positiv und westliche negativ, nördliche Breiten positiv und südliche negativ genommen werden. Es ist nun auch ersichtlich dass durch Seigerteufe, Breite und Länge die Lage eines Punktes im Raume in Bezug auf einen zweiten vollkommen bestimmt ist. Diese eben genannten drei Grössen (Coordinaten) lassen sich, wie leicht einzusehen ist, aus der Länge, dem Fallen und dem Streichen mit Hilfe der trigonometrischen Functionen Sinus und Cosinus ableiten; man nennt aus diesem Grunde auch wohl die Seigerteufe den Fallsinus, die Sohle den Fallcosinus, die Länge den Streichsinus und die Breite den Streichcosinus. Statt des Wortes abstecken bedienen sich die Markscheider des Ausdrucks abgeben (einen Punkt, eine Linie abgeben), das Aufnehmen nennen sie verziehen und die bildliche Darstellung einen Riss, während das Auftragen einer Aufnahme zulegen genannt wird. Für Horizontalprojection wird das auch sonst übliche Wort Grundriss gebraucht; für erste Verticalprojection oder Aufriss der Ausdruck Seigerriss, und für zweite Verticalprojection das Wort Quer- oder Kreuzriss; während eine Projection auf die Ebene einer Lagerstätte flacher Riss genannt wird.

§. 202. Geognostische Ausdrücke. Die grossen zusammenhängenden Massen welche die Hauptbestandtheile der Erdrinde bilden, heissen Gebirgsmassen. Sind diese Massen auf beträchtliche Erstreckung durch parallele Ebenen in Lagen verschiedener Dicke getheilt, so nennt man sie geschichtet und die Lagen selbst Schichten. Die nutzbaren Fossilien im Gegensatz zu den Gesteinen der Gebirgsmassen treten stets in räumlich geringerer Verbreitung auf und bilden innerhalb jener besondere Lagerstätten welche sich in plattenförmige, massige und un-

regelmässige Lagerstätten gruppiren. Zu den plattenförmigen Lagerstätten rechnet man die Gänge, sowie die Lager und Flötze; zu den massigen Lagerstätten die Stöcke und Stockwerke; zu den unregelmässigen Lagerstätten die Nester, Putzen und Nieren. Die seitlichen Begrenzungsflächen der Lagerstätten werden im Allgemeinen als eben und parallel angesehen und sind gleichwerthig bei seigerer Stellung der Lagerstätte. In jeder anderen Stellung unterscheidet sich eine obere und untere Begrenzung durch andere Schichten, von denen erstere das Hangende oder Dach genannt wird, während letztere das Liegende heisst; die Ebenen welche die Lagerstätte vom Liegenden und Hangenden trennen, sind Salbänder benannt, und der senkrechte Abstand beider heisst die Mächtigkeit der Lagerstätte. Ist die Mächtigkeit eines Lagers im Verhältniss zu seiner Erstreckung sehr gross, so heisst es ein Stock. Erstrecken sich Lagerstätten bis an die Erdoberfläche, so sagt man von ihnen: sie gehen oder streichen zu Tage aus; das Hervortreten selbst an das Tageslicht nennt man auch wohl das Ausbeissen der Lagerstätte.

Der Unterschied zwischen Gängen und Lagern (Flötzen) ist genetischer Natur. Während nämlich letztere dem geschichteten Gebirge parallel eingelagert sind und nur besonders ausgezeichnete Glieder der Formation selbst bilden, erscheinen die Gänge als ausgefüllte Spalten und sind jünger als das sie umschliessende Gebirge. Je nach der Natur der die Spalten ausfüllenden Substanz oder Gangmasse unterscheidet man wieder Gesteinsgänge, Mineralgänge und Erzgänge. Sehr schmale Gänge werden Adern genannt; unter Klüften sind zumeist unausgefüllte Spalten zu verstehen, doch wird der Ausdruck auch mitunter mit Gängen gleichbedeutend gebraucht. In Bezug auf das räumliche Verhalten der Gänge und Klüfte ist zu bemerken dass dieselben, als von den umgebenden Gebirgsschichten unabhängig, zwar an kein bestimmtes Streichen gebunden erscheinen, in denselben Gangformationen jedoch gewisse Hauptstreichrichtungen einzuhalten pflegen. So unterscheidet man z. B. im Erzbergbaue im Königreiche Sachsen:

stehende Gänge,	solche	mit	Streichwinkeln	von	0⁰	bis	45⁰
Morgengänge	„	„	„	„	45⁰	„	90⁰
Spatgänge	„	„	„	„	90⁰	„	135⁰
flache Gänge	„	„	„	„	135⁰	„	180⁰

Der Fallwinkel der Gänge ist meist über 40⁰ und man bezeichnet

schwebende Gänge,	solche	mit	Fallwinkeln	von	0⁰	bis	15⁰
flachfallende	„	„	„	„	15⁰	„	45⁰
tonnlägige	„	„	„	„	45⁰	„	75⁰
seigere	„	„	„	„	75⁰	„	90⁰.

In Bezug auf die Fallrichtung spricht man von rechtsinnig und widersinnig fallenden Gängen, und zwar sind bei ersteren die Falllinien nach gleichen Himmelsgegenden gerichtet, während bei letzteren das Gegentheil stattfindet. Diese Unterscheidung ist jedoch nur klar bei Gängen

von gleichem Streichen; denn bei sehr verschiedenem Streichen fallen zwei Gänge rechtsinnig, wenn ihre Fallrichtungen, vom Kreuzungspunkt ihrer Streichlinien als Drehungsmittelpunkt betrachtet, nach derselben Drehrichtung gekehrt erscheinen, oder wenn ihre Fallrichtungen Winkel einschliessen die kleiner als 90⁰ sind.

Die Streich- und Fallrichtungen der Gänge verlaufen im Allgemeinen zwar ziemlich gerade, erleiden jedoch im Einzelnen auch vielfache Krümmungen; denkt man sich diese Krümmungen beseitigt oder ausgeglichen, so nennt man die so erhaltene mittlere Richtung das Hauptstreichen und Hauptfallen; die Einzelrichtungen im Gegensatz hierzu wohl auch das Specialstreichen und Specialfallen. Verändert ein Gang sein Streichen oder Fallen plötzlich, so sagt man „er kommt aus seinem Streichen oder aus seinem Fallen;" beträgt diese Richtungsänderung nahezu 90⁰, so „schlägt der Gang einen Haken." Von einem Gang der ein stärkeres Fallen annimmt, sagt man „er stürzt sich," bei schwächerem Fallen, „er verflacht sich" oder „er hebt sich." Den Gängen eigenthümlich ist auch das Zerspalten in mehrere Zweige, Trümer genannt, die vom Hauptstamme ausgehend neben einander herlaufen, ja vielfach sich abwechselnd wieder vereinigen und wiederholt trennen. Verschwinden diese einzelnen Zweige durch Engerwerden der Gangspalte und allmähliges oder plötzliches Zusammentreten des umgebenden Gebirges, so „keilt sich der Gang aus" und erleidet eine Zertrümerung. Theilt sich der Gang nur in zwei Hauptäste, so spricht man von „Gabelung," vereinigen sich solche Trümer wieder zu einem einzigen Gange, so „treten die Trümer zusammen." Gänge können sich unter einander mehrfach begegnen und durchschneiden; setzen sie nachher ungestört ihre Richtung fort, so „bilden sie ein Kreuz" und zwar ein „Winkelkreuz" wenn die beiderseitigen Streichlinien nahezu rechtwinkelig sind, ein „Schaarkreuz" wenn dieselben schiefwinkelig zu einander liegen; ist das Streichen beider Gänge nahezu das gleiche, so bilden sie ein „Durchfallkreuz." Die Linie nach welcher sich beide Gangebenen durchschneiden, heisst die „Kreuzlinie." Lässt sich aus der Beschaffenheit der Gangmasse erkennen, welcher der sich durchkreuzenden Gänge der ältere schon vorhandene war, und welcher den bereits bestehenden nachträglich durchsetzt hat, so bezeichnet man letzteren als den „Durchsetzer," wenn eine Lagenveränderung der durch die Gangkluft getrennten Gebirgstheile nicht stattgefunden hat. Liegen dagegen die Theile des getrennten Ganges mehr oder minder gegen einander verschoben, so wird dieses Verhältniss „Verwerfung" genannt, und derjenige Gang welcher die Verschiebung der durch die Gangkluft ohnehin getrennten Gebirgstheile verursachte, der „Verwerfer." Eine Verwerfung ist also eine Bewegung der Gebirgsmassen zur Seite der Gangspalte, die in einem Senken oder Heben des Hangenden oder des Liegenden mit oder ohne Seitenverschiebung sich äussert. Im Allgemeinen ergibt sich der verwerfende Gang als der jüngere, der verworfene als der ältere, so dass man auch umgekehrt aus

der Art der Verwerfungen auf das relative Alter der Gänge schliessen kann. Diese Verwerfungen sind für den Bergmann desshalb von grosser Wichtigkeit, weil denselben ein entscheidender Einfluss auf die Gangveredlung zugeschrieben werden muss, und weil durch sie erzführende Gänge plötzlich ganz abgeschnitten erscheinen und mit vieler Mühe und grossem Kostenaufwand wieder aufgesucht werden müssen. Die hiezu nöthigen Arbeiten nennt man das „Wiederausrichten einer Verwerfung." In den meisten Fällen lässt sich nämlich aus der bekannten geometrischen Lage der Gangebenen auf die unbekannte Lage des verworfenen Gangstückes schliessen, so dass vielfach mit aller Bestimmtheit anzugeben ist in welcher Richtung und in welcher Entfernung der verworfene Gang wieder aufgefunden werden muss. Derartige Aufgaben gehören mit zu den wichtigsten welche der Markscheider zu lösen hat, da von ihrer glücklichen Lösung nicht selten die Existenz eines ganzen Bergbauunternehmens abhängt. Ganz analog wie bei den Gängen kommen den Verwerfungen ähnliche Störungen auch bei Lagern und Flötzen vor und werden wie jene behandelt.

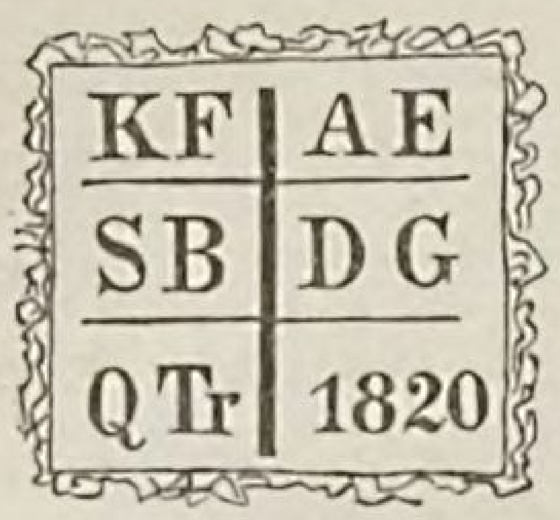
Lager und Flötze sind, wie schon oben bemerkt worden ist, dem geschichteten Gebirge parallel eingelagert und bilden meist selbstständige Glieder der Gebirgsformation ihrer Umgebung. Man bezeichnet als Flötze hauptsächlich die Ablagerungen von Stein- und Braunkohle, Eisenstein und Kupferschiefer welche den Raum der Lagerstätte regelmässig und continuiriich, wenn auch mit wechselnder Mächtigkeit erfüllen, während man mit Lagern die den Formationen conform eingebetteten Lagerstätten, namentlich von Erzen und Steinsalz bezeichnet die bei oft grosser Mächtigkeit nur geringe Ausdehnung in Länge und Teufe besitzen.

Flötze und Lager sind in ihrer ursprünglichen Lage flachfallend, kommen aber auch, wo Störungen eingetreten sind, steil aufgerichtet vor. Die allgemeinen Bezeichnungen sind hier im Ganzen dieselben wie bei den Gängen.

§. 203. Bergmännische Ausdrücke. Man nennt Grubenbau oder Grubenbetrieb jeden zu bergmännischen Zwecken unterirdisch hergestellten Raum. Eine Gesammtheit planmässig zusammenhängender Grubenbaue bildet ein Grubengebäude, Grube oder Bergwerk. Die Gewinnung zu Tage ausgehender Massen nennt man im Gegensatz hiezu Tagebau. Werden Lagerstätten nutzbarer Mineralien in gewisser Teufe zugänglich gemacht, um die in die Höhe reichenden (anstehenden) Fossilien zu gewinnen, so nennt man diese Arbeit ausrichten, aufschliessen, während die Gewinnungsarbeit selbst mit Abbau bezeichnet wird. Der ganze Raum, in welchem ein Grubenbesitzer (Lehenträger, Gewerk, Gewerkschaft) abbauen darf, wird Grubenfeld genannt. Als Marken zur Bezeichnung der Grenzen eines Grubenfeldes dienen über Tage die Rain- oder Lochsteine welches Grenzsteine mit einem den Grenzpunkten entsprechenden Loche auf der Oberfläche sind; in der Grube werden als Grenzmarken Markscheidestufen gehauen. Diese bestehen theils aus

einer eisernen Platte mit einem die Grenze bezeichnenden eingearbeiteten Striche, wie in den Kohlengruben, theils aus einer geebneten rechteckigen Gesteinsfläche von etwa 0,5m Seite welche ausser dem die Grenze bezeichnenden Striche auch die Anfangsbuchstaben der miteinander markscheidenden Gruben, und der bei der Grenzbestimmung anwesenden Beamten nebst der Jahreszahl enthält. Das „Ausrichten der Grubenfelder“ erfolgt durch Stollen oder Schächte, der Abbau in dem einen oder andern Falle sodann durch Stollenbau oder Tiefbau.

Fig. 200.



Der Stollen ist ein möglichst horizontaler von Tage aus in den Berg getriebener und dort oft vielfach verzweigter Grubenbau. War derselbe früher mit besonderen gesetzlichen Berechtigungen und Pflichten ausgestattet, so wurde er Erbstollen genannt. Revierstollen sind sehr grosse und lange Stollen, meistens Erbstollen welche einem ganzen Grubenreviere zur Wasserabführung (Wasserlosung) dienen. Ein vom Hauptstollen in anderer Richtung abzweigender Stollentheil wird Flügelort genannt. Die Stelle in welcher der Stollen von Tage aus in das Gebirge eindringt (unterkriecht), heisst Mundloch, die Stelle an welcher er weiter ins Innere des Gebirges fortgeführt wird, der Feldort des Stollens. Rösche ist der Abzugsgraben welcher die aus dem Stollen kommenden Wasser einem natürlichen Wasserlaufe zuführt, zugleich aber auch ein Ausdruck welcher mit relativem Gefälle identisch ist: man sagt also z. B. „Die Stollensohle hat 1 : 1200 Rösche.“ Wasserseige heisst der untere Theil des Stollens welcher zur Aufnahme des abfliessenden Wassers bestimmt ist. Oberhalb dieser liegen eingebühnte Querschwellen mit aufgelegten Pfosten (Dielen) und bilden das Tragewerk welches zur Förderung und zum Fahren (Gehen) der Bergarbeiter oder der „Belegschaft“ dient. Boden, Decke und Seitenwände des Stollens nennt man bezüglich Sohle, First, Ulmen oder Stösse. Die Dimensionen sind abhängig von den Zwecken des Stollens. Im Gestein getriebene Stollen zu Fahr- und Förderzwecken erhalten 2,5 bis 3m Höhe und 1,3 bis 2m Breite. Für den Raum über dem Tragewerk oder den Fahrraum genügt immer eine Höhe von 1,8 bis 2,0m.

Schächte sind in die Teufe gerichtete lothrechte oder geneigte Grubenbaue mit rechteckigen, runden oder elliptischen Querschnittsformen; sie dienen zur Ausrichtung eines Grubenfeldes unter der Stollensohle oder in „unverritztem“ d. i. unaufgeschlossenem Gebirge zur Förderung, zum Wegschaffen des Wassers der „Wasserhaltung“ mittels Maschinen oder „Künste“, zur Wetterführung oder Mannschaftsfahrung, und führen dem entsprechende Benennungen, als Förderschacht, Treibeschacht, Ziehschacht, Göpelschacht, Kunst- oder Pumpenschächte, Wetterschächte, Fahrschächte; sie werden als Seilschächte bezeichnet, wenn in ihnen das Förderseil geht, als Stangenschächte, wenn das Pumpengestänge eingebracht ist, als Hängeschächte, wenn sie zum Einhängen (Ein-

bringen) von Holz oder sonstigen Materialien in die Grube dienen. Werden mit einem Schachte verschiedene derartige Zwecke verfolgt, so theilt man ihn in dementsprechende Abtheilungen, Trümer genannt; solche Schächte sind dann Hauptschächte, Tiefbauschächte, wenn sie den Hauptbetrieb nach und von den tiefgelegenen Abbauen eines Grubenfeldes in sich aufzunehmen haben. Die Hängebank der Schächte entspricht dem Mundloch der Stollen, und ist die Tageöffnung der Schächte welche gewöhnlich mit einem Treibehaus zum Schutz der Fördereinrichtungen überbaut ist; kleinere derartige Schutzhäuschen werden Kauen genannt. Die Hängebank wird einige Meter über die natürliche Bodenfläche erhöht „aufgesattelt" um Raum für den Absturz der geförderten Berge oder den „Haldensturz" zu gewinnen. Lichtlöcher sind Schächte welche von Tag bis auf den Stollen abgeteuft werden um zur Beschleunigung des Stollenbetriebes oder „Durchörterung des Gebirges" eine grössere Anzahl Angriffspunkte zu gewinnen. Ein blinder Schacht ist ein solcher welcher nicht zu Tage führt; ein Durchschnittsschacht dient zur Verbindung zweier über einander liegenden Bausohlen, während Gesenkschächte unter die vorhandene Bausohle niedergebracht oder abgeteuft sind. Man hat seigere, flache und gebrochene Schächte. Seigere Schächte sind gewöhnlich im Gestein getrieben und heissen dann Richtschächte; flache oder tonnlägige dagegen meist in der Lagerstätte selbst, woselbst sie der Falllinie folgen. Zum Ausrichten der Lagerstätten oder als Tiefbauschächte werden in der Neuzeit nur mehr Richtschächte angelegt und hierbei eine Theilung des Gebirges in Etagen durch Anlage von Strecken vorgenommen. An der tiefsten Stelle d. i. an der Sohle dieser Abtheilungen werden, womöglich auf der Lagerstätte selbst, vom Schachte aus stollenartige Baue, hier Strecken genannt, getrieben welche auch die Bezeichnung Läufe, Feldortstrecken oder Gezeugstrecken führen. Strecken welche vom Schacht aus durch das Gestein bis zur Lagerstätte in der betreffenden Sohle getrieben werden, heissen Querschläge. Streichende Strecken sind im Streichen der Lagerstätte aufgefahren, schwebende in der Fallrichtung, diagonale in einer zwischen Fallen und Streichen liegenden Richtung. Bremsberge sind Verbindungsbaue zweier Sohlen, meist in der Fallrichtung der Lagerstätte, auf der die gewonnenen Fossilien mittels Schienengeleisen und Bremsvorrichtungen auf eine tiefere Sohle gefördert werden. Aehnlichen Zwecken dienen die Rollen, in welche die gewonnenen Massen einfach abgestürzt werden, um in eine tiefere Sohle frei herabzurutschen und dort in die bereitstehenden Fördergefässe, „Hunde" genannt, gefüllt zu werden. Um das Beladen oder Füllen der Fördergefässe in Förderschächten (hier „Tonnen" oder „Gestelle" genannt) rasch und bequem ausführen zu können, sind die Förderstrecken in unmittelbarer Nähe des Schachtes oft bedeutend erweitert, und diese Erweiterungen heissen Füllörter.

Unter Grubenausbau versteht man im Allgemeinen alle die Mittel

welche dazu dienen das Zusammenstürzen der ausgeweiteten Räume zu verhüten. Reicht hiezu die Cohäsion und natürliche Spannung des Gesteins wegen der Grösse des Raumes nicht mehr aus, so muss „Bergversatz“ d. i. Trockenmauerung, „Zimmerung“ d. i. Unterstützung mit Holz, oder endlich „Mauerung“ oder „Ausbau mit Eisen“ zu Hilfe genommen werden. Die Zimmerung in Strecken und Abbauen mit nahezu seigeren Stössen wird Thürstockzimmerung genannt und besteht zumeist aus einer Kappe, zwei Thürstöcken oder Stempeln und einer Schwelle oder Grundsohle die in ihrer Gesammtheit als ein Gezimmer einen den Querschnitt der Strecken sichernden Rahmen bilden. Diese Thürstöcke werden je nach Erforderniss dicht zusammen („Mann an Mann“) oder in grösseren Zwischenräumen, bis 1,0m gestellt, und Firste wie Stösse dann mit Pfählen, Dielen oder Schwarten verzogen (verkleidet). In lockerer und schwimmender Gebirgsmasse wird diese Art der Zimmerung zur Abtreibearbeit (Getriebezimmerung). In Schächten tritt in der Regel in ähnlicher Weise Verwahrung aller vier Seiten durch vollständige Rahmen (Geviere) ein, die langen Hölzer derselben heissen Joche, die kurzen Kappen, und werden durch Zusammenplatten möglichst gut mit einander verbunden. Werden bei der Schachtzimmerung die Seiten oder Stösse nicht mit Brettern verzogen, sondern die Geviere direct über einander gelegt, so entsteht die Schrotzimmerung. Zur Eintheilung des Schachtes in verschiedene Trümer dienen die Einstriche, an welche Bretterverschalungen als Schachtscheider genagelt werden.

B. Grundoperationen in der Grube.

§. 204. Die Arbeiten welche der Markscheider unter Tage vorzunehmen hat, bestehen wie die des Feldmessers in der Bestimmung der gegenseitigen Lage von Punkten und folglich in dem Aufnehmen und Abstecken von Punkten, Linien und Winkeln. Die zusammengesetzten Markscheide-Aufgaben erfordern zu ihrer Lösung eine entsprechende Verbindung von Linien- und Winkelmessungen aus welchen das Resultat oder die Lösung auf mechanischem oder graphischem Wege mit Zugrundelegung der Lehren der darstellenden Geometrie und Trigonometrie abgeleitet wird. Ein völliges Vertrautsein des Markscheiders mit der Lehre von den Messungen, den Regeln und Sätzen der Geometrie und Trigonometrie ist daher unerlässlich für die sichere Lösung zusammengesetzter Aufgaben.

Jede Messung in der Grube muss an einem festen Punkte (Fix- oder Anhaltepunkte) beginnen und schliessen; ausgedehnte Messungen erfordern ausserdem noch feste Zwischenpunkte um spätere Messungen anschliessen zu können. Diese Zwischenpunkte werden auch Signa genannt, wenn von ihnen aus die Messung nach verschiedenen Richtungen weiter gehen soll. Diejenigen Punkte welche nur für kurze Zeit gebraucht werden,

nennt man im Gegensatz zu den Fixpunkten verlorene Punkte. Die Anhaltepunkte werden auf verschiedene Weise und zwar wie folgt bezeichnet.

Beginnt eine Messung an einem Stollenmundloch oder an der Hängebank eines Schachtes, so wird daselbst ein Fixpunkt angebracht der zugleich zur Verbindung der Messung in der Grube mit der Tagemessung dient. Ist in nächster Nähe nur Zimmerung vorhanden, so begnügt sich mancher Markscheider damit in die Kappe eines Thürstockes oder in einen Stempel ein Markscheidekreuz ✠ einzuschneiden, in dessen Mittelpunkt einen Nagel oder ein Senkelhäkchen einzuschlagen und dieses als Fixpunkt anzusehen. Ein solcher Punkt (vgl. Fig. 201) ist aber wegen der mit der Zeit in der Zimmerung eintretenden Bewegung nicht unveränderlich, wesshalb er auch nicht als Fixpunkt von längerer Dauer angesehen werden kann. Sicherer und geeigneter erscheinen besondere Lochsteine oder Fixpfähle aus Eichenholz welche man in nächster Nähe des Mundlochs auf möglichst festen unbeweglichen Grund bis auf die Terrainhöhe versenkt und zur Sicherung vor Beschädigungen mit einem Deckel versieht der bei den Messungen abgenommen wird. Als Anhaltepunkt gilt die Achse eines cylindrischen Loches von 0,06 m Teufe, mit welchem der Stein oder Pfahl auf seiner Oberfläche versehen wird; ausserdem ist seine Lage noch gegen andere unveränderliche Gegenstände im Grund- und Aufriss genau einzumessen. Alle Fixpunkte von Wichtigkeit werden in einem Fixpunktverzeichnisse mit Sorgfalt eingetragen und aufbewahrt, damit sie jederzeit rasch und leicht aufgefunden werden können. So wäre z. B. für einen Anhaltepunkt an der Hängebank eines Schachtes die folgende von einer Skizze begleitete Notiz zu machen.

Fig. 201.

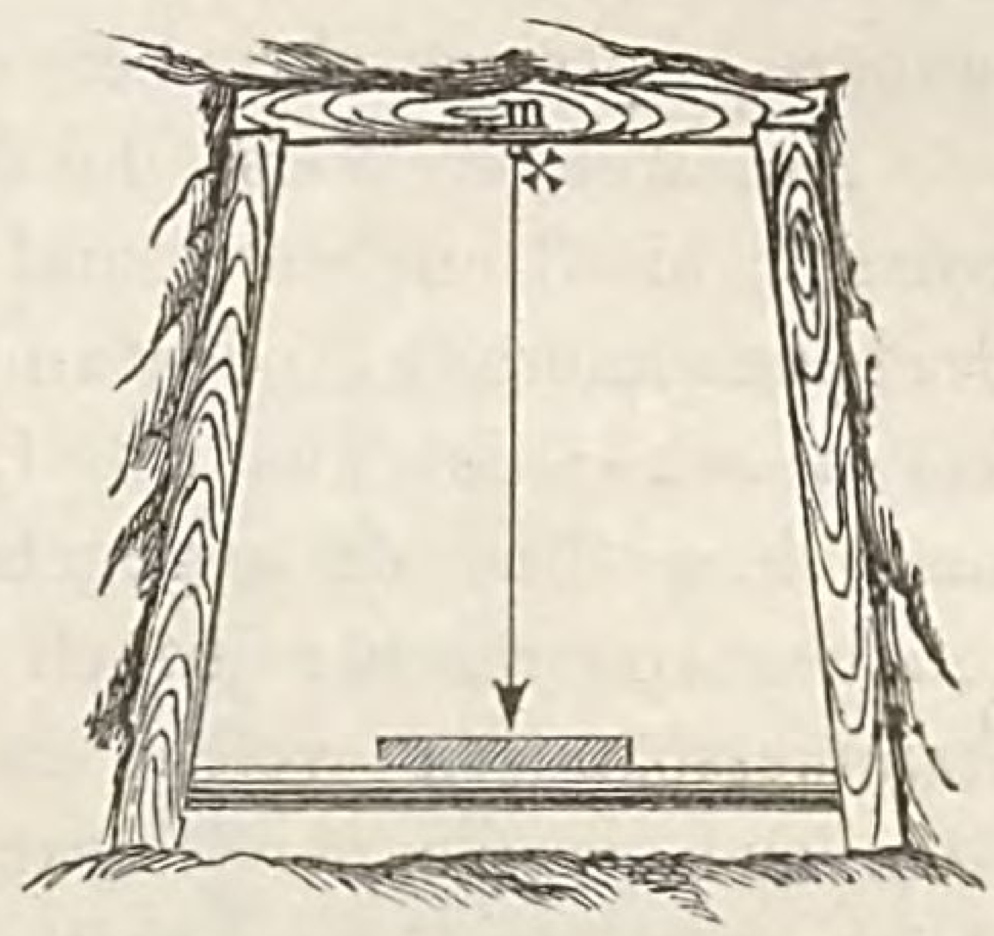
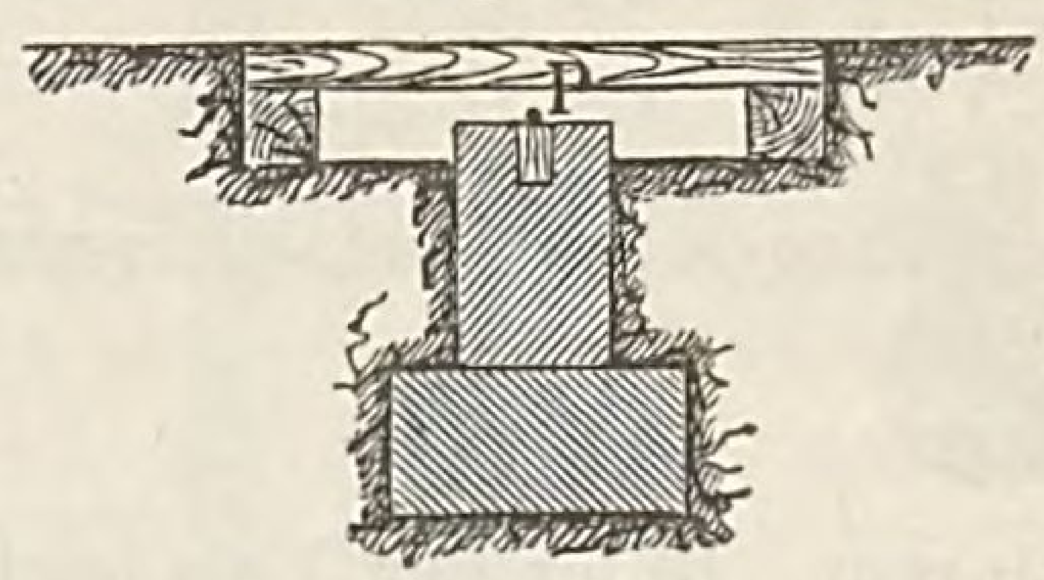
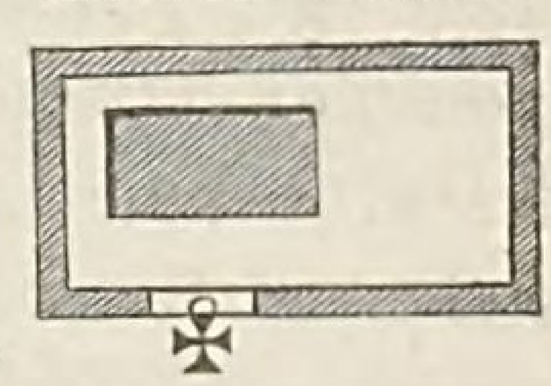


Fig. 202.



Lothpunkt Nr 34 an der steinernen Kappe der westlichen Thüre des Treibehauses über dem Emanuel-Schacht.

Fig. 203.
Emanuel-Schacht.



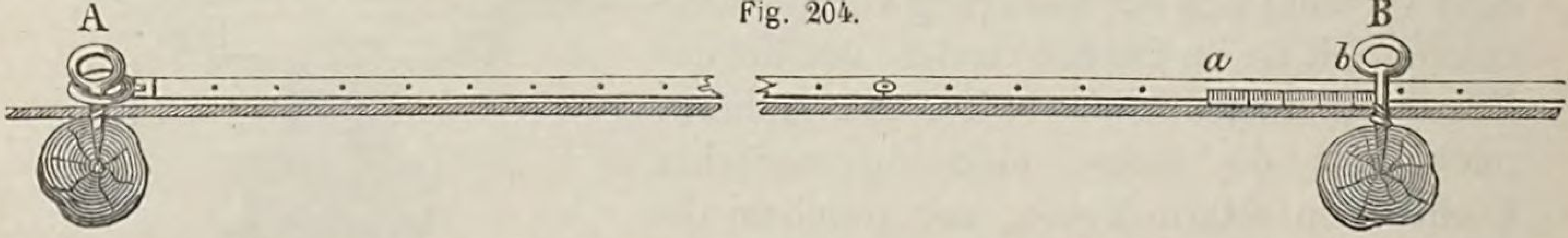
Sehr dauerhaft und einfach herzustellen sind jene Zeichen welche aus einem 0,06 m bis 0,1 m langem hölzernen Dübel bestehen, der ein Punkteisen oder einen einfachen Nagel aufzunehmen hat und in ein Bohrloch in festem Gestein oder in ein solches im Mauerwerk eingetrieben wird; solche Punkte bringt man in den Firsten der Stollen und Strecken oder in den Ulmen derselben an und macht sie durch plattes regelmässiges Abarbeiten der nächsten Umgebung oder durch Einhauen eines Markscheidekreuzes rasch auffindbar und leicht kenntlich. Dieselben Punkte dienen auch als Fixpunkte für die Nivellemente; doch werden hierfür auch besondere Sohlnägel mit massigen Köpfen (Bd I Fig. 105)

angewendet welche in hölzerne Schwellen oder in Ermanglung derselben auf Fixpfähle oder in hölzerne, in Bohrlöcher gesetzte Dübel eingeschlagen werden.

§. 205. Aufgabe. Gerade Linien abzustecken und auszumessen. Das Abstecken von Linien in der Grube muss sich wegen Mangels an Fernsicht und Tageslicht vom Abstecken über Tage wesentlich unterscheiden. Bezeichnen hier die Lichtstrahlen gerade Linien, so dienen in den finsteren und engen Grubenräumen Schnüre, Drähte und Seile, manchmal auch Latten, zur Verkörperung von Linien. An die Stelle der Absteckstäbe treten hier die Markscheider- oder Verziehschrauben, Senkelschnüre, Spreizenschrauben und in besonderen Fällen auch Signallichter.

Auf welche Weise die 50 bis 100 Meter lange, am besten aus Hanfzwirn 2 bis 3 mm stark und nicht zu lose gedrehte Verziehschnur an der Grubenzimmerung, oder an den Spreizen mittels der Verziehschraube befestigt wird, ist aus Bd I, §. 92 bekannt. Die Schnurlängen werden nach dem eben da angegebenen Verfahren mit der Meterkette gemessen, genauer und rascher jedoch mit den in Bd. I, §. 228 näher beschriebenen Stahlmessbändern welche in der Grube bequem in Längen von 20 bis 30 m sich verwenden lassen. Diese Stahlmessbänder gewähren eine ungleich grössere Genauigkeit für die Längenmessung als die Ketten, deren Glieder sich leicht verschlingen und durch straffes Anziehen verlängern

Fig. 204.



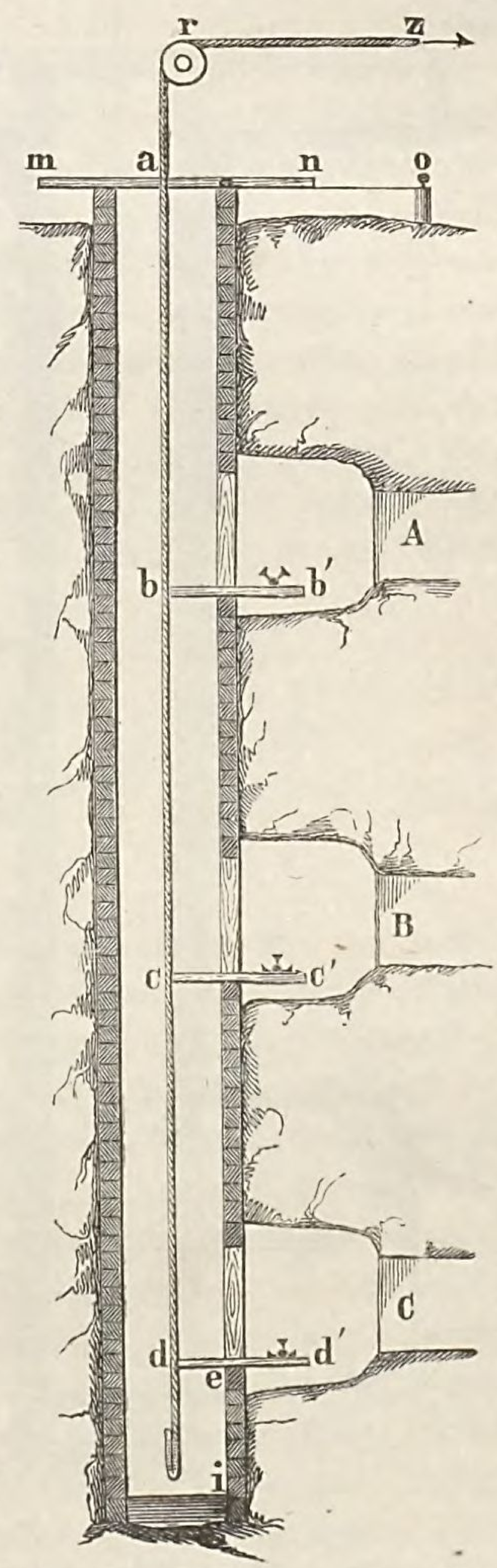
lassen. Unter der Voraussetzung gleicher Verziehschraubenstärken ist das Verfahren beim Ausmessen einer Schnur das folgende, wobei der Markscheider einen Gehilfen, und ausser dem Messband noch einen feingetheilten Massstab von 15 bis 20 cm Länge haben muss. Der Gehilfe hängt den Messbandring dessen Innenfläche den Nullpunkt des Bandes vorstellt, an eine Verziehschraube A an die den Anfangspunkt der Messung bilden soll, während der Markscheider das Messband abwickelnd bis zum Ende der Schnur fortschreitet. An die hier stehende Schraube B wird nun das Band angelegt, straff angezogen und der Abstand der Innenseite der Schraube von der letzten Decimetermarke des Bandes mit dem Massstabe a b abgelesen. Wäre die auszumessende Schnur länger als das zur Verfügung stehende Messband, so würden am besten der Länge des Messbandes entsprechende Zwischenpunkte eingeschaltet und mit Verziehschrauben wie die Schnurenden versehen: die Messung der Schnur ist dann in einzelnen Absätzen wie oben angegeben durchzuführen.

§. 206. Aufgabe. Eine lothrechte oder seigere Linie abzustecken und auszumessen. Diese Aufgabe macht nur dann besondere Einrichtungen nöthig, wenn die Linie von beträchtlicher Länge ist; wir wollen desshalb auch nur diesen letzteren Fall näher ins Auge fassen und

annehmen, es sei die Teufe eines Richtschachtes zu bestimmen, oder es sei der lothrechte Abstand eines Punktes an der Hängebank von anderen in den Sohlen verschiedener Gezeugstrecken des Schachtes liegenden festen Punkten zu ermitteln.

1) Das Verfahren zur Messung der Teufe gestaltet sich am einfachsten, wenn nicht die grösste Genauigkeit der Teufenbestimmung gefordert wird und ein Treibeseil im Schachte vorhanden ist das für die Messung benützt werden kann. Hängt nämlich keine Tonne an dem Treibeseil, so wird dasselbe vermöge seiner starken Belastung durch das Eigengewicht von selbst eine lothrechte Stellung im Schachte annehmen. Man kann nun die Höhenlage der festen Punkte an der Hängebank sowohl als auf den verschiedenen Sohlen mittels horizontal gelegter Latten oder einer söhligen Schnur an das Seil selbst übertragen und an diesem durch Umbinden von Bindfaden die Länge bezeichnen welche der gesuchten Teufe entspricht. Lässt man, nachdem dieses geschehen, das Seil langsam zu Tage treiben, so kann man an der Hängebank durch Abschieben von Messstangen oder Anhalten der Messkette an das Treibeseil die durch die Seilzeichen markirte Länge abmessen. Sind auf diese Weise mehrere Teufen zu messen, so überträgt man zuerst sämmtliche Längen an das Seil und bindet mit dem Seilzeichen zugleich ein Stückchen Holz fest welches die Nummer oder sonstige Bezeichnung jedes Punkts aufgeschrieben enthält, dessen Teufe bestimmt werden soll, und welches zugleich ein Uebersehen des Seilzeichens verhindert.

Fig. 205.

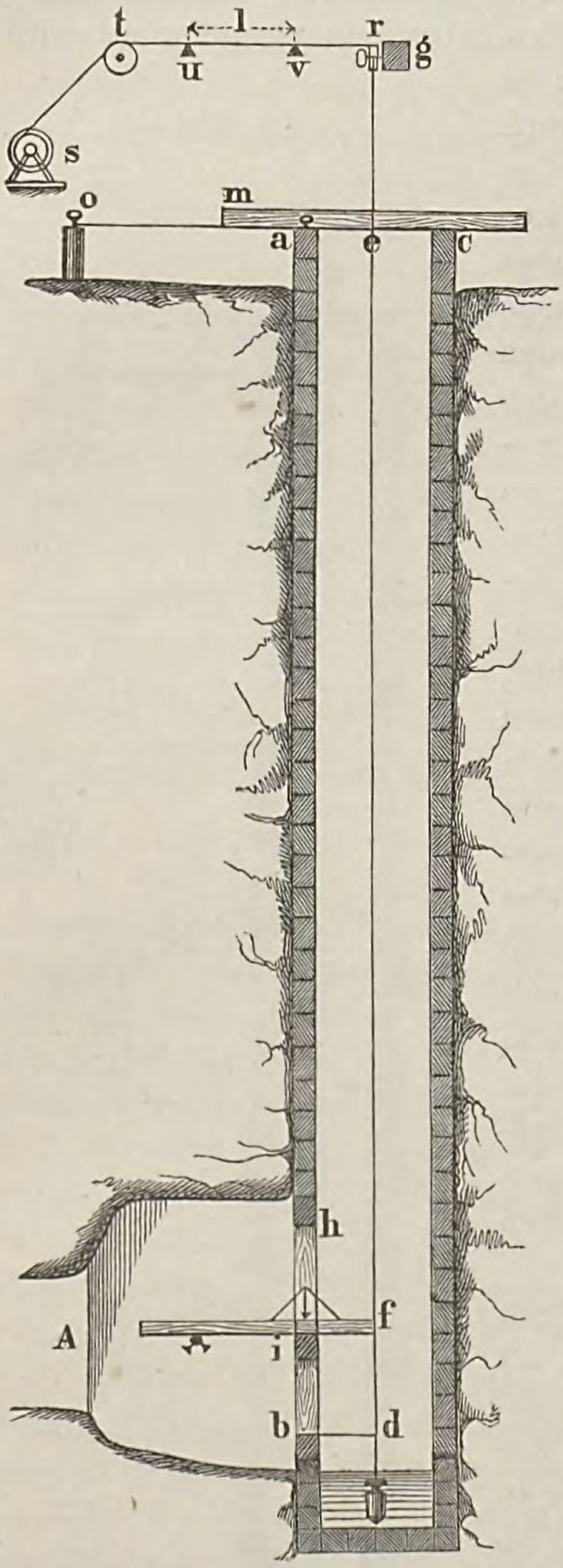


Da das Messen sehr grosser Längen durch Abschieben von Massstäben an den oft stark geschmierten Treibeseilen viele Missstände mit sich bringt, auch durch das Zusammenstossen der Massstäbe leicht Fehler in die Längenbestimmung kommen können, so wendet man, wo es die örtliche Beschaffenheit nur immer gestattet, besser folgendes Verfahren der Teufenbestimmung an.

2) Man hängt einen Messingdraht von 0,6 bis 0,8 mm Stärke (oder eine starke in Leinöl gesottene Verziehschnur) mit einem 3 bis 5 kg

schweren Eisen- oder Messingloth belastet über eine oberhalb der Schachtöffnung befestigte Rolle r in die Tiefe und überträgt die zu messenden Teufen von den einzelnen Anhaltepunkten in den verschiedenen Sohlen durch Anspannen söhliger Schnüre oder durch Setzlatten auf den Draht, an welchem durch schon befestigte Schnurzeichen gut sichtbare Höhenmarken angebracht werden. Der durch das Lothgewicht stets gleichmässig gespannt bleibende Draht ist jetzt durch Aufwinden über eine Rolle s die in beliebiger Entfernung vom Schachte befestigt sein kann, zu Tage zu holen. Zwischen den Rollen r und t sind vorher zwei Marken u und v angebracht worden deren Abstand l beliebig gross gemacht werden kann, jedoch immer so zu wählen ist dass er leicht mit Genauigkeit sich messen lässt. (Ein straff gespanntes Stahlmessband gibt durch seine Endmarken sofort die gewünschte Einrichtung.) An diesen Marken wird während des Aufholens der Draht oder die Verziehschnur vorübergeführt, angelegt und mit Hilfe des durch den Abstand der beiden Marken bestimmten Masses die Entfernung der einzelnen Seilzeichen und somit jede der gesuchten Teufen rasch und sicher ausgemessen.

Fig. 206.



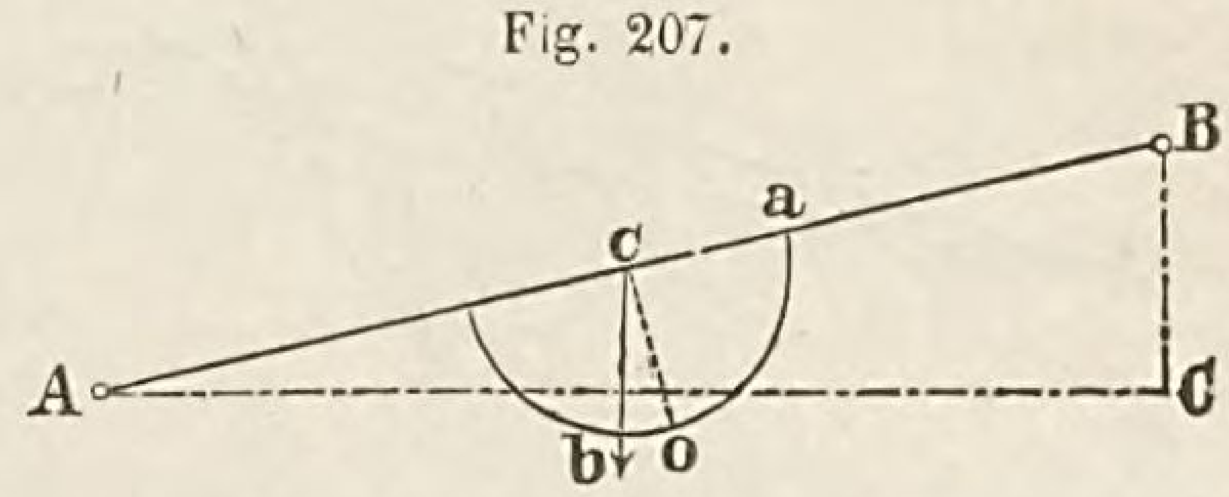
3) Ist der nach seiner Teufe auszumessende Schacht fahrbar, so kann man auch die zu messenden Teufen an den dem Fahrtrume zunächst liegenden Leithölzern des Fördertrums in bekannter Weise söhlig übertragen und hier mit Verziehschrauben oder Nägeln markiren. Von der obersten Schraube wird sodann ein Stahlband von möglichst grosser Länge (es stehen solche von 60 m bis 100 m Länge zu diesem Zwecke im Gebrauch) längs der seiger stehenden Leithölzer in den Schacht eingehängt und mit seinem Nullpunkt an die obere Schraubenseite angehalten. In der Nähe des Messbandendes kann nun vom Fahrschacht aus ein Zwischenpunkt im Leitholz angebracht werden dessen Teufe unter der obersten Schraube sich

nun direct mittels der Messbandlänge und des kurzen Massstabes wie bei der Ausmessung flacher Längen bestimmen lässt. Mit Hilfe einer oben in den Anhängering des Messbandes zu knüpfenden Schnur wird nunmehr das Band bis zu dem eingeschalteten Zwischenpunkte in den Schacht gehängt, um hier aufs neue angehalten zu werden, bis der Abstand eines weiteren Zwischenpunkts genau bestimmt ist. In dieser Art fährt man fort bis die gewünschte Teufe erreicht und so durch unmittelbare Messung auf eine bequeme und sichere Weise die gesuchte lothrechte Länge bestimmt ist.

§. 207. Aufgabe. Den Höhen- oder Tonnlagewinkel einer flachen Linie zu bestimmen. Dieser Winkel kann nach Umständen mit dem Gradbogen, dem Setzniveau oder dem Grubentheodolithen bestimmt werden.

1) Messung des Winkels mit dem Gradbogen. Zur Bestimmung des Neigungswinkels einer durch ihre Endpunkte gegebenen geraden Linie mittels des Gradbogens muss zunächst eine Verziehschnur zwischen diesen Punkten gespannt werden welche die gerade Linie verkörpert und das Anhängen des in Bd I, §. 270 beschriebenen Gradbogens gestattet. Der Gradbogen wird nun aus der vom Markscheider am Leib getragenen und mit der linken Hand zu öffnenden Futteraltasche gezogen, in der durch Abmessen sorgfältig bestimmten Schnurmitte C angehängt und auf seiner Theilung der Stand des Senkelhaares abgelesen, womit der Tonnlagewinkel gefunden ist. Selbstverständlich muss vom Senkel des Gradbogens jeder Luftzug sorgfältig abgehalten und erst dann abgelesen werden, wenn das Loth völlig zur Ruhe gekommen ist. An steilen Schnüren ist der Gradbogen vor dem Herabrutschen zu schützen durch Vorstecken von Schnurklammern am oberen Ende und durch Einstecken einer Nadel in den Schlitz des unteren Hakens. Hat man den Winkel auf der einen Seite der Schnur abgenommen, so kann man, wenn es der Raum gestattet, den Gradbogen umhängen und so den Tonnlagewinkel der Schnur zum zweiten Male bestimmen. Sind beide Abnahmen verschieden, so sieht man das arithmetische Mittel der Ablesungen als den richtigen Tonnlagewinkel an. Zum Zwecke des Ablesens hält der Markscheider das Grubenlicht so vor den Gradbogen dass der Lichtreflex an der Gradbogentheilung mit der Ablesestelle zusammenfällt. Es muss dabei darauf geachtet werden dass das Senkelhaar genau an der Theilungsebene anliegt, damit jede Parallaxe bei der Ablesung vermieden wird. Unmittelbar nach der Ablesung wird der Gradbogen wieder eingepackt, indem die linke Hand des Markscheiders den Deckel der Tasche öffnet, und die rechte den Gradbogen so gegen die Tasche führt dass zunächst das Loth durch die eigene Schwere in das Futteral gleitet und der Gradbogen selbst an seine

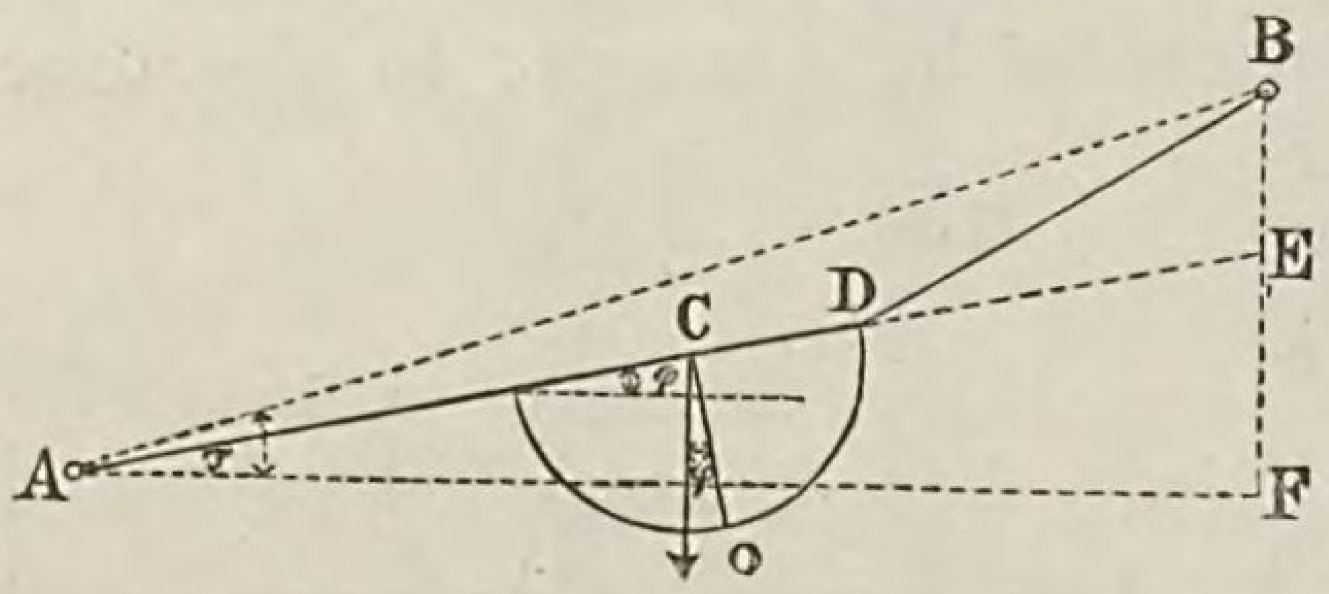
Fig. 207.



Stelle in der Tasche kommt. Reisst trotz aller Vorsicht das Senkelhaar (was immer vorkommt, wenn der Gradbogen durch einen Stoss an die Schnur von dieser abgeworfen wird), so muss ein frisches Haar aus dem stets bereit zu haltenden Vorrathe eingezogen werden.

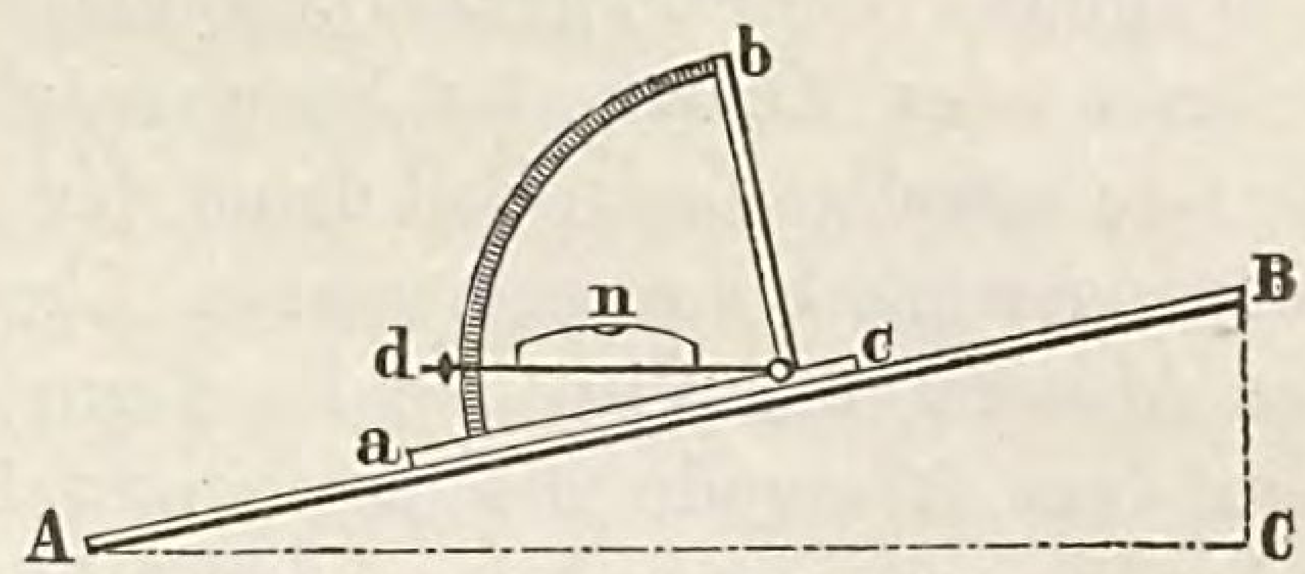
Was die Genauigkeit der Winkelablesung anlangt, so kann man bei der üblichen Eintheilung des Grades in 5 Unterabtheilungen = 12 Minuten bequem Zehntelgrade = 6 Minuten schätzen, und bei einiger Uebung auch noch halbe Zehntel = 3 Minuten ablesen. Diese Ablesungsgenauigkeit von 3 Minuten entspricht jedoch keineswegs dem in der Bestimmung des Tonnlagewinkels der Linie oder Schnur zu erwartenden Fehler der bei einmaliger Messung wenigstens zu 5 Minuten sich ergibt. Selbst bei der Anwendung der grössten Sorgfalt die man auf die Messung und ihre Wiederholung mit umgehängtem Gradbogen verwendet, lässt sich eine grössere Genauigkeit als 3 Minuten nicht erreichen. Der Grund hiervon ist ausser im Vorhandensein von Excentricitäts- und Indexfehlern namentlich in der meist fehlerhaften Aufhängung des Gradbogens an der Schnur zu suchen. Da diese nämlich keine starre Linie ist, so muss sie sich zunächst durch ihr Eigengewicht, noch mehr aber durch das an Stelle der beiden Haken concentrirte Gradbogengewicht biegen, und zwar um so mehr, je grösser das Gewicht des Gradbogens und je geringer ihre eigene Spannung ist. Die Ablesung am Gradbogen gibt dann nicht den Tonnlagewinkel der geraden Verbindungslinie der Schnurenden, B A F = τ, sondern nur des Schnurstückes zwischen den beiden Hakenarmen (E A F = φ). Bei einem bekannten Unterschiede der Höhenlage der Schnurenden, sowie bei gegebener Schnurlänge und deren Spannung ist es nicht gerade schwer die Stelle der Schnur zu berechnen, an welcher der auch seinem Gewichte nach bekannte Gradbogen angehängt werden muss, damit seine Aufhängelinie parallel wird mit der Verbindungslinie der Schnurenden; praktisch jedoch ist ein solches Verfahren aus leicht einzusehenden Gründen nicht. Man hat daher auf Grund von Versuchen empirische Regeln aufzustellen gesucht, wonach die beste Aufhängestelle des Gradbogens an der Schnur sich rasch und sicher bestimmen lassen sollte. Neuere Versuche hierüber hat Professor Junge in Freiberg angestellt und in der Berg- und Hüttenmännischen Zeitung vom Jahre 1862 veröffentlicht, aus denen sich ergab dass, um möglichst richtige Tonnlagewinkel geneigter Schnüre mit dem Gradbogen zu erhalten, dieser nicht in der Mitte der Schnur, sondern um 0,588 der Schnurlänge vom unteren Ende entfernt aufzuhängen sei. Es ist sonach die Verrückung des Gradbogens vom Schnurmittel gegen das obere (höhere) Ende hin der Schnurlänge proportional.

Fig. 208.



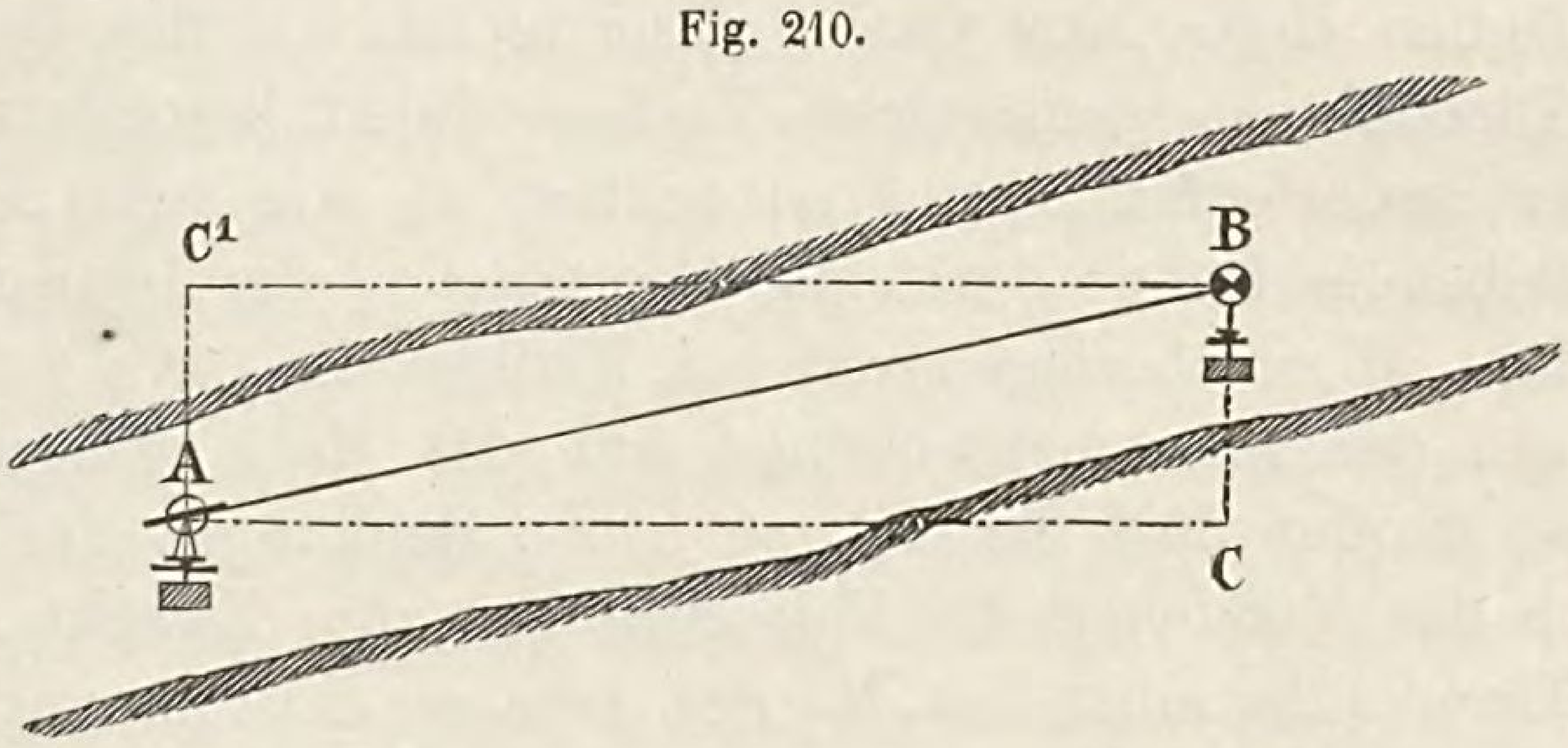
2) Messung des Winkels mit dem Setzniveau (Fig. 209). Stellt A B eine feste unbiegsame Latte vor und wird auf derselben ein eingetheilter Quadrant a b c der auf einem messingnen Lineale ruht, vertikal und so aufgestellt dass die Linie a c welche durch den Nullpunkt der Theilung geht, mit der tonnlägigen Linie A B parallel läuft, so gibt die durch die Libelle n horizontal gestellte Alhidade c d mittels des bei d befindlichen Nonius den Tonnlagewinkel B A C = a c d bis auf einzelne Minuten an. Ueber die nähere Einrichtung des durch a b c angedeuteten Setzniveaus sehe man Bd I, §. 275.

Fig. 209.



3) Messung des Winkels mit dem Grubentheodolithen (Fig. 210). Diese Messung gestaltet sich am einfachsten, wenn die geneigte Linie A B an

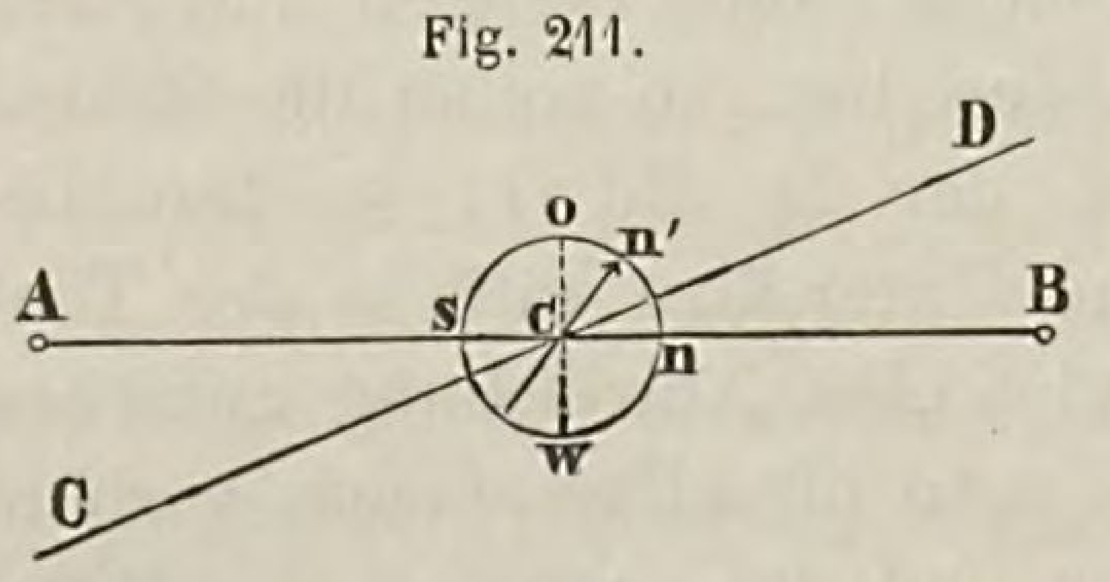
Fig. 210.



ihren Endpunkten (A) durch die Visirhöhe eines Fernrohres und durch den Mittelpunkt B der Zieltafel eines Grubensignals vorgestellt wird. Man hat in diesem Falle nur das Fernrohr des gut horizontirten Theodoliths auf den Signalmittelpunkt zu stellen und kann dann durch Ablesen des Höhenkreises den Höhenwinkel B A C finden. Will man auch noch den Teufenwinkel A B C′ bestimmen, so kann man die Untersätze von Theodolith und Signal stehen lassen, den Theodolith mit dem Signal vertauschen, von B nach A zurückvisiren und so auch den Winkel A B C′ finden. Vorausgesetzt dass Theodolith und Signal gleiche Höhe besitzen und diese auch nach der Vertauschung sich nicht geändert hat, so sollen die Höhen- und Teufenwinkel genau gleich sein; bei der in Bd I, §. 186 beschriebenen Einrichtung der Lichtsignale und Untersätze fällt in der That die Visirlinie A B mit B A zusammen. Findet eine Abweichung zwischen beiden Ergebnissen trotzdem statt so kann man dieselben einem vorhandenen Indexfehler am Höhenkreis zuschreiben und das arithmetische Mittel als den richtigen Verticalwinkel ansehen. Diese so gefundenen Verticalwinkel werden bei Theodolithzügen ausser für die Bestimmung der Seigerteufen meistens dazu benützt, die flach gemessenen Entfernungen zwischen

zwei Instrumentenständen auf den Horizont zu reduciren, oder was dasselbe ist, die söhligen Entfernungen zweier Stationspunkte zu ermitteln. Die flachen Längen können jedoch nicht von der Fernrohrdrehaxe bis zum Signalmittelpunkt (oder umgekehrt) gemessen werden, sondern nur zwischen den Spitzen oder Kehlen der Spreizenschrauben, auf welche Theodolith und Signale befestigt sind. Soll daher der gemessene Verticalwinkel dem wahren Neigungswinkel der gemessenen Länge gleich sein, so muss nothwendig der Abstand der Visirlinie im Fernrohre von der Spreizenschraube gleich sein dem Abstande des Signalmittels von der entsprechenden Stelle der Schraube, oder einfacher ausgedrückt, Signal und Instrument müssen gleiche und constante Höhe besitzen; es darf sich also dieser Abstand auch nicht ändern, wenn Theodolith und Signal vertauscht werden. Eine solche Vertauschung macht bei der gewöhnlichen Dreifussaufstellung immer eine neue Horizontirung des Instruments mittels der Fussschrauben nothwendig und bedingt somit eine Veränderung in der Höhenlage der Fernrohrdrehaxe, wenn nicht besondere Vorkehrungen in der Construction des Theodolithen dagegen getroffen sind. Aus diesem Grunde ist vor der Benützung der mit einem Theodolithen gemessenen Verticalwinkel besonders für die Berechnung der Seigerteufen darauf zu achten, in wie weit die Forderung „constant bleibender Höhe“ durch die Construction der Instrumente erfüllt ist. Ausserdem ist zu überlegen welchen Einfluss die etwa vorkommenden Veränderungen der Instrumentenhöhen auf das Messungsergebniss üben. Bemerkt mag werden dass die Hebungen und Senkungen der Fernrohraxe welche durch das Verstellen der Fussschrauben zum Zwecke der Horizontirung des Theodoliths entstehen, in der genauen Bestimmung des Höhenwinkels immer Fehler verursachen, dass diese Fehler jedoch wegen ihrer Geringfügigkeit bei der Reduction der flachen Längen auf den Horizont die Genauigkeit der Längenbestimmung nicht über das zulässige Mass beeinträchtigen. Sich gleichbleibende (also constante) Unterschiede in der Höhe von Theodolith und Signal, selbst bis zu mehreren Centimetern, lassen sich übrigens ziemlich unschädlich für die Berechnung söhliger Längen und auch für die Bestimmung der Seigerteufen machen, wenn man Höhen- und Teufenwinkel, wie oben gezeigt, misst und das arithmetische Mittel aus beiden Winkeln als Neigungswinkel der Schnur annimmt.

Fig. 211.



§. 208. Aufgabe. Den Streichwinkel söhliger oder flacher Linien zu bestimmen.

1) Schneidet die gegebene Linie A B deren Streichwinkel gefunden werden soll, eine andere Gerade C D deren Neigung gegen die Mittagslinie bekannt ist, und gestattet der Raum das Aufstellen eines Theodolithen und der zugehörigen Signale, so erhält man den Streichwinkel der Geraden A B am genauesten, wenn man den Horizontalwinkel der Linien A B und C D zu

dem vom Nordpunkte aus gezählten Azimuth der letzteren addirt, oder von ihm subtrahirt, je nach der Lage der Linien.

2) Ist die Verwendung eines Grubentheodolithen mit Compassaufsatz möglich, die Linie mit bekanntem Azimuth schneidet aber die gegebene Linie A B nicht, sondern befindet sich räumlich von derselben vollständig getrennt, z. B. über Tage, so ist die Lösung vorstehender Aufgabe in folgender Weise ausführbar. Man stellt zunächst den Grubentheodolithen in einem Endpunkte A der Linie A B mit gegebenem Azimuth $= w$ auf, bringt die Visirlinie in die Richtung A B und bestimmt aus den Ablesungen an beiden Enden der Magnetnadel im Compass den Streichwinkel w' der Linie A B gegen den magnetischen Meridian. Die Differenz $w' - w = d$ ist zugleich die Grösse der magnetischen Declination im Moment der Beobachtung. Stellt man unmittelbar darauf den Grubentheodolithen in dem einen Endpunkte C der Linie C D auf, visirt nach D und nimmt das Streichen s' dieser Linie gegen den magnetischen Meridian durch Ablesen beider Nadelenden im Aufsatzcompass ab, so gibt nunmehr die Differenz $s' - w' = \alpha$ die Azimuthdifferenz der Linien A B und C D welche unter Berücksichtigung des Vorzeichens zum Winkel w addirt, den Streichwinkel $s = w \pm \alpha$ der Linie C D gegen den astronomischen Meridian (wahres Streichen) finden lässt. Vorausgesetzt ist dass sich in der Zeit zwischen beiden Theodolithbeobachtungen in den Punkten A und C die Declination der Magnetnadel nicht geändert habe. Man verschafft sich hierüber Gewissheit dadurch dass man nach der Messung in C den Theodolithen nach A zurückbringt und hier den Stand der Magnetnadel wiederholt beobachtet, während das Fernrohr nach B gerichtet ist. Ist eine Declinationsänderung in der Zwischenzeit eingetreten, so erhält man nun als Streichwinkel von A B einen etwas anderen Werth w'' als bei der erstmaligen Beobachtung und verwendet dann für die Berechnung der Azimuthdifferenz den Mittelwerth zwischen w' und w'', wodurch der Einfluss der Declinationsänderung auf die Bestimmung des Streichwinkels der Linie C D möglichst unschädlich gemacht wird.

3) Soll das Streichen der gegebenen Linie A B mit dem Hängecompass ermittelt werden, so hängt man diesen auf die aus Band I, Fig. 212 näher ersichtliche Weise an eine von A nach B gespannte Verziehschnur (und zwar, um Schwankungen des Hängezeugs zu vermeiden, in der Nähe des einen Schnurendpunkts) in der Art auf dass sein Nordpunkt in die Richtung von A nach B zu liegen kommt. Man löst jetzt die bisher geschlossene Nadelarretirung und sucht durch passendes Neigen der Compassbüchse (wobei man die Nadelspitze das Deckelglas streifen lässt) die Nadel möglichst zur Ruhe zu bringen. Sobald die Schwingungen der Nadel aufgehört haben, liest der Markscheider zunächst am Nordende ab, wobei er sich, um Parallaxe zu vermeiden, so zu stellen hat dass die Compassnadel vom Auge nur in ihrer Oberansicht gesehen wird. Das Leuchten zu diesem Geschäft besorgt der Markscheider am besten eigenhändig, indem er die

Flamme des Lichts in die Verlängerung der Nadel, etwas über den Compassrand und möglichst nahe an diesen bringt. Ist am Nordende die Ablesung in Graden und Zehntelgraden erfolgt, so liest man auch am Südende die Zehntelgrade ab, und betrachtet die am Nordende gelesenen Grade unter Hinzufügung des Mittels aus den beiderseits gelesenen Zehntelgraden als den Streichwinkel der Linie gegen den magnetischen Meridian (beobachteter oder observirter Streichwinkel). Ehe man diesen Werth in das Zugbuch einträgt, wird man zur Controle der erstmaligen Messung das Hängezeug an der Schnur etwas verschieben, die Nadel dabei noch einmal zum Schwingen bringen und nachsehen, ob ihre Enden sich wieder ebenso einstellen wie zuvor oder nicht. Sollten merkliche Abweichungen stattfinden welche nur localen Einflüssen zugeschrieben werden können, so hat man sich zu überzeugen ob diese sich beseitigen lassen, oder nicht, und hiernach seine weiteren Massnahmen zu treffen.

Bei der Bestimmung des Streichens von steilen Schnüren kann man den Compass vor dem Herabgleiten an der Schnur in gleicher Weise wie den Gradbogen schützen; gewöhnlich aber zieht man es vor, das Streichen in diesem Falle an schlaff gezogenen Schnüren abzunehmen, da man hiedurch zugleich den Einfluss der Fehler am Hängezeug auf die Winkelmessung verringert. Will man den beobachteten Streichwinkel auf die Mittagslinie beziehen, so muss er um die Abweichung der Magnetnadel vergrössert oder verkleinert werden, und in dieser Gestalt heisst er der verbesserte (reducirte) Streichwinkel oder auch das wahre Streichen.

Bezeichnet δ die Abweichung der Magnetnadel und ist w der auf einem von rechts nach links (widersinnig) in 360^0 oder 24 Stunden getheilten Compass beobachtete Streichwinkel, so ist der verbesserte Streichwinkel bei der östlichen Abweichung der Magnetnadel $w' = w + \delta$ und bei der westlichen Abweichung gleich

$$w'' = w - \delta \tag{396}$$

Da in diesem Jahrhunderte die Declination der Magnetnadel für Deutschland westlich bleibt so hat man hier, bei widersinnig getheilten Gradringen, fortwährend nur die letzte Formel anzuwenden.

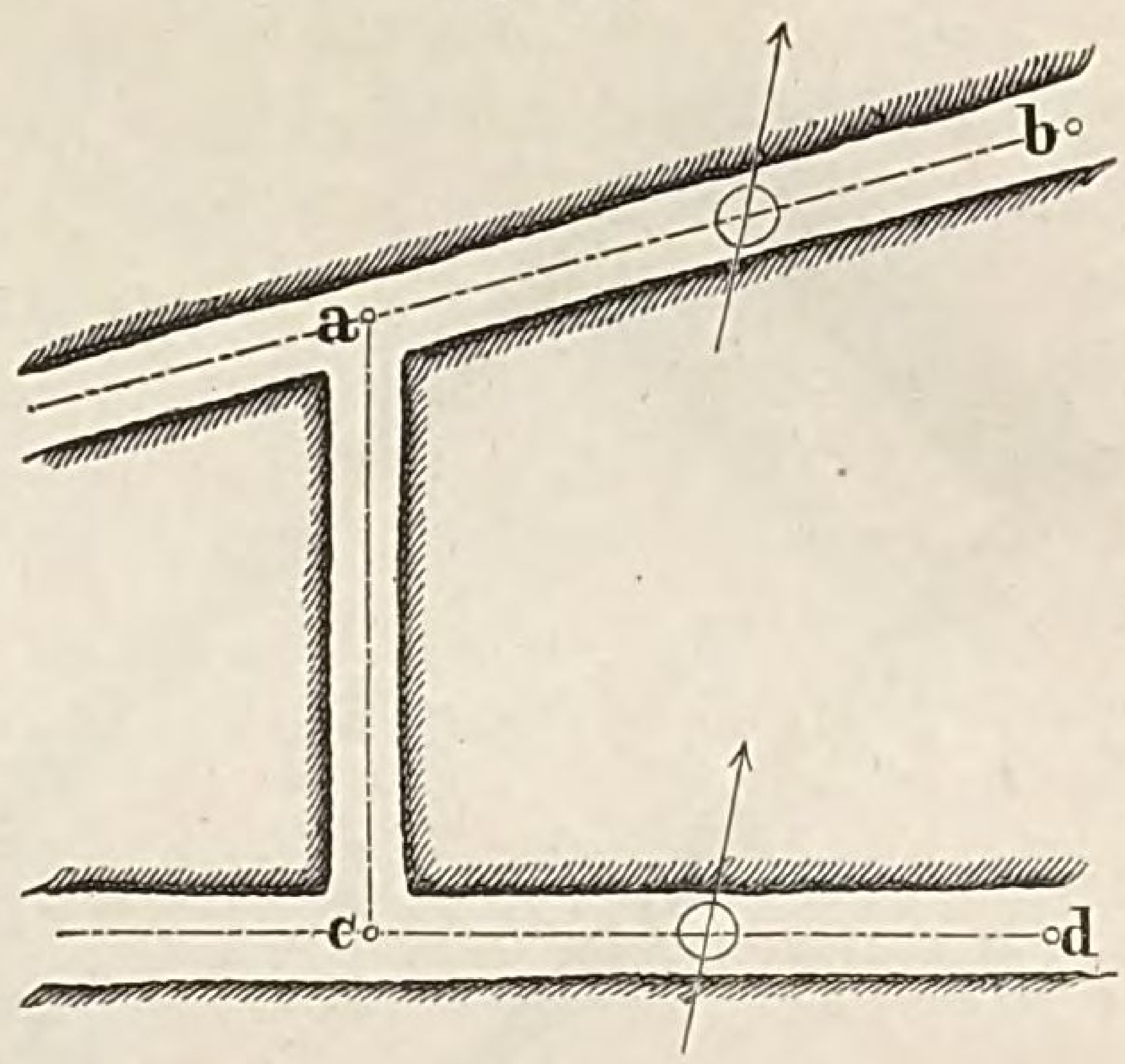
§. 209. Aufgabe. Den Neigungswinkel zweier geraden Linien zu bestimmen.

Schneiden sich die Geraden a b und c d (Fig. 212) und lässt sich im Schnittpunkte ein Theodolith aufstellen so misst man die gesuchten Winkel mit diesem Instrument ohne Zweifel am genauesten. Wenn die beiden Geraden sich selbst nicht schneiden oder der Schnittpunkt nicht zugänglich ist, dagegen von einer dritten Geraden a c so geschnitten werden dass sich der Theodolith in den Schnittpunkten a und c aufstellen lässt, so misst man den Winkel b a c $= \alpha$ und a c d $= \gamma$ und berechnet daraus den Neigungswinkel $\beta = \alpha + \gamma - 180$. Ist kein Theodolith zur Verfügung, oder ist ein solcher nicht anwendbar, so bestimmt man das Streichen beider Linien mit dem Hängecompass und berechnet hieraus den Neigungswinkel β.

Ist hierbei der Streichwinkel der Linie c d welche als der rechte Schenkel angesehen werden soll, $= \alpha'$ und der der Linie a b welche somit der linke Schenkel ist, $= \alpha''$, so erhält man $\beta = \alpha' - \alpha''$ so lange beide Linien a b und c d zugleich auf der östlichen oder westlichen Seite der Nadel liegen; liegt dagegen der rechte Schenkel östlich und der linke westlich, so wird, wie man sich leicht überzeugt,

$$\beta = 360^0 + \alpha' - \alpha'' \quad (397)$$

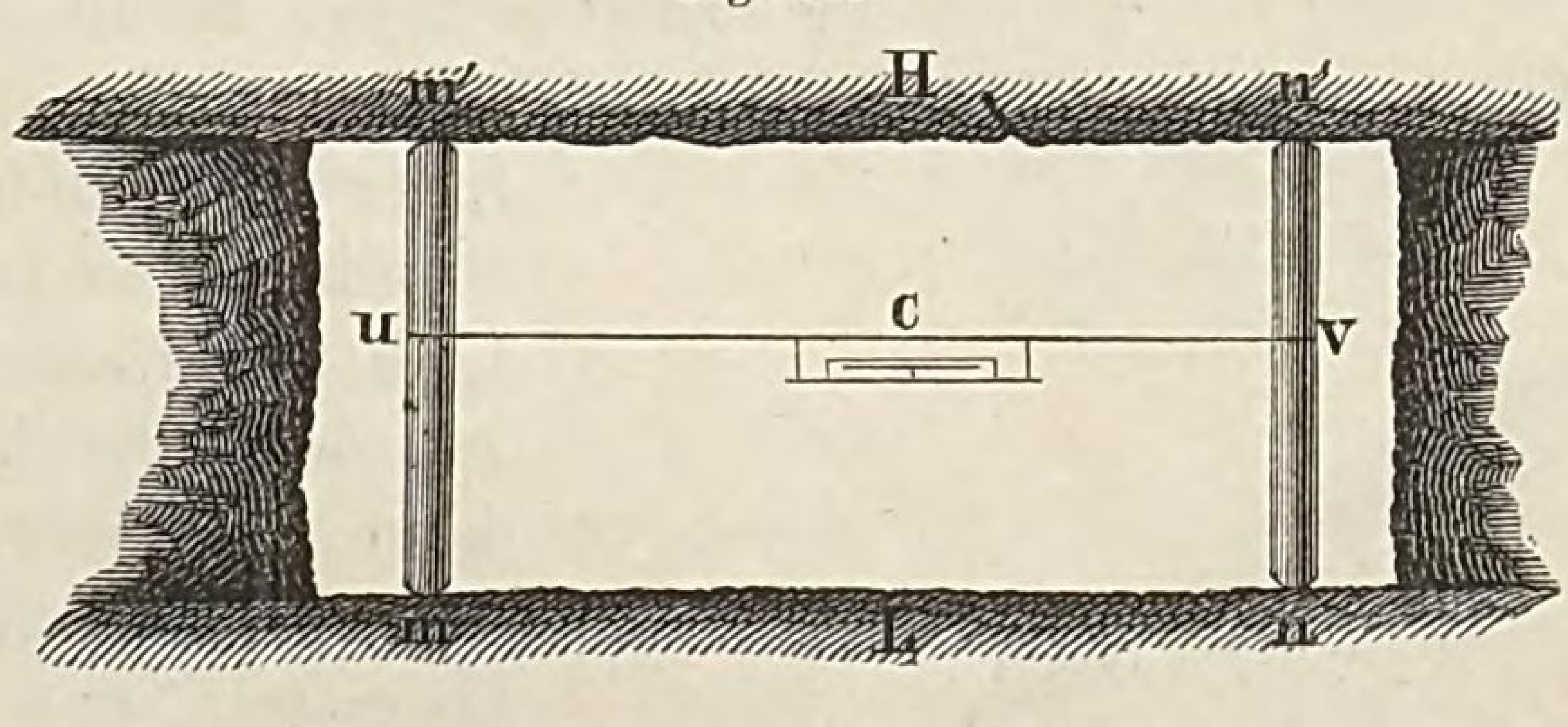
Fig. 212.



§. 210. Aufgabe. Das Streichen und Fallen von Lagerstätten abzunehmen.

Würden die Lagerstätten in der Grube auf grössere Ausdehnung entblösst sein, wie es mit geschichteten Gebirgsmassen über Tage oft der Fall ist, so könnte man mit Latte und Setzwage auf der Lagerstättenfläche eine horizontale Linie, die Streichlinie, abstecken, längs dieser Linie eine Schnur spannen, den Compass aufhängen, das Streichen ablesen und den beobachteten Streichwinkel mit der als bekannt anzunehmenden Declination der Magnetnadel auf das wahre Streichen reduciren. Hierauf

Fig. 213.

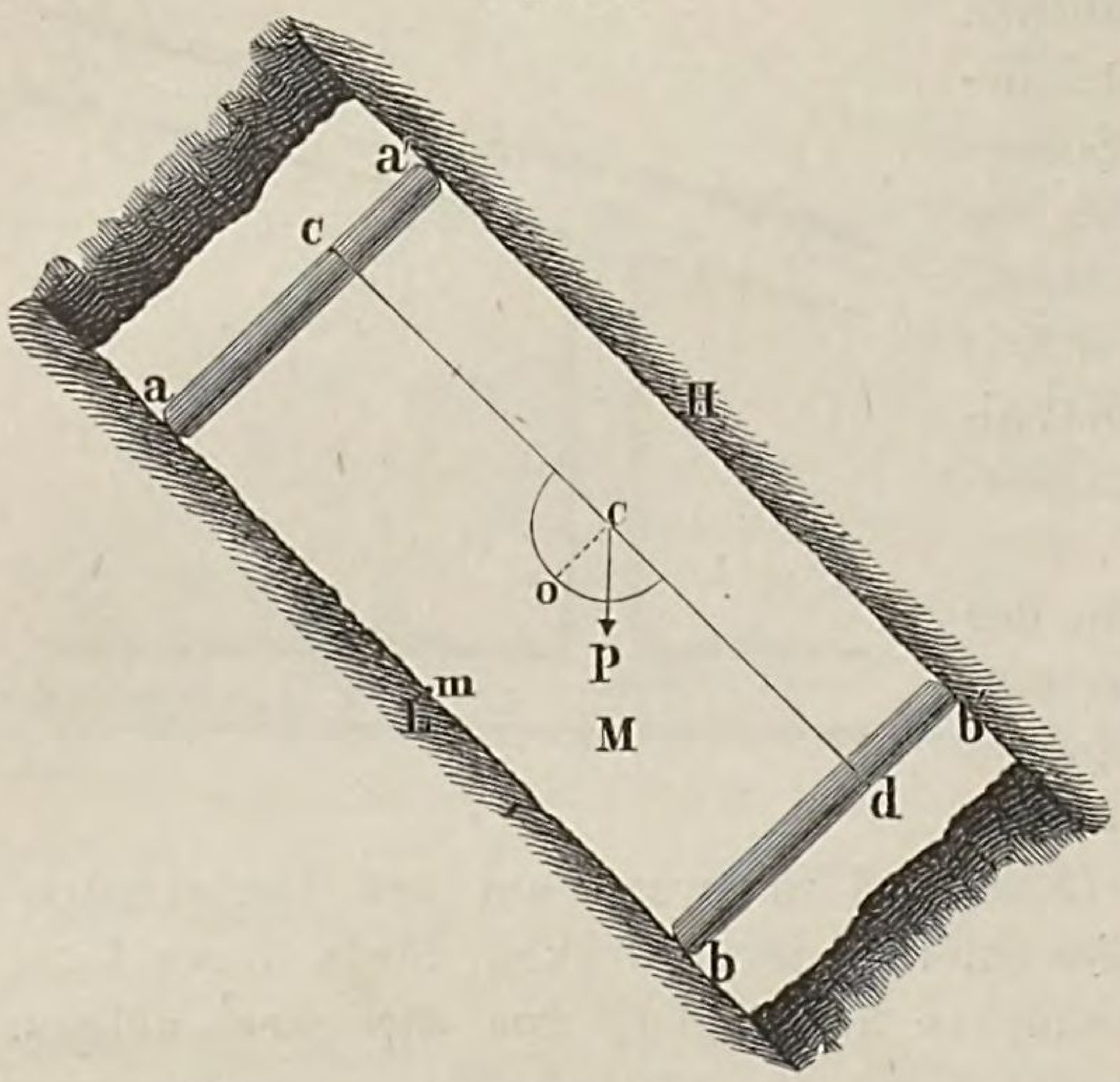


zöge man zu der horizontalen Streichlinie eine in der Lagerstättenebene liegende Senkrechte, spannte in deren Richtung in einiger Entfernung über der Ebene eine Schnur, hinge daran den Gradbogen und würde hieran den Fallwinkel oder das Verflächen der Lagerstätte ablesen können.

In der Praxis des Markscheiders erscheint das vorstehend beschriebene Verfahren zu umständlich und zeitraubend, namentlich da wegen der vielfachen Unebenheiten der Lagerstattflächen Streichen und Fallen an möglichst vielen Punkten bestimmt werden muss, um aus den local verschiedenen Streich- und Fallwinkeln mit einiger Sicherheit das Hauptstreichen und Hauptfallen einer Lagerstatt ermitteln zu können. Auch wird es wegen zu beschränkten Raumes an vielen Stellen nicht möglich sein erst eine Horizontallinie und sodann die zugehörige Senkrechte abzustecken, Stempel zu schlagen,

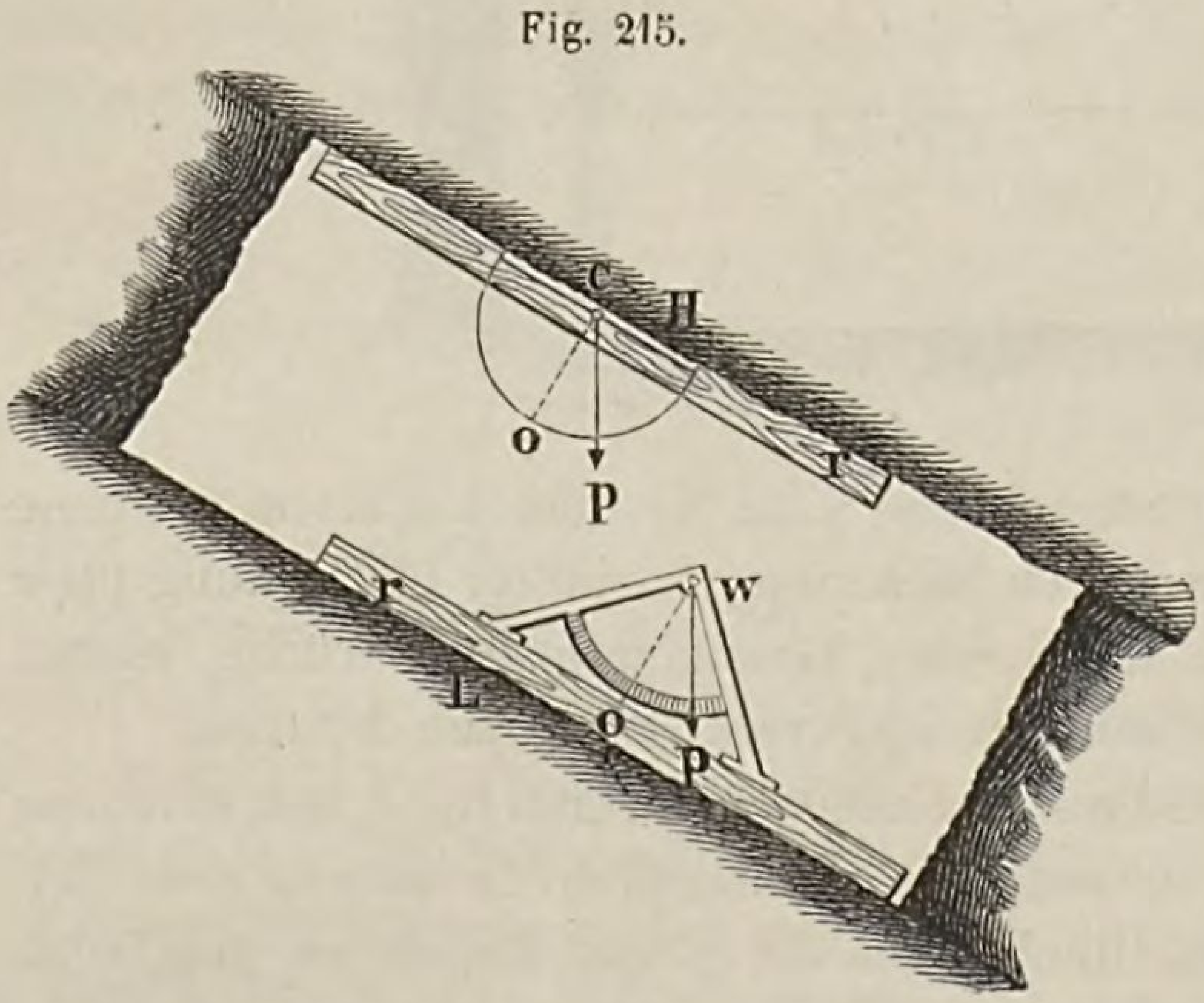
Schnuren zu ziehen und so endlich Streichen und Fallen abzunehmen. Man verfährt vielmehr einfacher und mit einer für die praktische Lösung der Aufgabe vollkommen ausreichenden Genauigkeit folgendermassen.

Fig. 214.



Wenn das Hangende einer Lagerstatt entblösst ist, legt man nach Fig. 215 ein Stück von einer parallelepipedischen Latte an die entblösste Fläche und setzt an die Unterfläche dieser Latte den Gradbogen mit der Oberkante seiner Hakenarme auf. Man kann nun, je nachdem es die Oertlichkeit gestattet, erstens die Latte mit dem angehaltenen Gradbogen so drehen dass der Gradbogen am Senkelhaare die Ablesung Null ergibt: dann bezeichnet die Lage der Latte die Streichrichtung der Lagerstatt. Ihr Winkel mit dem magnetischen Meridian ist dadurch mit dem Compass abzunehmen dass man statt der Latte eine Schnur in die Streichrichtung halten lässt, an diese das Hängezeug bringt und den Stand der Nadel bis auf einzelne Grade genau abliest. Oder man kann zweitens zunächst die Latte mit untergehaltenem Gradbogen so drehen, bis das Loth die grösste Abweichung von der Nullrichtung anzeigt, dann bezeichnet die Lage der Latte die Fallrichtung der Lagerstatt, und es kann der Fallwinkel unmittelbar bis auf einzelne Grade genau abgelesen werden. Im ersten Falle hat man auch noch in ähnlicher Weise wie zuletzt angegeben, den Fallwinkel zu suchen; im zweiten Falle spannt man in der allein als zugänglich gedachten Fallrichtung selbst eine Schnur, hängt an diese den Compass und bestimmt aus dem hieran abgelesenen Kreuzstreichen der Lagerstätte durch Subtrahiren von 90⁰ den Streichwinkel.

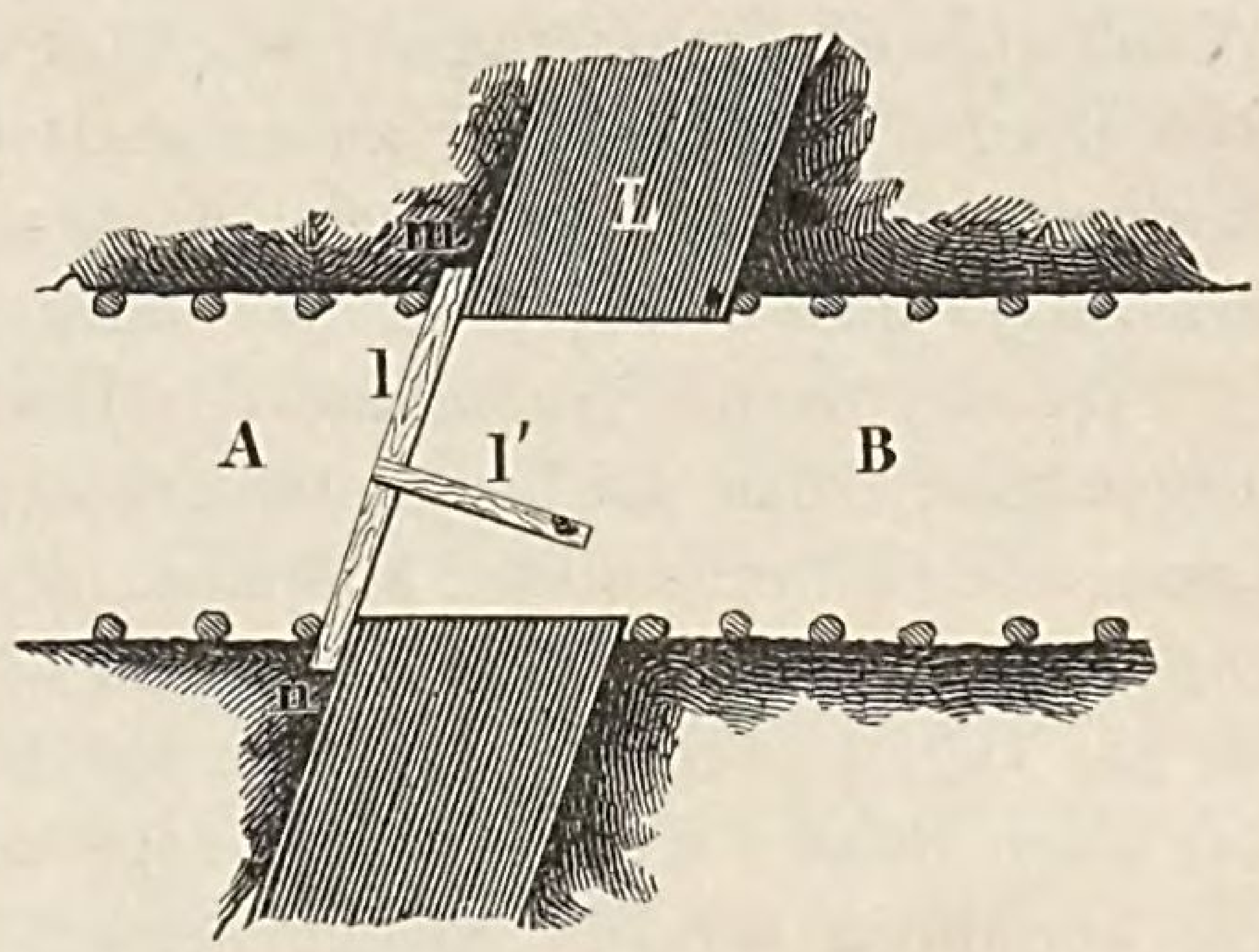
Fig. 215.



Ist nur das Liegende entblösst, so würde man statt des Gradbogens

in analoger Weise ein Setzniveau auf die Latte aufsetzen können, um den grössten oder kleinsten Neigungswinkel und demzufolge das Streichen und Fallen finden zu können; doch kann man sich auch hier mit dem Gradbogen helfen. Um die Fallrichtung des Liegenden zu finden begnügt man sich meist damit ein Steinchen oder eine Kugel von Thon über dasselbe herabrollen zu lassen, dessen Bahn unmittelbar die Linie des grössten Falles bezeichnet. Auf diese Bahn setzt man wieder eine Latte und nimmt den Fallwinkel mit dem Gradbogen in der Weise ab dass man den Gradbogen unter das frei vorspringende Lattenende hält, oder wo das nicht angeht, dass man den Gradbogendurchmesser welcher parallel der Aufhängelinie liegt, dem Augenmasse nach parallel den Lattenkanten hält und in dieser Stellung den Stand des Lothes abliest. Die Streichlinie wird gefunden wenn man den Gradbogen auf das Liegende selbst legt und zur Fallrichtung rechtwinkelig eine Linie markirt welche die gesuchte Streichrichtung ergiebt. Auf diese Linie setzt man jetzt die Haken des umgedrehten Hängezeuges auf und liest in der durchgeschlagenen Compassbüchse den Streichwinkel am Nordende der Nadel ab. Ein etwas anderes Verfahren wird angewendet wenn eine Lagerstatt mit einer Strecke durchörtert ist, so dass nur an den Stössen die Saalbänder sichtbar sind, Flächenentblössungen aber nicht stattgefunden haben. Man hält in diesem Falle ein Stück Schnur mit dem einen Ende an einen Punkt m des einen Saalbandes der Lagerstatt an und sucht nun mit freiem Auge oder an die Schnur gehängtem Gradbogen einen zweiten Punkt mit der Schnur zu erreichen, der mit dem ersten in einer Horizontalebene liegt, wobei also der angehängte Gradbogen die Ablesung Null ergeben muss. Diese Lage der Schnur entspricht der Streichlinie der Lagerstatt. Der Compass kann jetzt an diese Schnur gehängt werden und man erhält so den gesuchten Streichwinkel. Mit Hilfe eines Lattenstückes und des Gradbogens wird weiter der Fallwinkel zu bestimmen gesucht. Indem man nämlich die Latte l an zwei Punkte der Lagerstattebene in dem Streckenfirste (m) und der Sohle (n) ansetzt, ferner die Latte l′ mit Hilfe des an die Latte l gelegten Gradbogens senkrecht zu der Streichlinie m n errichtet, und endlich in dieser Lage der Latte den Gradbogen unter letztere hält, kann man an diesem den gesuchten Fallwinkel ablesen.

Fig. 216.



Wie das Streichen und Fallen von Lagerstätten auf indirectem Wege mit Hilfe der Rechnung gefunden wird, soll bei den zusammengesetzten Markscheideaufgaben erörtert werden.

C. Von den Markscheidezügen.

§. 211. Erklärungen. Wie der Geometer die Vermessung eines Flurbezirkes an ein vorher aufgenommenes System von Dreiecken und Polygonen anknüpft, ebenso schliesst der Markscheider die Stückaufnahme eines ausgedehnten Grubengebäudes an ein System unter sich verbundener gerader Linien oder an ein Polygon an das er nach Erforderniss entweder auf der Erdoberfläche oder durch unterirdische Räume zieht. Eine solche Verbindung von flachen Linien bildet einen Markscheidezug. Liegt dieser Zug unter der Erdoberfläche, so heisst er ein Grubenzug, anderenfalls ein Tagezug. In vielen Fällen werden Tagezug und Grubenzug so in Verbindung gebracht dass man die gegenseitige Lage der über und unter Tage liegenden Punkte des Zuges bestimmen kann. Das Ausmessen eines Markscheidezuges nennt der Markscheider Verrichten; die Ergebnisse der Messung werden hierbei in das Zugbuch eingeschrieben und sodann in besonders für die Berechnung bequem eingerichtete Tabellen, das Winkelbuch, eingetragen, woselbst nun die Seigerteufen, Sohlen-Längen und Breiten der den Zug zusammensetzenden Schnüre berechnet werden. Endlich wird aus den Berechnungsresultaten der Grund- und Seigerriss des Zuges entworfen, d. h. der Markscheidezug wird zugelegt.

Indem wir die Aufnahme der Horizontal- und Verticalprojection eines Tagezuges, wozu die bekannten Instrumente und Methoden der praktischen Geometrie in Verwendung kommen, als bekannt voraussetzen, beschäftigen wir uns hier nur mit dem Ausführen von Grubenzügen und deren Anschluss an die Tagemessungen. Bemerkt sei hier aber noch dass die Markscheider der alten Schule auch die Tagezüge mit Schnur und Compass verrichten, ein Verfahren welches wegen seiner Umständlichkeit und Ungenauigkeit für unzulässig erklärt werden muss.

§. 212. Aufgabe. Einen Markscheidezug unter Anwendung von Schnur und Compass zu verrichten, einzutragen und zu berechnen.

In jedem einzelnen Falle muss sich der Markscheider, bevor er mit der Verrichtung eines zu bestimmten Zwecken dienenden Zuges beginnt, durch eine vorläufige Befahrung des ihm bisher noch unbekannten Gangs des Zuges genaue Kenntniss über alle besonderen Einzelheiten der Grubenbaue verschaffen welche der Zug berührt. Bei dieser Gelegenheit wird er, ebenso wie der Geometer sich eine Handskizze der zur Aufnahme kommenden Flurbezirke anfertigt, einen Handriss entwerfen in welchem alle zur Aufnahme gehörigen bemerkenswerthen Gegenstände einzutragen sind. Derartige Dinge sind: Vorrichtungen zur Sicherung der Grubenbaue, wie Zimmerung, Mauerung, Bergversatz, Wetterblenden, abzweigende Baue; geognostische Verhältnisse, wie übersetzende Gänge und Verwerfungen, auf die Magnetnadel ablenkend wirkende Massen; endlich Gegenstände die

zur Orientirung und zum Anschluss späterer Züge dienen können, als feste Punkte, Jahrestafeln, Orientirungslinien und dergleichen mehr. Bei dieser vorläufigen Befahrung ist zugleich der Gehilfe über die vorbereitenden Arbeiten für die Messung zu instruiren durch Angabe der hauptsächlichsten Brechungspunkte des Zuges, Bezeichnung der Stellen an welchen feste Zwischenpunkte anzubringen sind, der Jahrestafeln welche in den Zug mit aufzunehmen sind, der Signen an welchen der Zug sich nach verschiedenen Richtungen zertheilt. Sind diese Vorbereitungen beendet und kann nun zur Verrichtung des Zuges mit Schnur und Compass geschritten werden, so hat sich der Markscheider vom guten Zustande und der Richtigkeit seiner Instrumente zu überzeugen und das Streichen der Mittagslinie womöglich mit dem Hängezeug zu bestimmen und in das Zugbuch unter Angabe von Datum und Zeit einzutragen. Das Spannen der „Schnuren" wird auf grössere Strecken von 150 bis 200 m Länge durch die auf diese Arbeit gut eingeübten Gehilfen im Voraus besorgt. Man hat dabei Folgendes zu berücksichtigen:

a) Aus ökonomischen Rücksichten soll die Zahl der Schnuren möglichst beschränkt werden, ohne dass jedoch ein gewisses Maximum der Schnurlänge (20 m) überschritten wird, damit die Längenmessung ohne abzusetzen mit Band oder Kette vorgenommen werden kann.

b) Die einzelnen Schrauben an den Winkelpunkten des Zuges sollen sich mit den Schnuren verbinden lassen ohne dass diese an den Spreizen, am Gesteine oder an der Zimmerung anliegen, oder ein bequemes Anhängen von Compass und Gradbogen hindern. Ob eine Schnur anliegt oder nicht, erprobt man am einfachsten durch das Gefühl welches man hat, wenn die Schnur in der Lage welche sie erhalten soll, durch Anziehen in ihrer Längsrichtung gestreckt wird. Findet hierbei an irgend einer Stelle auch nur die geringste Reibung statt die durch Anliegen der Schnur an einem festen Gegenstand verursacht ist, so gibt sich dieser Umstand durch ein eigenthümliches Gefühl in den Fingern welche die Schnur strecken, sofort zu erkennen.

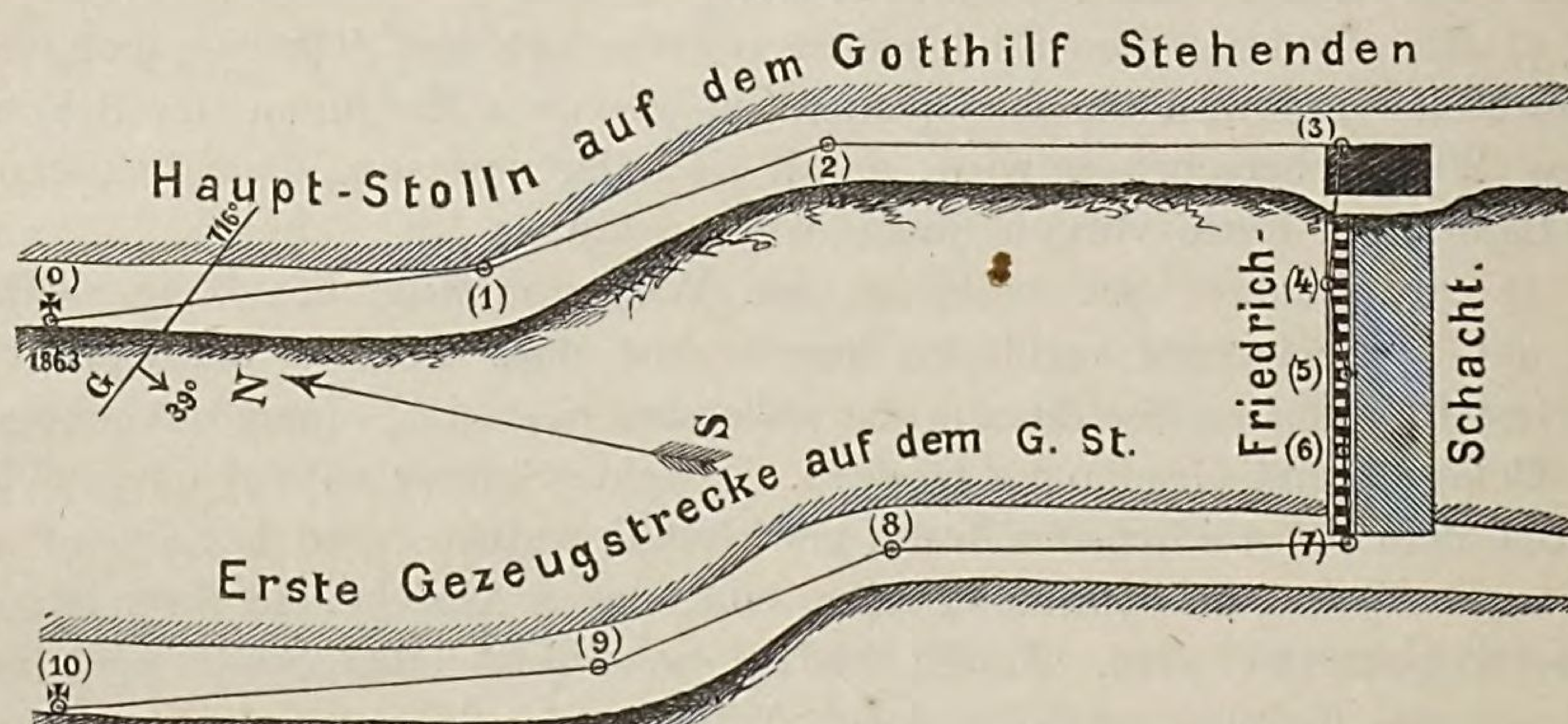
c) Die Neigung der Schnur ist ganz beliebig; nur geht man nicht gern über 75^{0}, sondern setzt namentlich in Schächten wo noch steilere Schnüre vorkommen können, seiger ab, das heisst, man zerlegt die Schnur in eine seigere und eine flache Schnur von geringerer Neigung. Der Grund aus welchem man sehr steile Schnüre vermeidet, ist dass die Genauigkeit des Abnehmens des Streichwinkels mit dem Hängezeug um so mehr abnimmt je steiler die Schnüre werden, oder je näher die Aufhängepunkte des Hängezeugs im Grundriss zusammenrücken.

d) Die Befestigung der Schnuren an den Verziehschrauben erfolgt durch mehrmaliges Umwinden bei möglichst straffer Spannung. Die letzte Windung der abgehenden Schnur ist hierbei unmittelbar auf die erste Windung der ankommenden Schnur aufzulegen, so dass die Schnuraxen sich wirklich in einem Punkte schneiden.

e) Anfangs- und Endpunkt des Zuges müssen durch unveränderliche Marken bezeichnet sein die eine Wiederholung desselben Zuges und eine Fortsetzung im Anschluss an den ausgeführten Theil des Zuges leicht und sicher gestatten.

Um das Verfahren bei der Messung selbst und das Eintragen in das Zugbuch an einem praktischen Beispiele näher zu erläutern, sei in Fig. 217 der Grundriss zweier Strecken angegeben welche durch einen flachen Durchschnittsschacht in Verbindung stehen. Der Zug beginnt im festen Punkte der Jahrestafel 1863 in der Hauptstollensohle, geht von da bis zur Hängebank des Schachtes, durch den Schacht bis Füllort auf der ersten Gezeugstrecke und auf dieser weiter bis zu dem hierselbst fixirten Anhaltepunkte. Die einzelnen, von der Unregelmässigkeit in der Ausweitung der Strecken und des Schachtes ihrer Lage nach bedingten Schnurpunkte sind der Reihenfolge nach von Jahrestafel 1863 an (1) bis

Fig. 217.



(10). Punkt 10 ist zugleich Endpunkt des Zuges und als solcher durch einen Dübel im linken Streckenulme festgelegt. Die verlorenen Zwischenpunkte (1) mit (9) bestehen aus den gebräuchlichen Verziehschrauben welche in Spreizenhölzern oder in der Schachtzimmerung befestigt sind.

Wir nehmen an, es sei das Streichen der Mittagslinie zu 11,4^0 mittels des Hängezeugs gefunden und unter „Bemerkungen“ unmittelbar neben die nähere Beschreibung der Lage des zu verrichtenden Zuges in das mit nachstehendem Schema versehene Zugbuch eingeschrieben worden. Weiter sind durch die Gehilfen die nöthigen Vorbereitungen für die Messung durch Schlagen der Spreizen und Schnurspannen getroffen.

Das erste Geschäft bei der Messung besteht dann aus der Längenbestimmung der einzelnen Schnüre, sodann folgt die Messung der Tonnlagewinkel mit dem Gradbogen und schliesslich die Abnahme des Streichens der Schnüre mit dem Compass, sowie etwaige Nebenmessungen in der bereits besprochenen Weise.

Die gleichzeitigen Einträge in das Zugbuch ergeben sich hierbei wie folgt:

Zunächst wird der Abstand vom festen Punkte in der Jahrestafel 1863 bis zur festen Streckensohle = 0,64 m mit Messband oder Kette gemessen und dem Eintrag ins Zugbuch unter Lage die Bezeichnung r = rechts, entsprechend der Lage der Jahrestafel im rechtseitigen Ulmen der Strecke beigesetzt. In ähnlicher Weise ist in der Folge die Lage des Schnurendes in der Projection des Strecken-Querschnitts durch l = links, m = Mitte, l m = die Mitte der linken Hälfte, und r m = in der Mitte der rechten Hälfte anzugeben und hiernach die Lage der Streckenulmen gegenüber den einzelnen Schnurpunkten zu zeichnen. Die Sohlenmessungen sind besonders an allen Brechungspunkten des Sohlengefälls, und wo solche nicht bemerklich werden, in Zwischenräumen von 50 m, insbesondere an allen festen Punkten, zur Ausführung zu bringen, damit die Rösche (Gefälle) der Streckensohle im Einzelnen und Ganzen berechnet und zu Riss gebracht werden kann. Zur Messung der ersten Schnur welche von der Jahrestafel 1863 bis Schnurpunkt (1) gespannt ist, wird die Kette oder das Messband angehalten, die Schnurlänge abgelesen und sogleich auch die Stelle bestimmt und mit einer kleinen Schnurklammer markirt, in welcher später der Gradbogen angehängt werden soll. Solcher kleiner Klammern, die aus schwer spaltendem Holze bestehen und eine Länge von 3 bis 4 cm besitzen führt der Markscheider eine grössere Zahl mit sich, da dieselben leicht durch Abstreifen von der Schnur zu Verlust gehen. Ferner ist an der angehängten Kette noch die Länge abzulesen, bei welcher die Ebene eines die Strecke übersetzenden Ganges die Schnur schneidet. Diese Länge ergab sich hier zu 5,16 m und sie wurde unter Freilassen des nöthigen Raums für Einfügung des Streich- und Fallwinkels mit der nöthigen Anmerkung im Zugbuche vorgetragen. Ist zuletzt noch die Lage des Schnurendes eingeschrieben, so wird der die Kette am Anfangspunkt haltende Gehilfe abgerufen und die Messung der nächsten Schnur beginnt.

Wäre nun weiter die Schnur (3) zu messen deren Endpunkt sich an der Hängebank des Friedrichschachtes befindet, so wird bei dieser Schnur, ausser der Länge und dem Anhängepunkt für den Gradbogen, auch die Lage des Schnurendes über Füllortsohle und gegen die Stösse des Schachtes bestimmt, indem man die senkrechten Abstände des Schnurpunktes von jenen misst und nebst dem Streichwinkel des langen Schachtstosses ins Zugbuch in der an treffender Stelle ersichtlichen Weise einschreibt. Weiter werden die Schnurlängen im Schachte selbst gemessen und auf dem Füllort der ersten Gezeugstrecke wieder die Lage des Schnurpunkts gegen die Füllortsohlen und die Schachtstösse bestimmt. Die Messung geht von hier in der ersten Gezeugstrecke in bekannter Weise weiter bis zum nächsten festen Punkt, bei welchem wieder bis zur Sohle zu messen ist. Ist die Längenmessung innerhalb der gespannten Schnüre beendet, so wird der Gradbogen an die mit Klammern bezeichneten Stellen der Schnüre gehängt

Hoffnung Gottes Fundgrube zu

Gezogen am 31 October 1875 mit

Zug Nr	Der flachen Schnur				
	Länge	Neigung	Streichen beob.	Streichen reducirt	Lage
✛ (1863)	0,64	st. 90°			r.
1	17,111	f. 0,85	171,5	160,1	l.
2	4,895	st. 2,60	116,8	105,4	l. m.
3	11,680	f. 3,40	182,8	171,4	m.
	0,56	f. 90°			
			187,0	175,6	
	0,56	st. 90°			
4	7,328	f. 38,60	279,8	268,4	r.
5	10,085	f. 36,85	270,3	258,9	l.
6	14,824	f. 34,20	277,0	265,6	l. m.
7	9,365	f. 34,60	275,5	264,1	l.
	0,80	f. 90°			m.
	0,80	st. 90°			r.
8	13,055	st. 1,2	7,1	355,7	m.
9	7,897	f. 1,25	350,0	338,6	m.
10	16,941	f. 0,00	358,9	347,5	l.
✛	0,760	f. 90°			

Neusorgenberg in Sachsen.

Compass Nr 3 vom Markscheider N. N.

Sohle	Seigerteufe steigend	Seigerteufe fallend	Bemerkungen. Streichen der Mittagslinie + 11,4°
			Angehalten im festen Punkte der Jahrestafel 1863 auf dem Gotthilf Stehenden in der Sohle des tiefen Albert-Stollens nördl. vom Imanuel-Schacht
	0,640		von Sohle bis festen Punkt in der Jahrestafel 1863
17,109	—	0,254	bei 5,16 m in der Schnur Uebersetzen eines Ganges; derselbe streicht 116° und fällt 39° in Süd-West
4,890	0,222	—	
11,659	—	0,693	bis zum Friedrich-Schacht
		0,560	bis Füllortsohle
	0,862	1,507	
		0,645	absolute Sohlenrösche. Von hier aus wurde gemessen: 0,76 bis nördl. Schachtstoss; 2,0 bis südl. Schachtstoss; 0,0 bis östl. Schachtstoss; 1,55 bis westl. Schachtstoss und 0,80 bis östl. Füllortstoss
			Streichen des langen Schachtstosses
	0,560		zurück zum Schnurpunkt
5,727		4,572	im Fahrschacht
8,070		6,048	desgl.
12,261		8,332	desgl.
7,709		5,318	desgl. bis zur ersten Gezeugstrecke
		0,800	bis Füllortsohle
	0,560	25,070	
		24,510	seigere Schachtteufe. Von hieraus wurde gemessen: 1,3 bis nördl. Schachtstoss; 1,5 bis südl. Schachtstoss
	0,800	—	zurück bis zum Schnurpunkt
13,052	0,273	—	auf der ersten Gezeugstrecke des Gotthilf Stehenden in Nord
7,895	—	0,172	
			3,0 in der Schnur zurück, südl. Stoss eine Rolle, deren Breite = 1,0 m
16,941	—	—	bis festen Punkt im Hangenden des Gotthilf Stehenden
		0,760	
	1,073	0,932	
	0,141		

und es werden die Fallwinkel gemessen und eingeschrieben. Zuletzt kommt das Hängezeug zur Abnahme der Streichwinkel in Gebrauch. Der Compass wird gewöhnlich an den Enden der die Winkelschenkel bezeichnenden Schnüre, d. h. in der Nähe des Winkelpunkts angehängt. Dieses Verfahren hat den Vortheil dass wegen der geringen Schwankungen der Schnur in der Nähe ihrer Befestigungsstelle die Compassnadel leichter zur Ruhe gebracht werden kann wie etwa in der Schnurmitte, und dass der Markscheider seine Körperstellung nur wenig zu verändern braucht um gleich das Streichen zweier aufeinander folgenden Schnüre bestimmen zu können. Schliesslich sind die nothwendigen Nebenmessungen vorzunehmen, wie z. B. Streichen und Fallen übersetzender Gänge; besondere Betriebseinrichtungen sind zu beschreiben und die Einträge ins Zugbuch bezüglich ihrer Vollständigkeit wiederholt durchzusehen und nöthigenfalls zu berichtigen. Auch empfiehlt es sich das Streichen der Mittagslinie wiederholt zu bestimmen, um etwaige Declinationsänderungen während der Aufnahme der Streichwinkel erkennen und bei Berechnung der wahren oder verbesserten Streichwinkel berücksichtigen zu können.

Bevor die Ergebnisse der Messung zu einer bildlichen Darstellung der Aufnahme benützt werden können, sind sie einer Umrechnung zu unterwerfen, durch welche sie erst die für die Anfertigung der Zeichnung (das „Zulegen des Risses“) erforderliche Form erhalten. Nehmen wir an das Zulegen soll mit Hilfe von Compass und Zulegeplatte erfolgen, so ist zunächst die Berechnung der reducirten Streichwinkel vorzunehmen, sodann sind die flachen Schnurlängen auf den Horizont zu reduciren, indem die Sohlen derselben berechnet werden, und schliesslich sind noch die absoluten Neigungen und Gefälle (Seigerteufen und Seigerhöhen) zu bestimmen. Aus den durch Rechnung gefundenen Grössen lässt sich nun Grund-, Seiger- und Kreuzriss des Schnurzuges (Horizontalprojection, erste und zweite Verticalprojection) durch Aneinanderreihen der einzelnen Längen in der gehörigen Reihenfolge und unter den richtigen Neigungswinkeln nach den Regeln der darstellenden Geometrie festlegen, und in dem so entstandenen Gerippe die Einzeichnung der Einzelnheiten (des Details) und der Nebenaufnahmen vollführen. Die Ausführung der nöthigen Rechnungen kann in folgender Weise geschehen. Bezeichnet

l die Länge der flachen Schnur,
τ deren Tonnlagewinkel,
s den beobachteten Streichwinkel,
σ den verbesserten Streichwinkel,
z die Seigerteufe (Verticalprojection),
e die Ebensohle (Horizontalprojection),
d das beobachtete Streichen der Mittagslinie,

so gelten folgende von selbst verständliche Bezeichnungen:

$$\sigma = s - d; \qquad e = l \cos \tau; \qquad z = \pm l \sin \tau \qquad (398)$$

Nach diesen einfachen Formeln werden aus den Messungsergebnissen die

Zahlenunterlagen für das Zulegen berechnet und in die Spalten für das wahre oder verbesserte Streichen, für die Sohle und Seigerteufe eingetragen. So ergibt sich z. B. für Zug Nr 3

$s = 182{,}8^0$; $d = 11{,}4^0$; $\sigma = 182{,}8^0 - 11{,}4 = 171{,}4^0$

$e = 11{,}68 \cos 3{,}40^0 = 11{,}68 \,.\, 0{,}9982 = 11{,}659$ m

$z = 11{,}68 \sin 3{,}40^0 = 11{,}68 \,.\, 0{,}0593 = 0{,}693$ m.

Für die Berechnung von Seigerteufen und Sohlen werden mit Vortheil sogenannte Markscheidetabellen benützt welche entweder nur die wirklichen Längen der trigonometrischen Linien für Sinus und Cosinus von 0,05 zu $0{,}05^0$ von 0^0 bis 90^0 fortschreitend, für die Radienlängen = 1 oder besser die 1 bis 9fachen Sinus und Cosinus-Werthe der Winkel von 0^0 bis 90^0 enthalten. Derartige Tabellen können ausser für die Berechnung der Seigerteufen und Sohlen auch für die Berechnung der Längen und Breiten, wie später gezeigt werden soll, gebraucht werden, und sie machen es möglich dass solche Berechnungen sich rasch und leicht durch einfaches Addiren einzelner den Tafeln entnommenen Zahlenwerthe ohne jede Multiplication ausführen lassen.

§. 213. Aufgabe. Einen Markscheidezug mittels des Theodolithen zu verrichten.

Die vorbereitenden Arbeiten zur Lösung dieser Aufgabe sind im Wesentlichen die nämlichen, wie bei der Verwendung von Schnur und Compass. Nur wird man hier möglichst lange Visuren oder Polygonseiten zu gewinnen trachten, einmal um die Zahl der Winkelpunkte und dadurch den Aufwand an Mühe und Zeit thunlichst zu beschränken, dann aber auch um das Anvisiren sehr nahe liegender Gegenstände zu vermeiden welches, wie bekannt, mehrfache Uebelstände mit sich bringt. Das bei Verrichtung von Theodolithzügen übliche Verfahren wird wohl am deutlichsten aus folgender Mittheilung eines Bruchstückes von einem solchen Zug zu entnehmen sein.

Wie aus der Fig. 218, S. 446 ersichtlich, soll die feste Linie M N über Tage durch einen flachen Schacht mit einer in der Grube auf dem Hauptstollen fixirten Linie (7) (8) derart in Verbindung gebracht werden dass die gegenseitige Lage beider Linien in Grund- und Seigerriss unzweifelhaft bestimmt ist. Zur Lösung dieser Aufgabe wird lothrecht unter dem Anhaltepunkte M welcher sich in der steinernen Thürkappe der Kaue befindet, auf dem Stativ oder einer Spreize der Theodolith aufgestellt, während nach N eine Signalstange, nach Punkt (1) an der Hängebank des Schachtes das zugehörige Grubensignal von der in Bd I, §. 186 beschriebenen Einrichtung gebracht wird. Letzteres ist vorschriftsmässig auf eine Spreizenschraube aufzustellen und gegen das Theodolithfernrohr zu richten. Hierauf beginnt die Winkelmessung in Punkt M, um der Reihe nach in (1) (2) . . . fortgesetzt zu werden. Bei der Aufstellung des Theodolithen in (1), (2) . . . (6) ist immer beiderseits, nach vor- und rückwärts, auf die Nachbarpunkte ein zugehöriges Grubensignal zu stellen, so dass an den genannten Stations-

Sonnenwirbel Fundgrube

Gezogen am 13 Septbr 1876 mit dem Lingke'schen

Station	Richtung	Horizontalwinkel							
		Nr I			Nr II		Mittel		
		°	′	″			°		
	Nr	0	0	0	0	0			
✠	1	158	42	30	42	0	158	42	15
		317	24	30	24	30			
	✠	0	0	0	0	0*			
(1)	(2)	100	40	0	40	0	100	40	0
		201	20	0	20	0			
(2)	(3)	181	38	0	38	30	181	38	15
		3	16	30	16	30			
(3)	(4)	180	53	0	53	30	180	53	0
		1	46	0	46	0			
(4)	(5)	179	26	30	27	0	179	26	22,5
		358	53	0	52	30			
(5)	(6)	90	45	0	45	0	90	44	0
		181	28	0	28	0			
(6)	(7)	190	46	0	46	30	190	46	45
		21	33	30	33	30			
(7)	(8)	163	42	0	41	30	163	41	30
		327	23	0	23	0			

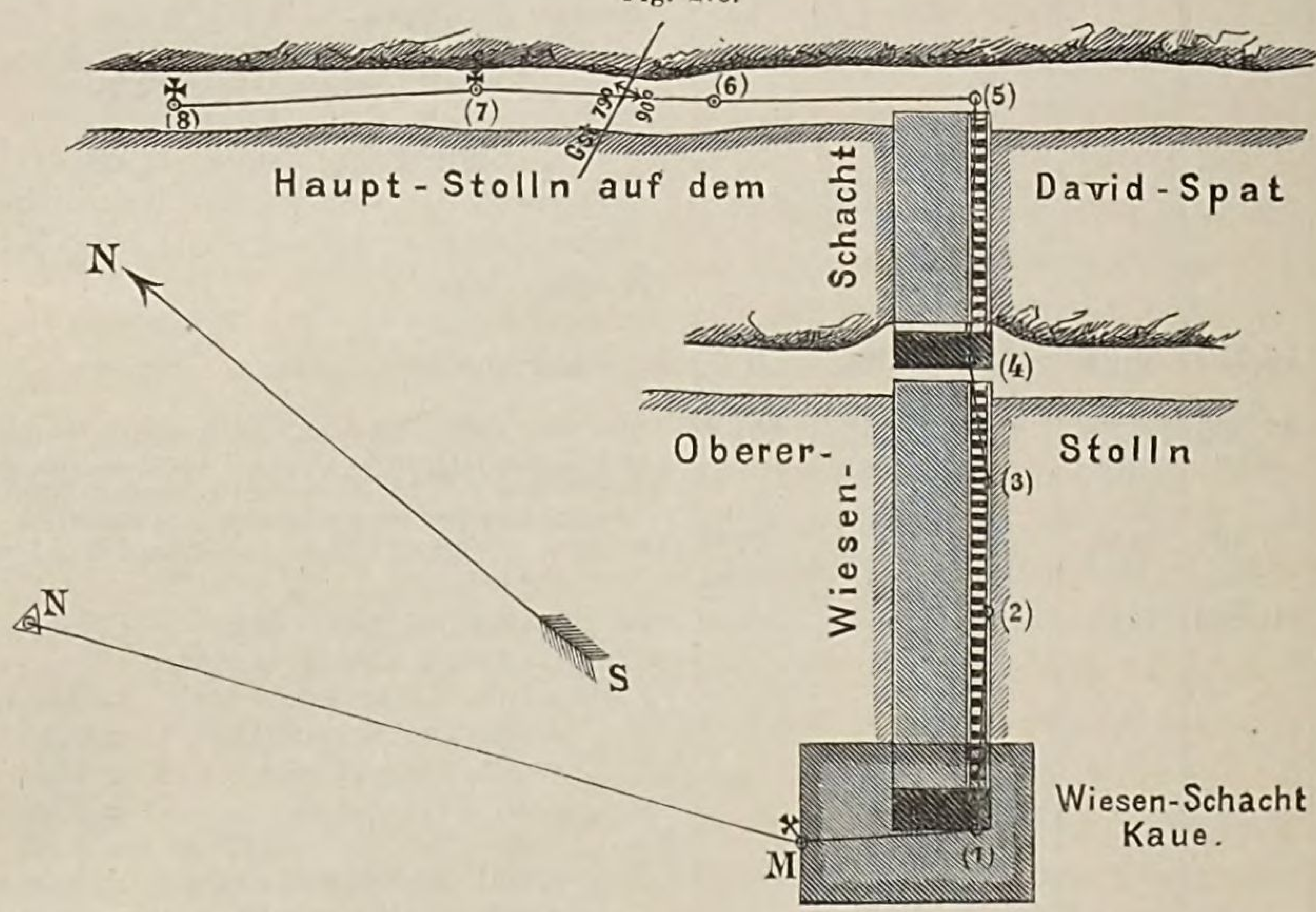
bei St. Michaelis.

Grubentheodolithen Nr 2514 vom Markscheider N. N.

Länge	Lage	Neigungswinkel °	′	″	Bemerkungen
					Angehalten im festen Punkte ✠ an der Kappe der westlichen Thüre der Wiesenschachtkaue
0,290	fällt	90	—	—	von ✠ bis Fernrohrachse
4,046	fällt	15	10	30	am Schacht
0,52	fällt	90	—	—	von Signalmitte bis Kauensohle. Von hier wurde gemessen: bis östl. Schachtstoss 0,25 m „ westl. Schachtstoss 2,20 „ nördl. Schachtstoss 1,20 „ südl. Schachtstoss 0,00 das Streichen des kurzen (nördlichen) Schachtstosses gegen die Schnur (✠ · 1) beträgt 100°
10,272	fällt	58	30	0	im Fahrschacht
17,065	fällt	60	24	30	* (Da auf allen Stationen die ersten Rückblicke die Kreisablesungen 0° 0′ 0″ ergeben, so sind diese in der Folge nicht notirt, sondern werden stillschweigend als vorhanden betrachtet)
9,960	fällt	54	30	45	bis zum oberen Stollen auf dem Davidspat
0,600	fällt	90	—	—	von Signalmitte bis Sohle von hier aus wurde gemessen: a) bis nördl. Tageschachtstoss = 2,0 m „ südl. Tageschachtstoss = 0,5 „ westl. Füllortstoss = 1,60 „ östl. Füllortstoss = 2,20 b) „ östl. Stollenschachtstoss = 2,30 „ westl. Stollenschachtstoss = 0,60 „ nördl. Stollenschachtstoss = 1,30 „ südl. Stollenschachtstoss = 0,50
25,713	fällt	66	40	0	bis zum Hauptstollen auf dem Davidspat (m)
1,76	fällt	90	—	—	von Signalmitte bis Sohle bis östl. Schachtstoss = 0,40 m „ westl. Schachtstoss = 2,50
20,151	fällt	0	58	15	auf der Hauptstollensohle weiter in West auf dem Davidspat (m)
19,895	steigt	1	18	15	bei 11,5 m in der Schnur Uebersetzen eines Ganges, streicht gegen die Schnur 111° und fällt 90° (m)
0,560	steigt	90	—	—	von Fernrohraxe bis ersten festen Punkt (m)
20,887	fällt	1	27	0	bis zweiten festen Punkt (m)
1,13	steigt	90	—	—	von Signalmitte bis festen Punkt
2,05	fällt	90	—	—	von festen Punkt bis Sohle

punkten die Polygonwinkel erhalten werden. Es erscheint zweckmässig hier für die Messung der Horizontalwinkel das einfache Repetitionsverfahren anzuwenden und dabei die Alhidade auf die Ausgangsstellung 360° zu bringen, so dass bei jedem ersten Rückblick der Kreis die Ablesung Null ergibt. Die Verticalwinkel können auf allen Linien mit Ausnahme der ersten und letzten zweimal, entweder in beiden Fernrohrlagen oder besser, um Höhendifferenzen zwischen Theodolith und Signalen unschädlich zu machen, bei jedem ersten Vor- und Rückblick abgelesen werden. Den hieraus erhaltenen Mittelwerth legt man der Zugberechnung zu Grunde. Die Messung der Entfernungen der durch die Schraubenaxen bezeichneten Stationen geschieht mit Hilfe des Stahlmessbandes und wird erst nach Vollendung der Winkelmessung auf einer grösseren Anzahl von solchen

Fig. 218.



Stationen vorgenommen, so lange noch die einzelnen Theodolithenstandorte durch die unverändert stehen gebliebenen Spreizenschrauben sicher markirt sind. Derartige Schrauben führt man eine grössere Zahl (etwa 12) mit sich; sind sie verbraucht, so muss die Längenmessung vorgenommen werden, damit alle oder ein Theil derselben für die weitere Fortsetzung des Zuges verfügbar wird. Die Einrichtung des Zugbuches für das Eintragen der Messungsergebnisse ist aus der vorstehenden Tabelle zu ersehen und bedarf keiner weiteren Erläuterung.

Die Berechnung des Theodolithzuges erfolgt in einem besonders hiezu eingerichteten Formulare, dem sogenannten Winkelbuche welches das Format eines ganzen Bogens Schreibpapier erhält und in welches die Ergebnisse der Messung nebst den daraus berechneten Grössen mit Tinte ein-

getragen werden. Zu berechnen sind hier wieder alle jene Stücke des Zuges welche zur Darstellung der Aufnahme nöthig sind, nämlich die Horizontal-Projectionen der Schnüre (Ebensohlen), die absoluten Steigungen und Gefälle (die Seigerhöhen), die Streichwinkel der Polygonseiten und die rechtwinkligen Coordinaten aller Zugpunkte, bezogen auf einen bestimmten Anfangspunkt und die Mittagslinie als Hauptaxe. Bezeichnet wieder

- l die Länge der flachen Schnur,
- τ deren Neigungs- oder Tonnlagewinkel,
- σ den berechneten Streichwinkel der Schnur,
- z deren Verticalprojection oder Seigerhöhe,
- e die Horizontalprojection oder Ebensohle der Schnur,
- x die Projection der Ebensohle auf die Mittagslinie (die Breite oder den Streichcosinus der Linie l) und
- y die Projection der Ebensohle auf die Ost-West-Linie (die Länge oder den Streichsinus der Linie l),

so gelten ferner auch folgende Beziehungen:

$$e = l \cos \tau; \quad z = \pm l \sin \tau; \quad x = e \cos \sigma; \quad y = e \sin \sigma \qquad (399)$$

Die Vorzeichen von x und y ergeben sich hierbei aus der Grösse des Winkels σ der von 0^0 bis 360^0 gezählt wird. Vorstehende Ausdrücke beziehen sich immer nur auf eine einzige Schnur; will man aber die gegenseitige Lage aller Punkte besser übersehen, so hat man die Coordinaten der einzelnen Zugpunkte fortlaufend zu den bestimmten Coordinaten des Anhaltepunkts zu addiren und zwar unter Berücksichtigung des jedesmaligen Vorzeichens der einzelnen Coordinaten. Demnach ist für irgend einen Punkt n:

$$X = x_0 + e_1 \cos \sigma_1 + e_2 \cos \sigma_2 + e_3 \cos \sigma_3 + \ldots + e_n \cos \sigma_n$$
$$Y = y_0 + e_1 \sin \sigma_1 + e_2 \sin \sigma_2 + e_3 \sin \sigma_3 + \ldots + e_n \sin \sigma_n$$
$$Z = z_0 + l_1 \sin \tau_1 + l_2 \sin \tau_2 + l_3 \sin \tau_3 + \ldots + l_n \sin \tau_n$$

Denkt man sich unter n den letzten Punkt des Markscheidezugs, so stellt X dessen Hauptbreite oder den Hauptstreichcosinus, Y die Hauptlänge oder den Hauptstreichsinus und Z die Haupthöhe oder den Hauptsummenrest der Seigerhöhen, d. i. das Gesammtgefälle oder die Gesammtsteigung zwischen Anfangs- und Endpunkt vor, während der aus der Gleichung

$$\text{tg}\, \Sigma = \frac{Y}{X} \qquad (400)$$

berechnete Winkel Σ den Hauptstreichwinkel des ganzen Zuges bezeichnet.

Nach diesen Erklärungen wird es genügen die Berechnung an einigen Nummern des vorstehenden Zuges speciell durchzuführen und die tabellarischen Einträge in das Winkelbuch anzugeben. Als Ursprung des rechtwinkligen Coordinatensystems ist ein nahegelegener Dreieckspunkt der Lokaltriangulation des Bergreviers angenommen worden welcher auch die Linie M N angehört. Von dieser Linie sind ausser dem Streichwinkel $= 317^0\, 1'\, 30''$ die Coordinaten des Punkts M bekannt, nämlich die Länge

Sonnenwirbel Fundgrube

Gezogen am 31 Septbr 1876 mit dem Lingke'schen

Nr	Der flachen Schnur: Länge	Neigung		Seigerteufe: steig.	fallende	Sohle	Polygon-Winkel	Streich-Winkel	Länge östliche + westliche —	
	Meter	steigt fällt	° ′ ″	Meter	Meter	Meter	° ′ ″	° ′ ″	+ —	Meter
M								317° 1′ 30″		
	0,290	f.	90°	—	0,290					
(1)	4,046	f.	15° 10′ 30″	—	1,059	3,905	158° 42′ 15″	115° 43′ 45″	+	3,518
	0,520	f.	90°	—	0,520					
					1,869					
	0,520	st.	90°	0,520	—					
(2)	10,272	f.	58° 30′ 0″	—	8,759	5,367	100° 40′ 0″	36° 23′ 45″	+	3,185
(3)	17,065	f.	60° 24′ 30″	—	14,839	8,427	181° 38′ 15″	38° 2′ 0″	+	5,192
(4)	9,960	f.	54° 30′ 45″	—	8,110	5,782	180° 53′ 0″	38° 55′ 0″	+	3,632
	0,600	f.	90°	—	0,600					
				0,520	32,308					
					31,788					
	0,600	st.	90°	0,600	—					
(5)	25,713	f.	66° 40′ 0″	—	23,610	10,184	179° 26′ 30″	38° 21′ 30″	+	6,320
	1,760	f.	90°	—	1,760					
				0,600	25,370					
					24,770					
	1,760	st.	90°	1,760	—					
(6)	20,151	f.	0° 58′ 15″	—	0,341	20,148	90° 44′ 0″	309° 5′ 30″	—	15,564
(7)	19,895	st.	1° 18′ 15″	0,453	—	19,890	190° 46′ 45″	319° 52′ 15″	—	12,819
	0,560	st.	90°	0,560	—					
				2,773	0,341					
				2,432						
	0,560	f.	90°	—	0,560					
(8)	20,887	f.	1° 27′ 0″	—	0,529	20,880	163° 41′ 30″	303° 33′ 45″	—	17,399
	1,130	st.	90°	1,130	—					
				1,130	1,089					
				0,041						
	2,050	f.	90°		2,050					

bei St. Michaelis.

Grubentheodolith Nr 2514 vom Markscheider N. N.

Breite nördliche + südliche —		Summe der				Meeres-höhen	Bemerkungen
		Längen		Breiten			
±	Meter	±	Meter	±	Meter	Meter	
							Angehalten im festen Punkte M ✠ an der westl. Thüre der Weisenschachtkaue
		+	257,605	—	149,513	407,810	nach Richtungspunkt J von Punkt M
							bis Fernrohraxe
—	1,695	+	261,123	—	151,208		bis zum Weisenschacht
						405,941	von Signalmittelpunkt bis Kauensohle. Von hier wurde gemessen: 0,25 m bis östl. Schachtstoss; 1,20 bis nördl. Schachtstoss; 2,20 bis westl. Schachtstoss; 0,00 bis südl. Schachtstoss. Das Streichen des kurzen (nördl.) Schachtstosses beträgt 15° 43′ —
							von Kauensohle bis Fernrohraxe
+	4,321	+	264,308	—	146,887		im Fahrschacht
+	6,638	+	269,500	—	140,249		
+	4,499	+	273,132	—	135,750		bis zum oberen Stollen auf dem Davidspat
						374,153	von Signalmittelpunkt bis Sohle. Von hier wurde gemessen: a) bis nördl. Tageschachtstoss = 2,00 m „ südl. Tageschachtstoss = 0,50 m „ westl. Füllortstoss = 1,60 m „ östl. Füllortstoss = 2,20 m b) „ östl. Stollenschachtstoss = 2,30 m „ westl. Stollenschachtstoss = 0,60 m „ nördl. Stollenschachtstoss = 1,30 m „ südl. Stollenschachtstoss = 0,50 m
							zurück von Stollensohle bis Fernrohraxe
+	7,986	+	279,452	—	127,764		(m) bis zum Hauptstollen auf dem Davidspat
						349,383	von Signalmittelpunkt bis Sohle. Von hier wurde gemessen: bis östl. Schachtstoss = 0,40 m bis westl. Schachtstoss = 2,50 m
							zurück von der Sohle bis Fernrohraxe
+	12,796	+	263,888	—	114,968		(m) weiter in West auf dem Davidspat. Hauptstollensohle
+	15,207	+	251,069	—	99,761		(m)
						351,815	bis ersten festen Punkt in der Firste des Davidspats
							zurück bis Fernrohraxe
+	11,544	+	233,670	—	88,217		(m) bis zweiten festen Punkt in der Firste des Davidspats
						351,856	von Signalmittelpunkt bis festen Punkt
						349,806	von festen Punkt bis Sohle.

$y = + 257{,}605$ und die Breite $x = - 149{,}513$; ferner ist gegeben die Meereshöhe des Punkts M oder $h = 407{,}810$ m welche durch Anschlussnivellement an den nächstgelegenen Fixpunkt des Präcisionsnivellements des Landes erhalten wurde. Die erste Messung von Punkt M bis zur Fernrohraxe gilt nicht als Linie des Zugs, insofern in ihrem Endpunkte kein besonderer Streichwinkel nach Länge und Breite anzugeben ist; es kommt vielmehr nur die Seigerteufe $= 0{,}290$ m in Rechnung. Länge und Breite sind dieselben wie bei Punkt M.

Für den Endpunkt (1) der ersten Linie des Zugs (Schnur) ergibt sich

die Seigerteufe $z = 4{,}046 \,.\, \sin 15^0\, 10'\, 30'' = 1{,}059$ m
die Sohle $e = 4{,}046 \,.\, \cos 15^0\, 10'\, 30'' = 3{,}905$ m
der Streichwinkel $\sigma = 317^0\, 1'\, 30'' + 158^0\, 42'\, 15'' = 115^0\, 43'\, 45''$
die Länge $y = 3{,}905 \,.\, \sin 115^0\, 43'\, 45'' = + 3{,}518$ m
die Breite $x = 3{,}905 \,.\, \cos 115^0\, 43'\, 45'' = - 1{,}695$ m.

Die Meereshöhe der Kauensohle bestimmt sich dadurch: zieht man von der Meereshöhe des Punkts M das Gesammtgefälle bis zur genannten Sohle $= 1{,}869$ m ab so wird die

Meereshöhe der Kauensohle $h = 407{,}810 - 1{,}869 = 405{,}941$ m.

Durch die unter den Bemerkungen angeführte Nebenmessung sind die Dimensionen und die Lage der Schachtmündung genau bestimmt. In gleicher Weise ist bei der Berechnung aller übrigen Schnüre verfahren worden. Die ausführlichen Aufzeichnungen im Winkelbuche machen weitere erklärende Zusätze überflüssig. Bemerkt mag nur noch werden dass auch im Winkelbuche die Lage der Zugpunkte im Streckenquerschnitt durch folgende Buchstaben angegeben werden: M (spr. Mitte), R (spr. rechts), L (spr. links), R M (spr. rechts, Mitte) und L M (spr. links, Mitte).

§. 214. Aufgabe. Ein Nivellement in der Grube auszuführen.

Die Ausführung von Grubennivellementen ist im Vergleich mit den Nivellirarbeiten über Tage dem Wesen nach nicht verschieden. Nur bedingen die localen Verhältnisse in der Grube einige eigenartige Einrichtungen der Nivellirapparate, von deren Zweckmässigkeit die Sicherheit und Genauigkeit der Arbeit wesentlich abhängt. Was zunächst die Nivellirinstrumente selbst anbelangt, so verwendet man mit Vortheil kleine, handliche und leicht transportable Nivellirfernrohre mit festsitzender Libelle von etwa 10 Secunden Empfindlichkeit, bei welchen der Ocularauszug so eingerichtet sein muss dass möglichst kurze Zielweiten von 4 bis 5 m noch angewendet werden können. Zur Aufstellung des Instruments ist das übliche dreibeinige Stativ nur in seltenen Fällen anwendbar (wie z. B. in Kohlengruben) wo eine nahezu ebene und feste Sohle vorhanden ist. Man gibt auch hier den Stativen meist eine aussergewöhnlich geringe Höhe, um das Instrument in sehr niedrigen Bauen noch aufstellen zu können. Hie und da werden auch Stative mit verlängerbaren Beinen angewendet. Einige Markscheider stellen das Nivellirinstrument ähnlich wie den Theodolithen

auf Armstative (sogenannte Consolen) welche sich im Zimmerungstheile fest einschrauben lassen. Als besonders bequem hat sich ferner die Aufstellung des Nivellirinstruments mit Hilfe einer Spreize bewährt, auf welche zunächst eine die Spreize umfassende eiserne Schraubenzwinge durch Anziehen einer Pressschraube befestigt wird. Die Schraubenzwinge selbst trägt sodann entweder einen Stativteller zur Aufnahme des Dreifusses des Instruments, oder der Zapfen des Instruments kann direct auf der Schraubenzwinge durch ein starkes Schraubengewinde befestigt werden. Das Schlagen der Spreizen besorgt ein mit dieser Arbeit vertrauter Gehilfe ebenso rasch als eine sichere Stativaufstellung bei rauher Sohle sich bewerkstelligen lässt.

Fig. 219.

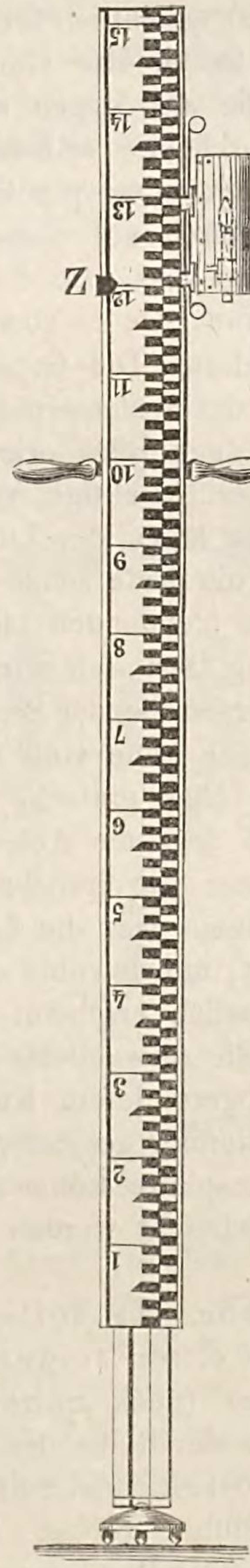
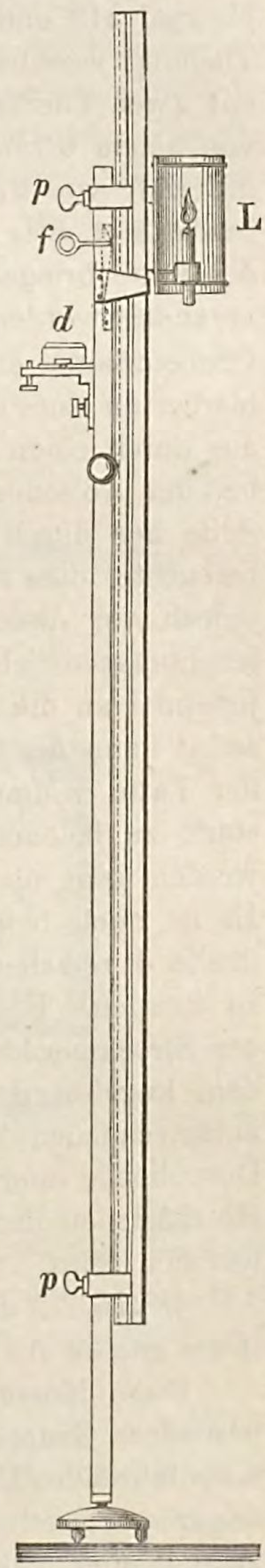


Fig. 220.



Die in der Grube verwendbaren Nivellirlatten unterscheiden sich von den über Tage üblichen Werkzeugen dieser Art namentlich durch ihre geringe Höhe von 1,5 bis 1,8 Meter und durch die Beweglichkeit ihrer Scalen. Latten mit Zieltafeln sind in der Grube nur für Nivellirungen nach Stampfers Methode zulässig, für Nivellemente mit wagrechten Ziellinien aber aus demselben Grunde zu vermeiden wie über Tage. Um in den dunkeln Grubenräumen Scalenlatten gut mit dem Fernrohre ablesen zu können, müssen die betreffenden Stellen der Scala besonders beleuchtet werden. Man gibt zu diesem Zwecke dem die Latte haltenden Gehilfen ein Licht in die Hand und lässt dieses an die Ablesestelle halten so dass diese gut beleuchtet erscheint. So lange der Gehilfe leuchtet wird er meist den lothrechten Stand der Latte nicht gehörig beachten können, und es ist desshalb dieses Verfahren der Lattenbeleuchtung zu verwerfen.

Um diesem Uebelstande abzuhelfen, sind die Lattenscalen durchscheinend zu machen und mittels einer verschiebbaren Laterne von rückwärts zu

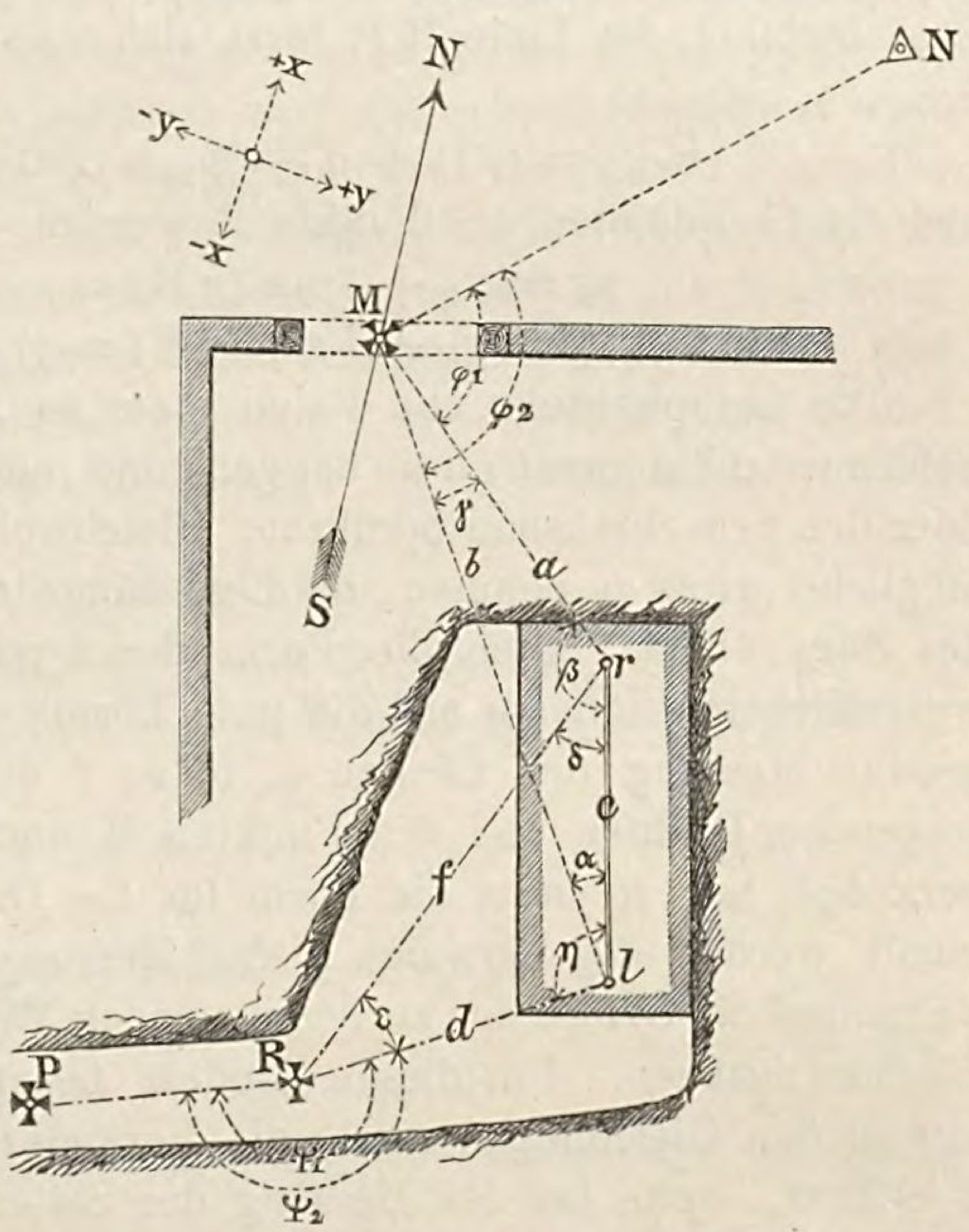
beleuchten; doch ist man hierbei auf constructive und praktische Schwierigkeiten gestossen, indem solche Latten bedeutende Herstellungskosten verursachen. Diese Uebelstände sind vermieden bei einer von Professor Dr Max Schmidt erfundenen und von Lingke & Comp. in Freiberg ausgeführten Grubennivellirlatte, deren Construction aus den auf S. 451 stehenden Figuren 219 und 220 ersichtlich ist. Es ist dieses eine mit übersichtlicher Theilung versehene Scalenlatte von 1,5 m Scalenlänge. Die Latte besteht aus zwei Theilen die sich gegen einander verschieben und in Intervallen von genau 0,1 m durch eine selbstthätig einfallende Feder f feststellen und mit Hilfe von Pressschrauben p p befestigen lassen. Die oberste Stelle der Scala lässt sich hiedurch auf einen Abstand von 2,75 m vom Fusspunkte der Latte bringen, so dass also die Lattenhöhe zwischen 1,5 und 2,75 m verändert werden kann, wie es eben die Beschaffenheit der zu nivellirenden Grubenräume erfordert. Die Grösse der Verschiebung der Scala kann hierbei an einer auf der Scalenseite liegenden Zeigerspitze z vom Instrument aus durch einen einzigen Blick erkannt und nöthigenfalls vom Beobachter bei der Ablesung berücksichtigt werden. Die Scala wird von der einen Seite her durch eine längs der Latte verschiebbare Reflectorlaterne L so beleuchtet dass nur die Scala selbst Licht erhält, das Auge des Beobachters jedoch vor directem blendenden Lichte vollständig geschützt ist. Die Beleuchtungsvorrichtung lässt sich durch einen leichten Fingerdruck oder Zug jedesmal an die Ablesestelle der Scala schieben, und während des Ablesens selbst kann der Gehilfe seine volle Aufmerksamkeit dem lothrechten Stande der Latte widmen. Eine einfache Stearinkerze genügt um die Scala so stark zu beleuchten dass die Ablesung mit grösserer Schärfe genommen werden kann als unter gewöhnlichen Beleuchtungsverhältnissen über Tage. Es ist noch beizufügen dass die Latte mit Handgriffen und einer Dosenlibelle d versehen ist, um sie ruhig und sicher in lothrechter Stellung halten zu können. Unerlässlich erscheint auch wegen der vielfachen Rauhheiten der Streckensohlen die Anwendung einer eisernen Fussplatte mit vortretendem kugelförmig abgerundetem Kopfe, worauf der Lattenfuss mit einer entsprechenden Vertiefung gesetzt werden kann. Beleuchtungsvorrichtung, Dosenlibelle und Fussplatte können für den sicheren Transport in einem Holzkästchen untergebracht werden welches der Lattenhalter bei der Arbeit mit sich führt.

§. 215. Aufgabe. Es sollen Anschluss- und Orientirungsmessungen durch einen seigeren Schacht gemacht werden.

Diese Messungen (auch Schachtlothungen genannt) bilden eine besondere Gruppe in der Reihe der zur Verrichtung von Markscheidezügen auszuführenden Messoperationen. Soll nämlich ein Markscheidezug durch einen seigeren Schacht geführt werden, so ist das gewöhnliche Verfahren der Zugmessung nicht anwendbar, man muss sich in diesem Falle in der Art helfen dass man durch Einhängen zweier Lothe in den Schacht eine wagrechte Länge von bestimmter Richtung (Orientirung) sich verschafft, an

welche sich der Theodolithzug in anderer Teufe wieder sicher anschliessen und weiterführen lässt. Da diese Lothe innerhalb des freien Schachtquerschnitts liegen müssen, so wird ihre die feste Richtung markirende Verbindungslinie höchstens 2 bis 3 m Länge besitzen. Das geringste Schwanken der Lothe, veranlasst durch Wetterzug im Schacht, niedergehende Wassertropfen welche den Lothfaden treffen, oder ähnliche unvermeidliche äussere Einwirkungen, wird daher bei der Kürze der Linie eine bedeutende Richtungsänderung derselben verursachen, so dass bei Ausführung derartiger Messungen ein sicheres Resultat nur unter Anwendung der äussersten Sorgfalt und Vorsicht erreichbar ist. Die vorliegende Aufgabe wird in einer etwas engeren Fassung also folgende sein. Wir nehmen an, es sei in der Nähe einer Schachtmündung ein Anhaltepunkt M (Fig. 221) gegeben dessen Coordinaten x_m und y_m bekannt sind, und es gehe von diesem Punkte eine Linie M N aus deren Streichwinkel = (M N) gegeben ist. Diese Linie M N soll nun mit einer zweiten festen Linie R P in der Grube so in Verbindung gebracht werden dass ihr Streichwinkel und die Coordinaten ihres Anfangspunktes R mit Sicherheit sich ermitteln lassen. Die einzige Verbindung zwischen beiden Linien geht durch den seigeren Schacht.

Fig. 221.



Zur Lösung dieser Aufgabe bestimmt man unter Zuhilfenahme eines Dreiecks r l M, in welchem die nöthigen Bestimmungsstücke gemessen werden, die Coordinaten zweier Hilfspunkte r und l im Lichtraume des Schachtes und projicirt diese Hilfspunkte mittels eingehängter Lothe seiger bis in die Teufe der Linie R P; hier lässt sich im Anschlusse an die Lothe r l in ähnlicher Weise wie in der oberen Teufe ein Dreieck r l R messen und mit Hilfe desselben kann man die Coordinaten von R und die Richtung von R P berechnen.

Werden nämlich in M die Winkel N M r $= \varphi_1$ und N M l $= \varphi_2$ sowie die Längen M r = a und M l = b und r l = c genau gemessen, so ergibt sich aus den Gleichungen

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \sin \gamma \qquad \text{und} \qquad \sin \beta = \frac{b}{c} \sin \gamma \tag{401}$$

die Grösse von α und β, und da ausserdem $\gamma = \varphi_2 - \varphi_1$ bekannt ist, so berechnet sich der Streichwinkel der Linie r l, nämlich $(r\,l) = (M\,N) + \varphi_2 + \alpha - 180^0 = (M\,N) + \varphi_1 - \beta$ und die Coordinaten werden folgende:

$$\left.\begin{aligned} x_r &= x_m + a \cos (M\,r) \\ y_r &= y_m + a \sin (M\,r) \\ x_l &= x_m + b \cos (M\,l) \\ y_l &= y_m + b \sin (M\,l) \end{aligned}\right\} \qquad (402)$$

Auf der tieferen Sohle sind die Coordinaten der Punkte r und l unverändert dieselben; in R sind gemessen die Winkel $r\,R\,P = \psi_1$ und $l\,R\,P = \psi_2$, sowie die Längen $R\,r = f$ und $R\,l = d$; das Dreieck r l R ergibt hier in gleicher Weise den Werth des Winkels δ und η durch die Gleichungen

$$\sin \delta = \frac{d}{c} \sin \varepsilon \qquad \text{und} \qquad \sin \eta = \frac{f}{c} \sin \varepsilon \qquad (403)$$

da in demselben auch $\varepsilon = \psi_2 - \psi_1$ durch Messung bekannt ist. Der Streichwinkel der Linie R P lässt sich nun durch bekannte Grössen ausdrücken, nämlich

$$(R\,P) = (r\,l) + \delta + \psi_1 - 180 = (r\,l) - \eta + \psi_2$$

und die Coordinaten des Punkts R werden:

$$x_0 = x_r + f \cos (r\,R) = x_l + d \cos (l\,R)$$
$$y_0 = y_r + f \sin (r\,R) = y_l + d \sin (l\,R)$$

Die Lothpunkte r und l sind stets so zu wählen dass die Lothe im Schachte vollkommen frei hängen und an keiner Stelle die Zimmerung oder den Schachtausbau berühren. Gleichwohl ist die Entfernung der Lothe möglichst gross zu nehmen, da diese Länge die Basis für die Weiterführung des Zugs bildet. Auch die Form der Dreiecke r l M und r l R ist von wesentlichem Einflusse auf die gute Lösung der Aufgabe. Da nämlich die genaue Messung der Längen a, b, c, f und d zwischen den die Lothe tragenden Drähten und den Punkten M und R mit vielen Schwierigkeiten verknüpft ist, so muss die Form für die Dreiecke M r l und R r l so gewählt werden dass etwaige kleine Messungsfehler in der Bestimmung der Seiten auf die Grösse der zu berechnenden Winkel einen möglichst geringen Einfluss ausüben. Um diesen Einfluss beurtheilen zu können, haben wir nur in den Gleichungen (401) die Veränderung $d\,\alpha$ zu bestimmen welche α erfährt, wenn bei der Messung der Seiten, z. B. a, ein Fehler d a begangen wurde. Wir erhalten so

$$d\,\alpha = \frac{\sin \gamma \,.\, d\,a}{c \cos \alpha} \qquad (404)$$

und entnehmen hieraus dass die Unsicherheit des Winkels α am kleinsten ist, wenn $\alpha = 0^0$ oder $= 180^0$ wird. Dasselbe Verhältniss findet bezüglich der Winkel β, δ und η statt, und es folgt hieraus die Regel dass die Lothe r und l möglichst in einer Geraden mit M und R anzuordnen sind, wenn die die gesuchte Orientirung ergebenden Winkel den grösstmöglichen Genauigkeitsgrad erhalten sollen.

Bei der Ausführung der Messung wird man den Theodolithen zunächst

im Punkte M aufstellen und die Winkel φ_1 und φ_2 unter Anwendung des Repetitionsverfahrens mehrmals messen. Die Lothe bestehen aus 0,5 bis 0,8 mm starkem Messingdraht, an welchen 5 bis 10 kgr schwere und gut centrirte Lothgewichte gehängt sind. Da derartige Drähte oft Längen von 300 Meter und darüber besitzen müssen, so werden sie, um sich rasch auf- und abwickeln zu lassen, auf einen besonderen Haspel gerollt. Zum Anvisiren dieser Lothe mit dem Fernrohre des Theodolithen ist es empfehlenswerth ein Fadenkreuz mit Doppelfäden zu verwenden, da sich die im Gesichtsfelde als feine schwarze Linien erscheinenden Drähte sehr sicher zwischen die Doppelfäden einstellen lassen, während ein einzelner vertical stehender Faden vom Lothdraht verdeckt wird. Da in einiger Tiefe unter den Aufhängepunkten die Lothe nie völlig zur Ruhe kommen, sondern stets Pendelschwingungen ausführen, so muss man mit dem Fernrohr die Lothe auf ihrem Wege verfolgen und das Fadenkreuz schliesslich so einstellen dass die Rückkehrpunkte der schwingenden Lothe genau symmetrisch zur Visirlinie liegen. Bei grossen Lothlängen wird die Schwingungsdauer sehr beträchtlich. Man hat dann Zeit genug das Loth in drei aufeinander folgenden grössten Elongationen anzuvisiren und die entsprechenden Ablesungen am Horizontalkreise zu nehmen, deren Mittelwerth sodann in die Rechnung eingeführt wird. (Vergleiche die gewichtigen Aufsätze über Anschluss- und Orientirungsarbeiten von Prof. Kertel in Freiberg und über Lothungen und Lothungsapparate von Prof. Nagel in Dresden im „Civilingenieur" 1878, S. 585 u. ff.)

Zahlenbeispiel.

Gegeben sind die Coordinaten des Punkts M, nämlich

$y_m = + 853{,}992\,m$; $x_m = + 308{,}642$; und Winkel $(M\,N) = 9^0\,16'\,50''$

Gemessen wurden die Winkel

$$\varphi_1 = 159^0\,37'\,40''; \quad \varphi_2 = 159^0\,53'\,40''; \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \gamma = 0^0\,16'\,0''$$

Die gemessenen Längen sind

$$a = 6{,}8603\,m; \quad b = 9{,}0985\,m; \quad c = 2{,}2388\,m$$

Aus den Gleichungen (401) wird

$$\alpha = 0^0\,49'\,2'' \text{ und } \beta = 178^0\,54'\,58''$$

gefunden, und diese Werthe geben mit $\gamma = 0^0\,16'\,0''$ die Summe von 180^0.

Mit diesen Werthen wird

$$(M\,l) = 169^0\,10'\,30''; \quad (M\,r)\,168^0\,54'\,30''; \quad (l\,r) = 349^0\,59'\,32'';$$

$$x_l = x_m + b\cos(M\,l) = 308{,}642 - 8{,}937 = 299{,}705$$

$$y_l = y_m + b\sin(M\,l) = 853{,}992 + 1{,}709 = 855{,}701$$

$$x_r = x_m + a\cos(M\,r) = 308{,}642 - 6{,}732 = 301{,}910$$

$$y_r = y_m + a\sin(M\,r) = 853{,}992 + 1{,}320 = 855{,}312$$

Dieselben Coordinatenwerthe haben Geltung für die Lothpunkte r und l in der Sohle der Linie R P. Daselbst wurde durch Messung erhalten

$$\psi_2 = 185^0\,30'\,20''; \quad \psi_1 = 171^0\,46'\,40''; \quad \varepsilon = \psi_2 - \psi_1 = 13^0\,43'\,40''$$

Da die in der Grube gemessenen Längen folgende sind:

$$f = 8{,}0983; \quad d = 6{,}7185; \quad c = 2{,}2388\,m$$

so lässt sich nun wieder aus dem Dreieck l r R durch die Gleichungen (403) der Winkel

$$\delta = 45^0\,23'\,35'' \text{ und der Winkel } \eta = 120^0\,52'\,40''$$

finden; mit $\varepsilon = 13^0\,43'\,40''$ ergibt sich für das Dreieck l r R eine Winkelsumme $= 179^0\,59'\,55''$. Die kleine Abweichung von 180^0 mit $5''$ wird auf die beiden berechneten Winkel δ und η vertheilt, so dass sie die Werthe erhalten:

$$\delta = 45^0\,23'\,37'' \text{ und } \eta = 120^0\,52'\,43''$$

Bei der Berechnung der Streichwinkel geht man vom Streichen der Linie l r, also vom Winkel (l r) $= 349^0\,59'\,32''$ aus und erhält der Reihe nach:

$$(\text{l R}) = 229^0\,6'\,49''; \ (\text{r R}) = 215^0\,23'\,9''$$

und hieraus auf zwei verschiedenen Wegen:

$$(\text{R P}) = 223^0\,36'\,29''$$

Bei der Berechnung der Coordinaten von R kann man gleichfalls zwei Wege einschlagen und entweder von r oder l ausgehen; zur Probe der Rechnung wird es gut sein beide Wege zu benützen. Es ergibt sich dann:

$$x_0 = x_l + d\cos(\text{l R}) = x_r + f\cos(\text{r R})$$

$$\left.\begin{aligned} x_l + d\cos(\text{l R}) &= 299{,}705 - 4{,}396 = 295{,}309 \\ x_r + f\cos(\text{r R}) &= 301{,}910 - 6{,}602 = 295{,}308 \end{aligned}\right\} = x_0$$

$$y_0 = y_l + d\sin(\text{l R}) = y_r + f\sin(\text{r R})$$

$$\left.\begin{aligned} y_l + d\sin(\text{l R}) &= 855{,}701 - 5{,}078 = 850{,}623 \\ y_r + f\sin(\text{r R}) &= 855{,}312 - 4{,}690 = 850{,}622 \end{aligned}\right\} = y_0$$

Wollte man auch den Unterschied der Seigerteufen der Punkte M und R erfahren, so wären noch die Höhen von M und R söhlig an das eine Loth zu übertragen, hier durch Schnurzeichen zu markiren und der Abstand dieser Marken auf bekannte Weise zu bestimmen.

§. 216. Aufgabe. Einen Markscheidezug in solchen Gruben vorzunehmen wo die Magnetnadel abgelenkt wird.

Gestatten es die Räumlichkeiten, so nimmt man den Zug mit dem Grubentheodolithen vor und setzt die Aufnahme nach einer oder zwei Richtungen so weit fort dass schliesslich eine Orientirung gegen die Mittagslinie stattfinden kann. Muss aber wegen beschränkten Raums mit dem Hängecompass gearbeitet werden, so bedient man sich am zweckmässigsten des von Rittinger empfohlenen Verfahrens, durch welches die aus der Abweichung der Magnetnadel entspringenden Fehler eliminirt werden.

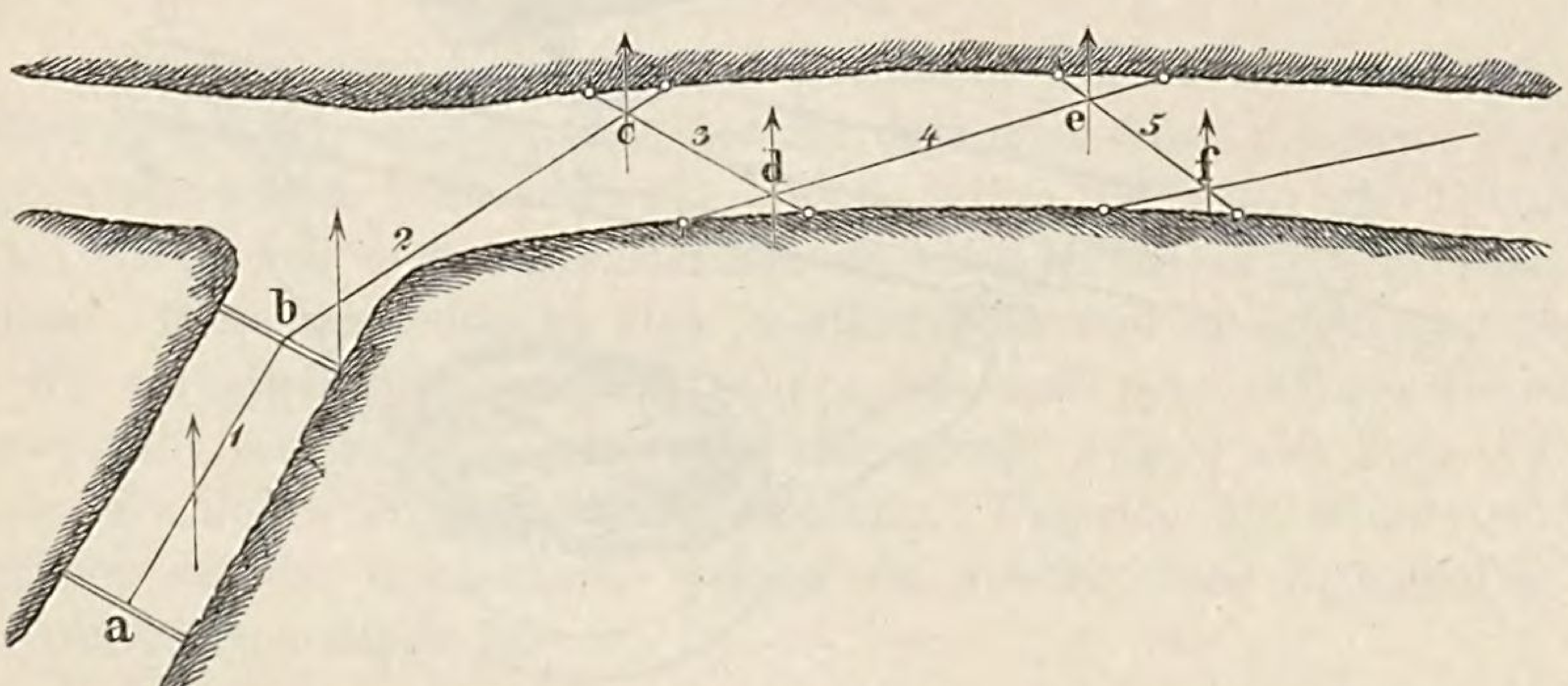
Dieses Verfahren beruht auf der richtigen Voraussetzung dass die Ablenkung der Magnetnadel an ein und derselben Stelle während der Messung des Winkels zweier Richtungen sich nicht ändert, und besteht demzufolge darin dass man zwei an den Scheiteln der Winkel sich kreuzende Schnüre zieht, an den Kreuzungspunkten die (um die Ablenkung δ falschen) Streichwinkel jeder Schnur abnimmt, und den Zug soweit fortsetzt, bis wenigstens eine Schnur ausserhalb des Bereichs der magnetischen Ablenkung kommt.

In Fig. 222 stelle a b diese Schnur vor, während die übrigen in einer Strecke liegen die magnetische Ablenkungen veranlasst. An der Schnur

a b wird nun die Länge, die Tonnlage und das Streichen, an allen übrigen Schnüren b c, c d, d e... aber nur die Länge und Tonnlage auf bekannte Weise gemessen. Die Horizontalwinkel b c d, c d e, d e f... ergeben sich dadurch dass man den Compass in dem Punkte c zuerst an die Schnur b c und dann an die Schnur c d, in dem Punkte d zuerst an die Schnur c d und hierauf an d e, in dem Punkte e zuerst an e d und hierauf an e f hängt und jedesmal den Stand der Nadel abliest. Sind nun die Ablesungen in c um die Grösse δ falsch, so gibt ihre Differenz doch den richtigen Winkel b c d, weil jede Ablesung um δ falsch ist; beträgt die Ablenkung in d den Winkel δ', so erhält man aus den beiden Ablesungen in d, indem man sie in der rechten Weise subtrahirt, doch den richtigen Winkel c d e; und ebenso findet man d e f und alle übrigen Horizontalwinkel des Zugs.

Ueber die praktische Ausführung dieser Art des Verziehens ist zu bemerken dass die Kreuzung der Schnüre nicht unter zu stumpfen Winkeln erfolgen soll, wesshalb man gerne zwischen zwei längere Schnüre eine kürzere (wie c d zwischen b c und d e, e f zwischen e d und f g) einschaltet;

Fig. 222.



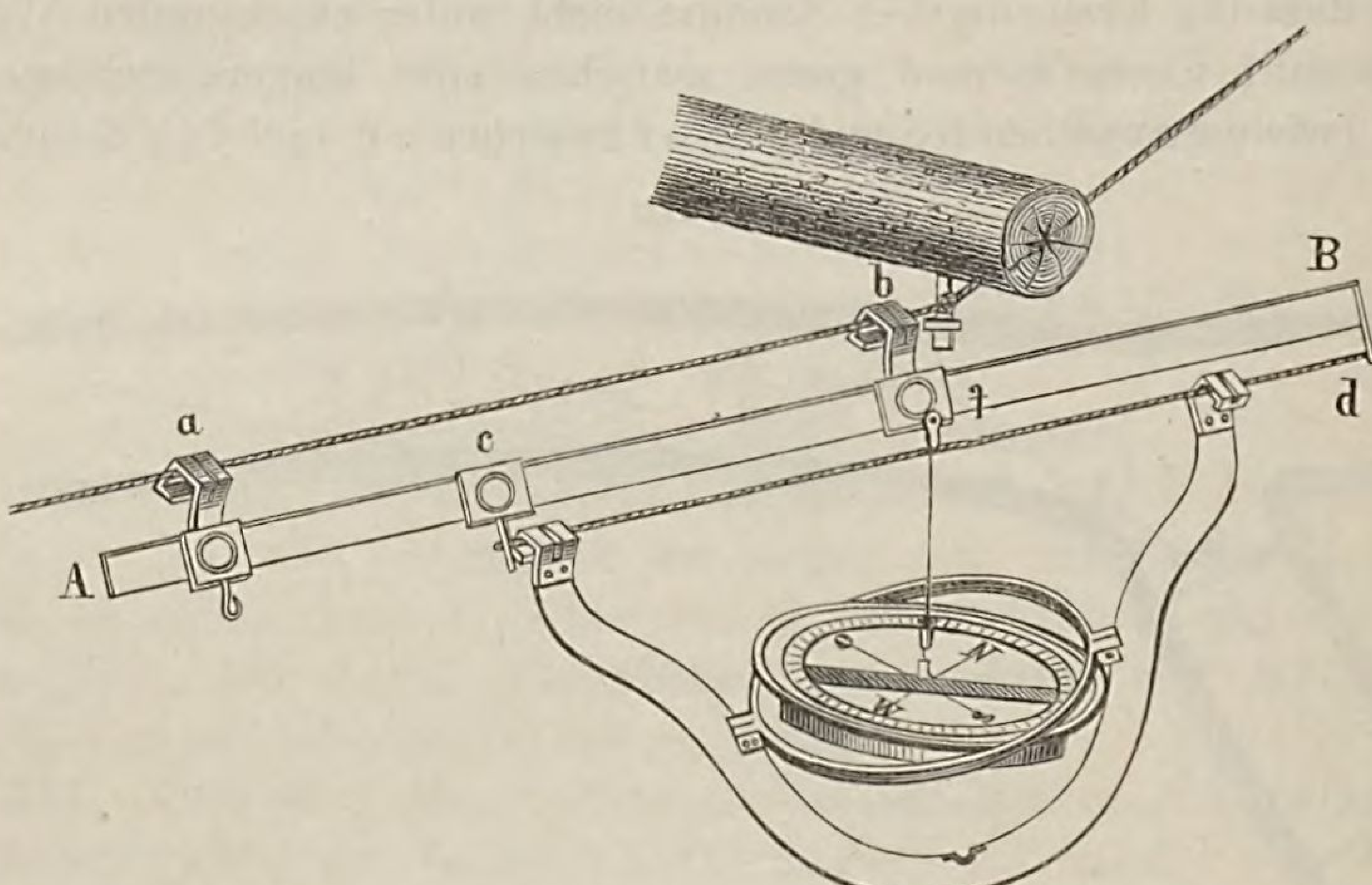
ferner dass die kreuzenden Schnüre, nachdem sie angespannt sind, an der Kreuzungsstelle sich gerade berühren und der Sicherheit wegen daselbst mit Bindfaden verbunden werden sollen; und dass endlich der Drehpunkt der Magnetnadel bei den zwei Lagen des Compasses lothrecht unter dem Kreuzungspunkte sich befinden soll.

Diese Forderungen sind jedoch nur schwer und mit grossem Zeitaufwande in genügender Weise zu erfüllen, namentlich bei stark wechselnden Neigungswinkeln der aufeinander folgenden Schnüre. Man hat desshalb mehrfach versucht, Hilfsvorrichtungen zum Anhängen des Compasses herzustellen welche das Spannen förmlicher Kreuzschnüre entbehrlich machen. Das einfachste dieser sogenannten Hilfshängezeuge ist das vom Markscheider Reichel zu Schwarzenberg in Sachsen angegebene sogenannte Compassstäbchen. Dasselbe besteht nach Fig. 223 aus einem prismatischen Messingstabe A B welcher mit zwei verschiebbaren Hakenarmen a, b zum Aufhängen an die Schnur versehen ist. Zwischen zwei an dem Stabe A B

festsitzenden Armen c, d ist ein Messingdraht gespannt dessen Längsaxe parallel der Aufhängelinie der Haken a, b läuft und welcher zum Anhängen des üblichen Hängezeugs dient. An der Hülse des Hakenarms b sitzt die um eine horizontale Axe drehbare Zwinge f, in welche ein kleines Loth zum Einstellen der Compassmitte unter den Winkelpunkt des Schnürenzuges eingehängt wird. Auf der Unterseite des Hakenarms a ist manchmal ein Häkchen angebracht, um ein Gegengewicht dann einhängen zu können, wenn ein Aufsteigen des Hakens a von der Schnur zu fürchten ist; ein Aufsteigen welches eben so gut durch Einschieben einer Nadel in den dazu bestimmten Ausschnitt des Hakens verhindert werden kann.

Bei dem Ziehen mit dem Hilfshängezeug muss besonders darauf gesehen werden dass die Winkelscheitel der aufeinander folgenden Schnüre nicht

Fig. 223.



zu nahe an Gesteinswände oder an Zimmerungstheile fallen welche das Freihängen des Compasses nicht gestatten würden. Man wendet desshalb meist besonders lange und kräftige Verziehschrauben an, oder sucht durch geschicktes Einsetzen der gewöhnlichen Schrauben in Spreizen das Freihängen des Compasses zu erzielen. Um den Compass an die nächstfolgende Schnur bei unveränderter Lage des Drehpunkts der Magnetnadel hängen zu können, wird das abgenommene Hilfshängezeug umgewendet, so dass der Haken b an die andere Seite derselben Verziehschraube zu liegen kommt. Das kleine Loth bringt man durch geeignetes Drehen der Zwinge f wieder in die Verticale des Scheitelpunkts und den Compass hängt man, den Nordpunkt der Theilung in der Richtung des Zuges voraus, genau centrisch unter die Lothspitze. Die Differenz der an einem Winkelpunkte beobachteten Streichwinkel ergibt dann den wahren Unterschied der Streichwinkel, und man kann sämmtliche Streichwinkel eines Zuges berechnen, wenn das wahre Streichen einer einzigen Schnur bekannt ist. Das Schema

zum Einschreiben des Zuges ins Zugbuch enthält ausser den für Compasszüge sonst nöthigen Notizen statt der Rubrik für Bemerkungen drei weitere Spalten zum Eintragen der an jedem Winkelpunkte für die vorangehende und nächstfolgende Schnur beobachteten Compasswinkel und deren Unterschiede welche durch ihre Vorzeichen zugleich die Wendung der Schnur erkennen lassen.

Um die Berechnung des wahren Streichens einer Schnur aus dem bekannten Streichen der vorangehenden und der Compasswinkeldifferenz mit der folgenden Schnur zu zeigen, nehmen wir an es sei in Fig. 222 das Streichen der Schnur c d gegen die Magnetlinie oder der Winkel (c d) = $= 114{,}55^0$; im Winkelpunkte d seien die Compasswinkel für die vorangehende Schnur c d $= 115{,}85^0$ und für die nächstfolgende d e $= 49{,}30^0$ beobachtet worden. Die Differenz beider Winkel beträgt also $- 66{,}55^0$; d. h. der Streichwinkel der Schnur d e ist um diesen Betrag kleiner als der Streichwinkel von c d; es ist also Winkel (d e) $= 114{,}55^0 - 66{,}55^0 = 48{,}00^0$. Hat nun die westliche Abweichung der Magnetnadel $- 12{,}4^0$ betragen, so ist das wahre Streichen der Linie d e mit $48{,}00^0 - 12{,}4^0 = 35{,}6^0$ einzutragen.

Ausser dem eben beschriebenen Verfahren lässt sich auch noch ein anderes anwenden welches darin besteht dass man durch die ganze Strecke zusammenhängende Schnurdreiecke bildet, deren drei Seiten und Tonnlagewinkel misst, und dieses Dreiecksnetz an eine bereits orientirte Seite anschliesst. Diese Operation ist aber umständlicher und auch weniger genau als die vorhergehende, da sich sehr spitze und sehr stumpfe Dreieckswinkel nicht vermeiden lassen, ohne eine grosse Anzahl von kleinen Dreiecken. Sie findet daher wenig Anwendung. Dasselbe gilt auch von dem Verziehen mit der Eisenscheibe welche ein unbehilfliches Ersatzmittel für den Grubentheodolithen ist.

D. Markscheide-Aufgaben.

§. 217. Aufgabe. Aus dem bekannten Streichen einer Lagerstätte und dem Neigungswinkel derselben nach einer gegebenen Richtung welche aber nicht die des grössten Falls ist, die Verflächung der Lagerstätte zu berechnen.

Stellt in Fig. 224 das Viereck A C die Lagerstattebene, B F die Horizontalebene und A B den horizontalen Schnitt beider vor; zieht man ferner in A C die Linie a b und in B F die a b′ senkrecht zu A B und b b′ senkrecht auf a b′, so dass a b b′ ein rechtwinkliges Dreieck und b a b′ $= \alpha$ der Fallwinkel der Lagerstattebene wird; projicirt man endlich die Linie a c horizontal = a c′, vertical = c c′ und in der Ebene A C = a b und setzt den Neigungswinkel c a c′ $= \beta$, c a b $= \gamma$, c′ a b′ $= \delta$: so finden

zwischen den Winkeln α, β, γ, δ folgende leicht zu beweisende Beziehungen statt:

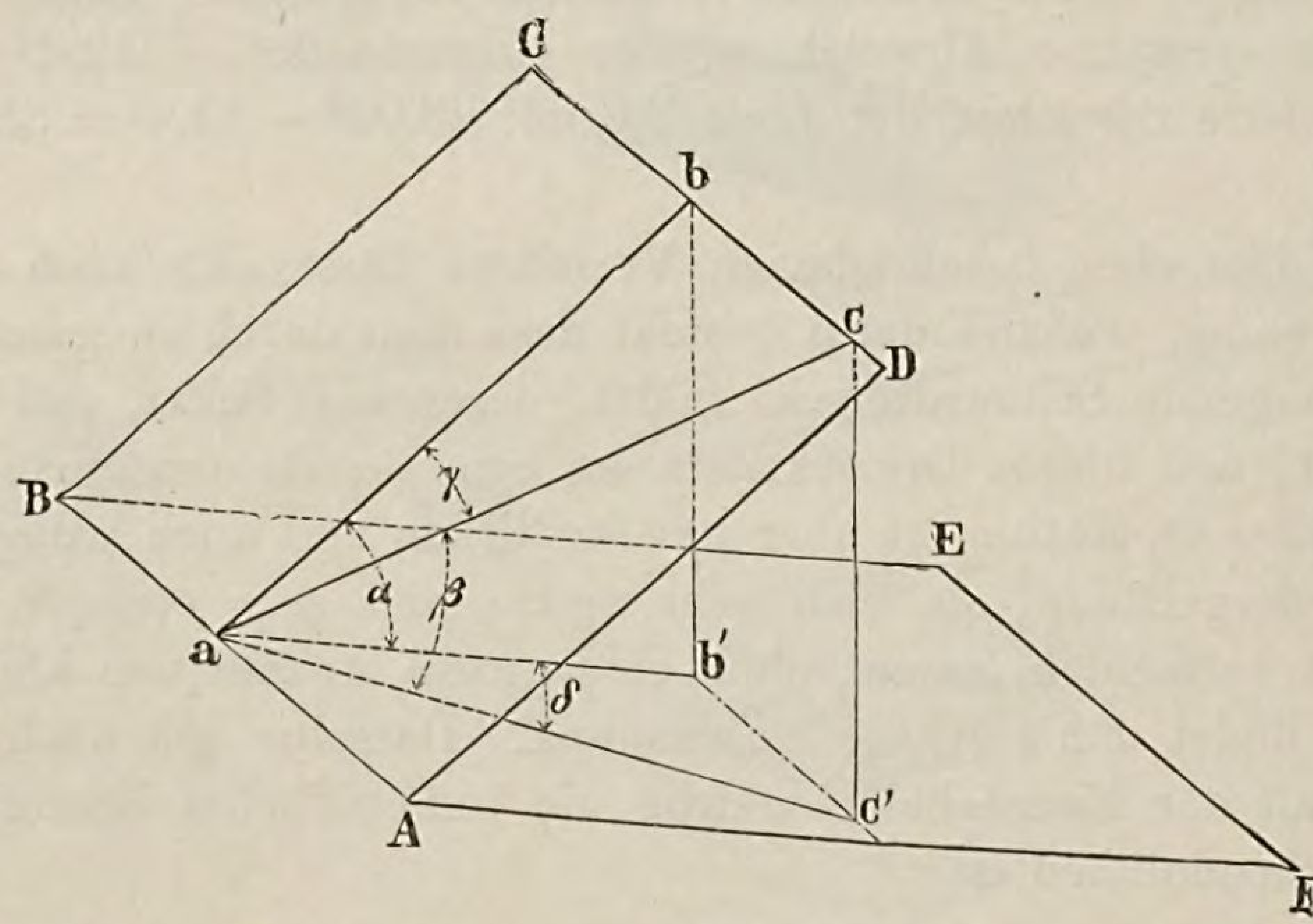
$$\sin\beta = \sin\alpha \,.\, \cos\gamma \qquad (405)$$

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha \,.\, \cos\delta \qquad (406)$$

Ist nun der Neigungswinkel β der Linie a c und der Winkel δ der Fallebene a b b′ gegen die projicirende Ebene a c c′ der Linie a c bekannt, so findet man den Fallwinkel α aus der Gleichung (406). Nun wurde aber β direct gemessen und δ ergibt sich aus dem beobachteten Streichen der Horizontalen A B und der Linie a c; denn ist σ das Streichen der söhligen Linie A B, so ist das Kreuzstreichen σ' der Falllinie a b oder ihrer Projection a b′ $= \sigma - 90^0$; und wenn man dieses von dem beobachteten Streichen σ'' der Linie a c oder ihrer Projection a c′ abzieht, so findet man

$$\delta = 90^0 + \sigma'' - \sigma \qquad (407)$$

Fig. 224.



Setzt man diesen Werth in die vorstehende Gleichung (406) und berücksichtigt dass $\cos(90^0 + \sigma'' - \sigma) = \sin(\sigma - \sigma'')$ ist, so erhält man den gesuchten Fallwinkel α aus der Gleichung

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin(\sigma - \sigma'')} \qquad (408)$$

in welcher nur die direct gemessenen Grössen σ, σ'', β vorkommen.

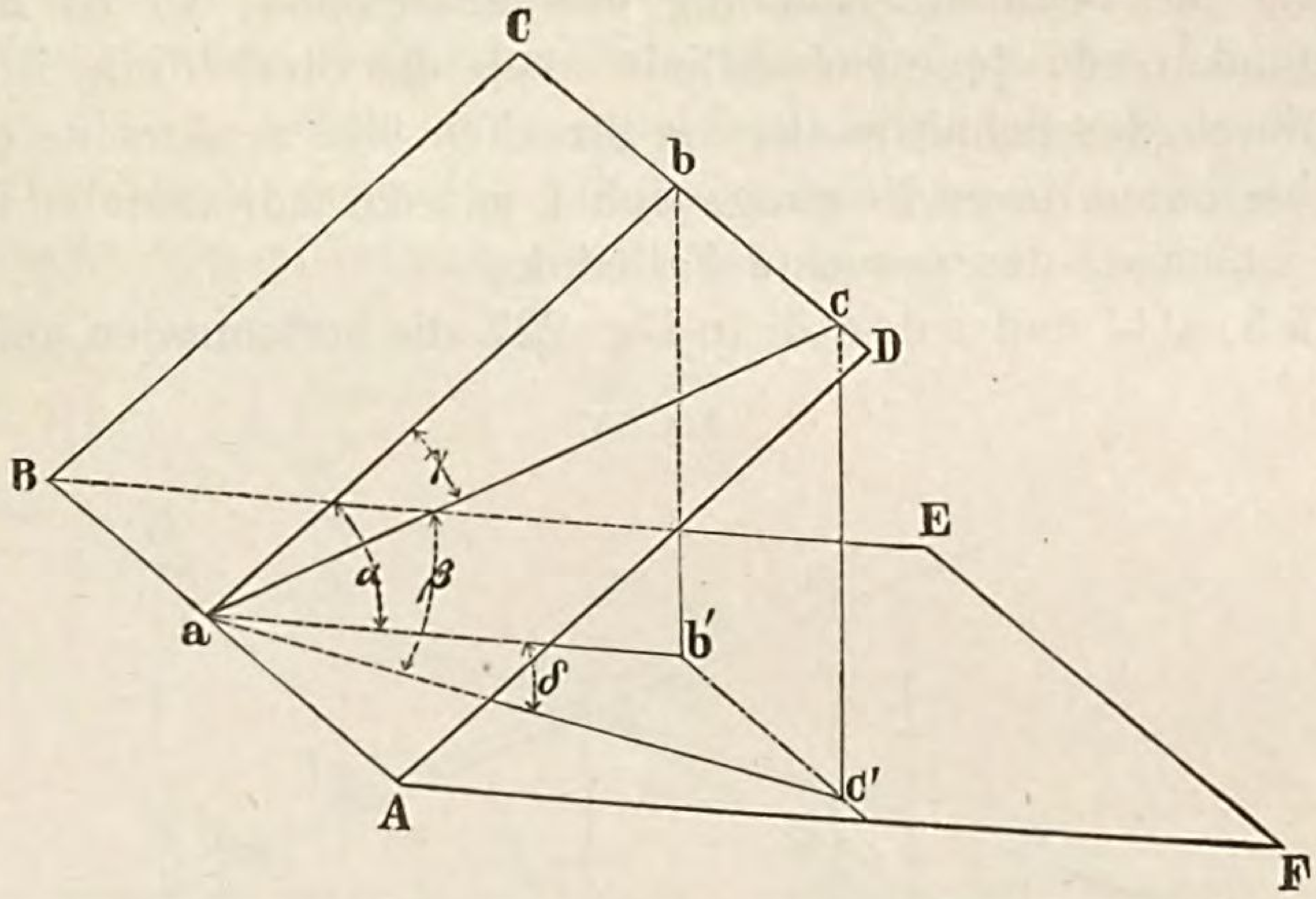
§. 218. Aufgabe. Aus dem bekannten Fallen einer Lagerstätte die Richtung einer Strecke von bestimmter Steigung, welche darauf getrieben werden soll, anzugeben.

Es sei A C in Fig. 225 die Lagerstattebene, A E eine Horizontalebene a b die Falllinie, a b′ deren Ebensohle, a c die gesuchte Streckenrichtung und a c′ ihre horizontale Projection. Beobachtet sei der Fallwinkel b a b′ $= \alpha$ und gegeben die Steigung der Strecke a c $= \beta$; gesucht wird entweder der Winkel b a c $= \gamma$ welchen die Strecke mit der Falllinie bildet, oder dessen horizontale Projection b′ a c′ $= \delta$.

Die Lösung der vorstehenden Aufgabe ist bereits durch die Gleichungen (405) und (406) welche mit Bezug auf die nachstehende Figur entwickelt wurden, gegeben; denn man erhält aus ihnen

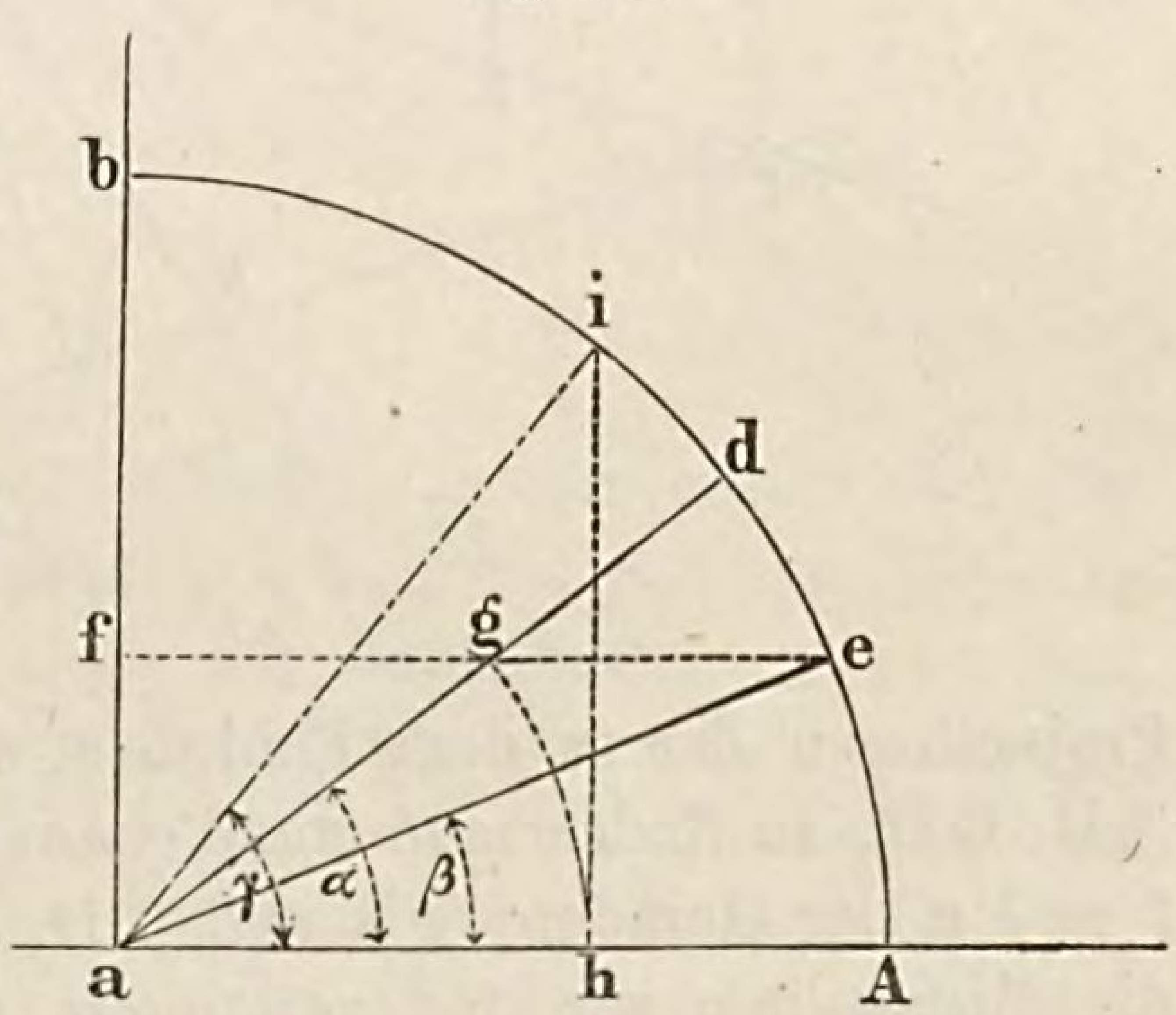
$$\cos\gamma = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \text{ und } \cos\delta = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Fig. 225.



Will man den Winkel γ durch Construction finden, so zeichne man nach Fig. 226 einen rechten Winkel A a b, in welchem a b die Falllinie und A a die Streichlinie vorstellt. Ueber demselben beschreibe man mit einem beliebigen Halbmesser a b = r einen Viertelkreis und trage an den Schenkel a A den Winkel α = A a d und β = A a e an. Fällt man von dem Punkte e aus die Senkrechte e f auf a b, beschreibt mit a g den Kreisbogen g h, macht h i senkrecht zu a A und zieht schliesslich die Gerade i a: so stellt i a h den gesuchten Winkel γ vor. Denn es ist nach der Construction a f = a e . sin β = = a g . sin α = a h . sin α und folglich

Fig. 226.



$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{a\,h}{a\,e} = \frac{a\,h}{r}$$

Ferner ist der Winkel b a i = a i h und nach der Figur

$$\sin\,(a\,i\,h) = \frac{a\,h}{a\,i} = \frac{a\,h}{r}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \sin\,(a\,i\,h) = \cos\,(i\,a\,h)$$

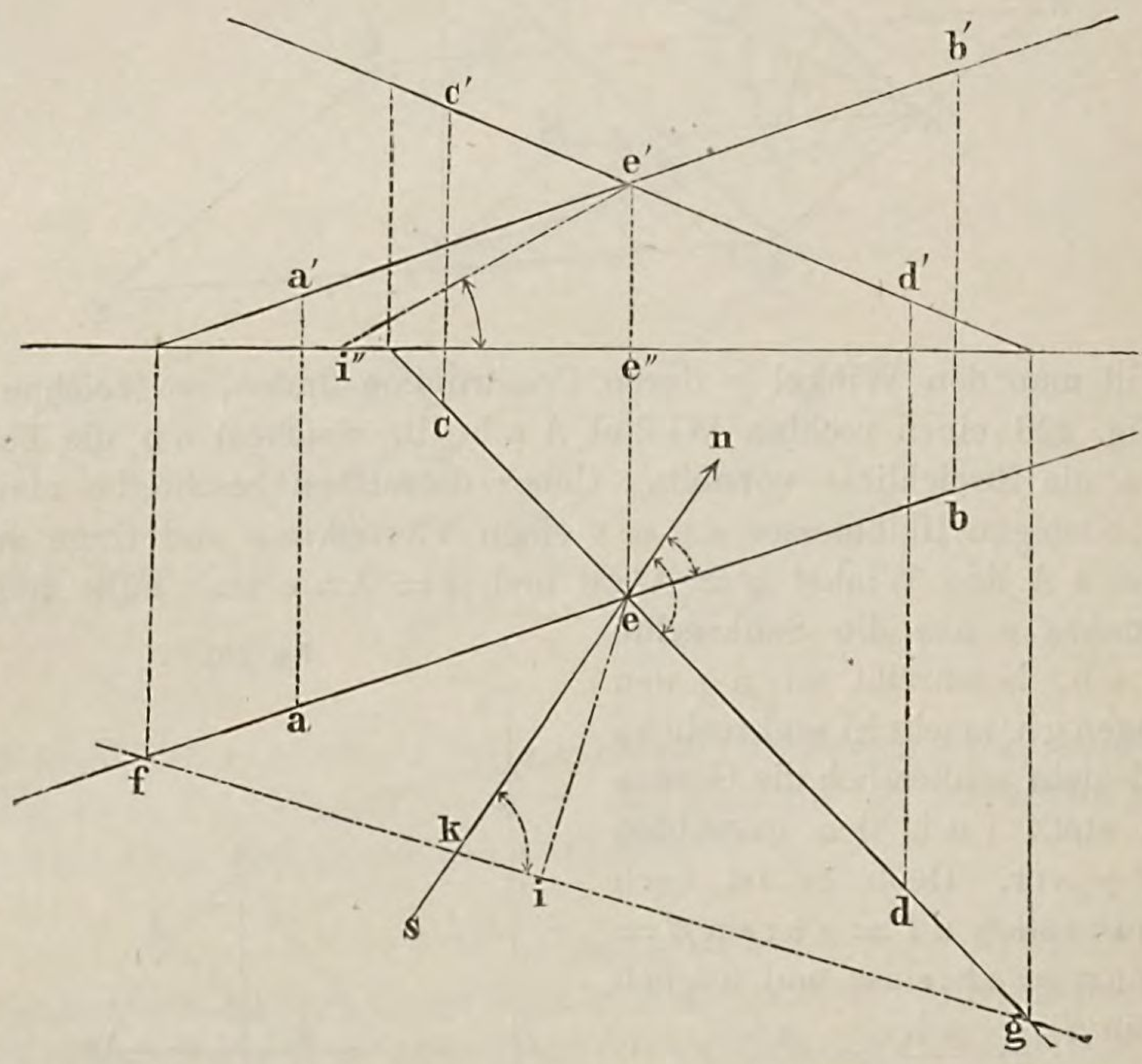
da aber das Verhältniss von $\sin\beta : \sin\alpha = \cos\gamma$ ist, so ist auch i a h = γ.

§. 219. Aufgabe. Von zwei in einer Lagerstattebene sich kreuzenden Strecken kennt man die beiden Projectionen: hieraus das Streichen und Fallen jener Ebene abzuleiten.

Reicht zur Bestimmung des Streichens und Fallens die Genauigkeit der Zeichnung aus, so suche man zunächst die Schnittlinie der durch die Strecken gegebenen Lagerebene mit der horizontalen Projectionsebene und ziehe darauf die bekannte Richtung der Mittagslinie, so ist der Streichwinkel gefunden, da jene Schnittlinie auch die Streichlinie ist. Alsdann lege man durch den Schnittpunkt der Strecken eine Senkrechte zur Streichlinie und bestimme deren Neigungswinkel mit der horizontalen Projectionsebene, so ist dieses der gesuchte Fallwinkel.

Sind a b, a′ b′ und c d, c′ d′ in Fig. 227 die horizontalen und verticalen

Fig. 227.



Projectionen der in dem Punkte e, e′ sich schneidenden geraden Strecken A B, C D, so findet man auf bekannte Weise die horizontalen Durchgänge f und g der Geraden A B und C D; daher die Streichlinie = f g. Stellt s n die Mittagslinie vor und verlängert man dieselbe bis zu f g, so ist, wie man leicht sieht, der erhabene Winkel f k e dem gesuchten Streichwinkel gleich. Zieht man weiter e i senkrecht zu f g, macht e″ i″ = e i und verbindet e′ mit i″, so ist e′ i″ e″ der gesuchte Fallwinkel.

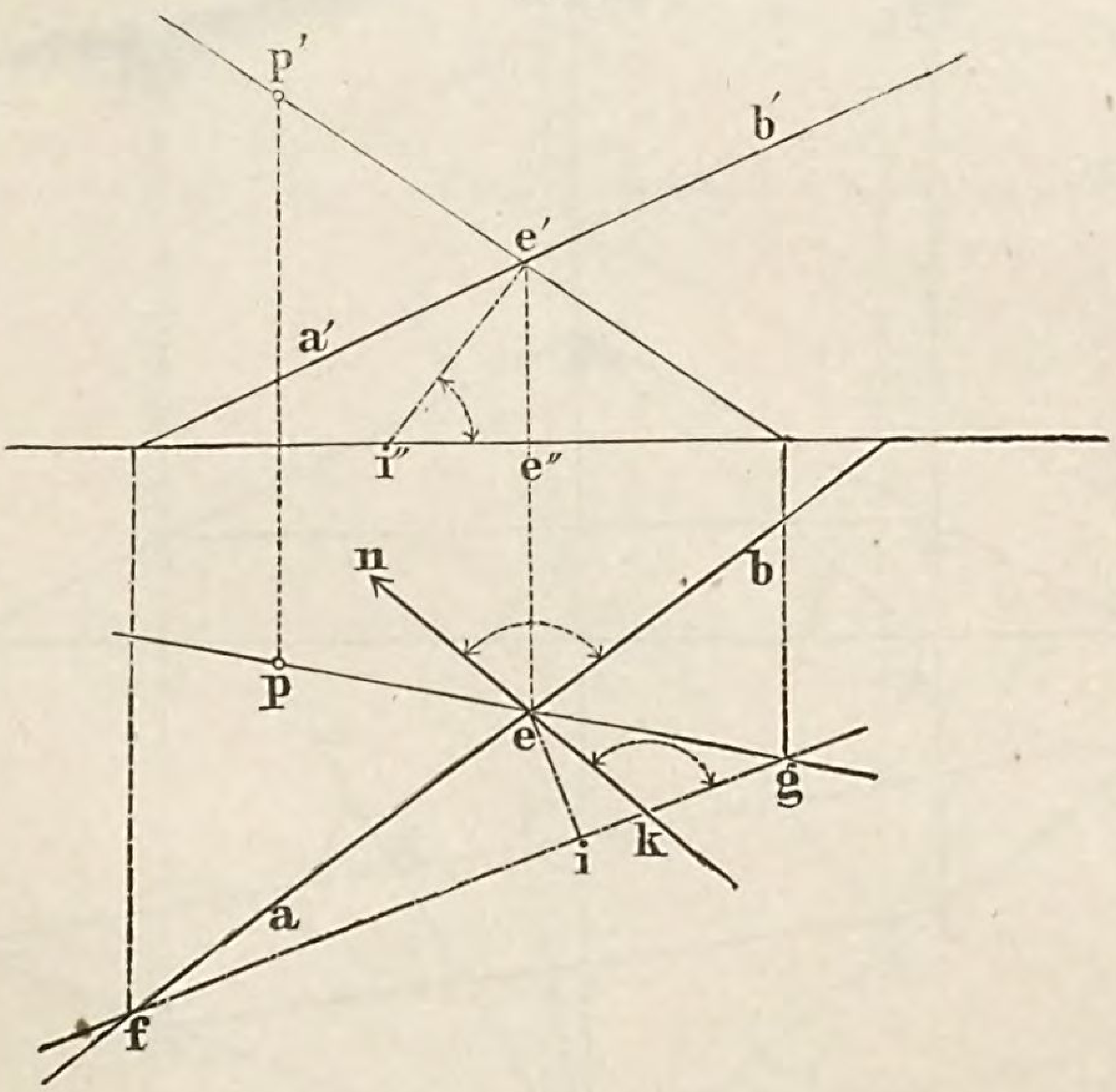
Wer mit dem Wesen der analytischen Geometrie vertraut ist, wird hiernach die beiden gesuchten Winkel auch berechnen können; wer es

aber nicht ist, dem nützt eine Ableitung dieser Winkel Nichts. Wir übergehen daher die Bestimmung des Fallens und Streichens durch Rechnung um so mehr, als in den meisten praktischen Fällen der vorliegenden Art die Construction allein ausreicht.

§. 220. Aufgabe. Von einer Lagerstattebene sind eine gerade Strecke und ein Punkt gegeben: man soll das Streichen und Fallen dieser Lagerstätte bestimmen.

Die Lösung dieser Aufgabe führt sofort auf die des vorhergehenden Paragraphen zurück, wenn man sich durch den gegebenen Punkt p, p′ (Fig. 228) eine gerade p e, p′ e′ gelegt denkt welche die gegebene Strecke a b, a′ b′ unter einem beliebigen Winkel schneidet. Man findet alsdann

Fig. 228.



die Streichlinie f g aus den Horizontaldurchgängen f, g der Linien a b, a′ b′ und p e, p′ e′ und damit den Streichwinkel g k e, wenn e k die Richtung der Mittagslinie ist. Ebenso erhält man aus der Senkrechten e i und dem Abstande e′ e″, indem man das rechtwinklige Dreieck e′ e″ i″ construirt, den gesuchten Fallwinkel = e′ i″ e″. (Für die Berechnung des Fallens und Streichens gilt die Schlussbemerkung des vorhergehenden Paragraphen.)

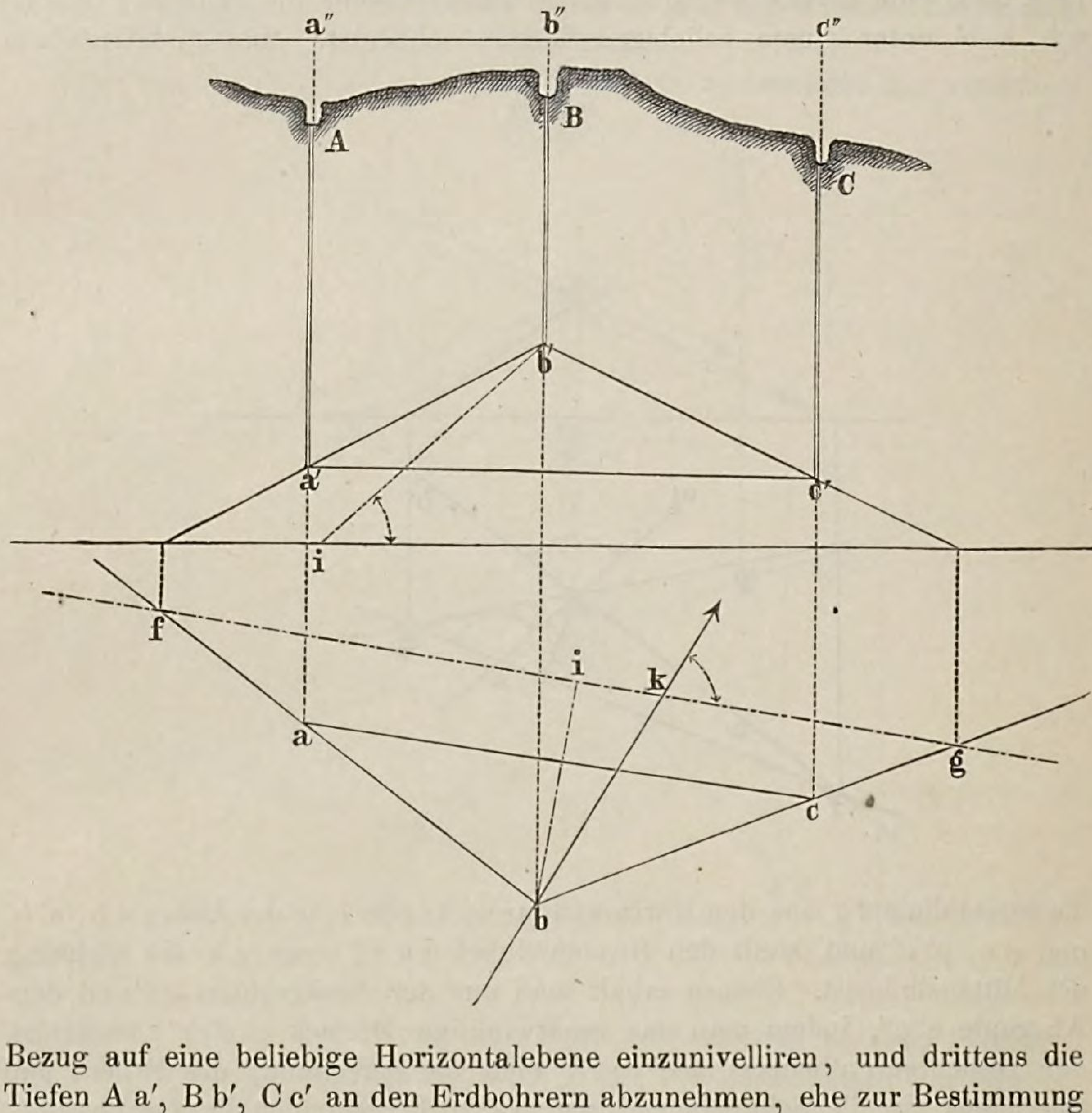
§. 221. Aufgabe. Aus drei bekannten Punkten einer Lagerstätte deren Streichen und Fallen zu bestimmen.

Es kommt im praktischen Bergbaue sehr oft vor dass man eine Lagerstätte bloss aus drei Bohrlöchern welche bis zu derselben hinabführen, zu bestimmen hat. Soll diese Bestimmung möglich sein, so muss man die Coordinaten der Fusspunkte jener drei Bohrlöcher gegen drei Axen kennen,

wovon eine lothrecht steht und zwei horizontal sind, und von denen wiederum eine mit der Mittagslinie parallel läuft; oder mit anderen Worten: es müssen die horizontalen und verticalen Projectionen jener drei Punkte und die Richtung der Mittagslinie bekannt sein.

Sind A, B, C (Fig. 229) die drei Stellen von denen aus die Bohrlöcher abgeteuft werden, so hat man erstens die horizontale Projection a b c des Dreiecks A B C und die Neigung einer Seite desselben gegen die Mittagslinie auf bekannte Weise zu bestimmen, zweitens die drei Punkte A B C in

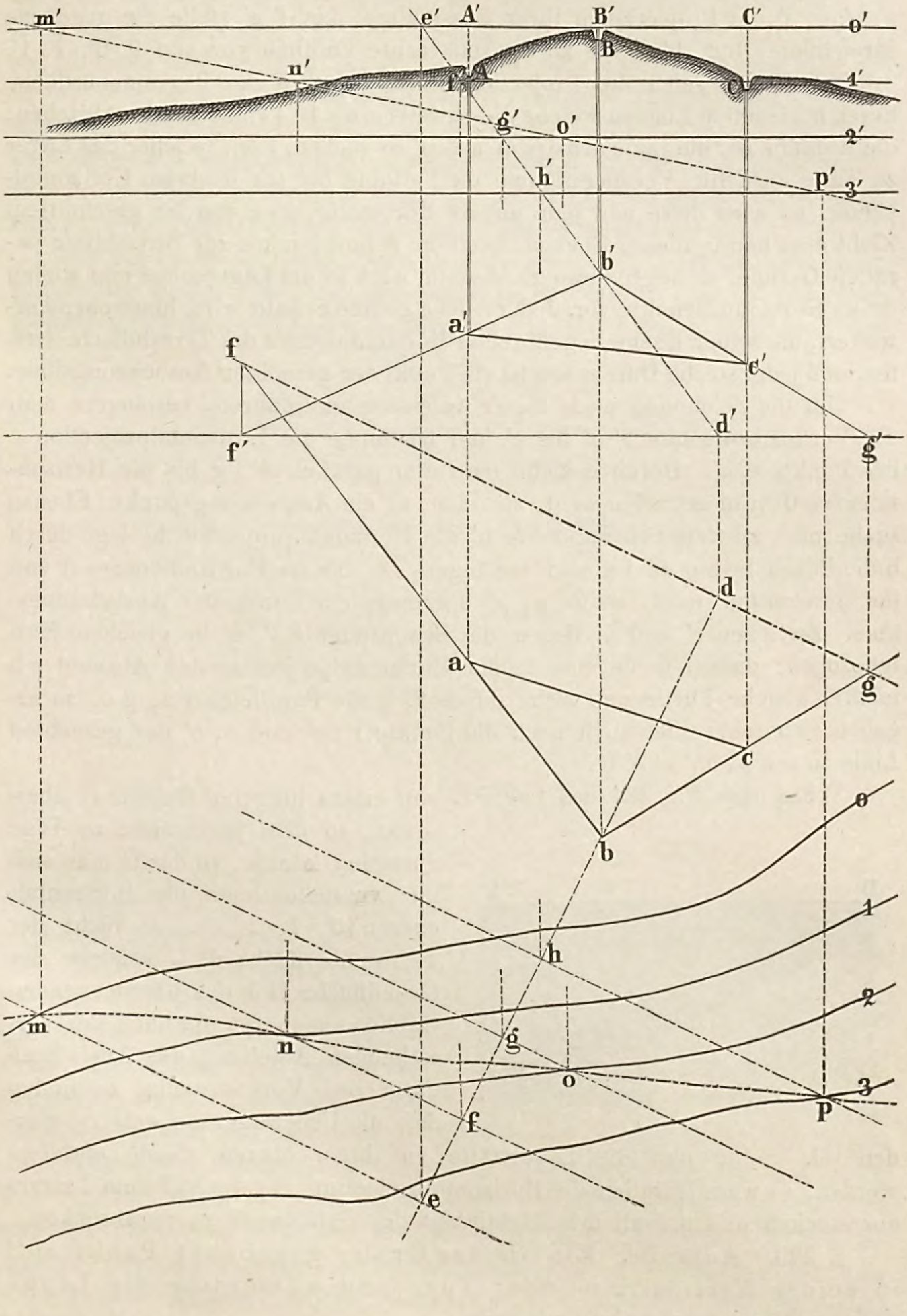
Fig. 229.



Bezug auf eine beliebige Horizontalebene einzunivelliren, und drittens die Tiefen A a′, B b′, C c′ an den Erdbohrern abzunehmen, ehe zur Bestimmung des Streichens und Fallens der Lagerstätte geschritten werden kann. Kennt man aber diese Daten, so lässt sich die Aufgabe auf constructivem Wege nach §. 219 lösen, da durch die Projectionen a, b, c und a′, b′, c′ dreier in der Lagerstätte liegenden Punkte auch drei Paare sich kreuzender Richtungen gegeben sind.

§. 222. Aufgabe. Das Ausbeissen einer Lagerstätte über

Fig. 230.



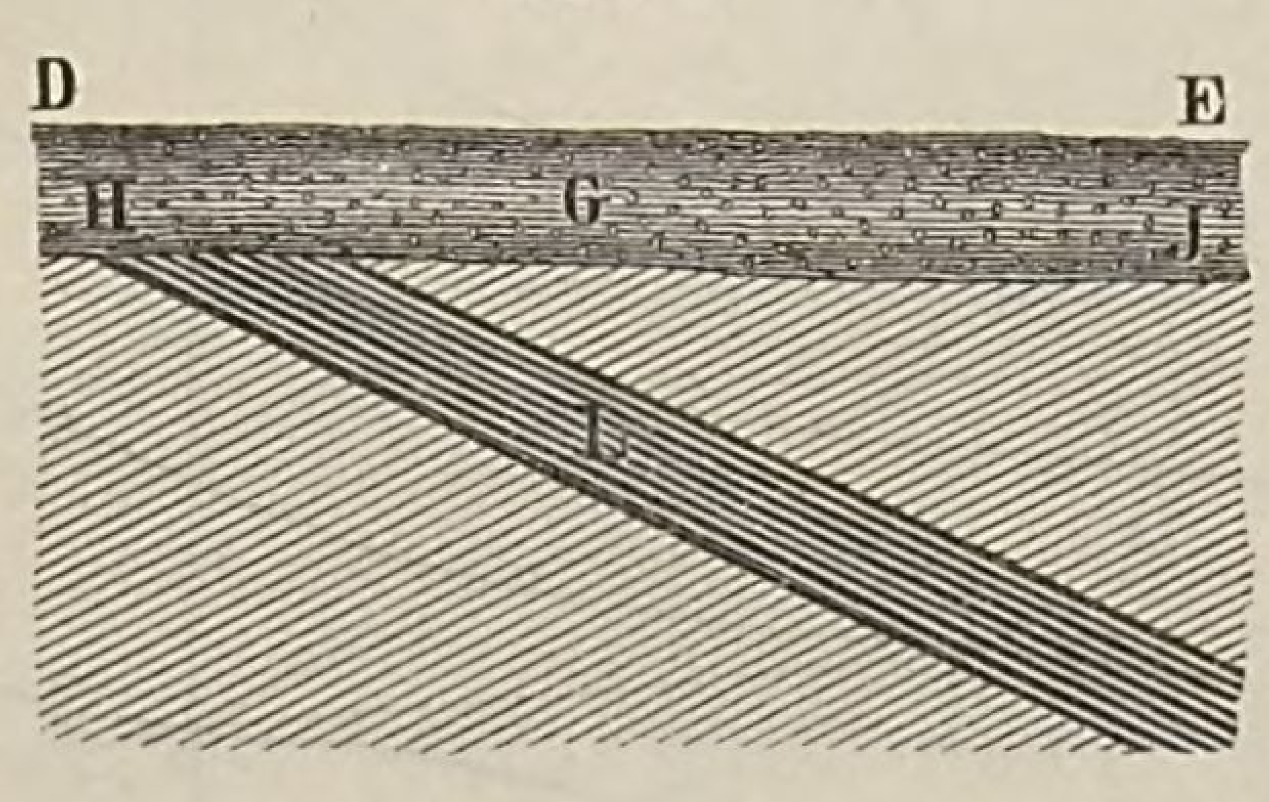
Tage zu bestimmen, wenn deren Streichen und Fallen aus drei Bohrlöchern bekannt ist.

Es seien in Fig. 230 Seite 465 A, B, C die drei Bohrlöcher und a, a′ b, b′, c, c′ die Projectionen ihrer Fusspunkte; f g, f′ g′ stelle die gegebene Streichlinie, b d, b′ d′ die zu f g senkrechte Falllinie vor und 0, 0′, 1, 1′, 2, 2′, 3, 3′ seien die Projectionen der Schnitte der Terrainoberfläche durch horizontale Ebenen welche gleichweit (etwa 10′) von einander abstehen: die Aufgabe ist, die Linie m n o p, m′ n′ o′ p′ zu suchen, nach welcher das Lager zu Tage ausgeht. Verlängert man die Falllinie bis zur obersten Horizontalebene, so wird diese und jede andere Horizontalebene von ihr geschnitten. Zieht man nun in diesen Ebenen durch die Schnittpunkte zur Streichlinie parallele Gerade, so liegen diese gleichzeitig auch in der Lagerebene und stellen deren Horizontalschnitte vor. Jeder solche gerade Schnitt wird, hinreichend erweitert, die seiner Ebene angehörende Horizontalcurve der Terrainfläche treffen, und jeder solche Durchgang ist ein Punkt der gesuchten Ausbeissungslinie.

Um die Zeichnung nach dieser Anleitung auszuführen, verlängere man die Verticalprojection b′ d′ bis e′ und bestimme die Horizontalprojection e des Punkts e, e′. Durch e ziehe man e m parallel zu f g bis die Horizontalcurve 0 in m getroffen wird, so ist m, m′ ein Ausbeissungspunkt. Ebenso suche man zu dem Schnittpunkte h′ die Horizontalprojection h, lege durch h die Parallele h p zu f g und verlängere sie, bis die Horizontalcurve 3 von ihr geschnitten wird, so ist p, p′ abermals ein Punkt der Ausbeissungslinie. Zwischen e′ und h′ liegen die Schnittpunkte f′, g′ in gleichen Entfernungen: darum theile man in der Horizontalprojection den Abstand e h in drei gleiche Theile und ziehe durch f, g die Parallelen f n, g o, so ergeben sich schliesslich auch noch die Punkte n, n′ und o, o′ der gesuchten Linie m n o p, m′ n′ o′ p′.

Wäre nach Fig. 231 das Lager L von einem jüngeren Gebilde G überdeckt, so dass jenes nicht zu Tage austreten könnte, so dürfte man sich nur vorstellen dass die Horizontalcurven 0, 1, 2, 3 nicht der Terrainoberfläche D E sondern der Grundfläche H J des überdeckenden Gebilds angehören um nach der vorstehenden Anleitung das Ausbeissen unter der Voraussetzung zu finden dass die Ueberlagerung entfernt worden sei. Sollte nun die Lagerstätte an ihrem oberen Rande entblösst werden, so wäre lediglich die Horizontalprojection m n o p auf dem Terrain abzustecken und überall die Mächtigkeit des Gebildes G zu durchsenken.

Fig. 231.

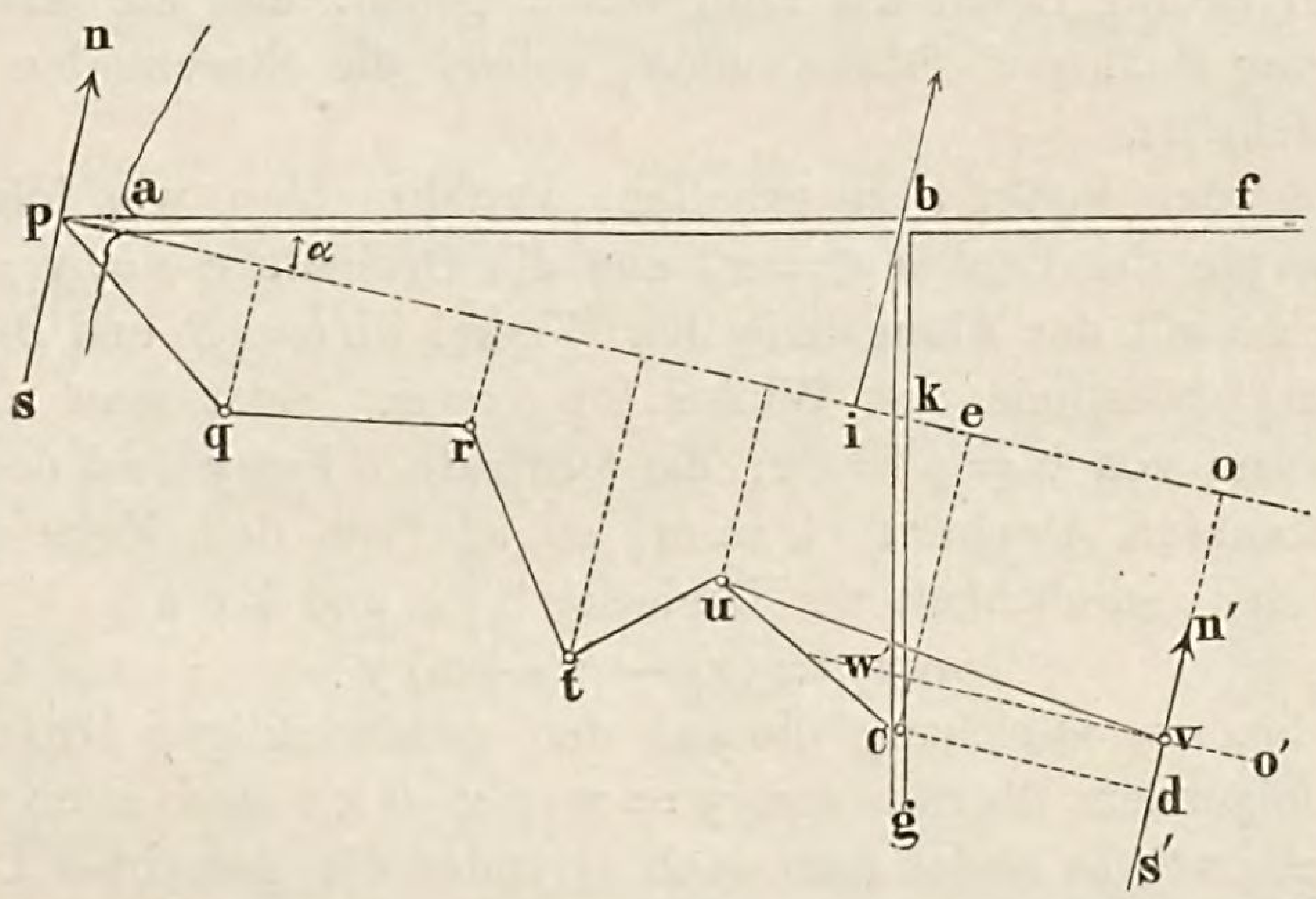


§. 223. Aufgabe. Ein in der Grube gegebener Punkt soll in seiner Verticallinie über Tag, und ausserdem die Länge dieser Linie angegeben werden.

Diese Aufgabe welche sich bergmännisch auch so ausdrücken lässt: „einen Grubenpunkt-Seiger an den Tag überzutragen," oder so: „den Feldort eines Grubenpunkts anzugeben," hat der Markscheider sehr oft zu lösen; denn angenommen z. B., es sei nach Fig. 232 der Tagstollen a b sehr lang, so wird die Luft in dem Querschlage b c sehr bald verdorben sein und sowohl das Brennen der Lichter als das Athmen der Bergleute sehr erschweren, wesshalb zur Verbesserung der Luft entweder ein Wetterbohrloch oder ein Wetterschacht abgeteuft werden muss. Soll nun die Abteufung in einem bestimmten Punkte c der Grube eintreffen, so ist dessen Ortung über Tage (Feldort, Projection) genau anzugeben.

Um dieses zu bewirken, wird man vor allen Dingen einen Markscheidezug in der Grube ausführen und diesen an die vor dem Stollenmundloche a ausgesteckte Mittagslinie s n anknüpfen: hierdurch findet man die Länge,

Fig. 232.



Breite und Höhe des Punkts c in Bezug auf den Fixpunkt p und die rechtwinkligen Axen p s, p o, p z, von denen die letztere lothrecht ist. An diese Axen und den Fixpunkt p anschliessend, steckt man über Tage ein Polygon p q r t u v bis zu einer Stelle hin aus, von der man glaubt dass sie lothrecht über c liege. Dieses Polygon wird auf bekannte Weise nach seiner horizontalen und verticalen Projection aufgenommen und von jedem Eckpunkte werden die Coordinaten (x, y, z) oder Länge, Breite und Höhe berechnet. Unter den horizontalen Coordinaten werden zwei der Länge und Breite von c ziemlich nahe kommen; wir wollen annehmen die von v. Von diesem Punkte aus und im Anschlusse an die Polygonseite u v wird man nun leicht den Feldort c′ finden. Denn trägt man an v die Mittagslinie s′ n′ an und errichtet darauf die Senkrechte o′ w′, so hat man die Axen parallel zu ihrer ursprünglichen Richtung und die Coordinaten des Punkts v in die Lage v s′, v o′, v z′ verschoben: es sind daher leicht die

Coordinaten von c in Bezug auf diese neuen Axen zu berechnen und abzustecken. Hat man dieses aber gethan, so ist die Aufgabe gelöst, weil der Feldort c′ und die Seigerhöhe c c′ welche die Teufe des Wetterschachtes angibt, bekannt sind.

§. 224. Aufgabe. Ein auf dem Felde gegebener Punkt soll in die Grube übergetragen oder projicirt werden.

Diese Aufgabe behandelt den umgekehrten Fall der vorigen, wesshalb wir darauf verweisen und die Fig. 232 wiederholt anwenden. Man wird demnach den Punkt c′ dessen gesuchte Projection (Ortung) unter Tage ist, mit einem Fixpunkte p der vor einem Stollenmundloche a steht, durch ein Polygon c u t r q p verbinden und die Coordinaten x, y, z aller Eckpunkte in Bezug auf die Axen p s, p o, p z berechnen. Hierauf schliesst man an dieselben Axen einen Grubenzug p a b f an und berechnet aus diesem einen Punkt b der so liegt dass, wenn von ihm aus ein Querschlag b g unter einem Winkel $\beta = i\,b\,k$ gegen die Mittagslinie i b geführt wird, dieser Schlag durch das Loth von c′ gehen, also zur unterirdischen Ortung c des Punkts c′ führen muss, sobald die Strecke b c berechnet und hergestellt ist.

Um aber den Punkt b zu erhalten, verfahre man wie folgt. Es sei die Abscisse p e des Punkts $c = x_1$ und die Ordinate $c\,e = y_1$; die Richtung b c bilde mit der Mittagslinie den Winkel $i\,b\,c = \beta$ und die Richtung a b mit der Ostwestlinie den Winkel $b\,p\,o = \alpha$. Setzt man nun die gesuchte Abscisse von $b = p\,i = x$, die Ordinate $b\,i = y$ und den ebenfalls noch unbekannten Abschnitt $i\,k = m$, so ist (von den Vorzeichen abgesehen) aus der Aehnlichkeit der Dreiecke b i k und k c e:

$$m\,y_1 = (x_1 - x - m)\,y$$

Setzt man in diese Gleichung die aus den rechtwinkligen Dreiecken b p i und b k i folgenden Werthe von $y = x \operatorname{tg} \alpha = x\,t$ und $m = y \operatorname{tg} \beta = x \operatorname{tg} \beta \,.\, \operatorname{tg} \alpha = x\,t\,t'$, so findet man nach einander die gesuchten Coordinaten und hieraus die Hypotenuse p b des Dreiecks i p b gleich

$$x = \frac{x_1 - y_1\,t'}{1 + t\,t'} \tag{409}$$

$$y = \frac{(x_1 - y_1\,t')\,t}{1 + t\,t'} \tag{410}$$

$$l = \frac{x}{\cos \alpha} = \frac{x_1 - y_1\,t'}{(1 + t\,t')\cos \alpha} \tag{411}$$

Mit dem berechneten Werthe von l kann man den Punkt b in der Grube abstecken, und ist dieser gefunden so lässt sich die Richtung b c, deren Horizontalprojection die Länge

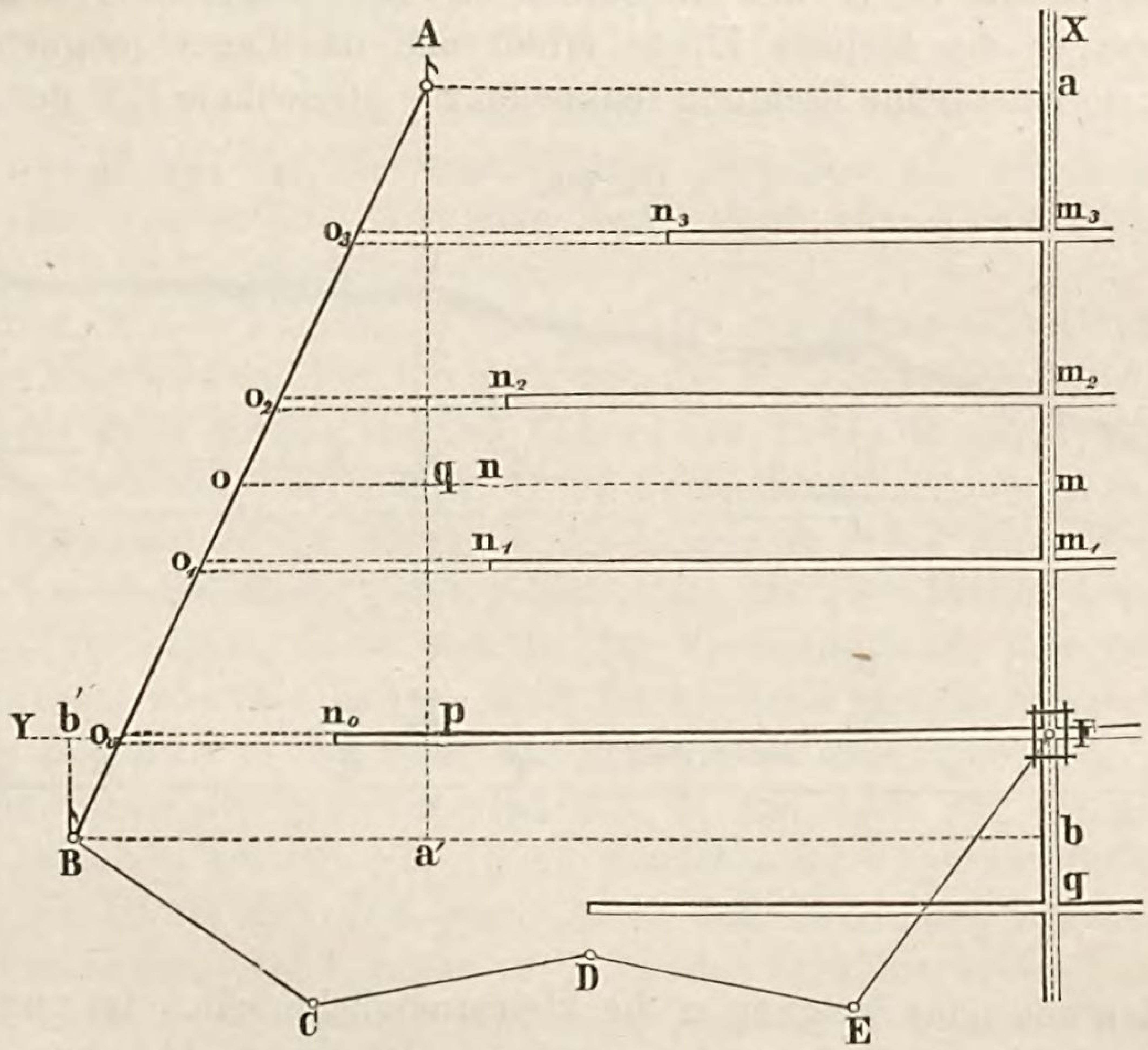
$$l' = \frac{y + y_1}{\cos \beta} = \frac{t\,x_1 + y_1}{(1 + t\,t')\cos \beta} \tag{412}$$

hat, leicht bezeichnen. Ist nun der Querschlag b g bis auf die horizontale Länge l′ von b aus in den Berg getrieben, so kann c abgemessen und die Aufgabe als gelöst betrachtet werden.

§. 225. **Aufgabe. Eine auf dem Felde gegebene Markscheide in die Grube zu übertragen.**

Die Markscheide sei auf dem Felde durch die Fixsteine A, B (Fig. 233) bezeichnet und die Grube, in welcher die durch A B gehende Verticalebene abzustecken ist, sei eine Kohlengrube. Für den Abbau des Kohlenflötzes seien bereits der Schacht F, in der Richtung des Falls F X die Strecke F a und in der Richtung des Streichens die Strecken F n_0, m_1 n_1, m_2 n_2, m_3 n_3 angelegt. Es handelt sich also nur darum, die Längen F o_0 $= y_0$, m_1 $o_1 = y_1$, m_2 $o_2 = y_2$, m_3 $o_3 = y_3$ anzugeben welche von F X bis an die Verticalebene A B reichen. Zu dem Ende stecke man über Tage zwischen der Markscheide A B und dem Schachte F ein Polygon

Fig. 233.



A B C D E F aus, nehme es in bekannter Weise auf und berechne die Coordinaten von A und B in Bezug auf die rechtwinkligen Axen F X und F Y. Das Ergebniss dieser Messung und Rechnung sei:

$$A\,p = +x' \qquad A\,a = y'$$
$$B\,b' = -x'' \qquad B\,b = y''$$

Für irgend eine mit der Y-Axe parallele Strecke m n deren Horizontalabstand von F = F m ist, erhält man die Länge

$$m\,o = \lambda = m\,q + q\,o = y' + \eta \qquad (413)$$

wobei A a' parallel der X-Axe gezogen und $q\,o = \eta$ gesetzt ist. Schreibt man

$$\operatorname{tg}(B\,A\,a') = \frac{B\,a'}{A\,a'} = \frac{y'' - y'}{x'' + x'} = t$$

so folgt sofort aus dem rechtwinkligen Dreiecke A q o, wenn $F m = \zeta$ gesetzt wird, $\eta = (x' - \zeta) t$ und durch Einsetzen dieses Werths in (413)

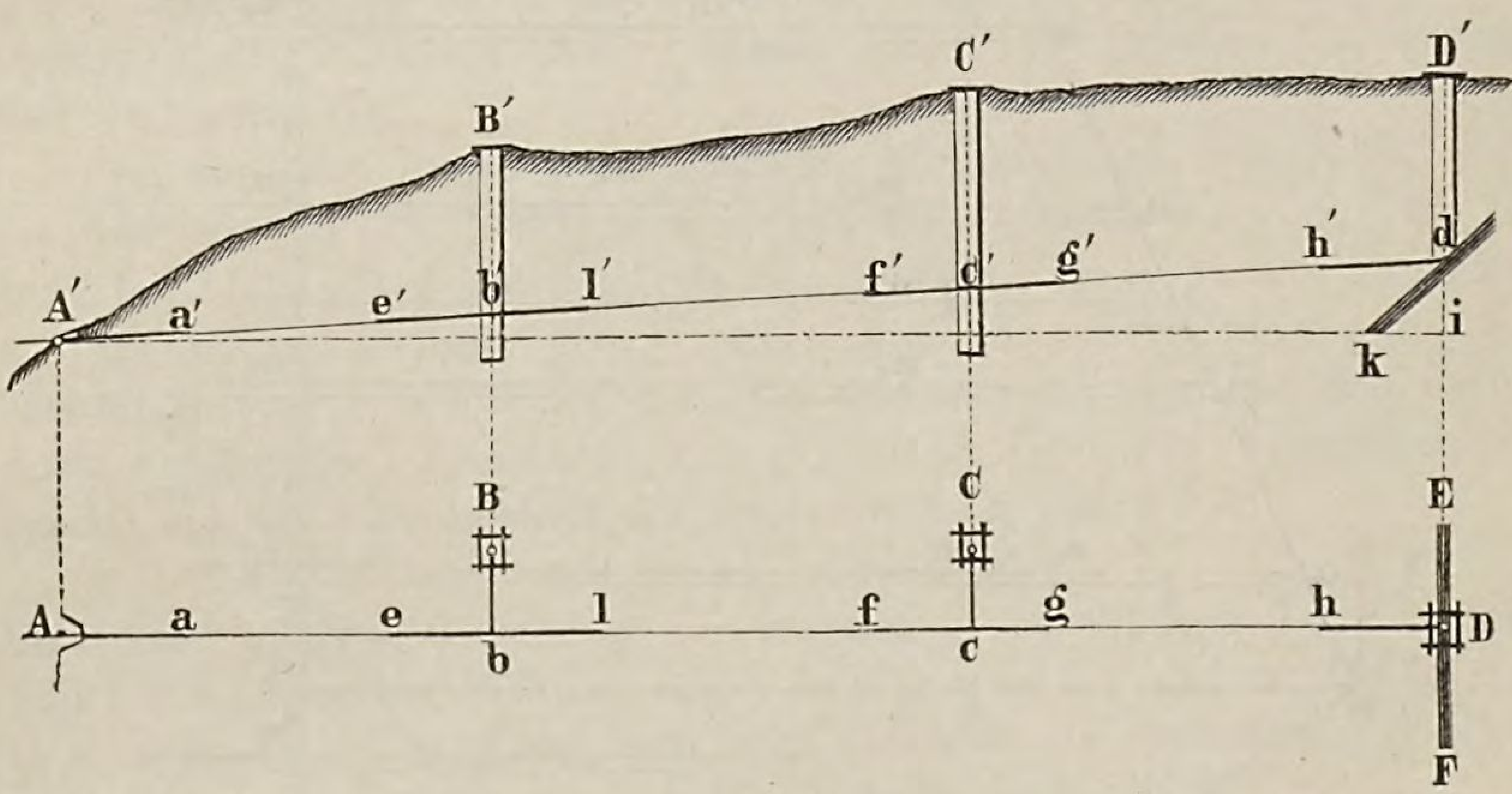
$$\lambda = y' + (x' - \zeta) t \tag{414}$$

Setzt man hierin nach und nach für ζ die Werthe 0, ζ_1, ζ_2, ζ_3 so findet man λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 und kann folglich damit, wenn die zugehörigen Strecken weit genug in den Berg getrieben sind, die Grenzpunkte o_0, o_1, o_2, o_3 durch Markscheidestufen und die Grenze selbst durch einen Querschlag bezeichnen.

§. 226. Aufgabe. Einen Stollen mit Lichtlöchern und Gegenortspunkten abzustecken.

Stellt in Fig. 234 der schwarze Streifen E F den wagrechten und k d den lothrechten Durchschnitt einer Lagerstätte vor und soll von dem gegebenen Tagpunkte A, A′ aus ein Stollen an diese Lagerstätte so geführt werden dass er die kleinste Länge erhält und das Lager möglichst tief untersetzt: so muss seine Richtung senkrecht zur Streichlinie E F der Lager-

Fig. 234.



stätte stehen und seine Steigung α die kleinstmögliche sein. Ist nun durch einen Markscheidezug die Lage des gegebenen Punkts A, A′ gegen die mit E F parallele Streichlinie bestimmt, so steht damit auch die horizontale Projection A D der Stollenaxe fest, insofern sie E F senkrecht schneidet; und wenn man von A′ aus eine Linie A′ d mit der gegebenen Steigung α gegen die Horizontale A i zieht so hat man auch die verticale Projection A′ d der Axe des Stollens. Da die Lage des Punkts A gegen die Streichlinie der Lagerstätte als bekannt vorausgesetzt wird, so lässt sich die Absteckung der zur Streichlinie senkrechten Stollenrichtung auf dem Terrain nach den bereits bekannten Methoden für die Absteckung gerader Linien leicht bewirken. Diese Absteckung vorausgesetzt, erhält man die Lage des Endpunkts d des Stollens auf folgende Weise. Man nivellirt die ausgesteckte Gerade bis zu einem (in Fig. 234 nicht mehr angedeuteten). Punkte L an

welchem die Lagerstätte entweder ausbeisst oder entblösst ist. Hierdurch erfährt man den Höhenunterschied L m = h und die Horizontalprojection von A′ L = A′ m = l. Da auch der Fallwinkel L k m = β bekannt ist so ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreiecke L k m die Länge von

$$k\,m = h \cot \beta$$

und aus dem ebenfalls rechtwinkligen Dreiecke A′ m n die absolute Steigung des Stollens bis zur Verticalen L m gleich

$$m\,n = l \operatorname{tg} \alpha$$

Hiemit findet man, was über d zu wissen nöthig, nämlich

$$A'\,i = \frac{h - l \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} = s$$

$$d\,i = s \operatorname{tg} \alpha \text{ und } A'\,d = \frac{s}{\cos \alpha}$$

Sobald man A′ i kennt, kann man in der abgesteckten Stollenrichtung den Punkt D′ auf der Terrainoberfläche abmessen und somit die Ortung des Punkts d angeben. Aus dem Nivellement von A′ bis D′ ergibt sich auch die Tiefe des Schachtes D′ d.

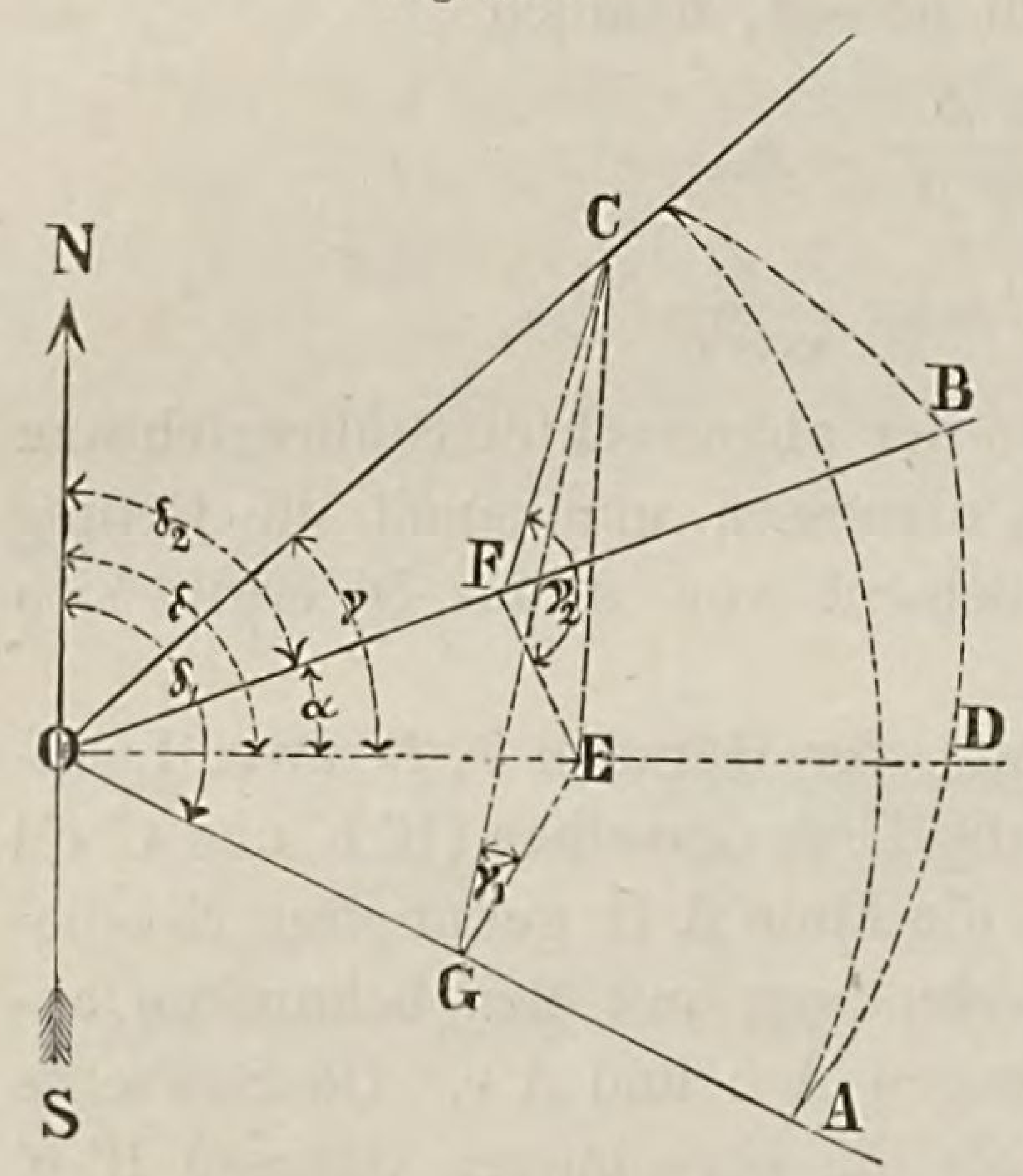
Sollen in den Punkten B, C zur Seite der Geraden A D zwei Lichtschächte bestimmt werden, so erhält man die Tiefe derselben (B′ b′ und C′ c′) bis auf die Sohle des Stollens aus dem an die Linie A D geknüpften Nivellement der Punkte B, B′ und C, C′ in Verbindung mit den bekannten absoluten Steigungen des Stollens auf die Längen A b und A c. Die Schächte werden um einige Meter tiefer gemacht als die berechneten Grössen B′ b′ und C′ c′ verlangen, damit sich in der Vertiefung oder dem Sumpfe das Grubenwasser absetzen kann; die 6 bis 10 Meter langen Querschläge B b und C c sind aber in der Höhe der Stollensohle anzulegen.

Damit man die Gegenortspunkte b, b′ und c, c′ von denen aus der Stollen nach b e, b l und c f, c g hin getrieben wird, genau erhält, müssen erstens die Richtungen B b und C c in dem Kreuzstreichen des Stollens durch Einhängen zweier Lothe in jeden der Schächte angegeben und die aus der Lage von B und C bekannten Abstände B b und C c genau abgemessen, und zweitens die Punkte b′ und c′ von B′ und C′ aus in den Schächten abgesenkelt und in den Querschlägen scharf einnivellirt werden. Sind diese Punkte ihrer horizontalen und verticalen Projection nach bekannt, so ergeben sich die Richtungen b e, b l und c f, c g aus dem bekannten Streichen und die Neigungen b′ e′, b′ l′ und c′ f′, c′ g′ aus dem vorgeschriebenen Gefälle der Stollenaxe. Die Lage der Linien e l, e′ l′ und f g, f′ g′ oder der Feldörter e′, l′, f′, g′ wird in den die Breite des Stollens durchbrechenden Querschlägen B b und C c durch Fixpunkte (Einstemmungspunkte) genau bezeichnet, und während des Stollenbetriebs findet eine wiederholte Controle der Absteckung durch den Markscheider statt, um jede Abweichung von den im horizontalen und verticalen Sinne vorgeschriebenen Richtungen des Stollens sofort zu verhindern.

§. 227. Aufgabe. Das Streichen und Fallen der Kreuzlinie zweier sich durchsetzenden Lagerstattebenen zu bestimmen, deren Streichen und Fallen gegeben ist.

Sind A O und B O die Streichlinien zweier Ebenen, O C deren Schnittlinie, so bilden die beiden Ebenen mit der durch den Punkt O ihrer Schnittlinie gelegten Horizontalebene A O B zusammen betrachtet ein Dreikant. Die Linie O C stellt die Kreuzlinie vor und eine durch O C gelegte Verticalebene gibt in ihrem Schnitt mit der Ebene O A B die Streichrichtung der Kreuzlinie, während der Winkel der Linien C O und D O, C O D $= \gamma$ der Fallwinkel der Kreuzlinie ist.

Fig. 235.



Es sei nun gegeben das Streichen der Ebene A O C Winkel N O A $= \delta_1$; das Streichen der Ebene B O C Winkel N O B $= \delta_2$ und die Fallwinkel derselben Ebenen γ_1 und γ_2. Gesucht ist das Streichen der Kreuzlinie Winkel N O D $= \delta$ und deren Fallwinkel C O D $= \gamma$. Zieht man von C eine Senkrechte C E auf O D und legt durch diese zwei Ebenen, die eine senkrecht auf A O, die andere senkrecht auf B O, so hat man in den Dreiecken C E F und C E G die Winkel C G E $= \gamma_1$ und C F E $= \gamma_2$. Nun ist E F $=$ E C cotg γ_2 und E G $=$ E C cotg γ_1.

Setzen wir $\delta - \delta_2 = \alpha$, so ist nach der Fig. 235

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{F\,E}}{\mathrm{O\,E}} = \frac{\mathrm{E\,C}}{\mathrm{O\,E}} \operatorname{cotg}\gamma_2; \quad \mathrm{O\,E} = \frac{\mathrm{E\,C} \operatorname{cotg}\gamma_2}{\sin\alpha}$$

$$\sin(\delta_1 - \delta_2 - \alpha) = \frac{\mathrm{E\,G}}{\mathrm{O\,E}} = \frac{\mathrm{E\,C}}{\mathrm{O\,E}} \operatorname{cotg}\gamma_1; \quad \mathrm{O\,E} = \frac{\mathrm{E\,C} \operatorname{cotg}\gamma_1}{\sin(\delta_1 - \delta_2 - \alpha)}$$

und durch Gleichsetzung der beiden Werthe von O E:

$$\frac{\operatorname{cotg}\gamma_2}{\sin\alpha} = \frac{\operatorname{cotg}\gamma_1}{\sin(\delta_1 - \delta_2 - \alpha)} \text{ und hieraus } \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\gamma_1 \sin(\delta_1 - \delta_2)}{\operatorname{tg}\gamma_2 + \operatorname{tg}\gamma_1 \cos(\delta_1 - \delta_2)}$$

Da nun α aus tg α hervorgeht, so wird der gesuchte Streichwinkel $\delta = \delta_2 + \alpha$, während der gesuchte Fallwinkel γ aus der folgenden Gleichung berechnet werden kann:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\mathrm{E\,C}}{\mathrm{O\,E}} = \frac{\mathrm{E\,C}\sin\alpha}{\mathrm{E\,C}\operatorname{cotg}\gamma_2} = \sin\alpha \operatorname{tg}\gamma_2$$

Denkt man sich durch O als Mittelpunkt eine Kugel von beliebigem Halbmesser gelegt, so erhält man als Schnitt der Dreikantflächen mit der Kugeloberfläche ein sphärisches Dreieck A B C, aus welchem sich mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie gleichfalls die Winkel α und γ berechnen lassen. Diese etwas weitläufigen Rechnungen sind jedoch wegen der Unsicherheit

der Grundlagen, nämlich der gegebenen Werthe δ_1, δ_2 und γ_1, γ_2, in der Praxis zwecklos; dagegen wird vielfach die Lösung der Aufgabe durch Construction angewendet die in folgender Weise rasch ausgeführt werden kann.

Sind wieder A O und B O die Streichlinien der beiden Lagerstattebenen in einer bestimmten Sohle, so sucht man zunächst die Streichlinien derselben Ebenen in einer um den Höhenunterschied h tieferen oder höheren Sohle. Man denkt sich zu diesem Zweck in D und C die Fallebenen der Lagerstattebenen gezeichnet welche zu den Linien A O und B O senkrecht zu stehen kommen, und klappt dieselben in die Ebene des Papiers um. In der Umklappung lässt sich die Construction der Falldreiecke ausführen wenn man den Teufenunterschied h von D nach D′ und von C nach C′ abträgt und in diesen Punkten das Complement der Fallwinkel γ_1 und γ_2 anlegt. Die so erhaltenen Punkte F und E sind Punkte der gesuchten Streichlinien die ausserdem noch parallel zu A O und B O liegen müssen, also

Fig. 236.

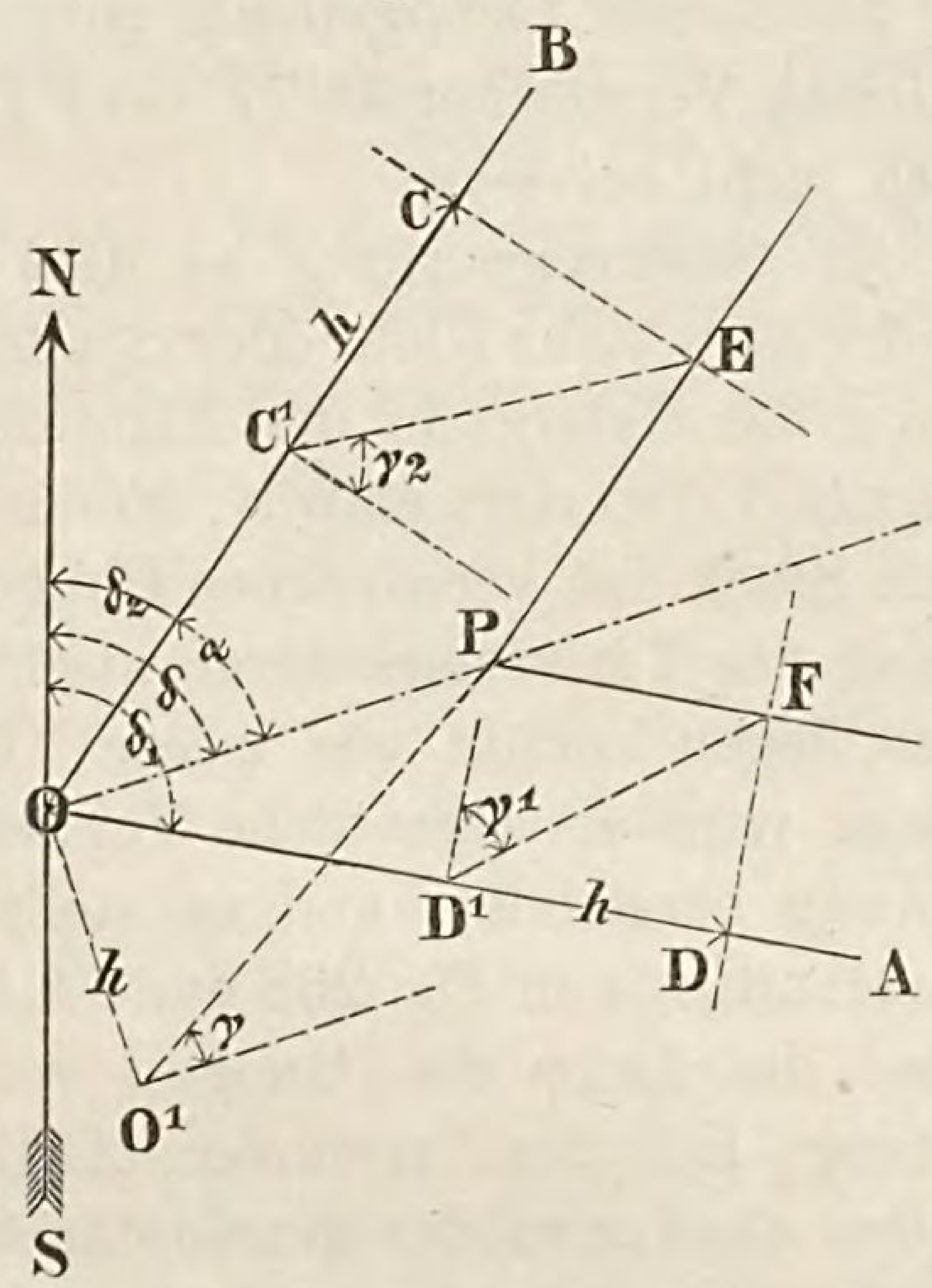
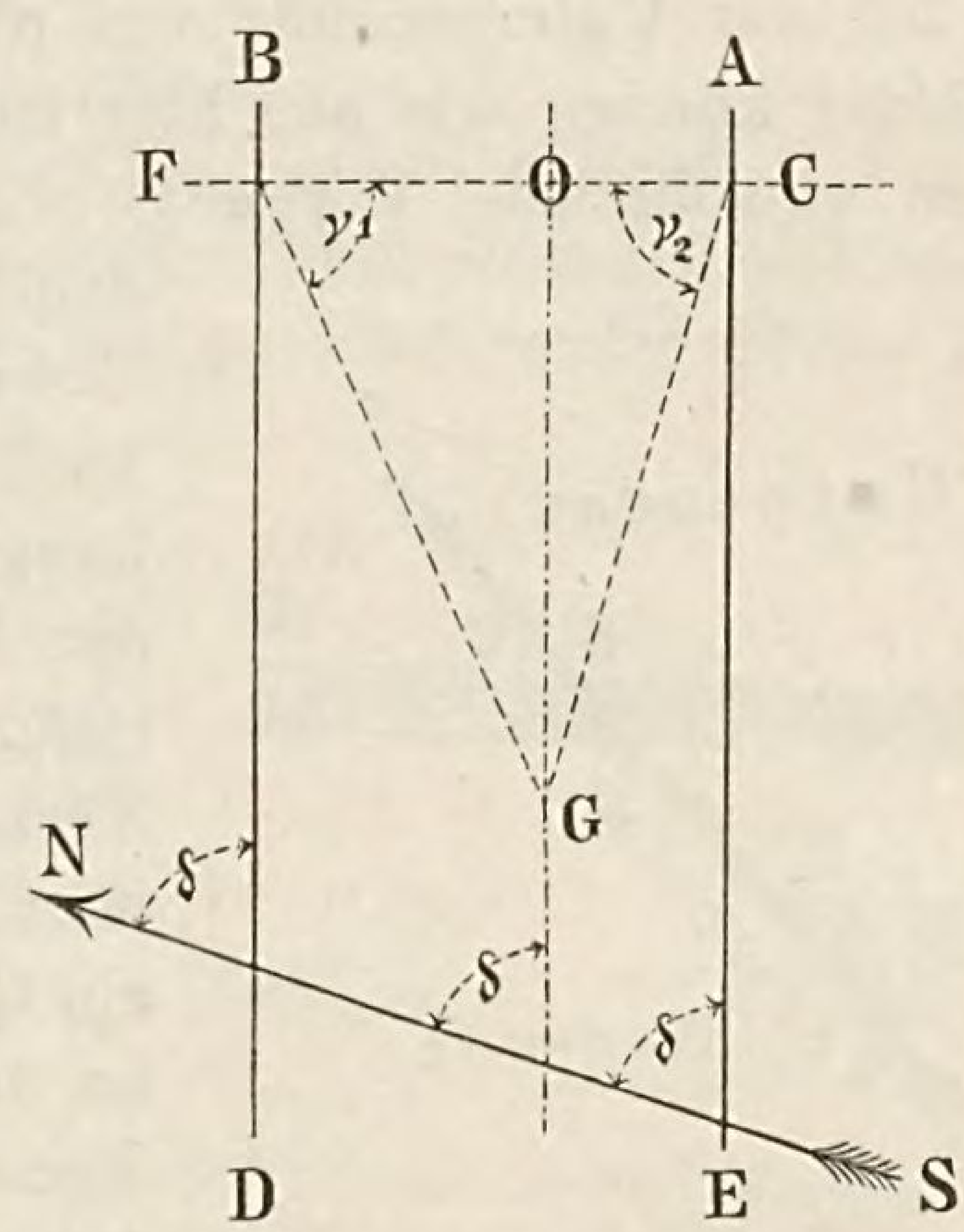


Fig. 237.



gezeichnet werden können, ihr Schnittpunkt P ist ein Punkt der Projection der Kreuzlinie die sich jetzt gleichfalls zeichnen lässt und deren Streichen δ gefunden ist, wenn der Winkel P O N aus der Zeichnung abgenommen wird.

Das Fallen der Kreuzlinie γ ergibt sich, wenn in O die Höhe h senkrecht zu O P angetragen wird, durch die Neigung der Linie O′ P gegen den Horizont, oder in der Figur als Complement des Winkels P O′ O.

Fällt die Lagerstätte seiger so ist das Streichen der Kreuzlinie gleich dem Streichen der seigeren Lagerstattebene. Lagerstätten mit parallelen Streichlinien haben eine horizontale Kreuzlinie mit gleichem Streichen. Die Teufe in welcher die Kreuzlinie in diesem Fall unter oder über der Sohle der bekannten Streichlinien liegt, ist leicht zu ermitteln. Legt man näm-

lich eine Verticalebene F C, Fig. 237, senkrecht zu den Streichlinien A E und B D und construirt die beiden Falldreiecke F G O und G O C, so wird O G die gesuchte Seigerteufe die sich auch durch Rechnung finden lässt. Denn ist C F = a bekannt und ausserdem γ_1 und γ_2 gegeben, so hat man

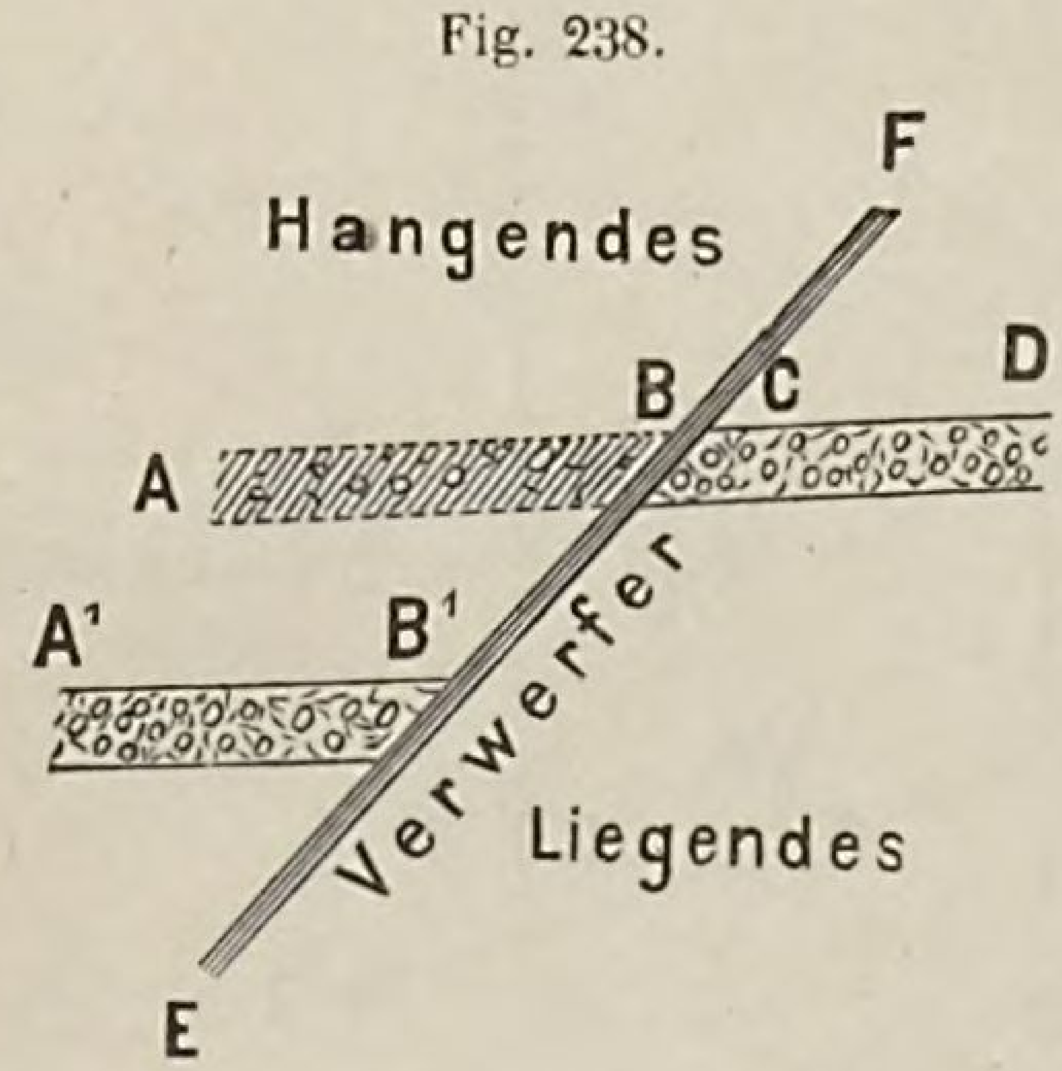
$$F O = \frac{a \operatorname{tg} \gamma_2}{\operatorname{tg} \gamma_1 + \operatorname{tg} \gamma_2} \text{ oder } C O = \frac{a \operatorname{tg} \gamma_1}{\operatorname{tg} \gamma_1 + \operatorname{tg} \gamma_2} \text{ und } O G = \frac{a \operatorname{tg} \gamma_1 \operatorname{tg} \gamma_2}{\operatorname{tg} \gamma_1 + \operatorname{tg} \gamma_2}$$

§. 228. Aufgabe. In Folge von Gebirgsstörungen ist eine Lagerstätte verworfen worden. Es soll angegeben werden in welcher Richtung vom Anfahrungspunkte des Verwerfers aus der verworfene Theil der Lagerstatt wieder aufzufinden ist. (Streichen und Fallen des Verwerfers und der verworfenen Lagerstatt sind als bekannt vorauszusetzen.)

Selbstverständlich können nur die regelmässigen Verwerfungen mathematisch betrachtet werden welche durch Trennung des Zusammenhangs von Gebirgstheilen nach ebenen Flächen, durch Aufreissen von Spaltenebenen und Veränderung der Lage der getrennten Gebirgstheile entstanden sind. Mit der Untersuchung von abnormen Verwerfungsfällen oder ganzer Bruchfelder können wir uns hier freilich nicht befassen.

Der gewöhnliche Vorgang bei einer Gangverwerfung ist dass nach dem Aufreissen einer Kluft oder Spalte eine Bewegung des Gebirgs in der Richtung der Falllinie des Verwerfers eintritt, so dass das hangende Stück des verworfenen Ganges auf der Ebene des Verwerfers herabrutscht und tiefer zu liegen kommt wie zuvor. Dieses Verhältniss wird als eigentliche Verwerfung oder Sprung bezeichnet, und es stellt sich ein Querschnitt wie in Fig. 238 dar. A B C D ist hiebei die Lage des Ganges vor der Verwerfung, E F der Verwerfer, A′ B′ und C D stellen die Lagen der getrennten Gangtheile nach der Verwerfung vor, wobei das hangende Stück tiefer zu liegen gekommen ist.

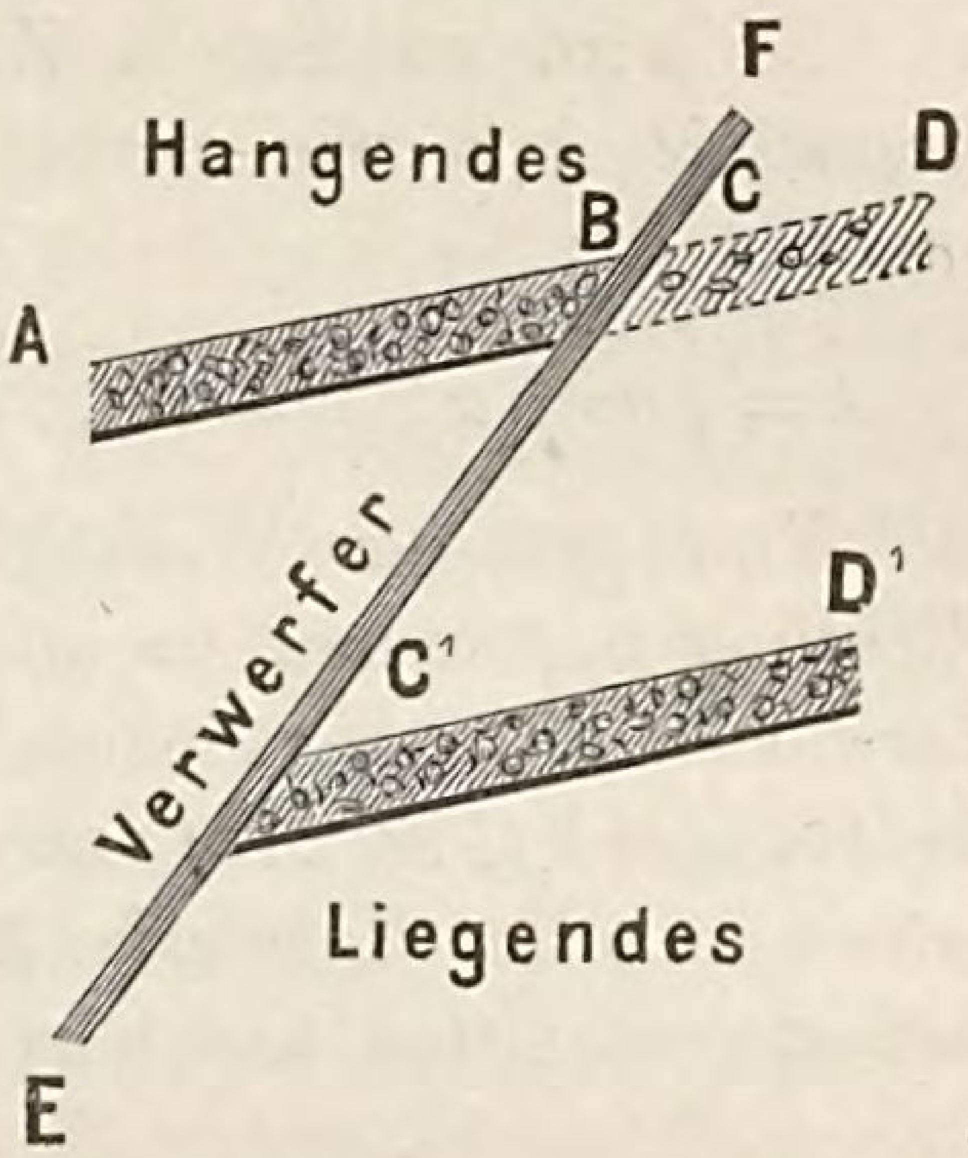
Fig. 238.



Es kann aber auch die Gebirgsstörung ein Höherliegen des hangenden Stücks bewirkt haben, und dieser Fall wird namentlich dann eintreten, wenn sich das Liegende gesenkt hat; seltener kommt es vor dass das Hangende nach aufwärts verschoben ist. Bei solchen Verwerfungen tritt mitunter ein Doppeltliegen der Lagerstatt ein, und man nennt ein derartiges Verwerfungsverhältniss Uebersprung, Ueberschieben oder auch Wechsel. Die Wechsel bieten gerade die entgegengesetzten Erscheinungen wie die Sprünge, man kann daher alle für diese geltenden Regeln auch auf jene anwenden, wenn man nur eine geeignete Umkehrung derselben vornimmt. Wir betrachten desshalb hier nur die eigentlichen Verwerfungen oder Sprünge etwas eingehender.

Ein Beispiel von einem Wechsel gibt Fig. 239. Ist nämlich A B C D wieder die ursprüngliche Lagerung, so wird nach dem Eintreten eines Uebersprungs bei Aufreissen der Spalte E F das Liegende sich senken und C′ D′ den durch Niederziehen der einen Gebirgshälfte versetzten Gangtheil vorstellen, während der Theil A B im Hangenden unverändert stehen geblieben ist.

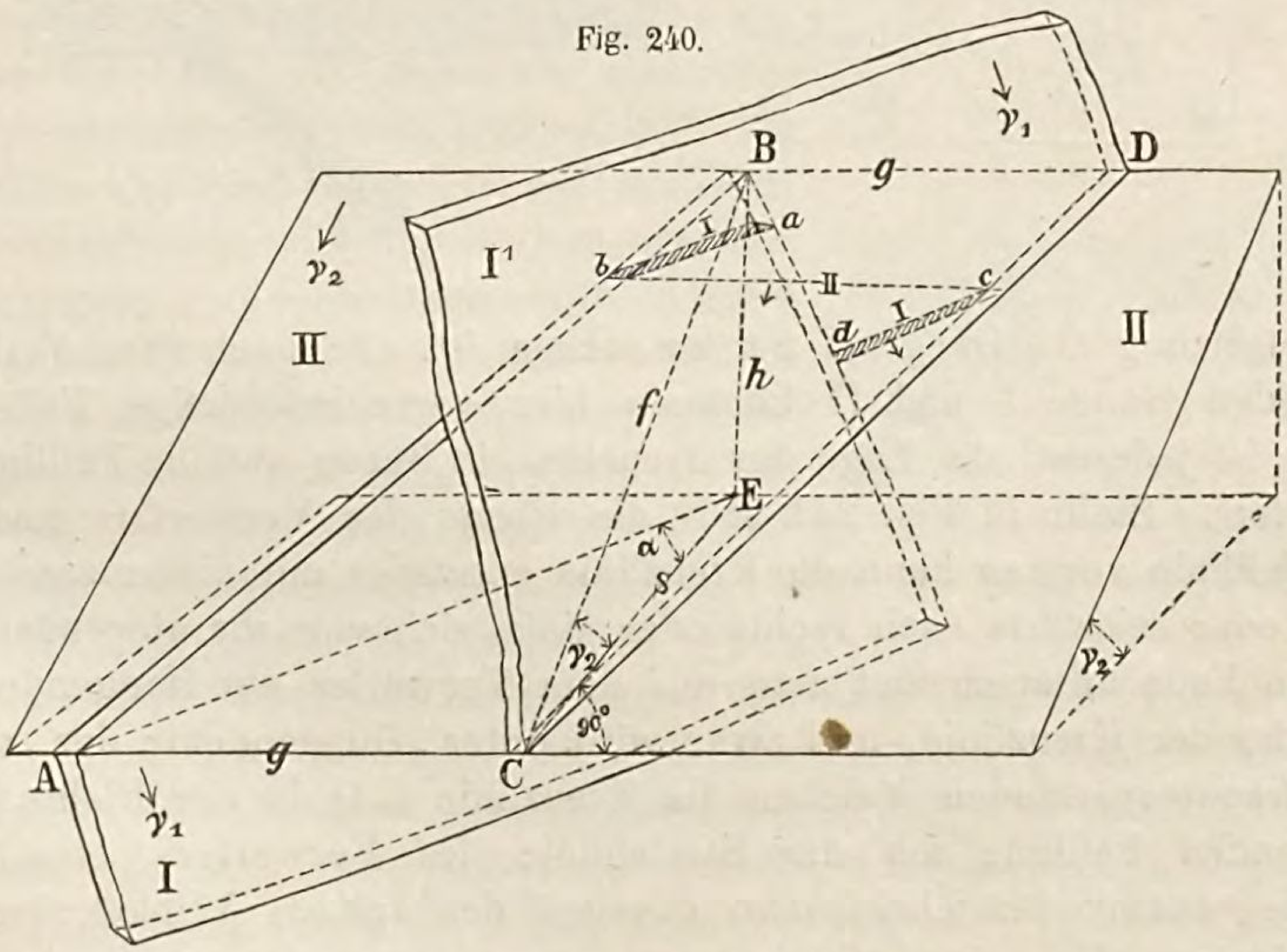
Fig. 239.



Fällt der Verwerfer seiger, so kann von einem Unterschied zwischen Hangendem und Liegendem, also auch von einer Entscheidung, ob Sprung oder Wechsel vorliegt, nicht die Rede sein.

Fig. 240 stellt eine regelmässige Verwerfung einer Gangebene I durch den Verwerfer II vor. Die Trennung und Versetzung der Gebirgshälften ist so eingetreten dass das hangende Stück von I in der Richtung der Falllinie des Verwerfers von B nach C gerutscht ist. Ist A B die ursprüngliche Kreuzlinie der Ebenen I und II so entsteht durch die Verwerfung noch eine zweite solche Kreuzlinie C D welche der A B parallel sein wird. Die söhlige Entfernung beider Kreuz-

Fig. 240.



linien A C oder B D = g heisst nun die Grösse der Verwerfung; der Abstand C B = f zweier ursprünglich zusammengehöriger Punkte C und B ist die flache Teufe der Verwerfung; der verticale Abstand zweier solcher in unserer Figur mit B E bezeichneten Punkte B und C heisst die **Seigerteufe der Verwerfung** und die söhlige Projection von B C, nämlich

C E = s, wird die Sohle der Verwerfung genannt. Ist eine von den vier Grössen g, f, h, s bekannt und ausserdem Streichen und Fallen des verwerfenden und verworfenen Ganges gegeben, so lassen sich die drei übrigen genannten Grössen aus den beiden Dreiecken C E B und C E A durch Rechnung oder Construction ermitteln.

Es wird zu diesem Zweck zunächst das Streichen und Fallen der Kreuzlinie A B wie vorher gesucht und man hat dann, wenn z. B. g gegeben ist:

$$s = g \operatorname{cotg} \alpha; \quad h = s \operatorname{tg} \gamma_2 = g \operatorname{cotg} \alpha \,.\, \operatorname{tg} \gamma_2; \quad f = \frac{s}{\cos \gamma_2} = g \frac{\operatorname{cotg} \alpha}{\cos \gamma_2}$$

Von grösster Wichtigkeit für den praktischen Bergbau ist es die Richtung bestimmen zu können, welche bei der Wiederausrichtung eines verworfenen Ganges einzuschlagen ist. Denken wir uns, es sei im Streichen des Ganges I (Fig. 242) von a nach b eine Strecke getrieben, so wird mit derselben in b der Verwerfer II angefahren. Der Gang I erscheint hier plötzlich abgeschnitten und hört auf. Es fragt sich nach welcher Richtung nun

Fig. 241.

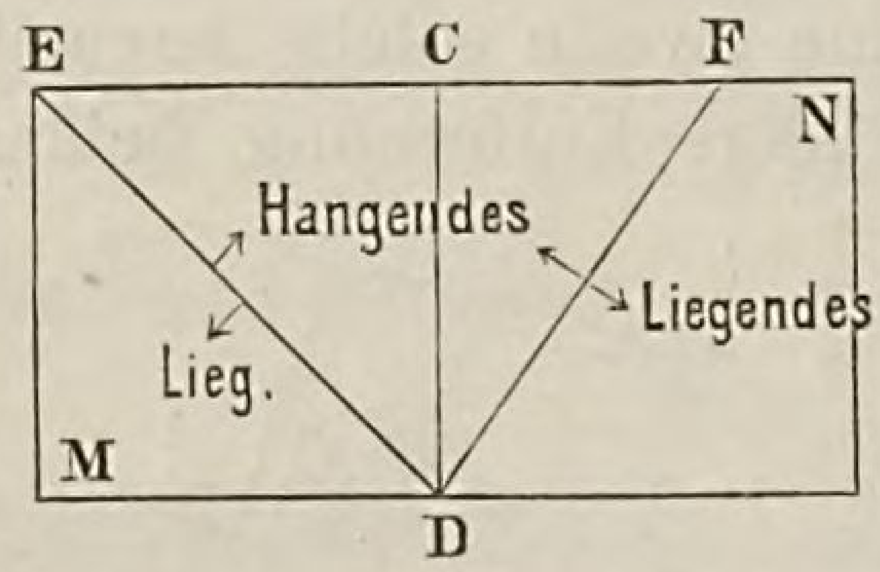
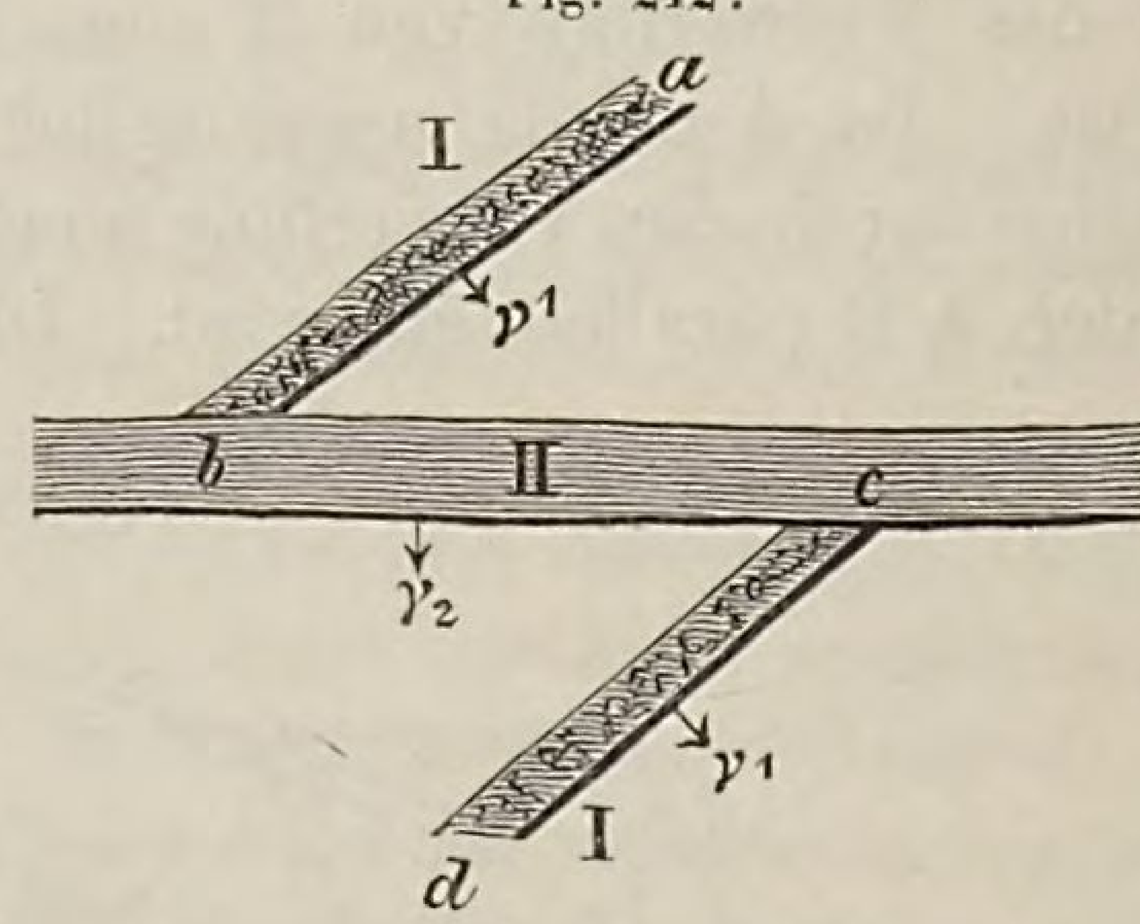


Fig. 242.

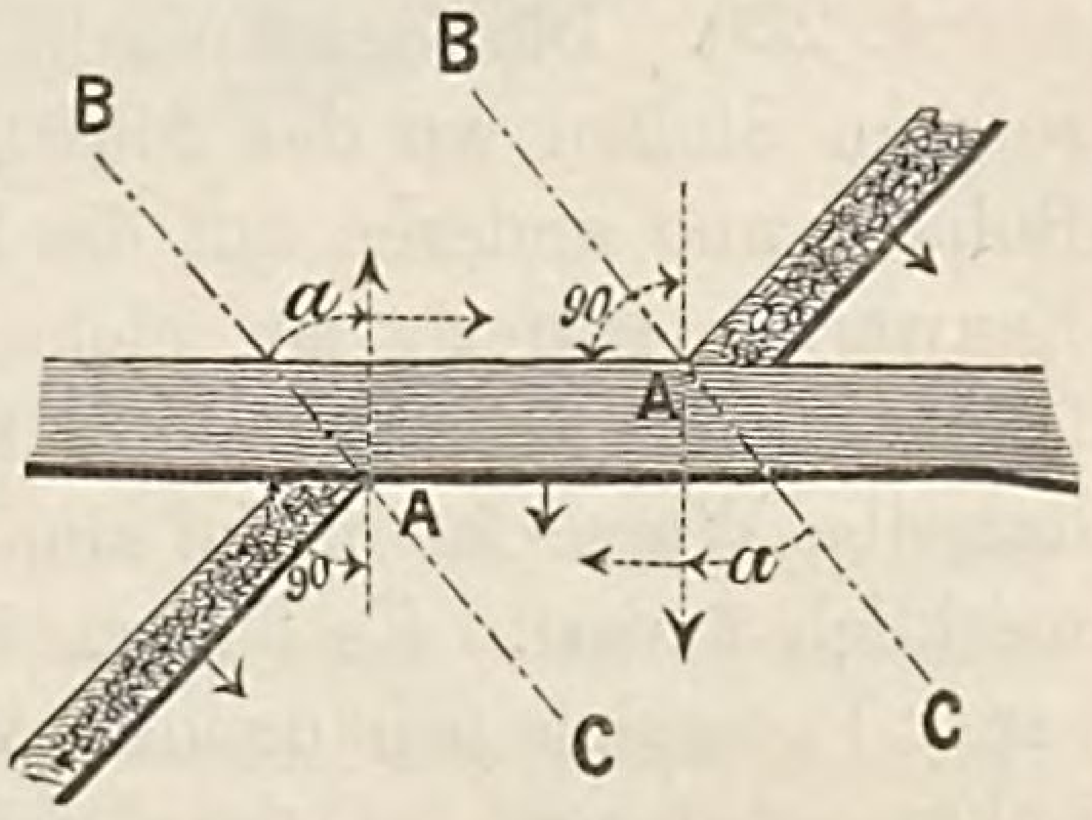


die Fortsetzung des Ganges I c d zu suchen ist. Je nach dem Verhalten der beiden Gänge I und II kommen hier verschiedenartige Fälle vor. Wichtig ist jedesmal die Lage der Kreuzlinie in Bezug auf die Falllinie des Verwerfers. Stellt in Fig. 241 M N die Ebene des Verwerfers und C D seine Falllinie vor, so kann die Kreuzlinie entweder mit dieser zusammenfallen, oder seitwärts nach rechts oder links sich von ihr abwenden. Im letzteren Falle unterscheidet man auf dem Verwerfer ein Hangendes und Liegendes der Kreuzlinie, und zwar wird unter „Hangendem“ der stumpfe Winkelraum verstanden welchen die Kreuzlinie E D in der Richtung der ansteigenden Falllinie mit der Streichlinie des Verwerfers einschliesst. Mit „Liegendem“ bezeichnet man dagegen den spitzen Winkelraum derselben Linien. Für die Aufsuchung des verworfenen Gangtheils hat man nun nach diesen Erklärungen die einfache Regel: Befindet man sich im Hangenden des Verwerfers, also im herabgerutschten Theile des Gangs so hat man den stehen gebliebenen Gangtheil im Hangenden der Kreuzlinie zu suchen. Oder man befindet sich im stehen gebliebenen Theile des Gangs, also im Liegenden des Verwerfers, dann ist der herabgerutschte

Gangtheil im Liegenden der Kreuzlinie zu suchen. Besondere Fälle treten ein, wenn erstens der verworfene Gang seiger fällt und die Streichlinie des Verwerfers rechtwinklig schneidet. Hier fällt die Kreuzlinie mit der Falllinie des Verwerfers zusammen, und es sind bei der Verwerfung nur andere Gangtheile durch die Verschiebung mit einander in Berührung gekommen, ohne dass aber eine Seitenverschiebung bemerkbar wird. Ist zweitens der verworfene Gang seiger fallend und wird er vom Verwerfer in der Streichrichtung geschnitten, so dass die Kreuzlinie mit der Streichlinie zusammenfällt, so kann man kein Hangendes und Liegendes der Kreuzlinie unterscheiden. Man muss in diesem Falle durch Gesteinsuntersuchung oder aus benachbarten Gebirgsverhältnissen zu erkennen suchen, ob man sich im stehen gebliebenen oder herabgerutschten Gangtheile befindet, und hienach entscheiden, nach welcher Seite hin man den verlorenen Gang auszurichten hat. Haben drittens beide Gänge zwar beliebiges Fallen, aber dasselbe Streichen und kommt man im Hangenden des Verwerfers an, so ist die Fortsetzung des Gangs nach Oben zu suchen, kommt man im Liegenden des Verwerfers an, so ist der gerutschte Theil nach abwärts zu finden.

Eine andere allgemein giltige Ausrichtungsregel ist von Zimmermann angegeben und lautet: Man errichte in dem Punkte A wo der Verwerfer angefahren wird, auf der Streichlinie desselben in der Richtung nach dem Innern des Ganges ein Loth, bestimme die Lage der Durchschnittslinie beider Gänge B C die gleichfalls durch den Punkt, wo der Verwerfer angefahren ist, läuft, verlängere solche gehörig nach dem entgegengesetzten Salband hin, bemerke nach welcher Seite das Loth bei seiner Richtung nach dem entgegengesetzten Salbande von der Durchschnittslinie abweicht und suche nach gehöriger Ueberbrechung des verwerfenden Gangs auf derselben Seite wohin das Loth abweicht, das verworfene Gangstück wieder auf.

Fig. 243.



Trotz der Richtigkeit dieser Regel und aller Sorgfalt in ihrer Anwendung kommt man bisweilen mit den Ausrichtungsarbeiten nicht zu dem gewünschten Ziele, da die Verwerfungserscheinungen in der Natur dadurch vielfach verwickelt werden dass die Verwerfer keine Ebenen sind die sich nach Höhe und Tiefe ins Unbestimmte fortsetzen, sondern häufig im Fallen Aenderungen erleiden oder sich ganz verlieren. Insbesondere hat man sich vor dem häufig auftretenden Irrthume zu hüten dass man die durch Ablenkung einer Gangspalte oder Absetzen einer Kluft entstandene scheinbare Verwerfung fälschlich für eine ordentliche Verwerfung ansieht und auf sie die Ausrichtungsregeln anwendet. Es ist klar dass man in einem solchen Falle durch Befolgung der Regeln nur irregeleitet wird.

Fünfter Abschnitt.

Die Wassermessungen.

§. 229. Nachdem im sechsten Abschnitte des ersten Bands nur diejenigen Messinstrumente betrachtet wurden welche zur unmittelbaren Messung der Geschwindigkeiten fliessender Gewässer dienen, wird hier auch nur von den hydrometrischen Arbeiten die Rede sein welche an Gerinnen, Bächen, Flüssen und Strömen vorzunehmen sind, um deren Geschwindigkeiten, Wassermengen und sogenannte Wasserkräfte kennen zu lernen. Es ist somit hier nicht die Rede von den Messungen wodurch man die Geschwindigkeiten und Wassermengen sehr kleiner Wasserläufe, wie die der Quellen und Röhrenleitungen, oder aber das Steigen und Fallen der Wasserspiegel (die Pegelstände der Flüsse) erfährt; denn diese letzteren Messungen würden zu weit in das Gebiet des Flussbaues, jene aber zu sehr in das der Hydraulik eingreifen.

A. Geschwindigkeitsmessungen.

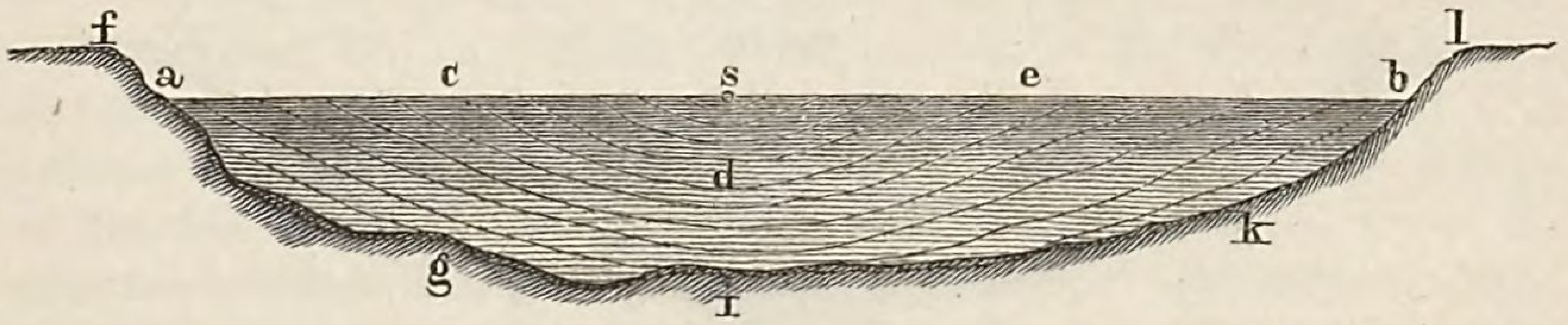
§. 230. Die Geschwindigkeit eines fliessenden Wassers ist selbst an solchen Stellen wo das Flussbett regelmässig beschaffen und von Wehren, Buhnen und anderen auf die Bewegung des Wassers störend einwirkenden Bauwerken entfernt ist, nicht in dem Sinne gleichförmig dass alle Wasserfäden gleiche Geschwindigkeit besitzen, sondern nur insofern als ein und derselbe Wasserfaden auf eine ziemliche Länge seine Geschwindigkeit nicht merklich ändert. Es fliessen immer die näher an den Ufern oder in grösserer Tiefe sich befindenden Wasserfäden langsamer als die mittleren und höher gelegenen, so dass sich nach Fig. 244 in jedem Querprofile Linien (wie a i b, c d e) angeben lassen welche die Schnittpunkte der Wasserfäden von gleicher Geschwindigkeit vereinigen.

Das Gesetz nach welchem die Geschwindigkeiten der Wasserfäden nach der Tiefe und den Seiten eines Querprofils abnehmen, ist nicht bekannt, obwohl es nicht an Formeln für diese Abnahmen fehlt.

Eine Zusammenstellung und Kritik der wichtigsten hieher gehörigen Formeln findet man in Hagen's Handbuch der Wasserbaukunst, II Theil, 3 Auflage, Seite 283 bis 297. Hienach wies im Anfange des 18 Jahrhunderts zuerst Mariotte nach dass die Geschwindigkeit des Wassers mit der Tiefe nicht zu- sondern abnimmt. Pitot stellte mit seiner aus dem ersten Bande bekannten Röhre gleichfalls Geschwindigkeitsmessungen in verschiedenen Tiefen an und kam zu demselben Ergebnisse wie Mariotte. Dubuat bemühte sich nicht bloss für jede Lothlinie sondern für ein ganzes

Flussprofil die Stelle anzugeben, in der die mittlere Geschwindigkeit stattfindet: er setzte diese Geschwindigkeit $v = u - \sqrt{u} + 0,5$ wobei u die Geschwindigkeit in der Oberfläche bezeichnet. Woltman vermuthete auf Grund der Messungen von Brünings im Niederrhein dass die Curve welche durch ihre horizontalen Ordinaten die Geschwindigkeiten des Wassers in einer Lothrechten darstellt, eine Parabel sei deren Axe vertical ist und deren Scheitel in derjenigen Tiefe unter dem Wasserspiegel liegt, wo die Geschwindigkeit aufhört. Da diese Tiefe 130 bis 160 Parameter betragen sollte, so war die Woltman'sche Parabel sehr wenig gekrümmt. Eytelwein empfiehlt für die mittlere Geschwindigkeit in einer Verticalen folgende Formel: $v = u\,(1 - 0,004\,t)$, in der u die Geschwindigkeit an der Oberfläche und t die ganze Tiefe des Flusses ist. In neuester Zeit (1861) stellten die amerikanischen Ingenieur-Officiere Humphreys und Abbot in ihrem von H. Grebenau (1867) übersetzten und aufs Dringendste empfohlenen Werke „Report upon the physics and hydraulics of the Missisippi River" auf Grund zahlreicher Messungen die Behauptung auf dass die Geschwindigkeitsscalen Parabeln mit horizontalen und unter dem Wasserspiegel liegenden

Fig. 244.



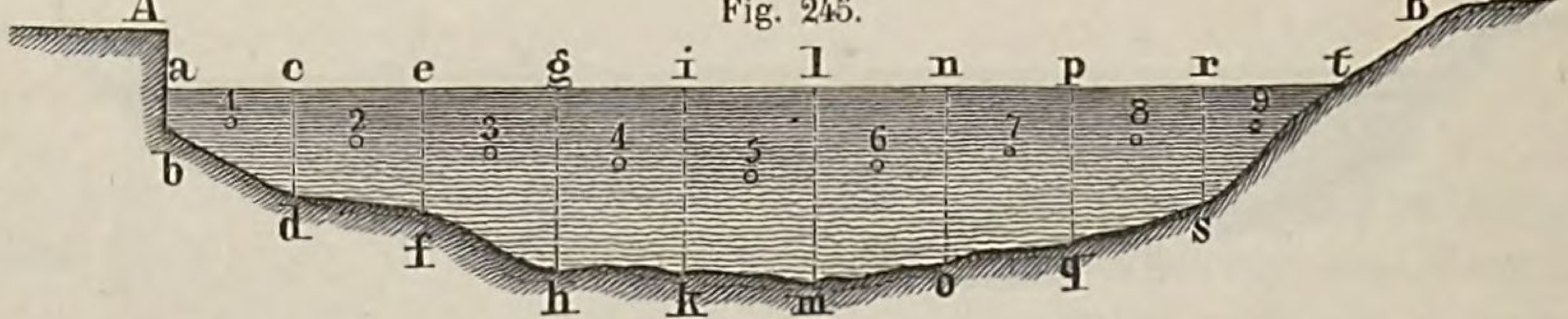
Axen sind. Die Geschwindigkeit wäre hiernach in einiger Tiefe unter der Oberfläche am grössten und nähme von da aus nach oben und unten mit den Ordinaten der Parabel ab. (A. a. O. S. 288 bis 292.) Hagen leitet aus den besseren der in Rede stehenden amerikanischen Messungen zwar auch eine Parabel, aber mit lothrechter Axe ab, wie er dieses schon früher in einer Abhandlung über die Bewegung des Wassers in Strömen gethan hatte, und schliesst (S. 295) seine Kritik mit folgenden zwei beachtungswerthen Bemerkungen: erstens dass die Geschwindigkeit des Wassers an der Oberfläche am grössten ist und bis zur Sohle stetig sich vermindert, und zweitens dass die Auffindung eines allgemein gültigen Gesetzes, wonach man aus einer Messung an der Oberfläche oder in irgend einer bestimmten Tiefe die mittlere Geschwindigkeit finden könne, in Folge der von den Unregelmässigkeiten des Stroms abhängenden inneren Bewegungen des Wassers unmöglich zu sein scheine.

Würde man das Gesetz der Geschwindigkeitsabnahme der Wasserfäden kennen, so liesse sich aus der gemessenen Geschwindigkeit des Stromstrichs die mittlere Geschwindigkeit des Wassers berechnen; so lange aber jene Kenntniss mangelt muss man die mittlere Geschwindigkeit des Wassers auf anderen Wegen suchen.

Einer dieser Wege besteht darin die von Eytelwein und Anderen entwickelten Formeln welche die mathematischen Beziehungen zwischen der Geschwindigkeit des Wassers und den Abmessungen eines regelmässigen Gerinns darstellen, auch auf Flüsse zu übertragen und aus den Abmessungen einiger Querprofile und der Grösse des Wasserspiegelgefälls die mittlere Geschwindigkeit zu berechnen. Dieses Verfahren ist als eine mittelbare Messung der Geschwindigkeit zu bezeichnen, insofern Nivellirinstrumente und Längenmesser zu seinem Vollzuge ausreichen; es kann aber nur für solche Fälle empfohlen werden in denen keine unmittelbare Messung möglich ist, oder eine sehr geringe Genauigkeit der Geschwindigkeitsbestimmung ausreicht.

Der andere Weg die mittlere Geschwindigkeit eines Flusses auszumitteln, besteht darin dass man nach Fig. 245 das Querprofil in eine entsprechende Anzahl Trapeze (a d, c f, e h.... s t) abtheilt, in deren Mittelpunkten (1, 2, 3...9) die Geschwindigkeiten direct misst, die durch jedes Trapez fliessende Wassermenge berechnet, und aus der Gesammtwassermenge durch Division derselben mit dem Flächeninhalte des Querprofils die mittlere Geschwindigkeit sucht. Dieses Verfahren ist dem vorigen

Fig. 245.



gegenüber als eine unmittelbare Messung der mittleren Geschwindigkeit des Flusses zu bezeichnen und es liefert, wenn die einzelnen Geschwindigkeiten mit dem Woltman'schen Flügel gemessen werden, unter allen bis jetzt bekannten Methoden die zuverlässigsten Resultate, wie schon bei Beschreibung der Instrumente zum Geschwindigkeitsmessen hervorgehoben wurde.

§. 231. Eytelwein'sche Formel. Da die mittelbaren Geschwindigkeitsmessungen von der mathematischen Beziehung zwischen der Geschwindigkeit, dem Gefälle und dem Querprofile eines Wasserlaufs abhängen, so ist vor Allem dieser Zusammenhang darzustellen.

Die ersten richtigen Ansichten über die Abhängigkeit der Geschwindigkeit eines Flusses von dessen Gefälle und Querprofile sprach A. Brahms in seinen vor hundert Jahren erschienenen „Anfangsgründen der Deich- und Wasserbaukunst" aus; er unterliess es aber, eine algebraische Formel welche die von ihm aus Versuchen erkannte Gesetzmässigkeit ausdrückte, aufzustellen. Später beschäftigten sich in Frankreich namentlich Dubuat und Prony, in Deutschland Woltman und Eytelwein mit Herleitung eines Ausdrucks für die Geschwindigkeit des Wassers in Canälen und Flussbetten. Die Arbeiten von Eytelwein sind ohne Zweifel die gründlichsten und fanden daher auch die meiste Anerkennung und Anwendung.

Die nachstehend entwickelte Formel gilt eigentlich nur für ganz regelmässige Gerinne in welchen die Querprofile gleich gross sind; für Flüsse gaben ihr Eytelwein und Prony eine etwas veränderte Gestalt. Vergleicht man jedoch die Ergebnisse directer Messungen mit den aus den zusammengesetzten Formeln berechneten Geschwindigkeiten, so sind die Abweichungen immer noch so gross dass man die völlige Richtigkeit der Annahmen, worauf die Entwickelung der Formeln für die Flüsse beruht, bezweifeln muss. So lange diese Unsicherheit noch besteht, ist es daher wohl gerechtfertigt sich des einfacheren Ausdrucks zur Berechnung der Geschwindigkeit aus dem Gefälle und Querprofile zu bedienen.

Bei der Herleitung dieses Ausdrucks ging man von der natürlichen Annahme aus dass die Beschleunigung der Bewegung des Wassers welche in Folge seines Falls über eine schiefe Ebene eintreten müsste wenn keine Hindernisse entgegen wirkten, durch die Cohäsions- und Reibungs-Widerstände an der Sohle und den Seitenwänden des Canal- oder Flussbetts aufgehoben wird. Mit dieser Annahme hatte man einen Massstab zur Messung der Widerstände, und es kam nur mehr darauf an festzustellen, wovon die Widerstände und die Beschleunigung abhängen. Durch Beobachtungen hielt man sich für berechtigt anzunehmen dass der Widerstand zunächst mit der Grösse der vom Wasser berührten Fläche des Flussbetts wächst und abnimmt. Zieht man nun eine Flussstrecke von der Länge 1 in Betracht und ist p der benetzte Umfang des Querprofils dieser Strecke (in Fig. 244 ist $p = a\,g\,i\,k\,b$ und in Fig. 245 $p = a\,b\,d \ldots s\,t$), so ist die widerstandleistende Fläche $= p$. Ferner glaubte man nach Beobachtungen über die Bewegung des Wassers in Flüssen annehmen zu müssen dass der Widerstand gegen die Bewegung auch mit dem Quadrat der Geschwindigkeit wachse, insofern bei doppelter Geschwindigkeit doppelt so viele Theile und jeder Theil in der halben Zeit von der benetzten Wand abgerissen werden müsse. Bezeichnet man nun den Widerstand mit w, die Geschwindigkeit in der Secunde mit v, den benetzten Umfang des Querprofils mit p und eine noch unbekannte, von den Reibungsverhältnissen des Wassers abhängige constante Grösse mit i, so ist nach den vorstehenden Erörterungen

$$w = i\,p\,v^2$$

Nennt man ferner α das relative Gefälle des Wasserspiegels der durch das Querprofil q fliessenden Wassermasse, und bezeichnet g die Beschleunigung der Schwerkraft der Erde, so beträgt die Beschleunigung der Bewegung jeder cubischen Einheit der in Rede stehenden Wassermasse $\alpha\,g$, da diese Beschleunigung der Neigung der schiefen Ebene (hier dem Gefälle des Wassers) proportional ist. Für die Länge 1 der Flussstrecke beträgt die Gesammtwassermasse q Raumeinheiten und folglich ist deren Beschleunigung $= \alpha\,g\,q$. Nach der schon erwähnten Annahme über die Vernichtung der Beschleunigung durch die Widerstände der Bewegung muss nunmehr

$$\alpha\,g\,q = i\,p\,v^2$$

und somit die Geschwindigkeit des Wassers

$$v = \sqrt{\frac{g}{i}} \cdot \sqrt{\frac{q}{p}\,\alpha}$$

gesetzt werden. Nimmt man, wie es in der Regel geschieht, das Verhältniss von g zu i als constant an und setzt die Quadratwurzel daraus $= k$; schreibt man ferner t für das Verhältniss von q zu p welches die Hydrotechniker häufig den mittleren Halbmesser des Profils nennen, so geht die vorstehende Formel über in

$$v = k\sqrt{t\,\alpha} \tag{415}$$

Soll nun für ein regelmässiges Gerinne die Geschwindigkeit in der Secunde in preussischen Fuss ausgedrückt werden, wenn q und p in demselben Masse gegeben sind, so ist nach Eytelwein $k = 90{,}9$ und für Metermass $k = 50{,}8$ zu setzen. Für einen Fluss kann der Coefficient k nicht denselben Werth haben, er muss sich mit der Beschaffenheit des Flussbetts und namentlich des Flussmaterials ändern. Um den Werth von k welcher einem gegebenen Flusse entspricht, durch Versuch zu bestimmen, misst man an diesem Flusse die Grössen q, p, α, v und löst die Gleichung (415) nach k auf. Nach Bazin (Comptes rendus de l'académie des sciences, 1863 und 1864) ist für die Bewegung des Wassers in Rinnsalen von Erdwänden und natürlichem Boden, also für Flüsse, von der mittleren Wassertiefe t

$$\frac{1}{k^2} = 0{,}00028\left(1 + \frac{1{,}25}{t}\right) \tag{416}$$

zu setzen, so dass für $t = 1$ Meter $k = 39{,}9$ und für $t = 2$ Meter $k = 46{,}9$ wird. Hier ist, wie man sieht, auf die Beschaffenheit des Flussbetts nur so weit Rücksicht genommen, als sich dieselbe in dem Werthe t ausspricht. Man wird desshalb die Formel (416) nur da anwenden, wo man v, q, p, α nicht direct messen kann, wie z. B. für einen erst anzulegenden Durchstich, Werkcanal, Wassergraben u. dgl.

§. 232. Aufnahme der Querprofile. Zur mittelbaren Bestimmung der Geschwindigkeit aus der Gleichung (415) gehört zunächst die Kenntniss der Werthe von q und p welche sich aus der Aufnahme einiger Querprofile an einer geeigneten Flussstrecke ergeben. Hierzu dient jede gerade oder wenig gebogene Flussstrecke welche von Wehren, Schützen, Buhnen, Brücken etc. ziemlich entfernt liegt und deren Querprofile nahezu gleiche Breite, Tiefe und Flächeninhalte haben.

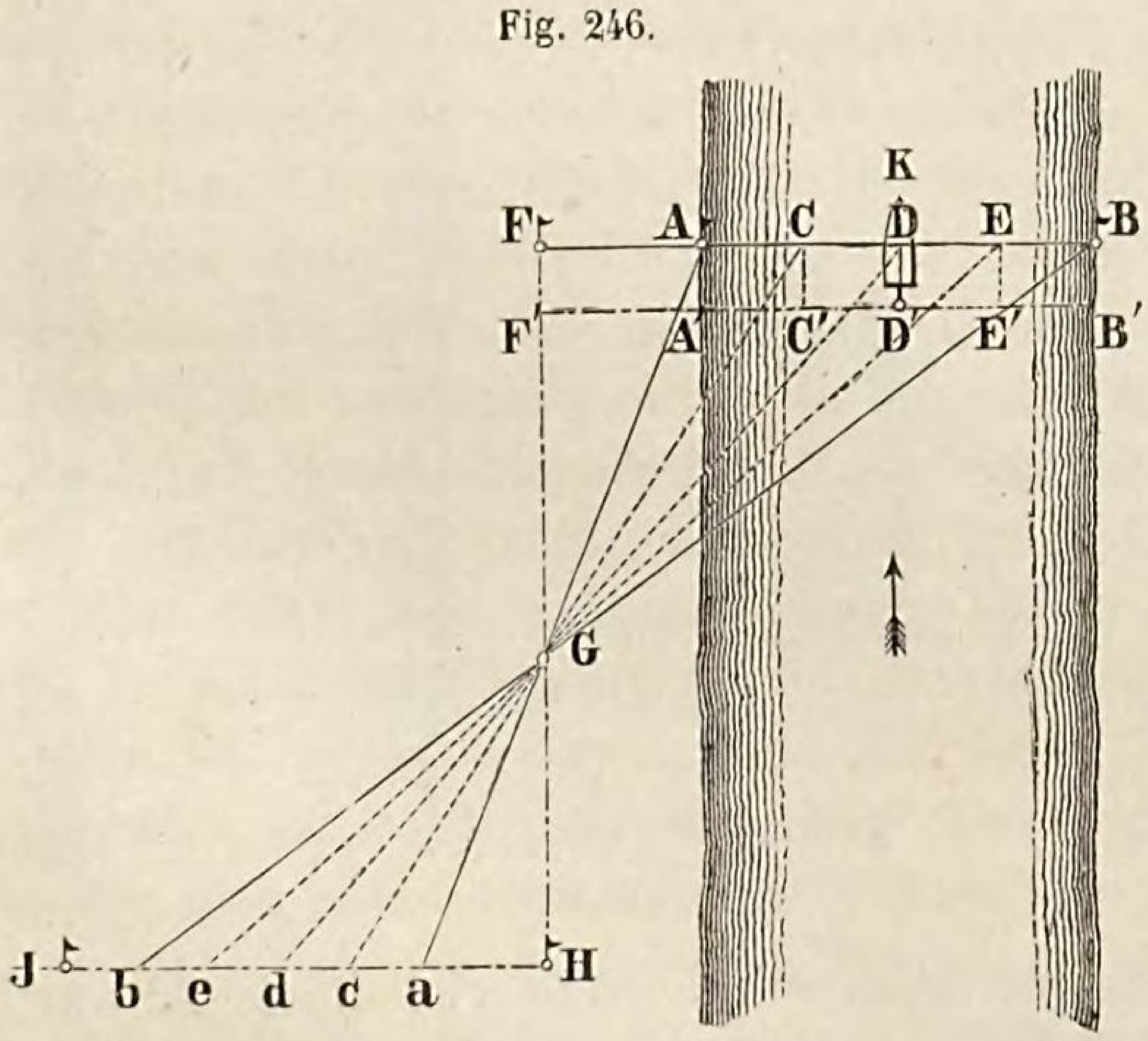
1) Ist der Fluss nicht sehr breit, so kann man aus starken Bohlen oder langen Leitern einen gegen die Ufer senkrecht gerichteten Steg über denselben legen, darauf die Breite des Betts in gleiche Theile theilen und mittels einer Peilstange die wie der Schaft des Reichenbach'schen Strommessers beschaffen ist, damit sie keine merkliche Stauung des Wassers veranlasst, an den Theilungspunkten die lothrechten Wassertiefen messen. Der Steg gibt somit die Abscissen und die Peilstange die Ordinaten des hiernach zu zeichnenden und zu berechnenden Querprofils. Hat man an

den beiden Enden und in der Mitte der Flussstrecke Querprofile aufgenommen, und hat sich während der Aufnahme der Wasserstand nicht geändert, was ein am Ufer befestigter Massstab zu erkennen gibt: so ist das arithmetische Mittel aus den Flächen der drei Profile der gesuchte Werth von q und das Mittel aus den drei benetzten Umfängen der Werth von p welcher in die Formel (415) einzusetzen ist. Der bei der Messung der Profile stattfindende Wasserstand muss angemerkt werden, damit bei dem gleichen Stande des Wasserspiegels dessen Gefälle bestimmt werden kann.

2) Ist der Fluss breit aber nicht tief, so dass ein Arbeiter die Nivellirlatte in demselben noch halten kann, so lässt sich zur Sommerzeit das Querprofil dadurch aufnehmen dass man über den Fluss eine starke in Leinöl getränkte mit Wachs abgeriebene und in gleichen Abständen mit farbigen Läppchen versehene Leine spannt, an den durch die Läppchen bezeichneten Stellen die Nivellirlatte von dem im Flusse stehenden Arbeiter auf der Sohle des Flussbetts lothrecht aufstellen lässt, alle diese Punkte in Bezug auf einen am Ufer befindlichen Fixpfahl dessen Kopf über den Wasserspiegel reicht, einnivellirt, ferner den Abstand des Wasserspiegels von dem Pfahlkopfe misst und endlich den Wasserstand an dem am Ufer stehenden Massstabe abnimmt. Man sieht dass sich diese Aufnahme des Querprofils eines Flusses von der eines trockenen Bodens nur dadurch unterscheidet dass hier noch der Abstand des Wasserspiegels in Bezug auf den am Ufer befindlichen Fixpfahl einzumessen ist.

3) Ist der Fluss so breit und tief dass die vorhergehenden Methoden zur Messung der Abscissen und Ordinaten nicht mehr angewendet werden können, so müssen die Abscissen vom Ufer und die Ordinaten von einem Kahne aus gemessen werden, was in folgender Weise geschehen kann.

Fig. 246.

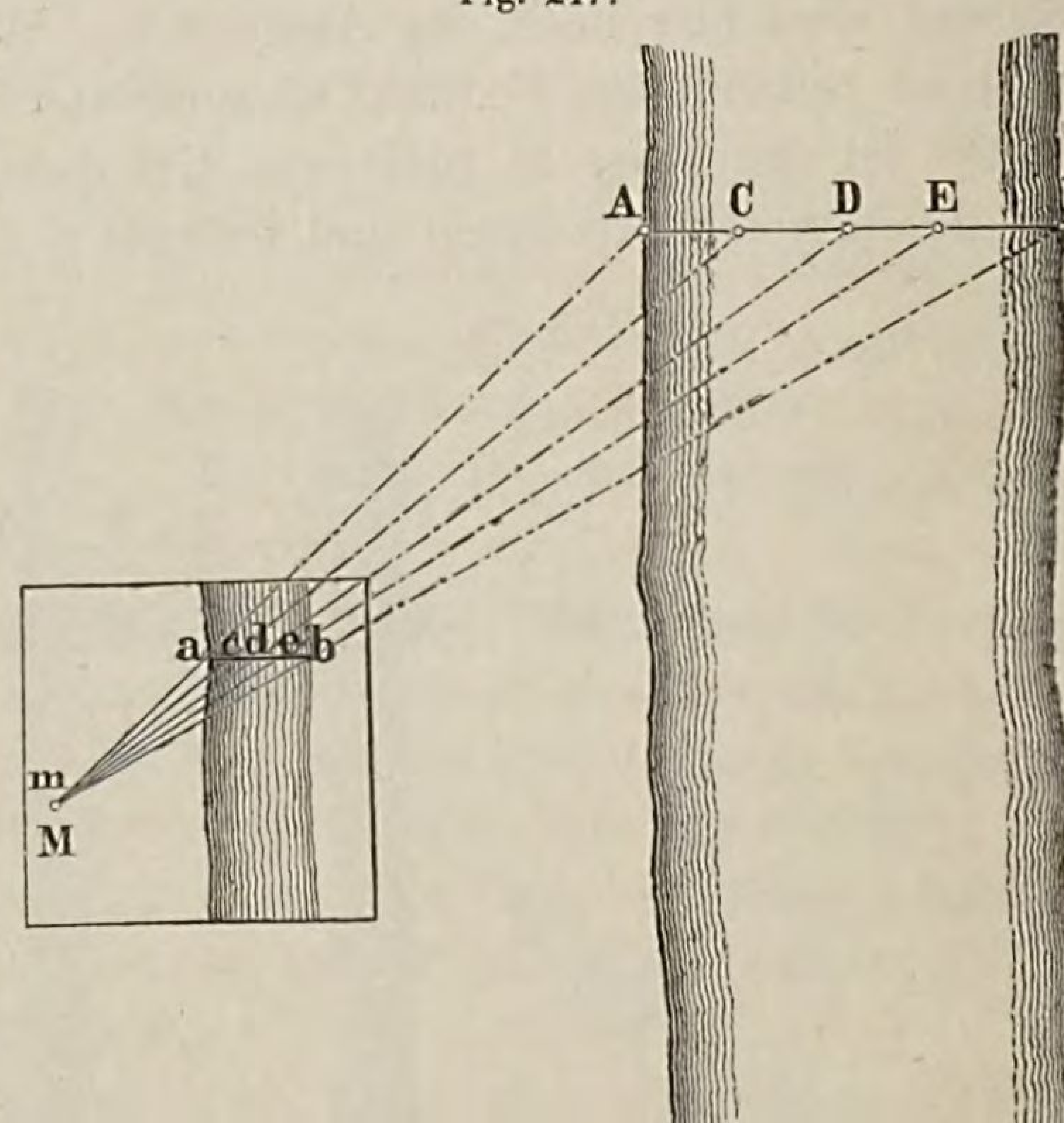


Es stehe ein Kahn (K, Fig. 246) oder statt dessen eine Verbindung von zwei Kähnen zur Verfügung, in deren Mitte eine Messfahne aufgestellt ist die zum Einrichten des Fahrzeugs dient. An den Ufern werden die Stäbe A und B eingesteckt welche eine Gerade bezeichnen die dem in der Richtung A′ B′ aufzunehmenden Querprofile parallel ist und von diesem um die halbe Schiffslänge absteht. An der Spitze (D′) des Kahns werden die Tiefen abgepeilt, sowie dort auch die Geschwindigkeiten mit dem Woltman'schen Flügel gemessen werden, wenn es sich um un-

mittelbare Messungen handelt. Um nun die Länge von A B zu erfahren und in gleiche Theile zu theilen, verlängere man dieselbe bis F, errichte dort eine Senkrechte F H und stecke in H eine Parallele H J zu F B ab. Misst man auf F H einen Punkt G so ab dass G H = m . F G ist und von H J aus über G die ganze Linie A B übersehen werden kann, und verlängert man A G und B G rückwärts bis zu H J, so wird hierauf die Linie a b abgeschnitten welche zu A B in dem Verhältniss von 1 : m steht. Es ist also A B = m (a b). Theilt man nun a b in so viele gleiche Theile als A B erhalten soll, so werden die Absehlinien b G, c G, d G.... diese Theile auf A B bestimmen, vorausgesetzt dass die Messfahne auf dem Schiffe auch in die an den Ufern bezeichnete Linie A B eingerichtet ist. Dieses Einrichten kann ohne Beihilfe vom Schiffe aus geschehen, wenn man das Prismenkreuz oder das fünfseitige Winkelprisma anwendet; ohne dieses ist ein Gehilfe erforderlich der von A oder B aus das Einwinken besorgt.

4) Ist der Strom in einem grossen Massstabe geometrisch aufgenommen, so kann man die Länge A B auf dem Plane abgreifen und mittels des Messtisches und der Kippregel in gleiche oder beliebige Theile theilen, wie aus Fig. 247 ohne Weiteres hervorgeht. Dabei versteht es sich übrigens von selbst dass das Einstellen in die Linie A B vom Ufer oder vom Schiffe aus, wie vorhin angedeutet, nicht verabsäumt werden darf.

Fig. 247.



Wird es wegen grosser Tiefe oder Geschwindigkeit des Stroms zu schwer die Peilstange lothrecht festzuhalten, so wendet man zur Tiefenmessung ein Senkblei an dessen Leine eingetheilt ist und am unteren Ende ein etwa 5 Kilogramm schweres Gewicht trägt. Damit die Leine bei der Messung möglichst lothrecht gehalten werden kann, muss man das Gewicht so weit oberhalb des Punkts an dem die Tiefe gesucht wird, einwerfen, als es während des Sinkens durch den Stoss des Wassers abwärts getrieben wird. Wie viel dieses Abwärtstreiben beträgt, erfährt man bald durch Uebung.

Da jede Profilmessung an Strömen längere Zeit dauert, so hat man fortwährend den Wasserstand an einem in der Nähe eingestellten Massstab zu beobachten, damit man die gemessenen Tiefen alle auf eine und dieselbe Horizontale reduciren kann.

§. 233. Aufnahme der Längenprofile. Ausser den Werthen von q und p bedarf man noch des relativen Gefälls α des Wasserspiegels zur Berechnung der Geschwindigkeit v. Dieses Gefäll ist stets eine sehr kleine Grösse, und da schon ein geringer Messungsfehler in der Bestimmung des absoluten Falls h auf die horizontale Uferlänge l den Werth von α bedeutend ändern kann, die Geschwindigkeit v aber der Quadratwurzel aus α proportional ist, so muss auf die Bestimmung von h alle Sorgfalt verwendet werden.

Bestimmt man das Gefäll eines Flusses an mehreren unter sich zusammenhängenden Punkten und nimmt zugleich an diesen Punkten Querprofile auf, so lässt sich aus diesen Aufnahmen das Längenprofil des Flusses für die betreffende Strecke berechnen und auftragen. Obwohl unser nächster Zweck eigentlich nur das relative Gefäll zwischen dem obersten und untersten Querprofile der Flussstrecke in welcher die Geschwindigkeit mittelbar gemessen werden soll, fordert, so werden wir doch sofort näher angeben wie die Arbeiten zur Aufnahme eines Längenprofils zu geschehen haben, weil dieser allgemeinere Zweck den besonderen in sich schliesst und eine Wiederholung erspart wird.

Um das Längenprofil eines Flusses zwischen zwei Punkten M und N aufzunehmen, bezeichne man längs des Ufers von M bis N alle diejenigen Stellen mit Grundpfählen welche entweder einen bestimmten Abstand von etwa 100 oder 200 Fuss von einander haben, oder an denen sich das Gefäll des Wasserspiegels ändert. Diese Grundpfähle werden in das Flussbett geschlagen und müssen mit ihren horizontal abgeschnittenen Köpfen mehrere Centimeter über den zu nivellirenden Wasserspiegel vorragen. Ausserhalb des Bettes schlage man Beipfähle mit entsprechenden Nummern wie für ein Längenprofil auf trockenem Boden. Hierauf messe man die horizontalen Entfernungen aller Grundpfähle mittels Ketten oder Latten am Ufer ab und nivellire schliesslich alle Grundpfähle unter sich und in Beziehung auf einen ständigen oder vorübergehend aufgestellten Pegel mit grösster Sorgfalt zweimal ein. Sobald der Wasserstand eintritt für welchen das Längenprofil gewünscht wird, lasse man an allen Grundpfählen die Abstände des Wasserspiegels von den Pfahlköpfen gleichzeitig genau messen und aufschreiben. (Gleichzeitig müssen die Abstände desshalb gemessen werden, weil man ausserdem nicht sicher ist, ob sich der Wasserstand des Flusses nicht geändert hat. Jede Aenderung würde das Gefäll bedeutend verfälschen.) Addirt man diese Abstände (Stichmasse) zu den vorher berechneten Abständen der Pfahlköpfe vom Horizont des Längenprofils, so erhält man die Ordinaten der einnivellirten Punkte und das Nivellement des Wasserspiegels lässt sich auftragen. Da vorher schon die Querprofile aufgenommen wurden, so ist in jedem die tiefste Stelle bekannt; trägt man daher an den zugehörigen Ordinaten deren Abstände vom allgemeinen Horizont ab und verbindet die Endpunkte, so ergibt sich auch die zum Längenprofil gehörige Stromrinne. Bei höheren oder niederen Wasserständen sind die Stichmasse von Neuem zu nehmen und die Ordinaten wie

vorhin zu berechnen und aufzutragen. Auf diese Weise kann in ein Längenprofil sowohl der tiefste als höchste und ein mittlerer Wasserstand eingezeichnet werden. Um die eingetragenen Wasserstände auch in späterer Zeit auf dem Terrain angeben zu können, sind die Grundpfähle in Bezug auf einen Fixpunkt oder Pegel einzunivelliren.

Was in Bezug auf das Einnivelliren von Flussbauwerken und anderen in dem Ueberschwemmungsgebiete eines Flusses liegenden Gegenständen für den Hydrotechniker von Bedeutung ist, gehört in das Gebiet der Wasserbaukunde, mit der wir uns hier nicht beschäftigen.

B. Messung der Wassermenge eines Flusses.

§. 234. Die Bestimmung der Wassermenge welche ein Fluss in der Zeiteinheit abführt, oder die Messung der Wasserführung eines Flusses geschieht immer auf indirectem Wege, indem man die gesuchte Wassermenge aus den aufgenommenen Profilen und Geschwindigkeiten berechnet. Ist die mittlere Geschwindigkeit nach der Formel

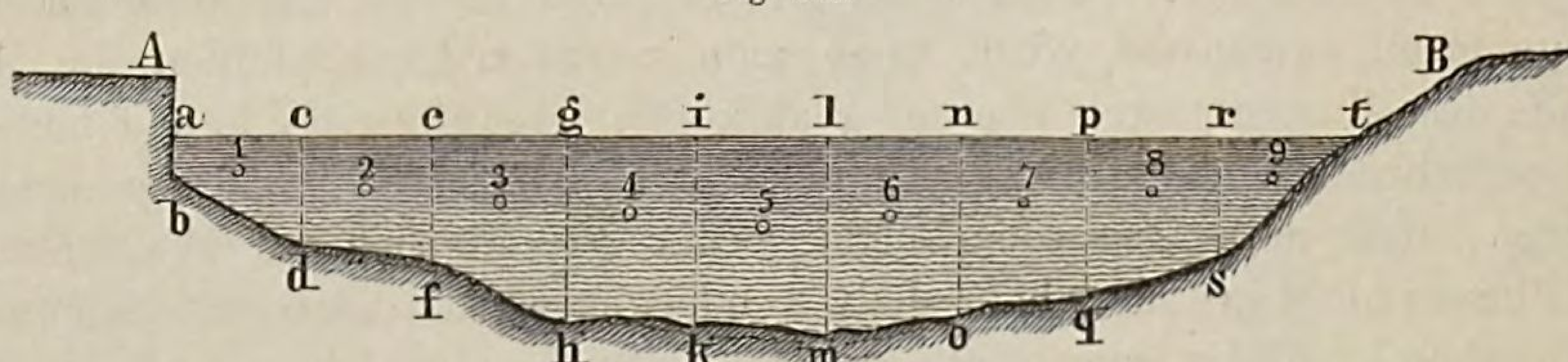
$$v = k \sqrt{\frac{q}{p} \alpha}$$

mittelbar bestimmt, so sind damit auch schon alle Messungen gemacht welche die Wassermenge m geben, indem

$$m = v\, q = q\, k \sqrt{\frac{q}{p} \alpha}$$

ist. Wurden dagegen die in einem Querprofile stattfindenden verschiedenen Geschwindigkeiten mittels des Reichenbach'schen Strommessers oder des Woltman'schen Flügels unmittelbar gemessen, und lag dabei ein der Fig. 248 entsprechendes Querprofil zu Grunde, so ist, wenn

Fig. 248.



$f_1, f_2, f_3 \ldots f_9$ die Trapezflächen a d, c f, e h ... st und
$v_1, v_2, v_3 \ldots v_9$ die Geschwindigkeiten in 1, 2, 3 ... 9 bezeichnen, die Gesammtwassermenge des Flusses, d. h. die in der Zeiteinheit durch jedes Profil fliessende Wassermenge

$$m = f_1 v_1 + f_2 v_2 + f_3 v_3 \ldots . + f_9 v_9 = \Sigma (f\, v)$$

Will man nunmehr die mittlere Geschwindigkeit v des Flusses in dem Querprofile A B finden, so ist diese nach der Definition in §. 230, wenn

der Flächeninhalt dieses Profils $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_9 = \Sigma f = F$ gesetzt wird,

$$v = \frac{m}{F} \tag{417}$$

Ueber die Massregeln zur Ueberwindung der an grossen Flüssen und Strömen bei Messung der Quer- und Längenprofile, dann der Geschwindigkeiten sich entgegenstellenden Schwierigkeiten kann man unter anderen Werken namentlich die Schrift von H. Grebenau „Die internationale Rheinstrom-Messung bei Basel", München 1873, nachlesen.

C. Messung der Arbeit oder Wasserkraft eines Flusses.

§. 235. Masseinheit. Wenn von der Wasserkraft eines Flusses oder Canals die Rede ist, so versteht man darunter nicht, wie man glauben könnte, die Kraft des Wassers welche dessen Gewicht gleich ist, sondern die mechanische Wirkung welche das fliessende Wasser in der Zeiteinheit hervorbringt. Es wird also hier keine Kraft sondern ein durch die Kraft hervorgebrachter Effect gemessen; der Ausdruck Wasserkraft ist somit eben so ungeeignet als der Ausdruck Pferdekraft für die Masseinheit in welcher die Stärke der Wirkung eines Flusses angegeben wird. Diese unrichtigen Bezeichnungen sollte man aus der Mechanik und aus der Technik um so mehr verbannen, als bereits andere und bessere dafür vorgeschlagen sind. Sehr beachtenswerth in dieser Beziehung erschien der Vorschlag von Reuleaux (im 3 Bande des Civilingenieurs S. 112) welcher verlangte dass man das unrichtige Wort Kraft mit dem besseren Ausdrucke Stärke vertausche und demzufolge statt Pferdekraft richtiger „Pferdestärke" sage. Nachdem aber jener Vorschlag bei dem technischen Publikum keinen Eingang gefunden, empfehlen wir jetzt das Wort Werk für Kraft zu setzen welches Clausius in die mechanische Wärmetheorie eingeführt hat. Wir wollen demnach unter Pferdewerk (wie bisher unter Pferdekraft) das Product aus der Kraft eines mittelstarken Pferdes und seiner Geschwindigkeit verstehen. Da nun die Kraft welche ein mittleres Pferd bei 1 Meter Geschwindigkeit auszuüben im Stande ist, durchschnittlich 75 Kilogramm beträgt, so ist das Product aus der Kraft ($P = 75^k$) und der Geschwindigkeit ($v = 1^m$) in der Secunde oder

$$P\,v = 75^{km} \text{ in der Secunde} = 1 \text{ Pferdewerk}$$

Um den wörtlichen Beisatz „in der Secunde, Minute, Stunde etc." zu vermeiden, schlug Reuleaux vor die für die Zeiteinheiten gebräuchlichen Zeichen in wagrechter Lage unter die Bezeichnung der Gewichts- und Masseinheiten zu setzen, so dass also

$75\underline{\underline{km}}$ mit 75^{km} in der Secunde

$10\underline{km}$ mit 10^{km} in der Minute

gleichbedeutend wäre. Wir gebrauchen diese Bezeichnung ebenfalls, jedoch mit dem Unterschiede dass wir den einfachen oder doppelten Strich nunmehr über km setzen, da es Regel ist Mass- und Gewichtszeichen den Zahlen nicht mehr in Form von Exponenten sondern in der von Factoren beizufügen; wir schreiben also „10 Kilogramm Meter in der Minute" mit $10\overline{\text{km}}$ und eine „Pferdekraft" oder ein „Pferdewerk" mit $75\overline{\overline{\text{km}}}$. In solchen Pferdewerken drücken wir also auch die mechanische Arbeit oder sogenannte Wasserkraft eines Flusses aus.

§. 236. Gestautes und ungestautes Wasser. In der Technik bieten sich gewöhnlich zwei Fälle dar in denen die Arbeit eines Wasserlaufs zu bestimmen ist. Es handelt sich nämlich entweder um die Arbeit eines aufgestauten Wassers das von einer durch die Localverhältnisse bedingten Höhe herabfallen muss um durch sein Gewicht einen mechanischen Effect hervorzubringen; oder aber es handelt sich um die Arbeit eines ungestauten fliessenden Wassers (eines Baches, Flusses, Werkcanals) worin unterschlächtige Wasserräder ohne Gerinne oder sogenannte Schiffsmühlräder eingehängt werden sollen.

1. Um die Arbeit eines gestauten Wasserlaufs zu bestimmen, ist es zunächst nöthig die Wassermenge und das absolute Gefälle zwischen dem oberen und unteren Wasserspiegel genau zu kennen. Wie man die Wassermenge findet, ist aus dem Vorhergehenden bekannt; und was die Messung des absoluten Gefälls betrifft, so ist darüber lediglich zu bemerken dass dieses durch Nivelliren unter Beobachtung derselben Vorsichtsmassregeln welche bei der Aufnahme des Längenprofils eines Flusses zu berücksichtigen sind, geschieht. Der obere Wasserspiegel ist gewöhnlich durch den Aichpfahl (A) des Wasserwerks fixirt; der untere wird an einem eingeschlagenen Grundpfahle (B) gemessen. Hat man den Höhenunterschied u dieser zwei festen Punkte ermittelt, so staut man das Wasser bis zur Aiche und nimmt alsdann das Stichmass am unteren Pfahle B bis zum Wasserspiegel $= v$. Man darf nun nicht sofort das wirksame Gesammtgefälle $= u + v$ setzen, sondern muss davon einen gewissen Betrag ε abziehen welcher das Gefälle des Unterwassers von A bis B vorstellt. Bezeichnet α dieses Gefälle (welches zwischen 0,001 und 0,002 wechselt) und ist δ der Horizontalabstand A B, so hat man $\varepsilon = \alpha\,\delta$ und daher das in Rechnung zu bringende absolute Gefälle

$$h = u + v - \varepsilon = u + v - \alpha\,\delta \qquad (418)$$

Ist m die secundliche Wassermenge für welche die Arbeit des aufgestauten Wassercanals bestimmt werden soll, und bezeichnet γ das absolute Gewicht der Raumeinheit Wasser: so beträgt das in jeder Secunde von der Höhe h herabfallende Gewicht $m\,\gamma$ und folglich ist die Arbeit dieses Gewichts oder dieser Kraft $= m\,\gamma\,h\overline{\text{km}}$, wenn m in Cubikmeter, h in Meter und γ in Kilogramm für einen Cubikmeter Wasser ausgedrückt ist. Da

1 Pferdewerk $= 75^{\overline{km}}$, so ist die Arbeit des in Rede stehenden Wassers in dieser Einheit

$$x = \frac{m \gamma h}{75} = 13{,}33 \, m \, h \qquad (419)$$

Betrüge z. B. die secundliche Wassermenge 9,9 cm und wäre das Gefälle $h = 1{,}5$ m, so hätte man, da das Gewicht γ eines Cubikmeters Wasser 1000 Kilogramm beträgt, in Pferdewerk

$$x = \frac{9{,}9 \, . \, 1000 \, . \, 1{,}5}{75} = 198$$

und von dieser Arbeit des Wassers würde eine gut gebaute Turbine etwa $75\,\%$ oder 148 Pferdewerk, ein unterschlächtiges Rad in geradem Gerinne aber nur etwa $33\,\%$ oder 65 Pferdewerk als Nutzeffect verwerthen.

2. Die Bestimmung der Arbeit eines ungestaut fliessenden Wassers erfordert dass man die mittlere Geschwindigkeit und Menge dieses Wassers kennt. Angenommen es sei die Wassermenge $= m$ und die Geschwindigkeit $= v$ für die Secunde bekannt, so lässt sich die Berechnung dieses Falls auf die des ersten zurückführen, wenn man erwägt dass zur Erzeugung der Geschwindigkeit v eine Druckhöhe h erfordert wird welche sich aus der Gleichung

$$v = \sqrt{2 g h}$$

ergibt, in der g die Beschleunigung der Schwere, also für unsere Gegenden die Grösse 9,81 Meter vorstellt. Da hiernach

$$h = \frac{v^2}{2 g} \qquad (420)$$

so erhält man, wenn wieder γ das Gewicht der Raumeinheit Wasser bezeichnet, die Arbeit des Wasserlaufs in der Secunde gleich

$$m \gamma h = m \gamma \, . \, \frac{v^2}{2 g} = \frac{1}{2} \, \frac{m \gamma}{g} \, v^2 \qquad (421)$$

Bekanntlich stellt der Quotient aus der Beschleunigung (g) in das Gewicht ($m \gamma$) eines Körpers dessen Masse vor; setzt man nun

$$\frac{m \gamma}{g} = M \text{ so folgt aus (421) } m \gamma h = \tfrac{1}{2} M v^2 \qquad (422)$$

womit nachgewiesen ist dass die Arbeit des ungestauten Wasserlaufs nichts Anderes als seine „lebendige Kraft“ ist. Zur Berechnung der Arbeit des genannten Wasserlaufs in Pferdewerken dient somit, wenn h aus der Gleichung (420) berechnet ist, die Gleichung (419); wenn dagegen h nicht berechnet aber m in Kubikmeter und v in Meter per Secunde ausgedrückt wird, die Formel

$$x = 0{,}67958 \, m \, v^2 = [9{,}83224] \, m \, v^2 \qquad (423)$$

in der $9{,}83224 = \log 0{,}67958$ ist. Fliesst z. B. in einem Bache bei der mittleren Geschwindigkeit $v = 1{,}25$ m in der Secunde eine Wassermenge von 6,34 cm ab, so ist die Arbeit des Bachs in Pferdewerk

$$x = 0{,}67958 \, . \, 6{,}34 \, . \, (1{,}25)^2 = 6{,}732$$

Wir können diesen Gegenstand nicht beschliessen ohne auf einen argen Missgriff hinzuweisen den manche Techniker bei der Berechnung der Arbeit eines ungestauten Wasserlaufs schon gemacht haben und andere vielleicht noch machen, indem sie aus Unkenntniss der Grundlehren der Hydraulik statt der Geschwindigkeitshöhe h des Wassers dessen Geschwindigkeit v selbst setzen, also statt der richtigen Gleichung (419) die unrichtige $75\,x = \gamma\,m\,v$ oder $x = 13{,}33\,m\,v$ anwenden. Die Folgen eines solchen unverzeihlichen Fehlers welcher die Arbeit eines ungestauten Wassers viel zu gross angibt, treffen leider immer die Wasserwerkbesitzer welche solchen „Sachverständigen" Zutrauen schenken.

§. 237. Zahlenbeispiele. Mehrfach ist der Wunsch ausgesprochen worden die vorhergehenden Paragraphen durch Zahlenbeispiele zu erläutern; wir entsprechen diesem Wunsche wie folgt.

1. Es sei die Wassermenge eines Mühlbachs zu bestimmen, über welchen in der Höhe von A und B (Fig. 248) ein Steg führt. Auf diesem werden vom linken zum rechten Ufer gleiche Entfernungen von 1 m abgetragen, mit Ausnahme der letzten welche grösser oder kleiner sein kann als die übrigen. Diese Strecken und deren Mitten sind mit Strichen und Ziffern markirt. Ferner ist bei A eine gleichgetheilte Latte lothrecht in das Wasser gestellt welche den Wasserstand W angibt; dieser habe sich während der Messung nicht geändert. Endlich werde in dem Flusse, von dem der Mühlbach mittels eines Wehrs abgeleitet ist, der Pegelstand P beobachtet, um zu wissen, ob die Wassermenge des Mühlbachs einem mittleren, niederen oder höheren Wasserstande des Hauptstroms entspricht. Die Beobachtungen und darauf folgenden Rechnungen können wie folgt aufgezeichnet werden.

Wassermessung am Profil Nr 1 des Mühlbachs zu N, mit dem Flügel F ausgeführt, dessen k = 0,3 m.

Trapez Nr	Breite	Wassertiefe		Flächen-inhalt	Trapez-Mitte	Zeit in Se-cunden	Um-drehun-gen	Ge-schwin-digkeit	Wasser-menge
		links	rechts						
1	1,0	0,35	0,72	0,535	0,53	60	135	0,674	0,3606
2	„	0,72	0,85	0,785	0,78	„	178,5	0,893	0,7010
3	„	0,85	1,20	1,025	1,02	„	190	0,952	0,9758
4	„	1,20	1,20	1,200	1,20	„	207	1,034	1,2408
5	„	1,20	1,30	1,250	1,25	„	248	1,240	1,5500
6	„	1,30	1,10	1,200	1,20	„	211	1,056	1,2672
7	„	1,10	1,00	1,050	1,05	„	188,5	0,942	0,9891
8	„	1,00	0,75	0,875	0,87	„	163	0,817	0,7147
9	1,2	0,75	0,25	0,500	0,50	„	120,5	0,652	0,3260
	9,2			8,420					8,1252

Der Mühlbach führt somit bei dem Pegelstande P des Hauptstroms und dem Wasserstande W am Querprofile Nr I eine Wassermenge von 8,1252 Cubikmeter in der Secunde, und es beträgt die mittlere Geschwindigkeit des Wassers 0,965 Meter.

2. Um die mechanische Arbeit eines Mühlbachs zu finden, und zwar desselben dessen Wassermenge soeben bestimmt wurde, wird dieser oberhalb der Radstube bis zur Oberfläche des Aichpfahls A aufgestaut; 10 m unterhalb sei ein Pfahl B eingeschlagen dessen Kopf um 1,552 m tiefer liege als der Aichpfahl, wie ein doppeltes Nivellement ergeben hat. Der untere Wasserspiegel stehe 0,042 m unter dem Pfahlkopfe B. Somit ist der Höhenunterschied zwischen Ober- und Unterwasser an dem Aichpfahle A und dem Grundpfahle B = 1,51 m. Nach Abzug des auf 10 m nöthigen Gefälls von 10 . 0,001 = 0,01 m beträgt das ganze wirksame Gefälle 1,5 m, und mit diesem findet man die mechanische Arbeit des in Rede stehenden Wasserwerks wie folgt. Das Gewicht $m\,\gamma$ des Wassers ist 8125,2 Kilogramm und dessen Arbeit in der Secunde $m\,\gamma\,h = 8125{,}2 \,.\, 1{,}5 = 12187{,}8$ Meterkilogramm oder = 162,5 Pferdewerk (Pferdekraft). Verwerthet eine Turbine 80 Procent der rohen Wasserkraft, so beträgt deren wirkliche Arbeit 9750,25 Meterkilogramm oder 130 Pferdewerk.

Ist der Mühlbach nicht gestaut und will man aus der Wassermenge m = 8,1252 cm und der Geschwindigkeit v = 0,965 m dessen mechanische Arbeit finden, so ist diese nach (423) gleich $0{,}67958 \,.\, 8{,}1252 \,.\, (0{,}965)^2 =$ $= 5{,}142$ Pferdewerk oder 385,65 Meterkilogramm.

3. Handelt es sich um eine mittelbare Bestimmung der Wassermenge eines Flusses unter Anwendung der in §. 231 entwickelten Eytelwein'schen Formel, so verfährt man folgendermassen. Es sei eine ziemlich lange und regelmässige Flussstrecke ausgesucht. An dieser werden 3 Uferpunkte, am oberen und unteren Ende und in der Mitte, mit Pfählen so bezeichnet, wie dieses für Längenprofile zu geschehen pflegt (§. 233). Diese Punkte dienen zur Aufnahme erstens des Gefälls α des Wasserspiegels und zweitens des mittleren Wasserquerschnitts q und seines benetzten Umfangs p. Um das Gefälle α zu finden, misst man sorgfältig die Entfernungen der 3 Pfähle von einander und nivellirt an jedem den Wasserspiegel ein. Wiederholte Messungen haben die Entfernung l zwischen Punkt 1 und 3 = 145,6 m und das absolute Gefälle a = 0,1144 m ergeben; es ist somit $\alpha = 0{,}0007856$. Die Querprofile, nach dem Beispiel Nr 1 gemessen, weisen folgende Ausmasse nach:

für das Profil Nr 1 ist $q_1 = 8{,}02$ qm und $p_1 = 11{,}13$ m
" " " Nr 2 " $q_2 = 8{,}45$ " $p_2 = 10{,}97$
" " " Nr 3 " $q_3 = 8{,}79$ " $p_3 = 11{,}83$
demnach im Mittel $q = 8{,}42$ und $p = 11{,}31$

Der in Frage stehende Fluss habe erdige Ufer, und da durch Schwimmer seine mittlere Geschwindigkeit zu nahezu 1 Meter in der Secunde bestimmt

ist, so kann man den Coefficienten k = 39,9 annehmen. Demnach wird die mittlere Geschwindigkeit nach Seite 482

$$v = 39{,}9 \sqrt{\frac{8{,}42}{11{,}31} \cdot \frac{1{,}144}{1456}} = 0{,}965 \text{ m}$$

und folglich die gesuchte Wassermenge des Flusses

$$m = q\,v = 8{,}42 \,.\, 0{,}965 = 8{,}125 \text{ cm.}$$

Dritte Abtheilung.

Die Lehre von der Plan- und Kartenzeichnung.

§. 238. Jede geometrische Aufnahme, geschehe sie auf oder unter der Erde und bestehe sie in Horizontal- oder Verticalmessungen oder in beiden zugleich, erhält ihren vollständigen Abschluss erst durch das Bild welches die Messungsresultate zur Anschauung bringt. Dieses Bild heisst ein Plan, wenn es nur einen so kleinen Theil der Erdoberfläche oder der Erdrinde umfasst dass bei dessen Darstellung die Kugelgestalt der Erde unberücksichtigt bleiben kann; dagegen eine Karte, wenn die darzustellende Fläche so gross ist dass die Erdkrümmung berücksichtigt werden muss. Hieraus entspringt eine verschiedene Art der Darstellung, insofern die Pläne geometrisch-ähnliche, die Karten aber mehr oder minder verzerrte Bilder liefern, jene ein unmittelbares Abgreifen von Längen und Breiten gestatten, diese stets eine (wenn auch einfache) Berechnung der Entfernungen erfordern. Es erscheint daher für die Lösung der Aufgabe dieser dritten Abtheilung, die Messungen bildlich darzustellen, zweckmässig, die Theorie der Planzeichnung von jener der Kartenzeichnung zu trennen, wie hier auch geschieht.

Erster Abschnitt.

Kartenzeichnung.

§. 239. Als Grund, wesshalb die Karten keine geometrisch-treuen Abbildungen der darzustellenden Theile der Erdoberfläche sein können, ist schon in der Einleitung die Unmöglichkeit, eine Kugelfläche und das von ihr getragene Bild in eine Ebene abzuwickeln, bezeichnet worden. Kann aber die Aehnlichkeit der natürlichen und abgebildeten Formen nicht vollständig erreicht werden, so besteht jedenfalls für die Lehre von der Kartenzeichnung die Aufgabe, die Hilfsmittel anzugeben, durch welche die Abbildung der Erdoberfläche oder einzelner Theile derselben entweder mit

der grössten Uebersichtlichkeit oder mit der kleinsten Abweichung von der Wahrheit geschehen kann.

Die Hilfsmittel deren man sich zum Entwerfen von Karten bedient, sind zunächst gewisse Systeme von Linien welche die auf der Erdoberfläche vorhanden gedachten Meridiane und Parallelkreise in der Ebene der Karte vorstellen, und in welche sich alle bemerkenswerthen Orte und Terrainpunkte nach ihren geographischen Längen und Breiten eintragen lassen. Diese Liniensysteme heissen Grad- oder Kartennetze und werden auf zwei verschiedenen Wegen erhalten.

Der eine Weg besteht darin dass man die darzustellende Erdfläche so abbildet, wie sie von einem gegebenen Standpunkte, dem Aug- oder Gesichtspunkte, aus auf einer gleichfalls gegebenen Ebene, der Projections- oder Bildebene, erscheinen würde, wenn diese Ebene und der Erdkörper durchsichtig wären. Dieses Verfahren beruht auf den Grundsätzen der Perspective, wesshalb auch die durch dasselbe entworfenen Karten perspectivische Projectionen heissen. Diese Projectionen welche nach der Lage des Augpunkts und der Bildebene verschieden benannt werden, gewähren im Vergleich zu den folgenden nur wenig Genauigkeit und lassen ohne umständliche Berechnung gar keine Vergleichung von Linien- und Winkelverhältnissen zu; dagegen aber sind sie geeignet einen Ueberblick grosser Flächen zu gewähren, und aus diesem Grunde wendet man sie auch bei Darstellung von Hälften der Erdkugel an.

Der andere Weg, Grad- oder Kartennetze zu entwerfen, ist nur für die Darstellung kleinerer Theile der Erdoberfläche, z. B. eines Staates, einer Provinz etc. anwendbar, da er darauf beruht den betreffenden Theil der Kugelfläche durch eine Kegel- oder Cylinderfläche zu ersetzen welche sich der Kugel möglichst nahe anschliesst. Da sich die conischen und cylindrischen Flächen in eine Ebene abwickeln lassen, so kann man die auf ihnen gemachten Projectionen von Punkten und Linien der Erdkugel abwickelbare Projectionen nennen und sie nach der Form der abwickelbaren Fläche und der Art die Meridiane und Parallelkreise darzustellen, unterscheiden.

Ausser den Kartennetzen erscheinen als weitere Hilfsmittel für die Abbildung von Theilen der Erdoberfläche die verschiedenen Zeichen, durch welche man entweder den Zweck und die Beschaffenheit der dargestellten räumlichen Gegenstände andeutet, oder aber die abgebildeten Gegenstände benennt und über gewisse, durch Figuren nicht darstellbare, Verhältnisse Aufschluss gibt. Es sind hienach zwei Arten von Zeichen zu unterscheiden, wovon man die einen Kartenzeichen, die anderen Kartenschrift nennen kann. Auf den meisten Karten sind zwar die angewendeten Zeichen erklärt und die Schrift ist für sich verständlich; gleichwohl aber darf es in einer Theorie der Kartenzeichnung nicht unterlassen werden Einiges über die Wahl der Zeichen und der Schrift zu bemerken.

A. Perspectivische Projectionen.

1. Stereographische Projectionen.

§. 240. Mit diesem Namen bezeichnet man diejenigen perspectivischen Projectionen der Erdoberfläche, bei welchen der Augpunkt in endlicher Entfernung von der darzustellenden Fläche liegt. Gewöhnlich nimmt man diesen Punkt nur auf der Erdoberfläche oder im Mittelpunkte derselben an; selten oder fast gar nie ausserhalb der Erde. Liegt der Augpunkt in einem Pole der Erde, so dient der Aequator als Projections- oder Bildebene für die jenem Punkte gegenüberliegende Halbkugel der Erde. Diese Lage des Augpunkts und der Bildebene characterisirt die stereographische Polarprojection oder auch die stereographische Projection auf den Aequator. Befindet sich der Augpunkt im Aequator, so geschieht die Projection der gegenüberliegenden Kugelfläche auf die Ebene desjenigen Erdmeridians welcher auf dem durch den Augpunkt gezogenen Halbmesser senkrecht steht: diese Art der Abbildung nennt man die stereographische Aequatorialprojection oder auch die stereographische Projection auf einen Meridian. Wird der Augpunkt irgendwo auf der Erdoberfläche angenommen, so bildet man die ihm gegenüberliegende Kugelfläche auf der grössten Kreisebene ab welche mit dem Halbmesser des Augpunkts einen rechten Winkel bildet. Da hier die Bildebene mit der scheinbaren Horizontalebene des Augpunkts parallel ist, so nennt man diese Darstellungsweise die stereographische Horizontalprojection oder auch die stereographische Projection auf den Horizont. Wählt man endlich den Erdmittelpunkt zum Augpunkt und eine der Mitte der darzustellenden Kugelfläche angehörige scheinbare Horizontalebene zur Bildebene, so geschieht die Abbildung durch die Centralprojection.

§. 241. Die stereographische Polarprojection ist die einfachste unter allen stereographischen Projectionen, weil sie alle Meridiane der Erde als Durchmesser des Aequators und alle Parallelkreise als concentrische Kreise erscheinen lässt (Fig. 249). Diese Behauptung bedarf wohl keines Beweises, da sie sich unmittelbar aus der geometrischen Anschauung des vorliegenden Falls ergibt. Ebenso wird man sich sofort überzeugen dass die Polarprojection die abgebildeten Flächen in der Mitte am wenigsten, an den Rändern aber am meisten verzerrt, und dass daher die mittleren Theile einer in dieser Projection gezeichneten Karte verhältnissmässig richtiger sind als die äusseren.

Will man den Halbmesser ϱ eines auf den Aequator zu projicirenden Parallelkreises G H bestimmen dessen geographische Breite G C E $= \varphi$ gegeben ist, so kann dieses sehr leicht geschehen. Zunächst ist nämlich, wenn r den Erdhalbmesser bezeichnet, der Halbmesser des abzubildenden Parallelkreises $= \frac{1}{2}$ G H $=$ r cos φ und es beträgt dessen Abstand vom

Erdmittelpunkte r sin φ und vom Augpunkte P im Pole r + r sin φ = r (1 + sin φ). Es findet somit wegen der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke G H P und g h P die Proportion statt:

$$(1 + \sin \varphi) : \cos \varphi = r : \varrho$$

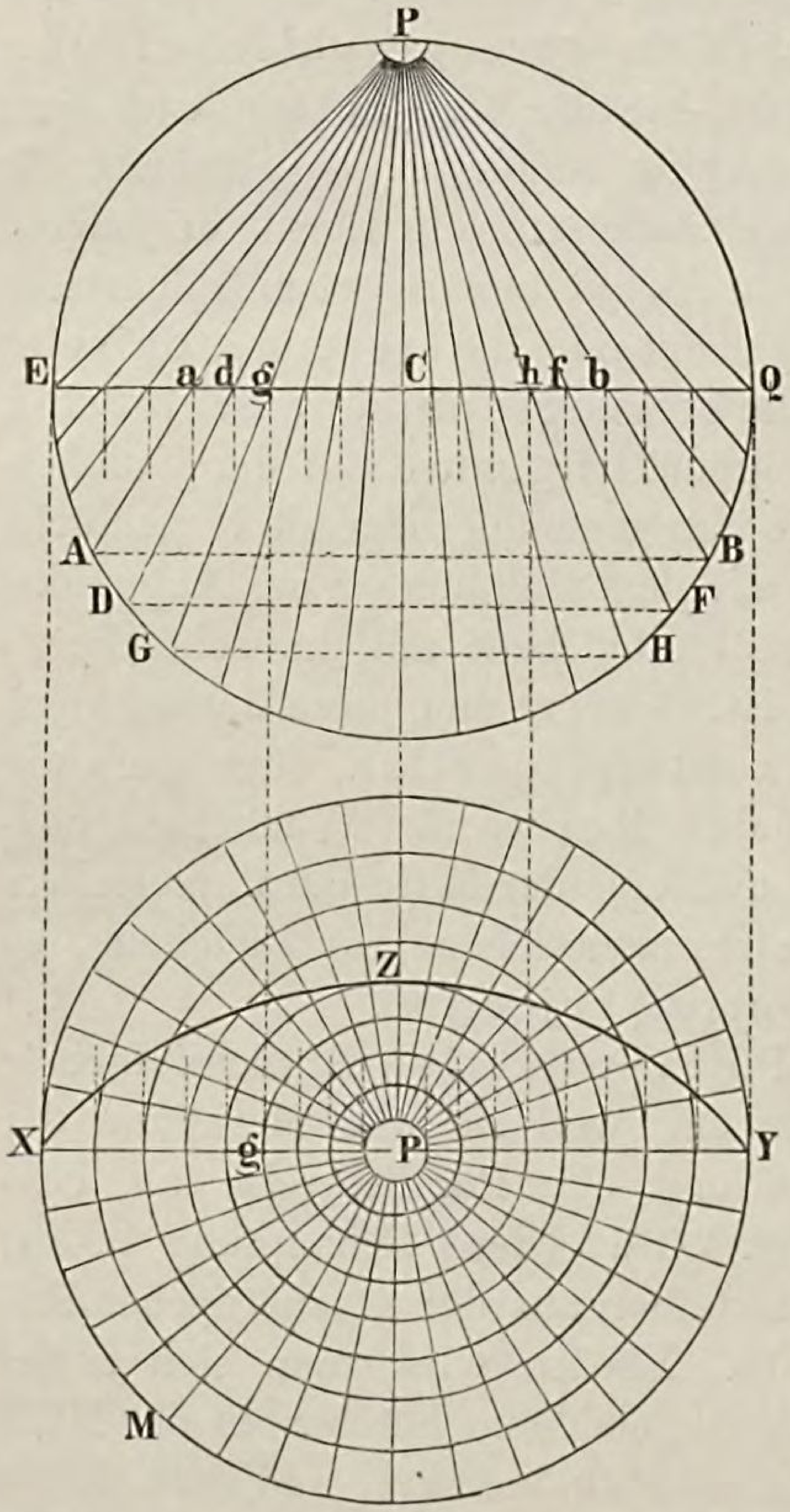
woraus mit Rücksicht auf eine trigonometrische Umformung folgt:

$$\varrho = r \operatorname{tg} (45^0 - \tfrac{1}{2} \varphi) \qquad (424)$$

Aus der Figur folgt übrigens auch sehr einfach $\angle$ G P C = $45^0 - \frac{1}{2} \varphi$, und aus dem rechtwinkligen Dreiecke g C P der vorstehende Werth von ϱ.

Mit Hilfe des berechneten und im Massstabe der Karte ausgedrückten Werths von ϱ lässt sich somit der Parallelkreis zeichnen, auf dem ein gegebener Punkt von der Breite φ liegt; kennt man nun noch dessen geographische Länge λ, so kann der Meridian angegeben werden welcher zu dieser Länge gehört und dessen Schnitt mit dem Parallelkreis die Projection des Punkts (φ, λ) auf der Karte bestimmt. Wie man umgekehrt aus einem auf der Karte gegebenen Punkte dessen Breite und Länge (φ und λ) finden kann, wenn der Kartenmassstab bekannt ist, bedarf wohl keiner Erläuterung.

Fig. 249.



Soll in der stereographischen Polarprojection einer Halbkugel ein grösster Kreis angegeben werden welcher eine beliebige Neigung φ gegen die Aequatorebene hat, so kann dieses leicht geschehen; denn erstens ist die Projection des genannten Kreises nach §. 242 auch ein Kreis; zweitens schneidet dieser Kreis und seine Projection den Aequator und dessen Projection in zwei leicht zu bestimmenden Punkten; und drittens lässt sich der Durchmesser der Projection ohne Schwierigkeit construiren und berechnen. Stellt nämlich in Fig. 250 der Punkt P den Pol, E Q den Aequator, K J den zu projicirenden grössten Kreis und P K P′ Q einen Meridian vor der auf der Schnittlinie von E Q und J K senkrecht steht: so ist klar dass die von P aus gezogenen Gesichtslinien P K und P J die Projectionen k und i von K und J ergeben, und dass demnach der Durchmesser K J des zu pro-

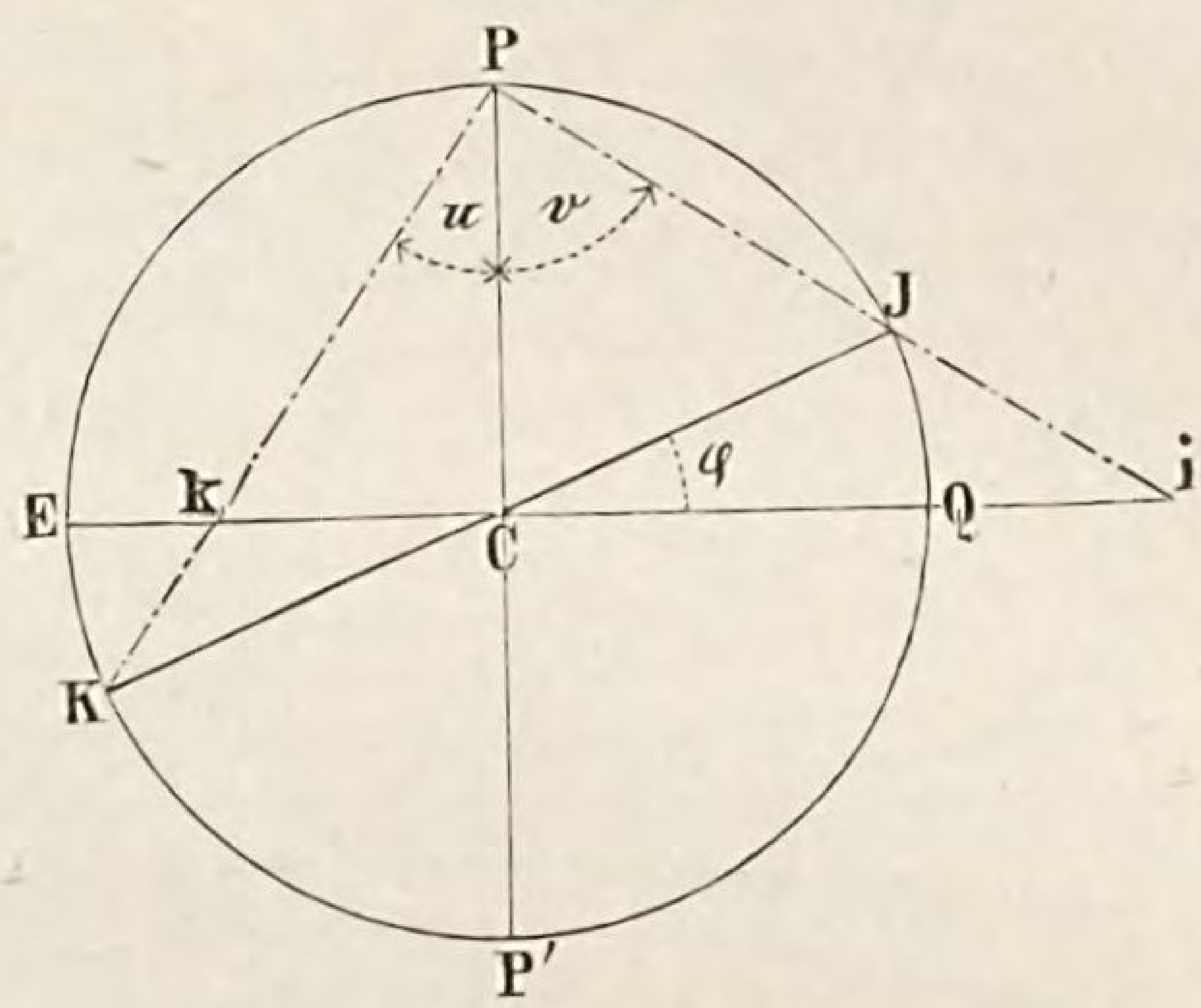
jicirenden grössten Kreises sich in der Länge $k\,i = k\,C + C\,i = \delta$ abbildet. Um δ zu berechnen hat man nach der Figur:

$$k\,C = P\,C\,.\,\mathrm{tg}\,u = r\,\mathrm{tg}\,(45^0 - \tfrac{1}{2}\,\varphi)$$
$$i\,C = P\,C\,.\,\mathrm{tg}\,v = r\,\mathrm{tg}\,(45^0 + \tfrac{1}{2}\,\varphi)$$

und mit Rücksicht darauf dass
$\mathrm{tg}\,(45^0 + \frac{1}{2}\,\varphi) = \cot\,(45^0 - \frac{1}{2}\,\varphi)$,

$$\delta = r\,\mathrm{tg}\,(45^0 - \tfrac{1}{2}\,\varphi) + r\,\cot\,(45^0 - \tfrac{1}{2}\,\varphi) = 2\,r\,\sec\,\varphi \qquad (425)$$

Fig. 250.



Der Halbmesser des Kreises k i hat somit die Länge $r\,\sec\,\varphi$. (Salneuve findet in seinem Cours de topographie etc. Nr 413 den Halbmesser $= r\,\mathrm{cosec}\,\varphi$, was davon herrührt dass er in seiner Entwickelung $1 : \sin 2\,x = \sec 2\,x$ setzt, was unrichtig ist.)

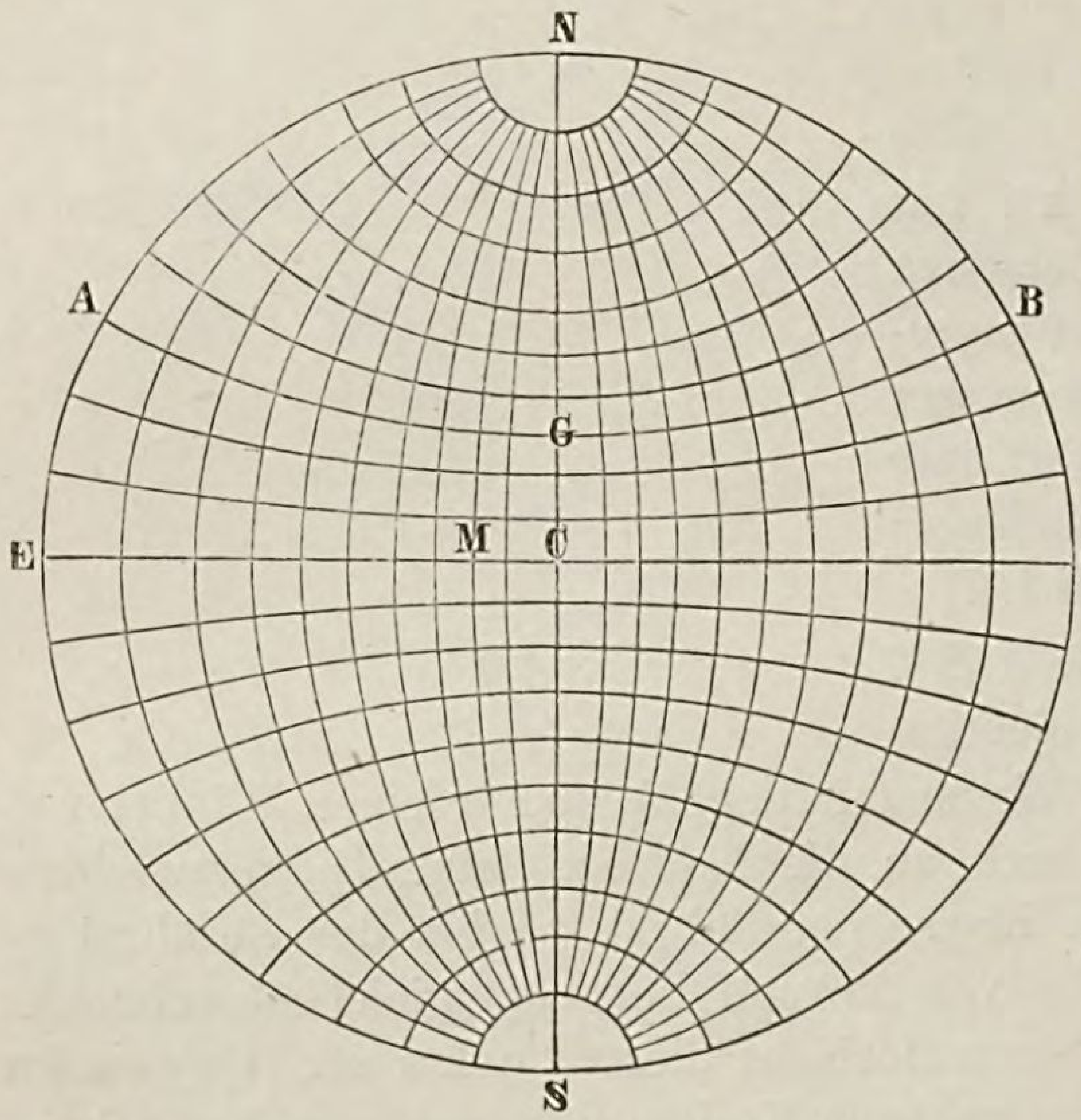
In Fig. 249 stellt die Linie X Y Z die stereographische Polarprojection eines grössten Kreises dessen Ebene mit dem Aequator einen Winkel von 40^0 bildet, vor: denkt man sich an die Erdkugel eine Tangentialebene gelegt welche diesem grössten Kreise parallel ist, so hat der Berührungspunkt eine geographische Breite von 50^0 und die Tangentialebene schneidet am Sternenhimmel den scheinbaren Horizont dieses Punkts ab. Umgekehrt ist also X Y Z die Projection des grössten Kreises dessen Ebene dem scheinbaren Horizonte eines Orts von 50^0 Breite parallel läuft, und welche in ihrer unendlichen Erweiterung die Himmelskugel nach dem wahren astronomischen Horizonte schneidet. Da nun der Halbmesser der Himmelskugel im Verhältniss zu dem der Erdkugel unendlich gross ist, so fällt der wahre astronomische Horizont mit dem scheinbaren zusammen, und desshalb kann man die Linie X Y Z auch die Projection des astronomischen Horizonts eines Orts von 50^0 geographischer Breite nennen. Welchem Orte von 50^0 Breite dieser Horizont angehört, wird durch die geographische Länge des Punkts Z oder des Meridians P Z bestimmt. Betrüge diese Länge z. B. 32^0 östlich, so würde X Y Z nahezu der Horizont von Prag sein.

§. 242. Die stereographische Aequatorialprojection liefert ein Netz von Linien welches aus lauter Kreisbögen besteht, mit Ausnahme des Aequators und des durch den Augpunkt gehenden Meridians welche beide als gerade Linien erscheinen. In Fig. 251 ist C der Augpunkt, E Q der Aequator, S C N der Meridian des Augpunkts und A N Q S der als Bildebene dienende Meridian.

Dass die Projectionen der Meridiane und Parallele wirklich Kreisbögen sind, lässt sich sowohl auf analytischem als geometrischem Wege leicht beweisen. Der letztere Weg ist der anschaulichere und desshalb hier vorzuziehen. Er fordert jedoch eine kurze Vorbereitung.

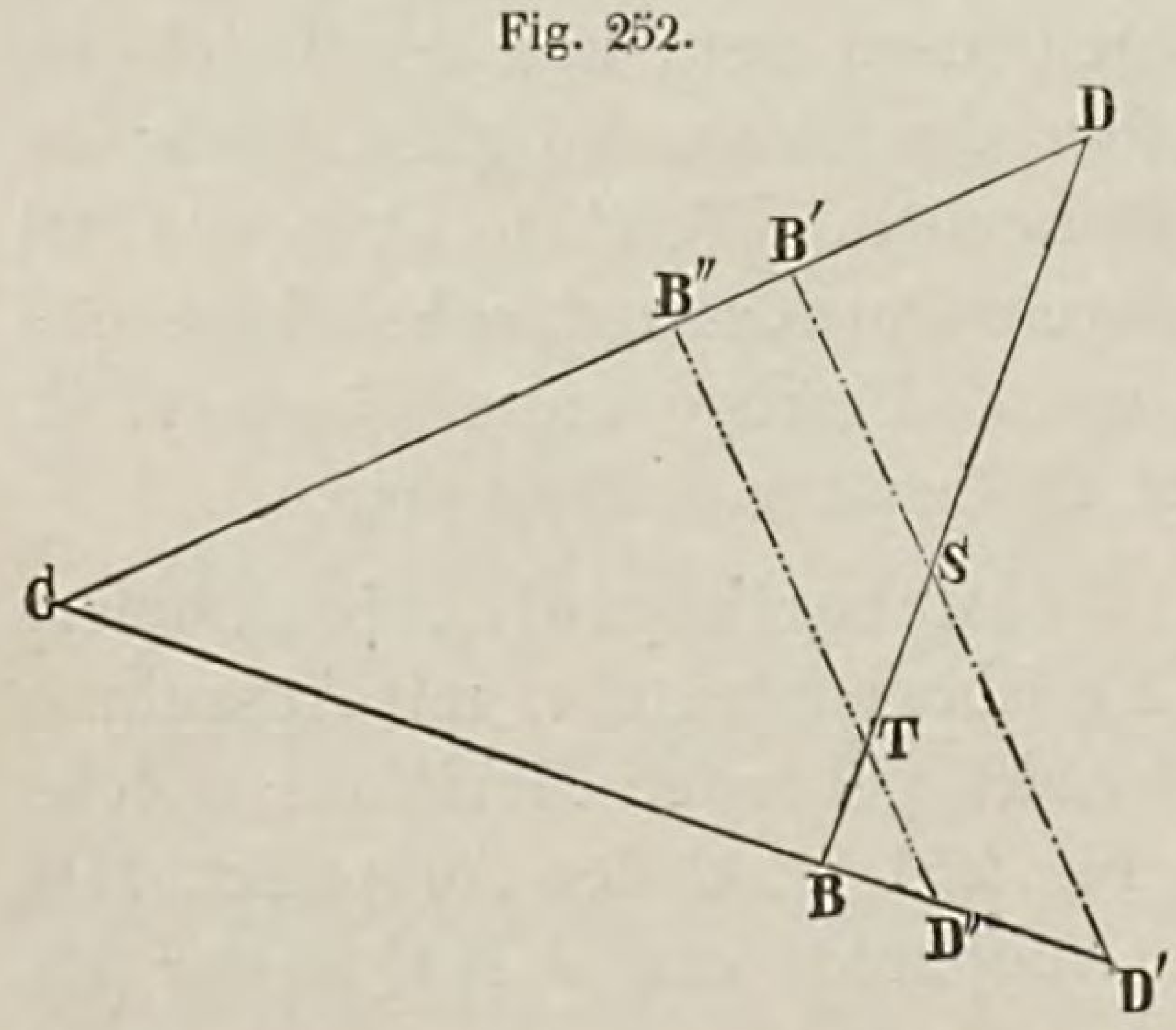
Stellt in Fig. 252 der Punkt C die Spitze, C B die kürzeste und C D die längste Erzeugende eines schiefen Kegels von kreisförmiger Basis vor; macht man C B′ = C B, C D′ = C D, und denkt sich durch B′ D′ eine zu C B D senkrechte Ebene gelegt: so schneidet diese den schiefen Kegel C B D nach einem Kreise. Denn da die Basen B D, B′ D′ eine Sehne S gemeinschaftlich haben, und, wenn man die Ebene B′ D′ um die Sehne S so dreht dass B′ auf B und D′ auf D trifft, der Kegelschnitt B′ D′ mit dem Kreise B D im Ganzen vier Punkte gemeinsam hat: so ist klar dass der Kegelschnitt B′ D′ ebenfalls nur ein Kreis sein kann. Folglich ist auch jeder mit B′ D′ parallele Schnitt B″ D″ ein Kreis. Die Linien B′ D′ und B″ D″ sind, jede für sich, zu B D antiparallel, weil sie mit C B und C D Winkel bilden welche B D beziehungsweise mit C D und C B einschliesst, oder weil sie mit B D erst parallel werden, wenn man die Ebenen C B′ D′ und C B″ D″ um 180⁰ so dreht dass der Schenkel C B′ auf C B und C D′ auf C D fällt.

Fig. 251.



Die von dem Augpunkte ausgehenden und die Meridiane und Parallelkreise berührenden Gesichtsstrahlen bilden mit diesen lauter schiefe Kegel von kreisförmiger Basis welche alle ihre Spitze in dem Augpunkte haben und von der als Bildebene dienenden Hauptmeridianebene geschnitten werden. Es lässt sich also auf sie der vorhergehende Satz anwenden, sobald man sich überzeugt hat dass die schneidende Bildebene gegen den Kegelkreis so liegt, wie es Fig. 252 verlangt. Dieses ist aber der Fall; denn stellt C (Fig. 253) den Augpunkt, EQ den Schnitt der Bildebene mit der darauf senkrechtstehenden Aequator ebene C E D Q, und B D den Schnitt dieser Ebene mit einem beliebigen Meridian vor: so ist C B D der vorhin besprochene schiefe Kegel mit kreis-

Fig. 252.



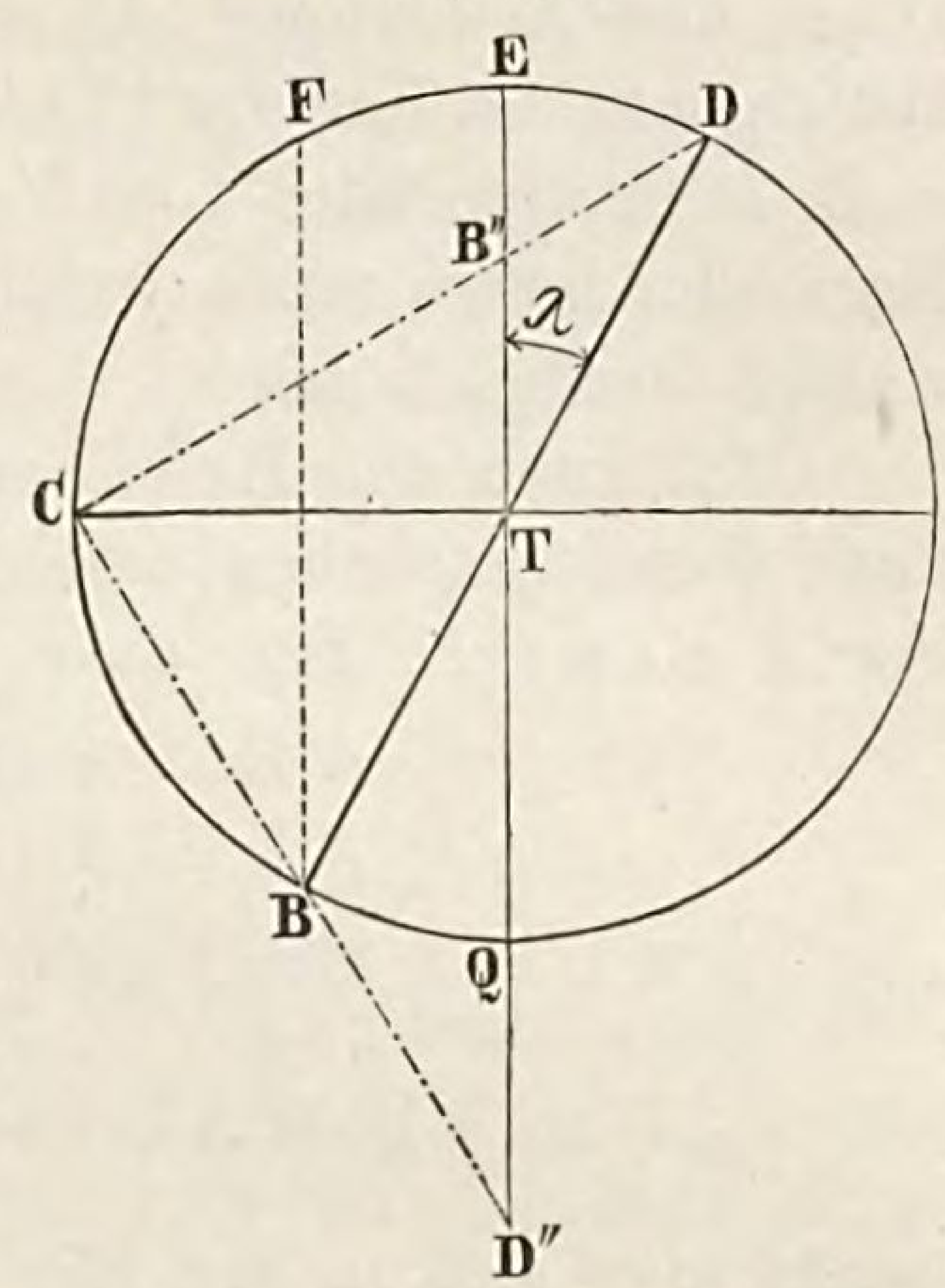
förmiger Basis und C B″ D″ der durch die Bildebene erzeugte antiparallele Kegel, weil hier, wie in Fig. 252, das Dreieck B″ D T dem Dreiecke B T D″ ähnlich ist.

Aus Fig. 253 folgt auch sofort dass alle projicirten Meridiane zwei Punkte, die Erdpole (N, S, Fig. 251), gemein haben, und dass folglich ihre Mittelpunkte auf der Linie liegen müssen, nach welcher sich die Bildebene und der Aequator schneiden (E Q, Fig. 253). Da zwei Punkte dieser Kreise gegeben sind, so lassen sie sich zeichnen, sobald man ihre Halbmesser kennt; diese sind aber nach Fig. 253 und Gleichung (425) gleich

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\,(B'' D'') = r \sec \lambda \qquad (426)$$

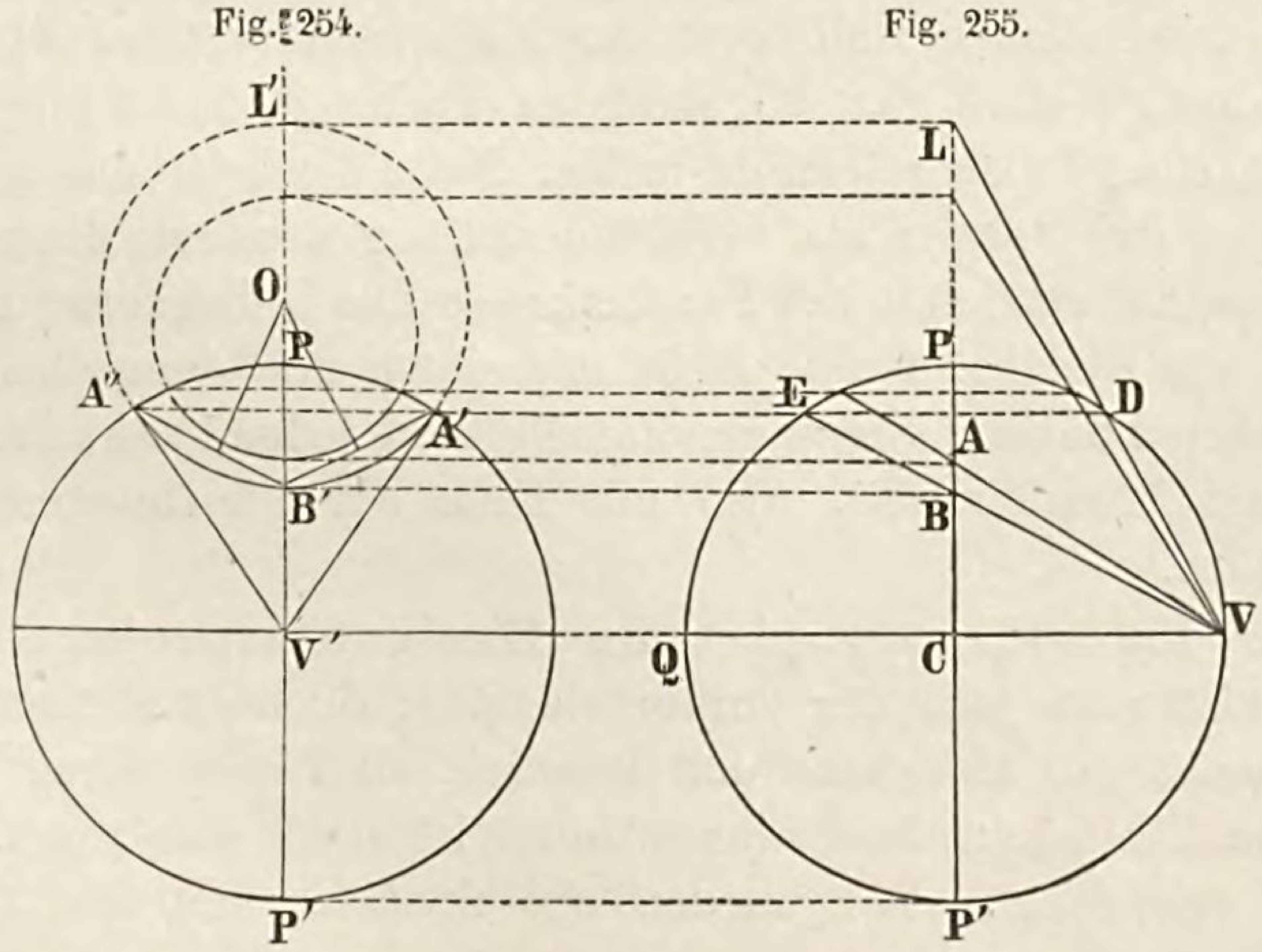
wenn λ den geographischen Längenunterschied zwischen dem Meridian dessen Projection gesucht wird, und dem der die Bildebene ist, bezeichnet.

Fig. 253.



Die Projectionen der Parallele, von denen schon bekannt ist dass sie unter einer gewissen Bedingung Kreise sind, werden in ähnlicher Weise gefunden. Stellt nämlich (Fig. 255) V den Gesichtspunkt, V Q den Aequator, V P Q einen durch V gelegten Meridian, P P′ die Spur der Bildebene und D E die irgend eines Parallels vor: so bestimmt sich der projicirende Kegel durch

Fig. 254. Fig. 255.



die Strahlen V D und V E welche die Bildebene in den Punkten L und B schneiden. Der von der Bildebene erzeugte Kegelschnitt ist aber ein Kreis, sobald der Kegel V L B dem Kegel V D E, oder auch, sobald die Basis L B der Basis D E antiparallel, d. h. das Dreieck A L D dem Dreiecke

A B E ähnlich ist. Dieses ist aber der Fall; denn man überzeugt sich leicht dass ausser den Scheitelwinkeln bei A auch die Winkel bei E und L gleich sind. In Fig. 254 welche die Bildebene vorstellt, ist L′ A″ B′ A′ der projicirte Parallelkreis D E; in der Projection erscheint jedoch nur das ausgezogene Stück A″ B A′. So wie dieses sind alle Projectionen der Parallele gegen den Aequator V′ Q in Fig. 254 und E Q in Fig. 251 convex. Der Mittelpunkt des Kreises L′ A″ B′ A′ ist durch Construction leicht zu finden, weil er in der Mitte von B′ L′, und, wenn man L′ nicht hätte, auf den Normalen liegen muss welche in der Mitte der Sehnen A′ B′, A″ B′ errichtet werden können.

Will man den Halbmesser B′ O des Parallels A′ B′ A″ berechnen, so kann dieses geschehen, indem man die Länge $L B = \delta'$ sucht und halbirt. Es ist aber nach Fig. 255:

$$A B = A E \, . \, \mathrm{tg}\, (D E V) = A E \, . \, \mathrm{tg}\, \varepsilon$$
$$A L = A D \, . \, \cot (A L D) = A D \, . \, \cot \varepsilon$$

und da $A D = A E = r \cos \varphi$, wenn φ die Breite des Parallels vorstellt;

$$\delta' = A B + A L = r \cos \varphi \, (\mathrm{tg}\, \varepsilon + \cot \varepsilon) = \frac{2 \, r \cos \varphi}{\sin 2 \, \varepsilon}$$

Denkt man sich in Fig. 255 die Linie C D gezogen, so stehen der Centriwinkel φ und der Peripheriewinkel $D E V = \varepsilon$ auf einerlei Bogen D V; daher ist $\varepsilon = \frac{1}{2} \varphi$ und $\sin 2 \, \varepsilon = \sin \varphi$, mithin auch

$$\delta' = L B = 2 \, r \cot \varphi \tag{427}$$

und somit der Halbmesser des Parallels A′ B″ A″ $= r \cot \varphi$.

Die stereographische Aequatorialprojection wird zur Darstellung der östlichen und westlichen Halbkugel der Erde benützt; ihre Abweichungen von der wahren Gestalt der abgebildeten Theile sind im Gegensatze zur stereographischen Polarprojection in der Mitte (bei C) am grössten und werden gegen die Ränder hin verhältnissmässig kleiner; überdiess bringt sie durch die Excentricität der Parallelkreise das Unbequeme mit sich dass selbst Orte von gleicher Breite nicht mit einem und demselben Masse bestimmt werden können: streng genommen wird jeder Punkt nur aus einem Meridian und Parallelkreise, also mit Hilfe der Gleichungen (426) und (427) gefunden.

§. 243. Die stereographische Horizontalprojection ist zusammengesetzter als jede der vorhergehenden; doch erscheinen auch hier die Projectionen der Meridiane und Parallele als Kreise deren Halbmesser und Mittelpunkte leicht bestimmt werden können, was die Construction des Netzes erleichtert. Wir werden uns zunächst mit den Projectionen der Meridiane befassen.

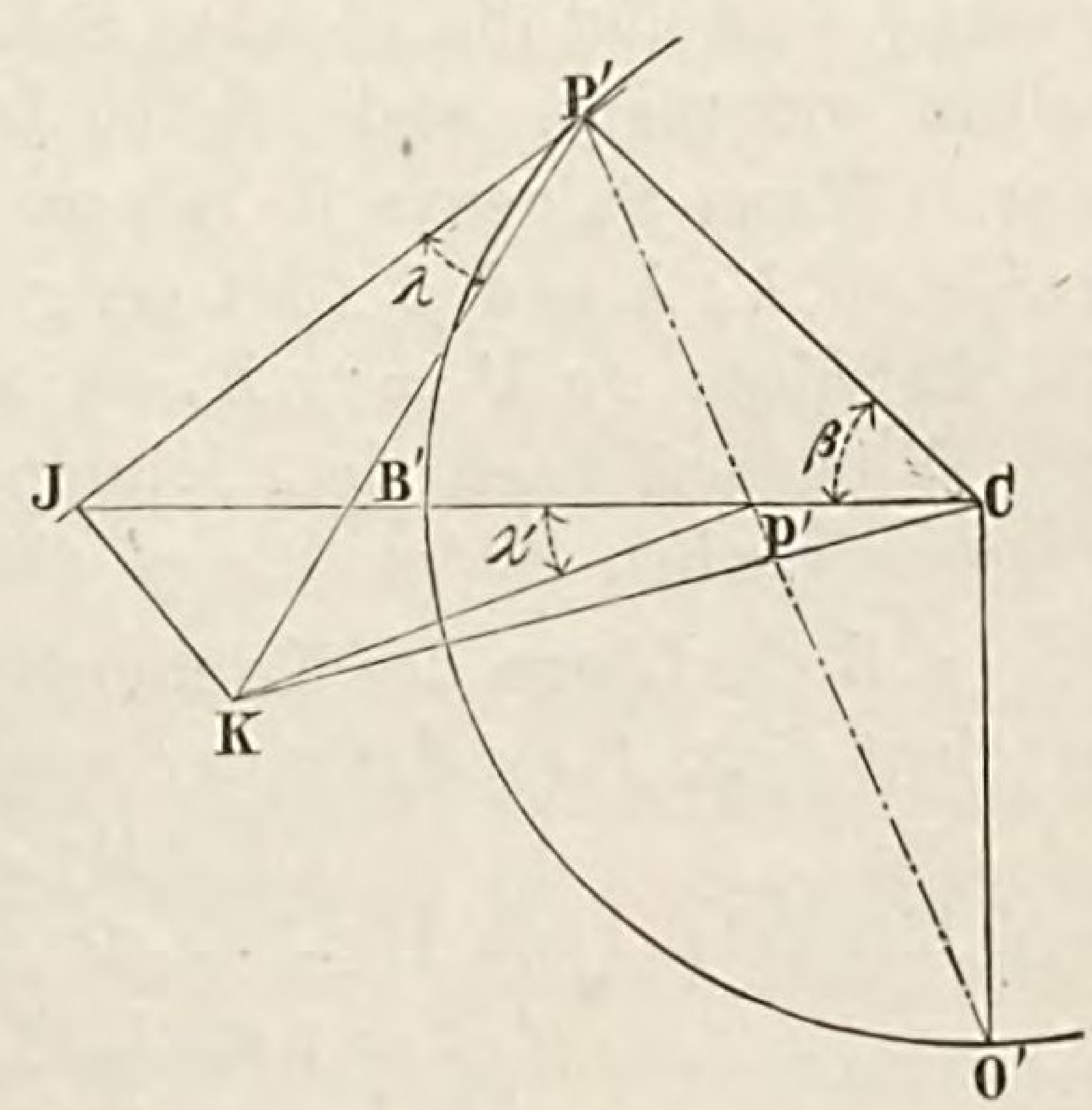
In den Figuren 256 und 257 stellen O, O′ die Augpunkte, P, P′ und Q, Q′ die Erdpole, P Q, P′ Q′ die Erdaxe und A B, A′ B′ den Durchmesser des grössten Kreises vor welcher als Bildebene dient und nach §. 240 von dem Augpunkte um 90⁰ absteht. Die Bildebene ist in Fig. 256 durch den

Kreis M A N B begrenzt und in Fig. 257 stellt A′ B′ ihren Schnitt mit einem Meridian O′ Q′ P′ vor welcher durch den Augpunkt geht.

Zieht man von der Kegelspitze O′ aus die Erzeugenden O′ P′, O′ Q′, so treffen diese die Bildebene in p′, q′ (Fig. 257) und p, q (Fig. 256). Da alle Erdmeridiane durch die Pole gehen, so müssen offenbar auch die Projectionen der Meridiane durch die projicirten Pole p, q gehen. Beweist man nun noch dass die Meridianprojectionen Kreise sind, so liegen offenbar ihre Mittelpunkte auf der Linie R S welche p q halbirt und senkrecht darauf steht.

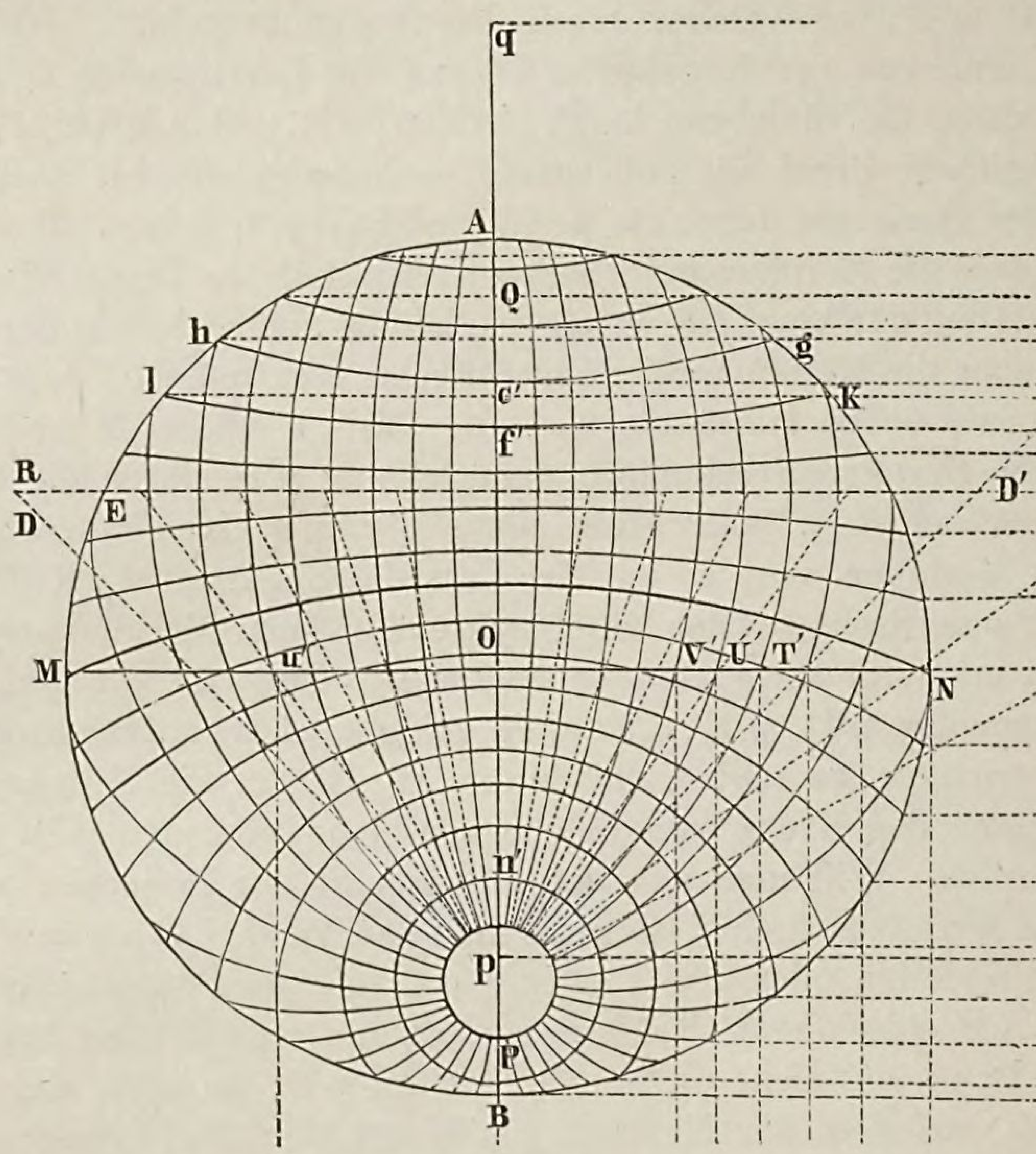
Dass aber die Meridianprojectionen Kreise sein müssen, folgt aus dem leicht zu erweisenden Umstande dass die Basis P′ Q′ des Kegels O′ P′ Q′ welche allen Meridianen zukommt, dem Schnitte p′ q′ durch die Bildebene A′ B′ antiparallel ist (§. 242). Stellt nun p′ q′ = p q eine Sehne eines jeden projicirten Meridians vor, so ist klar dass die Senkrechte auf ihrer Mitte (R S) der geometrische Ort der Mittelpunkte aller jener Meridianprojectionen ist. Denkt man sich diese Projectionen wie in Fig. 256 gezogen, in dem Pole p Tangenten p D, p E an sie gelegt und darauf Senkrechte p D′, p E′ errichtet: so stellen die Punkte D′, E die Mittelpunkte der von p ausgehenden Kreise vor welche von den Tangenten p D, p E berührt werden. Will man nun den Mittelpunkt der Projection p u′ eines bestimmten Meridians finden, so muss man den Winkel D p q = λ' kennen, den diese Projection oder ihre Tangente p D mit der Projection des Hauptmeridians A B einschliesst. Trägt man alsdann diesen Winkel bei p an p q gleich q p D an und zieht p D′ senkrecht auf p D, so ist D′ der gesuchte Mittelpunkt, aus dem der Meridian p u′ q mit dem Halbmesser ϱ = D′ p beschrieben wird. Der Winkel λ' ist aber merkwürdigerweise dem Längenunterschiede λ zwischen einem beliebigen Meridian und dem durch den Augpunkt gehenden Hauptmeridian A O B gleich. Denn stellt in Fig. 258 der Punkt C den Mittelpunkt und P′ den Pol der Erde vor; ist ferner J C K ein Theil der Bildebene welche mit der Erdaxe P′ C den Winkel β einschliesst, bezeichnet weiter J P′ den Hauptmeridian und P′ K einen anderen um den Winkel λ von ersterem abliegenden Meridian; und ist endlich P′ O′ die Gesichtslinie des Punkts P′, also p′ das Bild von P′: so wird die Bildebene durch die Ebene J P′ O′ nach J p′ und

Fig. 258.



durch die Ebene K P′ O′ nach K p′ geschnitten, so dass ∟ J p′ K = λ' die perspectivische Projection von λ ist. Erwägt man nun dass der Winkel C P′ O′ = P′ O′ C = $45^0 - \frac{1}{2}\beta$ und P′ p′ J = p′ C P′ + C P′ O′ = $45^0 + \frac{1}{2}\beta$; dass ferner C P′ J = 90^0, also p′ P′ J = 90^0 — C P′ O′ = $45^0 + \frac{1}{2}\beta$ = P′ p′ J:

Fig. 256.



so ist das Dreieck J P′ p′ gleichschenklig, also J P′ = J p′. Da nun vermöge der Construction die beiden Dreiecke J K P′ und J K p′ bei J rechtwinklig sind und die gleichen Seiten J K und J P′, J p′ haben, so sind dieselben congruent, und folglich ist der Winkel $\lambda' = \lambda$, was zu beweisen war. (Wenn Salneuve in seinem Cours de topographie (Nr 419) behauptet, zwischen λ', λ und β (der geographischen Breite des Augpunkts) bestehe die Relation: $\operatorname{tg} \lambda' = \operatorname{tg} \lambda \,.\, \sin \beta$, so irrt er darin dass er den Scheitel des Winkels λ nach dem Mittelpunkte C der Erde und nicht nach dem perspectivischen Bildpunkte p′ (Fig. 257) projicirt.)

Soll die Länge des Krümmungshalbmessers $\varrho = D'p$ berechnet werden, so dient dazu für's Erste der nach Fig. 256 gebildete Ausdruck

$$2\,\varrho \sin \lambda' = p'\,q' = p\,q$$

und hienächst nach Fig. 257 die Länge $p'\,q' = p\,q = p'\,C + C\,q'$. Da aber

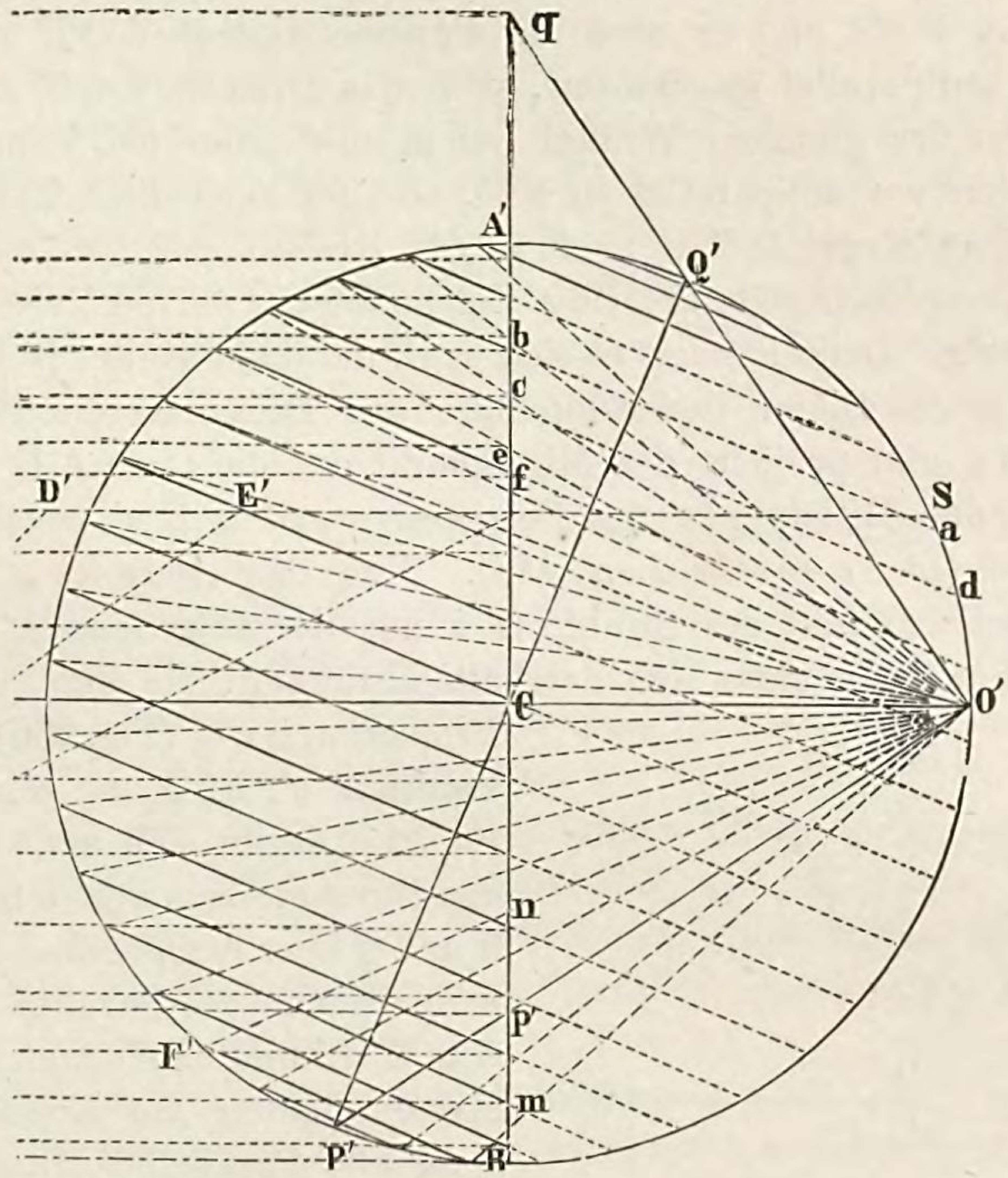
$$p'\,C = r \operatorname{tg}(C\,O'\,p') = r \operatorname{tg}\,(45^0 - \tfrac{1}{2}\beta)$$
$$q'\,C = r \operatorname{tg}(C\,O'\,q') = r \cot\,(45^0 - \tfrac{1}{2}\beta)$$

so erhält man durch Addition und einfache Reduction

$$p'\,q' = \frac{2\,r}{\sin\,(90^0 - \beta)} = \frac{2\,r}{\cos \beta} = 2\,r \sec \beta$$

mithin auch durch Substitution dieses Werths von p′ q′ in die Grundgleichung:

Fig. 257.



$$\varrho = \frac{r}{\cos \beta \sin \lambda'} \tag{428}$$

Für $\beta = 0$, d. h. wenn der Augpunkt im Aequator liegt, geht die stereographische Horizontalprojection in die stereographische Aequatorialprojection über und man erhält

$$\varrho = \frac{r}{\sin \lambda'}$$

Vergleicht man aber diesen Ausdruck mit dem in Nr 426 für ϱ gefundenen, so existirt insofern eine Verschiedenheit, als dort

$$\varrho = r \sec \lambda = \frac{r}{\cos \lambda}$$

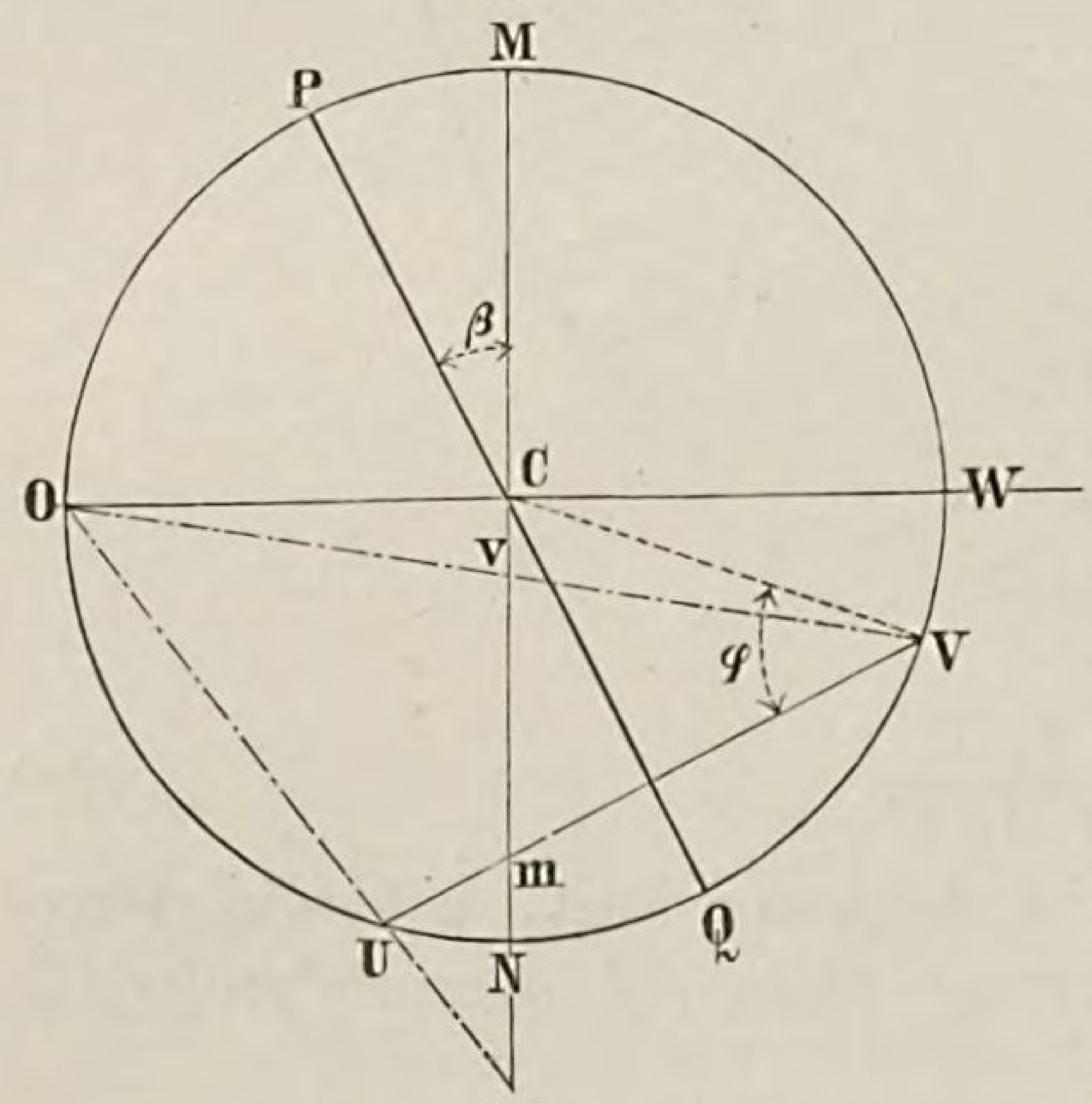
steht. Dieser Unterschied verschwindet aber wenn man bedenkt dass das λ des letzteren Ausdrucks das Complement von λ' im ersteren ist; dass somit $\lambda' = 90^0 - \lambda$ und folglich $\sin \lambda' = \cos \lambda$ ist. Es geht also, wie es sein muss, für $\beta = 0$ die Horizontalprojection bezüglich der Meridiane in die Aequatorialprojection über.

Dass auch die Projectionen der Parallele Kreise sind, lässt sich wie folgt beweisen. Stellt O in Fig. 259 den Gesichtspunkt, O M N einen durch O gelegten und auf der Bildebere M N senkrecht stehenden grössten Kreis, P Q die Erdaxe und U V den Schnitt eines Parallels vor: so geben offenbar

die Gesichtslinien O V, O U die Bilder v, u der Endpunkte des Parallelendurchmessers V U, und es wird der Perspectivkegel V O U von der Bildebene M N antiparallel geschnitten, weil das Dreieck v m V dem Dreiecke u m U wegen der gleichen Winkel bei m und jener bei V und u ähnlich ist. Liegt aber v u antiparallel zu V U, so sind auch die Schnitte der Bildebene mit dem Kegel O V U nach §. 242 Kreise.

Nach dieser Vorbereitung ist die Zeichnung der perspectivischen Parallele nicht schwierig. Denn handelt es sich z. B. um das Parallel B′ F′ (Fig. 257), so sind m, n die Bilder der Endpunkte des Durchmessers B′ F′: halbirt man nun m n und projicirt den Mittelpunkt auf die Linie A B der Fig. 256, so hat man den Mittelpunkt des Perspectivparallels B n′ welches mit dem Halbmesser $\frac{1}{2}$ (m n) beschrieben wird. Von dem Parallel a b (Fig. 257) kann der Schnittpunkt des Strahls O′ a mit der Bildebene A′ B′ nicht erhalten werden, man muss sich desshalb begnügen, die ihm entsprechende Projection h c′ g (Fig. 256) aus den drei Punkten c′, h, g zu zeichnen. Der Punkt c′ ergibt sich als das eine Ende des Durchmessers von a b wie bisher; h und g aber entsprechen dem Schnitte b der Ebene des Parallels a b mit der Axe A′ B′ und erscheinen auf der Bildebene offenbar am Kreise A N B M. Dass alle Parallelen-Mittelpunkte auf der Linie A B liegen müssen, ist wohl für sich klar.

Fig. 259.



Zur Berechnung des Halbmessers ϱ' der projicirten Parallelkreise kann man sich der Fig. 259 bedienen. Der Durchmesser $2\varrho'$ ist nämlich = v u = = C u — C v, und da nach der Figur:

$$C\,u = r \operatorname{tg} (C\,O\,u) = r \operatorname{tg} (90^0 - \tfrac{1}{2} [\varphi + \beta]) = r \cot \tfrac{1}{2} (\varphi + \beta)$$
$$C\,v = r \operatorname{tg} (C\,O\,v) = r \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (V\,C\,W) = r \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\varphi - \beta)$$

so folgt

$$\varrho' = \frac{r \cos \varphi}{2 \sin \frac{1}{2} (\varphi + \beta) \cos \frac{1}{2} (\varphi - \beta)} = \frac{r \cos \varphi}{\sin \varphi + \sin \beta} \qquad (429)$$

Ist $\beta = 0$, so wird $\varrho' = r \cot \varphi$, was mit der Gleichung (427) übereinstimmt und übereinstimmen muss, da die stereographische Aequatorialprojection nur ein besonderer Fall der stereographischen Horizontalprojection ist. Dasselbe gilt von der stereographischen Polarprojection; denn setzt man in den Gleichungen (428) und (429) $\beta = 90^0$, so wird, den Entwickelungen des §. 241 entsprechend:

$$\varrho = \infty \text{ und } \varrho' = r \operatorname{tg} (45^0 - \tfrac{1}{2} \varphi)$$

§. 244. Die Centralprojection liefert Netze in welchen die Meridiane als gerade Linien erscheinen die sich im Pole der Erde schneiden, wäh-

rend die Parallele je nach der Lage der Bildebene als Theile von Kreisen, Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln erscheinen. Als Kreise stellen sich die Parallele, wie man leicht einsieht, nur dann dar, wenn die Bildebene den Pol berührt. In diesem Falle und wenn gleichzeitig nur ein mässiges Stück der Erdoberfläche in der Umgebung eines Pols abzubilden wäre, liesse sich die Centralprojection mit Vortheil anwenden; in jedem anderen Falle bietet sie viele Unbequemlichkeit wegen der Zeichnung der Parallele und grosse Unvollkommenheit an den Rändern der Karte. Desshalb wendet man sie fast gar nicht an, und darum findet sie auch hier keine weitere Beachtung.

2. Orthographische Projectionen.

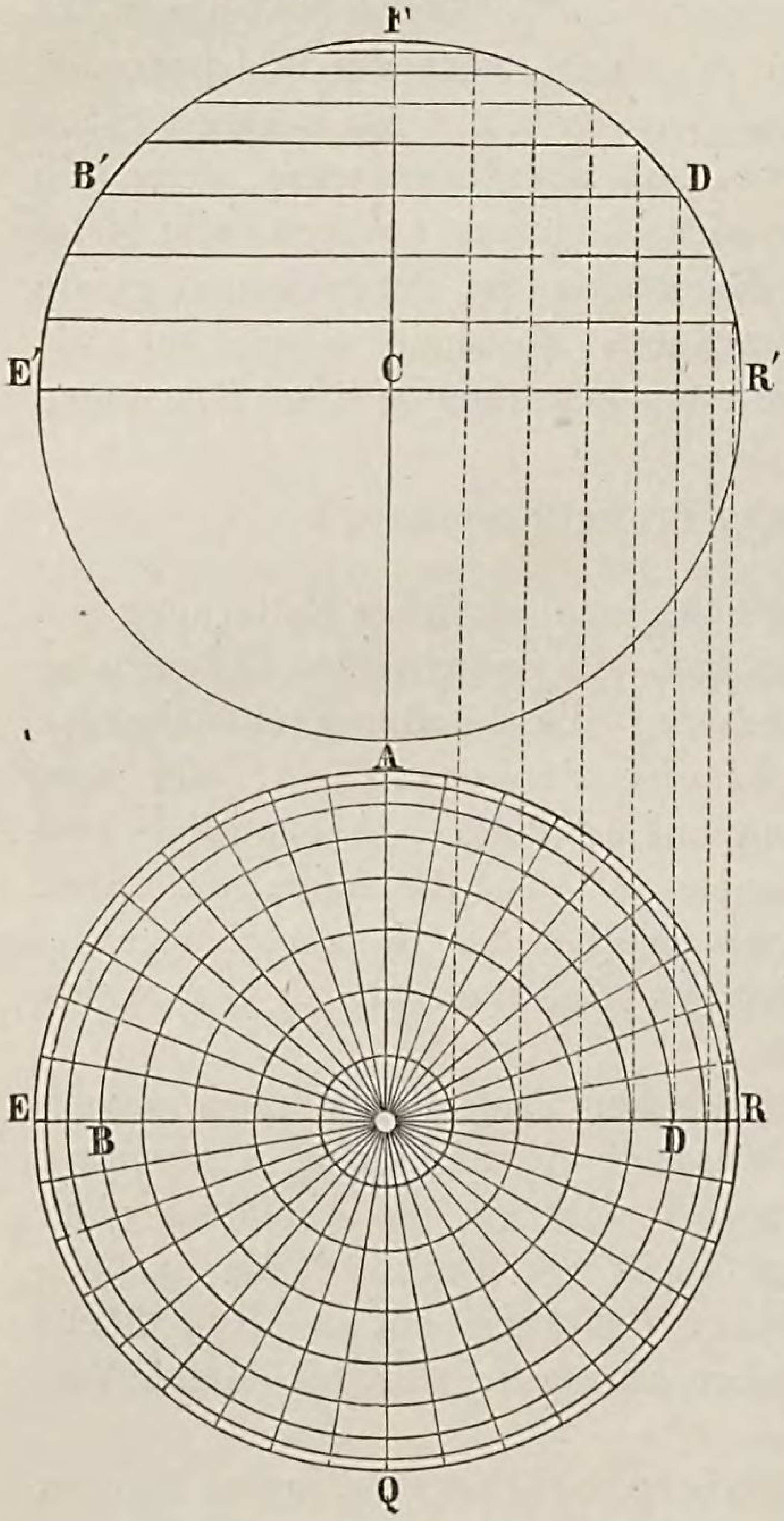
§. 245. Wenn man den Gesichtspunkt in unendlicher Entfernung auf der Normale zur Bildebene annimmt, so sind alle projicirenden Linien unter sich parallel und senkrecht zur Bildebene; die hierdurch entstehenden Kartennetze nennt man orthographische Projectionen, und man unterscheidet nach der Lage des Augpunkts: Polar-, Aequatorial- und Horizontalprojectionen, oder Projectionen auf den Aequator, auf einen Meridian, oder auf einen grössten Kreis welcher der Horizontalebene des in der Mitte der Karte gelegenen Orts parallel und folglich der wahre astronomische Horizont dieses Orts ist.

Im Allgemeinen sind die orthographischen Projectionen noch unvollkommener als die stereographischen, wesshalb sie nur wenig Anwendung finden, den Fall ausgenommen, wo es sich nicht um die Abbildung einer Halbkugel, sondern nur eines kleinen Theils der Erdoberfläche handelt; denn in diesem Falle würde die Bildebene theilweise mit der Kugelfläche zusammenfallen und nur an den Rändern abstehen, woselbst kleine Verzerrungen der Bilder stattfänden.

§. 246. Die orthographische Polarprojection ist in den Figuren 260 und 261 dargestellt und man macht sich sofort aus dem Anblicke klar dass die Meridiane als Durchmesser (A Q, E R) der durch den Aequator (E A R Q, E′ R′) vorgestellten Bildebene, und die Parallele als concentrische Kreise erscheinen deren Mittelpunkte das Bild des Erdpols ist. Die abgebildeten Meridiane haben gegen einander dieselbe Neigung (λ) wie die wirklichen, und die Halbmesser der Parallelkreise (z. B. B D, B′ D′) sind $r \cos \varphi$, wenn φ die geographische Breite des Parallels bezeichnet.

§. 247. Die orthographische Aequatorialprojection ist in den Figuren 262 und 263 dargestellt. Da der Augpunkt in unendlicher Entfernung auf der Aequatorebene liegt, so laufen alle Gesichtslinien dieser Ebene parallel und folglich erscheinen die Parallele (A B), wie der Aequator (E Q) als gerade Linien. Die Meridiane bilden mit den auf der Bildebene senkrecht stehenden Gesichtslinien schiefe Cylinderflächen von kreisförmiger Basis: die Schnitte dieser Cylinder durch die Bildebene sind folglich Ellipsen welche alle durch die Pole gehen und daher die Erdaxe S N zur grossen

Fig. 260 (§. 246). Fig. 262 (§. 247).



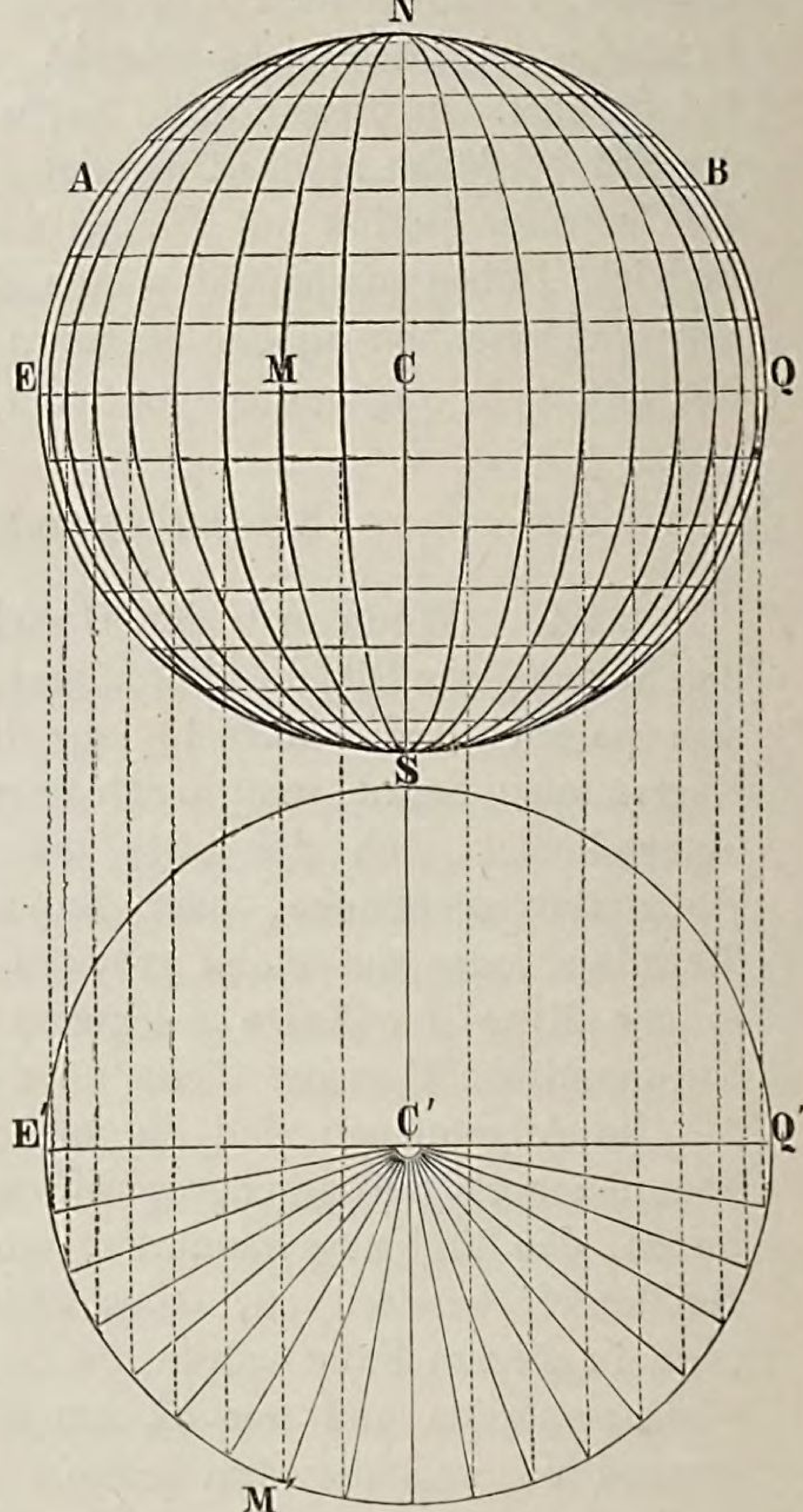


Fig. 261. Fig. 263.

Axe haben; die kleine Axe ergibt sich, wenn man den auf der Erdaxe senkrecht stehenden Durchmesser des Meridians auf die Bildebene projicirt. In den vorstehenden Figuren ist für den Meridian M' C' die zugehörige kleine Halbaxe = M C. Mit Hilfe der beiden Axen können die Ellipsen in bekannter Weise aufgetragen werden; genauer aber erhält man sie aus ihren Coordinaten. Sieht man nämlich die grosse Axe S N (Fig. 262) als Abscissenaxe an, so stellen die Projectionen der Parallele (A B, E Q) die Richtungen der Ordinaten vor. Handelt es sich nun um irgend einen Meridian (M' C') dessen Längenunterschied gegen die Bildebene $= \lambda'$ ist, so sind die beiden Halbaxen der Ellipse welche ihn vorstellt, r und $r \cos \lambda$, und mithin findet, wenn C der Mittelpunkt der Ellipse und der Anfang der Coordinaten ist, für die Ellipse S M N S die Gleichung statt:

$$y^2 + x^2 \cos^2 \lambda = r^2 \cos^2 \lambda$$

Berücksichtigt man jedoch dass $x = r \sin \varphi$, wenn φ die Breite eines Parallels (hier einer Ordinate), so geht vorstehende Gleichung über in

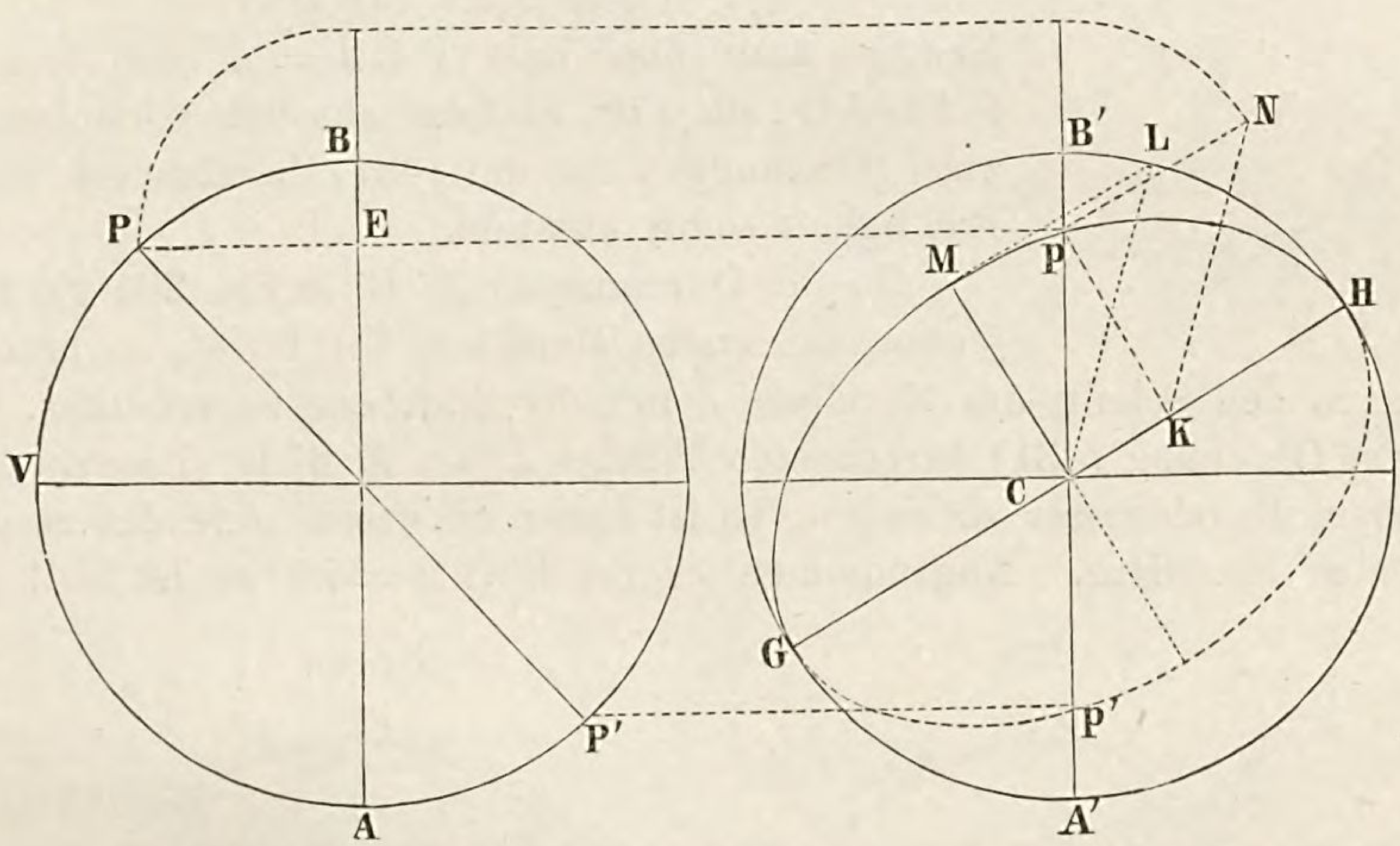
$$y = r \cos \lambda \cos \varphi \tag{430}$$

woraus man also auf sehr einfache Weise die Lage eines Punkts findet dessen geographische Länge λ gegen die Bildebene und dessen Breite φ bekannt sind.

§. 248. Die orthographische Horizontalprojection setzt als Augpunkt einen unendlich weit entfernten Punkt des Erdhalbmessers welcher durch die Mitte des abzubildenden Landes geht, und als Bildebene den grössten Kreis der auf diesem Halbmesser senkrecht steht, voraus.

Um die Projectionen der Meridiane zu finden, denke man sich in Fig. 264 durch einen beliebigen Punkt V der den Mittelpunkt des abzubildenden Landes vorstellen kann, einen Meridian V P B P′ A gelegt und

Fig. 264. Fig. 265.



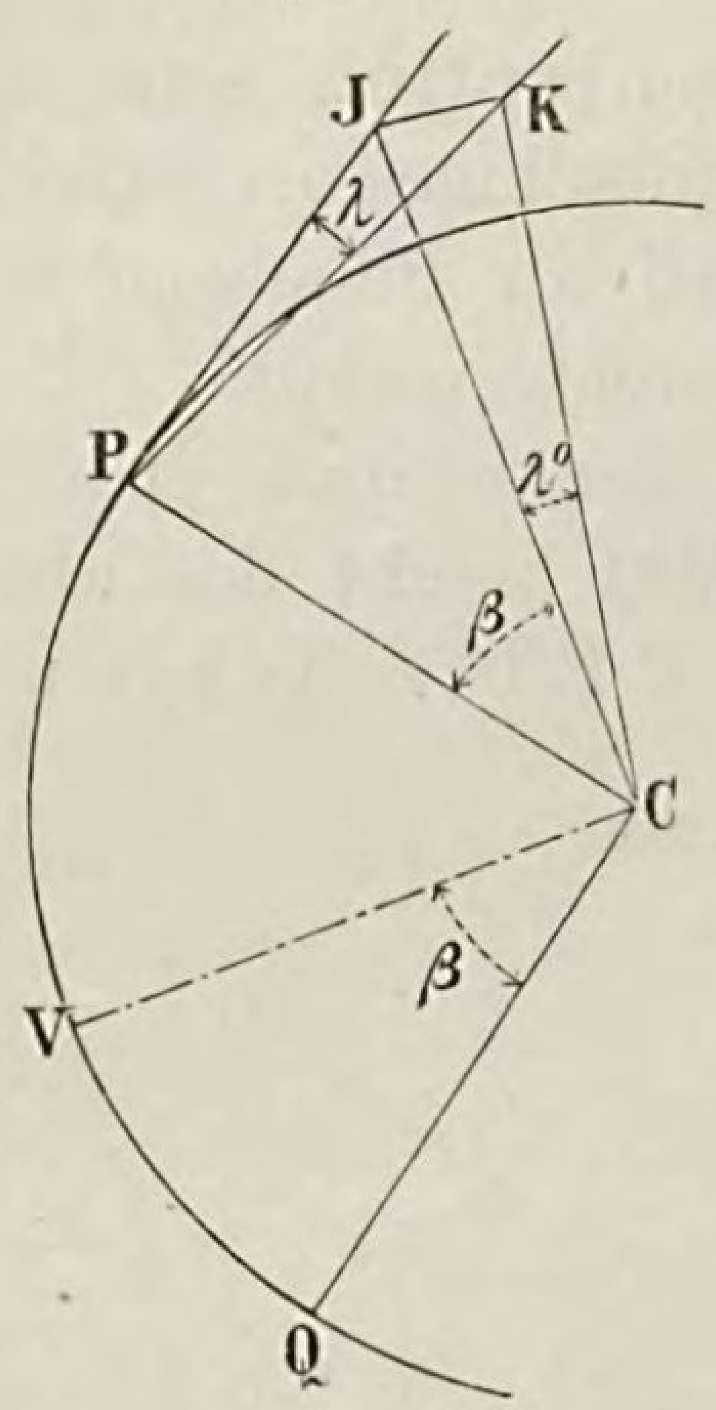
darauf eine senkrechte Ebene A B errichtet welche der Horizont von V ist. Die Linie P P′ stelle die Erdaxe, also die Linie vor welche mit dem Punkte V den Meridian V P P′ bestimmt. Bezeichnet die Figur 265 die auf diesem Meridian nach A B senkrecht stehende Bildebene, so sind auf ihr p, p′ die Projectionen der Erdpole P, P′ durch welche nothwendig alle Meridiane gehen müssen. Da die Projectionen dieser Meridiane aus Schnitten von schiefen Kreis-Cylinderflächen entstehen, so sind dieselben Ellipsen von denen man jetzt bereits zwei Punkte p und p′ kennt; und da alle Meridiane durch die Linie P P′ (Fig. 264) gehen und durch die Bildebene A B geschnitten werden, so ist klar dass der Schnitt dieser Ebene mit jedem Meridian nur ein Durchmesser desselben und zugleich auch nur die grosse Axe seiner elliptischen Projection sein kann. Diese Axe findet man aber wie folgt durch Construction.

Sieht man den durch V gelegten Meridian V P P′ als den Hauptmeridian

an und bezeichnet λ den geographischen Längenunterschied zwischen diesem und dem Meridian dessen Projection G M p H p′ gesucht wird; ist ferner β die geographische Breite des Punkts V und λ^0 die Projection des Winkels λ auf die Bildebene: so besteht die Relation

$$\operatorname{tg} \lambda^0 = \operatorname{tg} \lambda \sin \beta \qquad (431)$$

Fig. 266.



denn nach Fig. 266 ist, — wenn P J, P K die Tangenten an die vorhin genannten Meridiane im Pole P und J C, K C ihre Projectionen auf der durch A B gehenden, senkrecht zu V P P′ stehenden Bildebene, also J P K, J C K die Winkel λ, λ^0 sind, — aus dem bei J rechtwinkligen Dreiecke P K J:

$$J K = P J \,.\, \operatorname{tg} \lambda$$

und aus dem Dreiecke J K C welches ebenfalls bei J einen rechten Winkel hat:

$$J K = J C \,.\, \operatorname{tg} \lambda^0$$

Erwägt man nun dass P C J $= \beta$ und folglich P J $=$ J C . $\sin \beta$ ist, so folgt aus den vorstehenden zwei Gleichungen die mit (431) bezeichnete deren Richtigkeit somit feststeht.

Da der Durchmesser A′ B′ in Fig. 265 die Projection des ersten Meridians V P P′ ist, so braucht man, um den Schnitt des Meridians λ mit der Bildebene zu erhalten, nur den aus Gleichung (431) berechneten Winkel λ^0 an A′ B′ in C anzutragen und einen Durchmesser zu ziehen, so ist dieser die grosse Axe des zu projicirenden Meridians. Angenommen es sei B′ C H $= \lambda^0$, so ist G H die

Fig. 267.

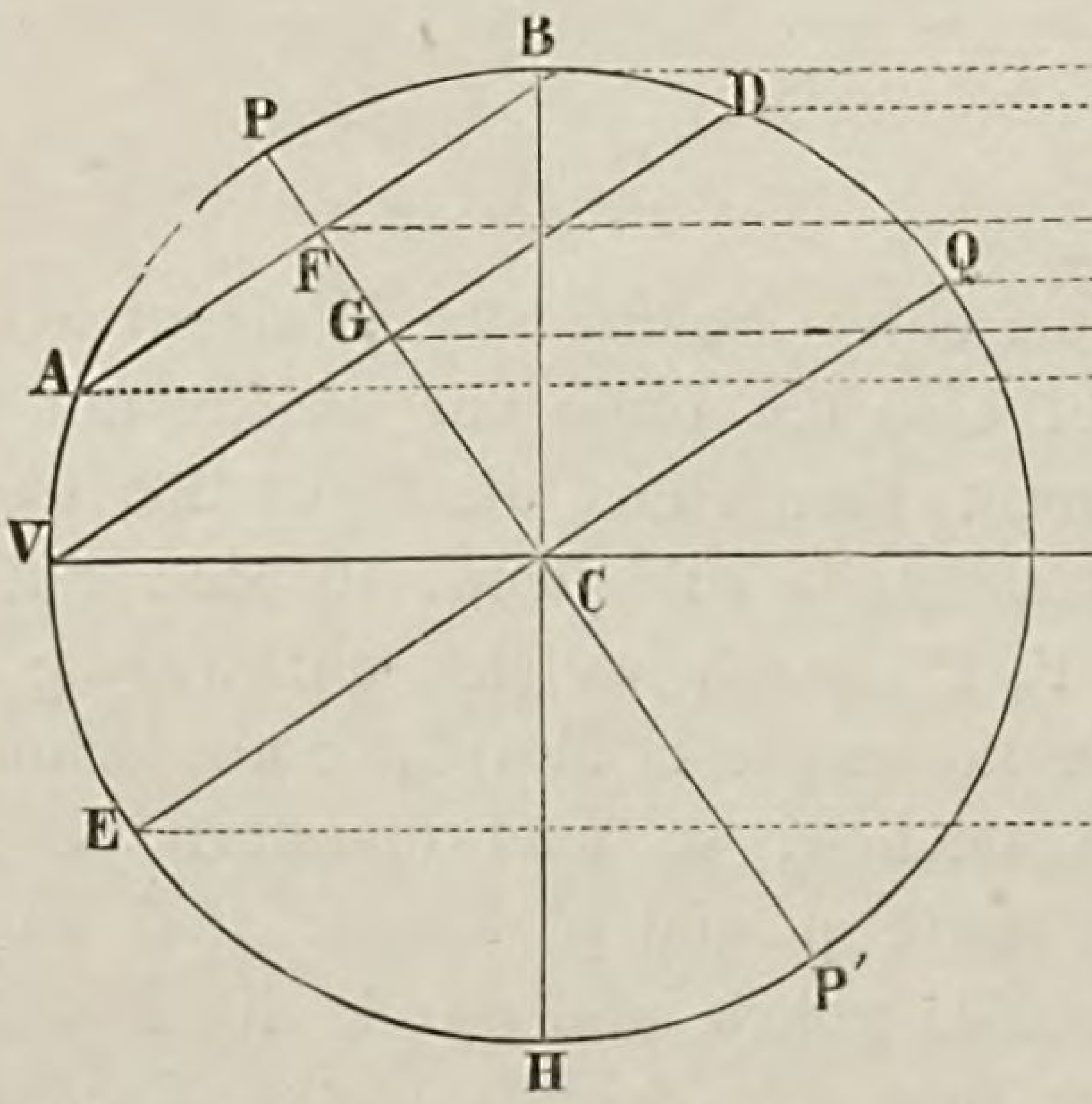
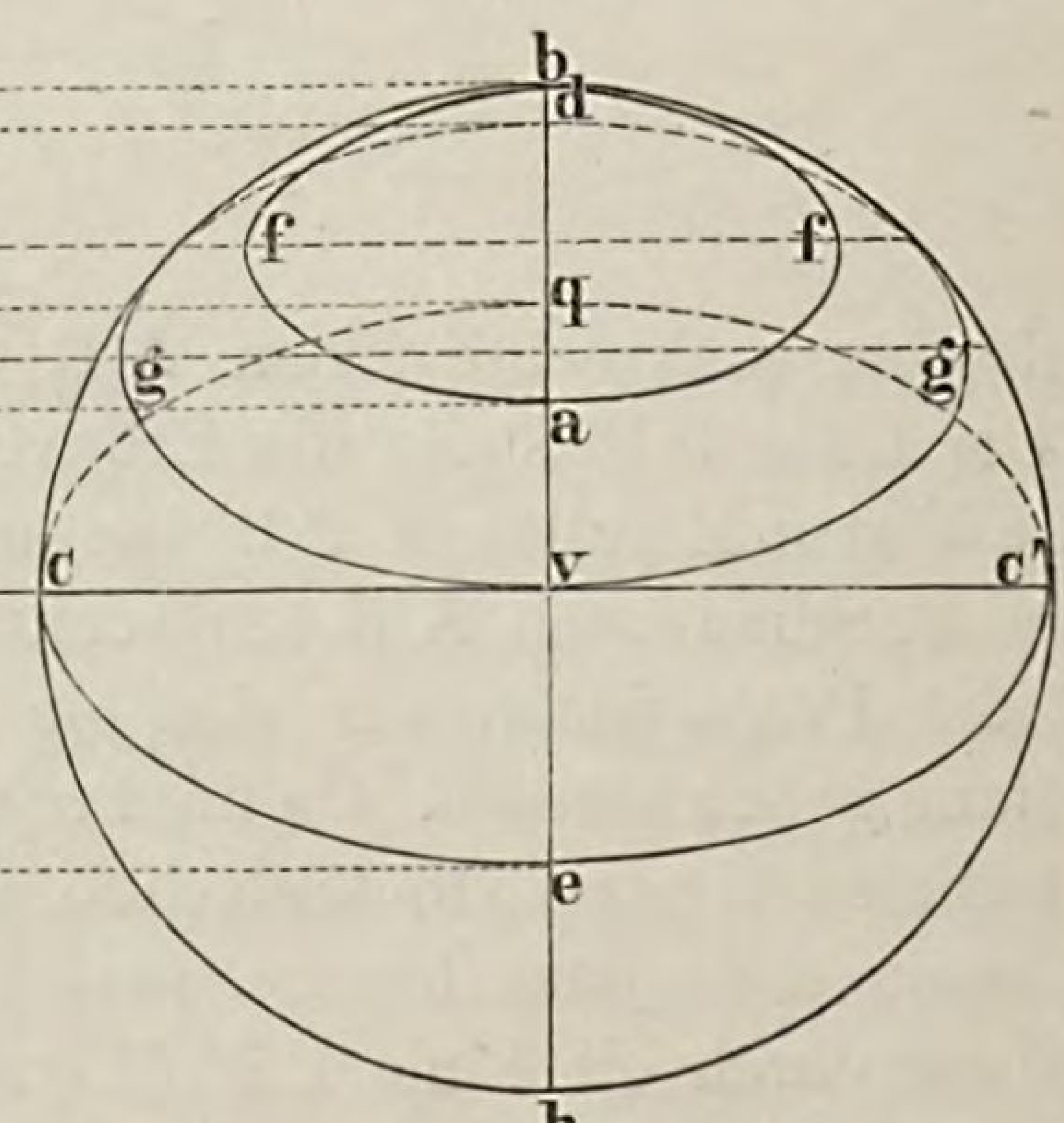


Fig. 268.



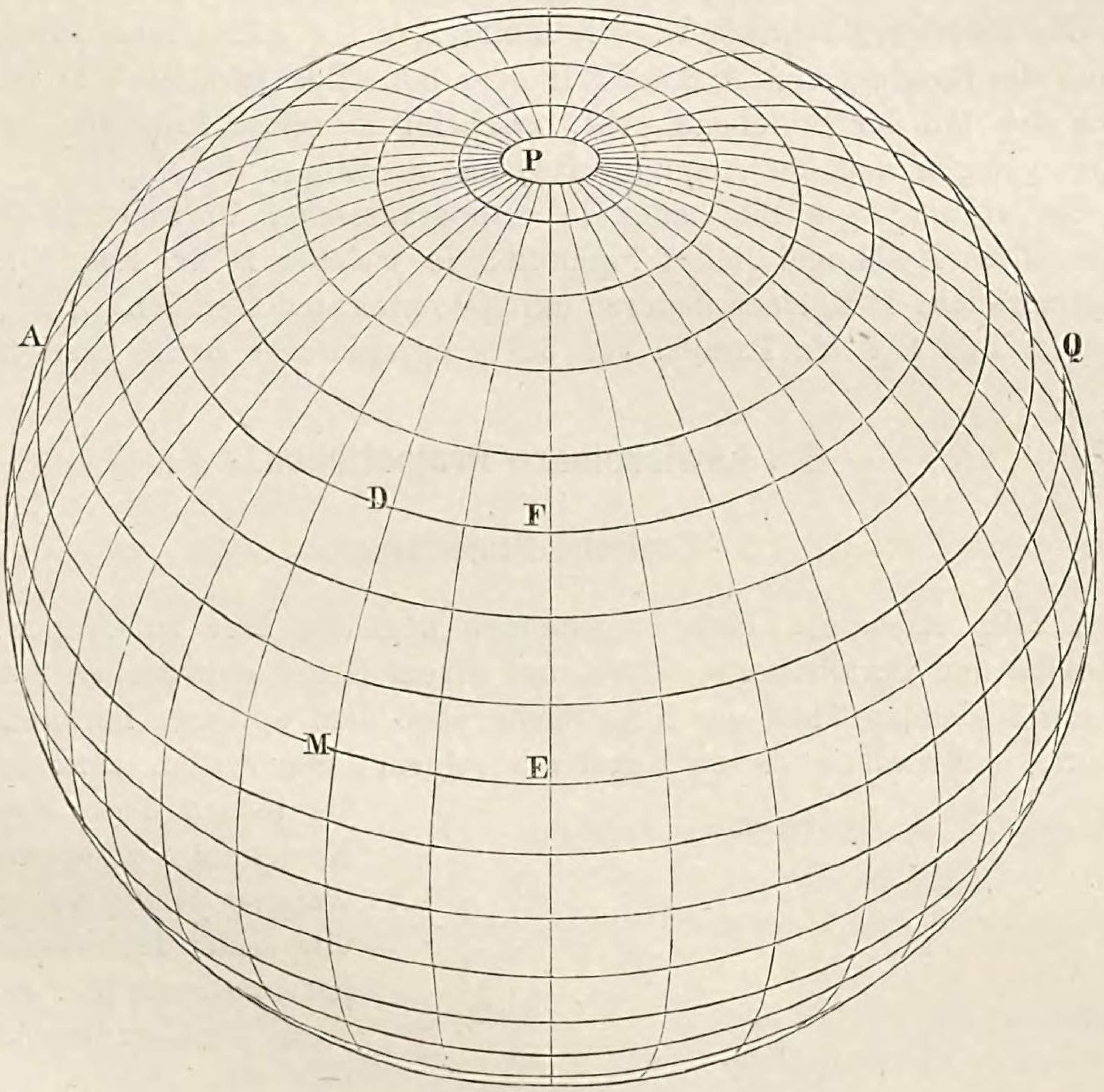
gesuchte grosse Axe und die Senkrechte C M die Richtung der kleinen Axe. Die Länge C M derselben ergibt sich, wenn man auf die in der Figur durch punktirte Linien angedeutete Weise p K N $= \lambda$ macht, C L parallel zu K N zieht und den Schnittpunkt L nach M projicirt.

Will man, nachdem die Richtung der grossen Axe (G H) der Projection eines Meridians mit Hilfe des aus der Gleichung (431) gesuchten Winkels λ^0 bestimmt ist, die Gleichung jener Projection (G M p H p′) in Bezug auf ihre Axen (C H = r und C M = r cos β sin λ) aufstellen, so hat man ganz einfach:

$$y = \cos \beta \sin \lambda \sqrt{r^2 - x^2} \qquad (432)$$

Werden hieraus für gegebene oder angenommene Werthe von x die zugehörigen y berechnet, so lassen sich alle beliebigen Punkte einer Meridianprojection genau auftragen.

Fig. 269.



Läge es in der Absicht des Verfertigers eines Netzes nach der orthographischen Horizontalprojection, alle Meridianpunkte nur auf ein Axensystem, nämlich auf die zu einander senkrechten Durchmesser A′ B′ und V′ C (wovon der erste den Hauptmeridian vorstellt) zu beziehen, so könnte dieses geschehen, indem man die neuen auf C V′ gezählten Abscissen mit x′ und die auf C B′ genommenen Ordinaten mit y′ bezeichnet und, da Winkel M C B′ = $90^0 - \lambda^0$, nach bekannten Formeln der analytischen Geometrie setzt:

$$x = x' \sin \lambda^0 - y' \cos \lambda^0$$
$$y = x' \cos \lambda^0 + y' \sin \lambda^0$$

Was schliesslich die Projectionen der Parallele betrifft, so werden diese aus demselben Grunde wie die der Meridiane auch Ellipsen; es kann sich also hier nur noch um die nähere Bestimmung derselben handeln. Stellt in Fig. 267 der Kreis V P P′ einen durch den Pol V der Bildebene B H gelegten und zu dieser Ebene senkrecht stehenden grössten Kreis, P P′ die Erdaxe und A B den Schnitt der Ebene eines Parallels mit der des Meridians V P P′ vor: so ist klar dass der mit der Bildebene B H parallele Durchmesser des Parallels dessen Projection in Fig. 267 der Punkt F ist, in der Projection auf die Bildebene (Fig. 268) in wahrer Grösse erscheint, und dass also, wenn man f f = A B macht, f f die grosse Axe der Ellipse ist nach welcher sich das Parallel A B projicirt. Die kleine Axe a d erhält man durch Projection des Durchmessers A B auf B H oder b h. Das Parallel V D welches durch den Pol der Bildebene geht, erscheint in seiner Projection als die Ellipse g v g′ d und der Aequator E Q als die Ellipse c e c′ q.

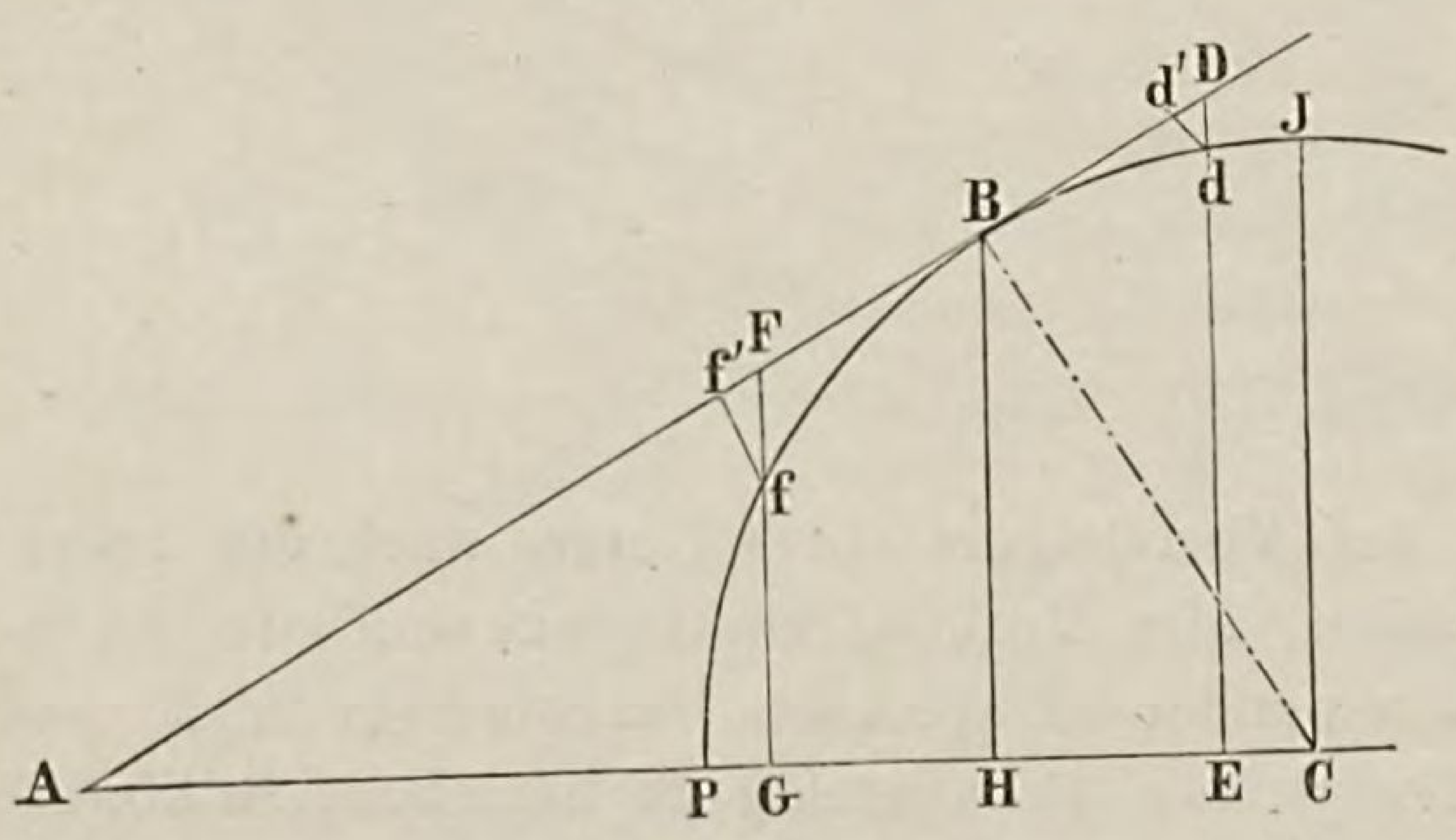
Ein vollständiges Bild einer in orthographischer Horizontalprojection dargestellten Halbkugel liefert Figur 269 in welcher P den Pol, P E den Hauptmeridian, P M einen anderen um 20° entfernten Meridian, A E Q den Aequator und D F ein Parallel von 30° geographischer Breite bezeichnet.

B. Abwickelbare Projectionen.

1. Conische Projectionen.

§. 249. Allen conischen Projectionen liegt die Idee zu Grunde, die Meridiane und Parallelkreise zuerst auf einem Kegel darzustellen welcher den abzubildenden Theil der Kugelfläche nach dem mittleren Parallelkreise berührt, und alsdann diesen Kegel mit seinem Liniensystem abzuwickeln. Da jedoch diese Methode Kartennetze zu entwerfen, eben so wenig als irgend eine andere fehlerfrei ist, so hat man, wie hier gezeigt wird, sie nach Beschaffenheit der Fehler welche vermieden oder geduldet werden sollten, verschieden abgeändert.

Fig. 270.

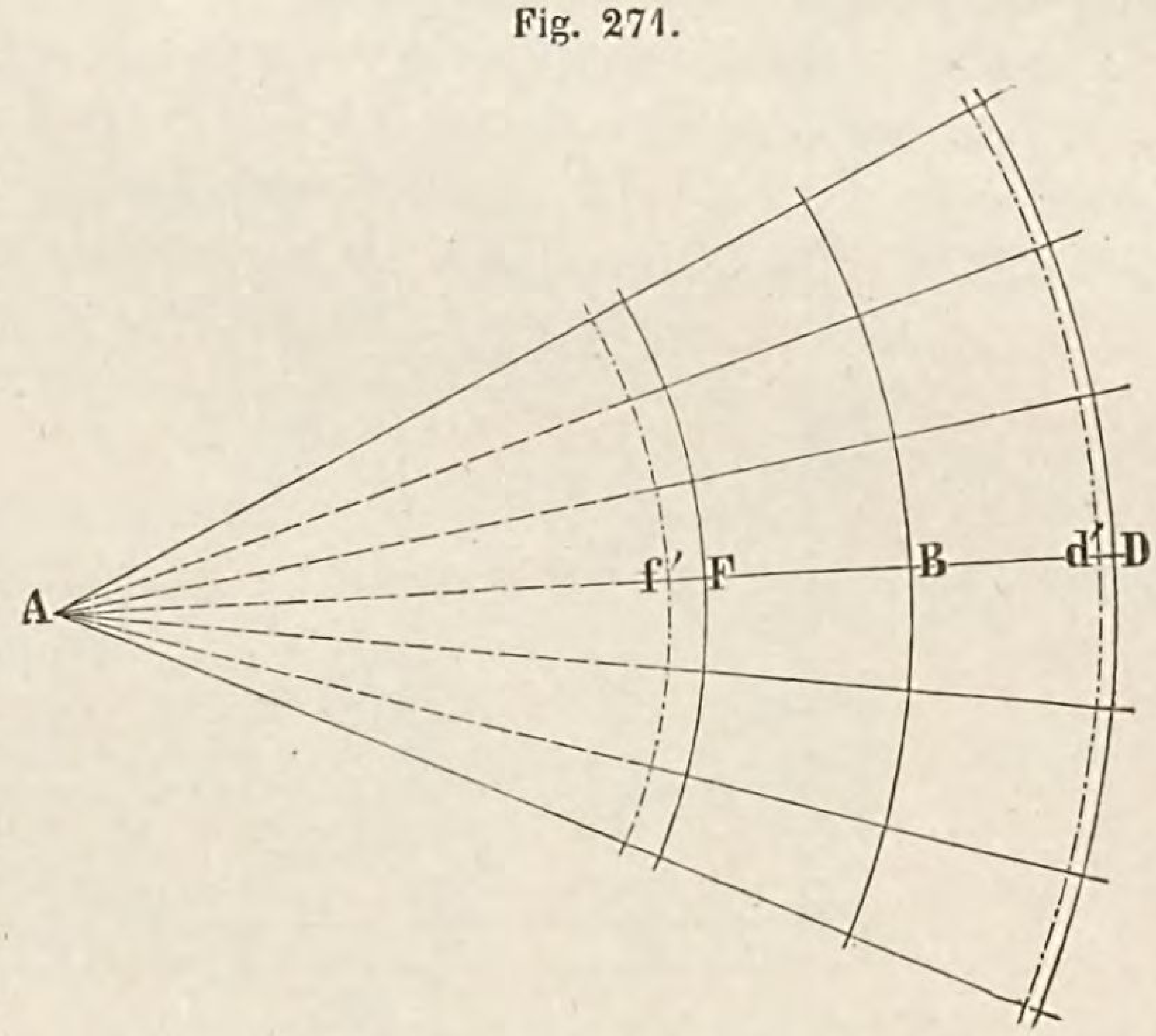


Um die Grundidee näher zu erläutern, sei P B J in Fig. 270 ein Viertel eines Meridians und B H der Schnitt des mittleren Parallels mit der Meridianebene; D E und F G seien die äussersten, von B H gleich weit entfernten Parallele des darzustellenden Stücks der Erdoberfläche. Zieht man an den Punkt B eine Tangente welche der Erdaxe in dem Punkte A begegnet, so ist A D die Erzeugende des Kegels

auf dessen Mantelfläche (und zwar zwischen den Ebenen D E und F G) das Kartennetz gezeichnet werden soll. Auf diesem Kegel werden die Meridiane als Erzeugende, die Parallelkreise aber als senkrechte Querschnitte erscheinen und die Abwickelung wird sich auf die in Fig. 271 angedeutete und leicht zu erklärende Weise darstellen.

Aus der Vergleichung dieser beiden Figuren entnimmt man sofort dass zwar die Netzvierecke wie auf der Kugel rechtwinklig sind und die Punkte von einerlei geographischer Breite auf dem Bilde dieselben relativen Entfernungen wie auf der Erdoberfläche haben; dass aber die Längen (B D, B F....) dieser Vierecke für gleiche Breitendifferenzen verschieden und um so kleiner sind, je näher sie am Pole liegen, während sie gegen den Aequator hin immer länger werden. Auch findet man leicht dass — mit Ausnahme des mittleren Parallels — auf allen Parallelen des Netzes die Längendifferenzen grösser sind als auf den gleichnamigen Parallelen der Erdkugel.

Fig. 271.

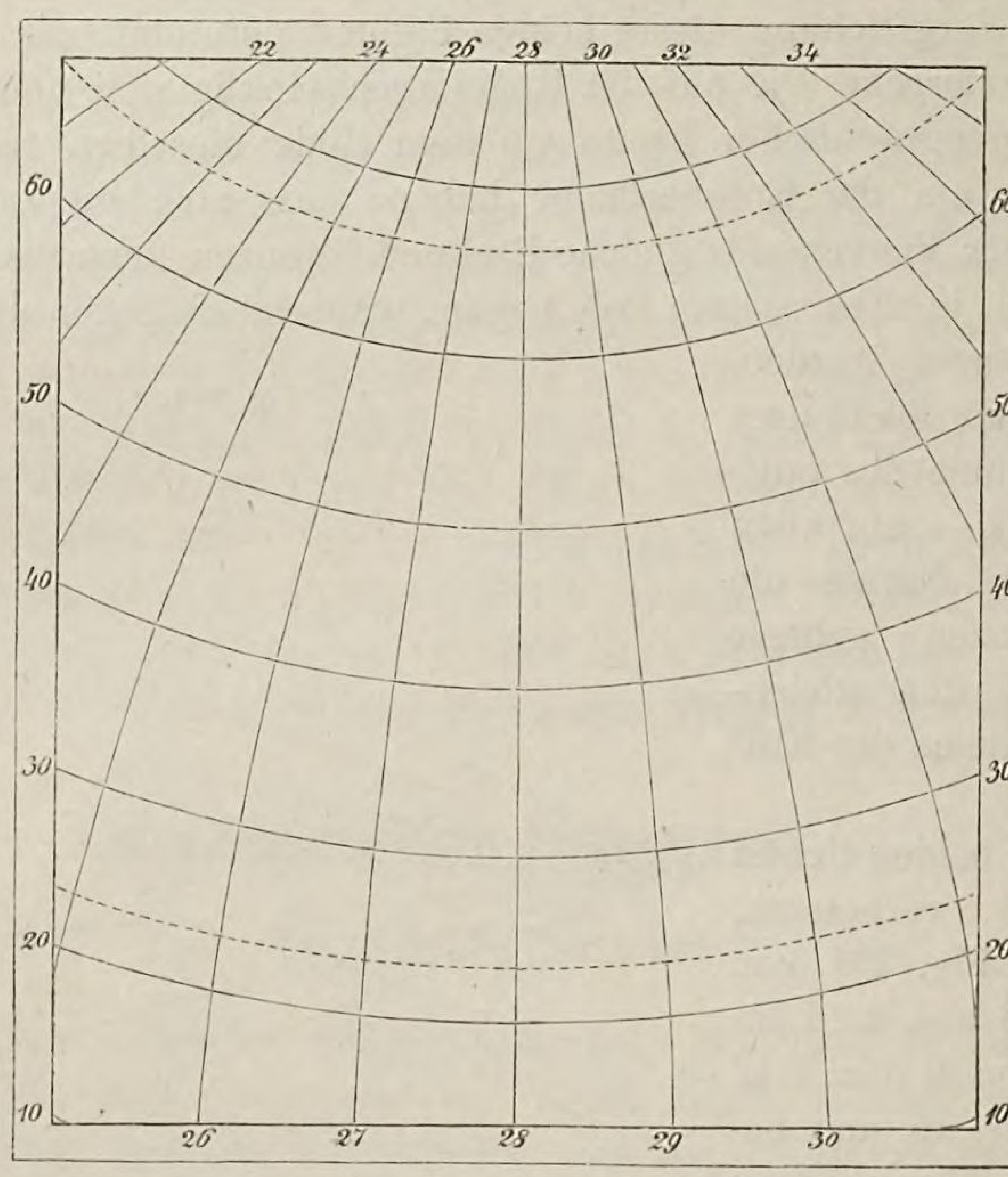


Um diese beiden Fehler theilweise zu verbessern, trägt man in Fig. 271 von dem Punkte B aus die Längen der Bögen B d = B d' und B f = B f' ab und beschreibt in der Abwickelung die punktirten Bögen d' und f' mit den Halbmessern A d' und A f'. Dadurch erreicht man den Vortheil dass die Längen B d', B f'.... der Netzvierecke denen auf der Kugel gleich und die Abweichungen in den geographischen Längen kleiner werden als vorhin.

§. 250. Projection von Bonne. Wenn man die geographischen Längenunterschiede des Netzes mit den wirklich stattfindenden übereinstimmen lassen will so muss man (Fig. 272) auf jedem der construirten Parallelkreise (20, 30, 40....) von dem mittleren Meridian (28) aus die wahren Grössen der geographischen Längengrade (28—27, 28—29....) abtragen und die einem Meridian (27, 29....) angehörigen Punkte durch eine stetige Curve verbinden welche dann dessen Projection darstellt. Zwar sind diese Meridiane keine Kegelelemente mehr, aber sie gewähren ausser dem eben bezeichneten Vortheile auch noch den dass die Flächeninhalte der Netzvierecke auf der Karte den gleichnamigen auf der Kugel genau proportional sind. Von kleinen Fehlern ist selbstverständlich auch dieses Netz nicht frei, und es sind hier vor allen die Abweichungen der Winkel

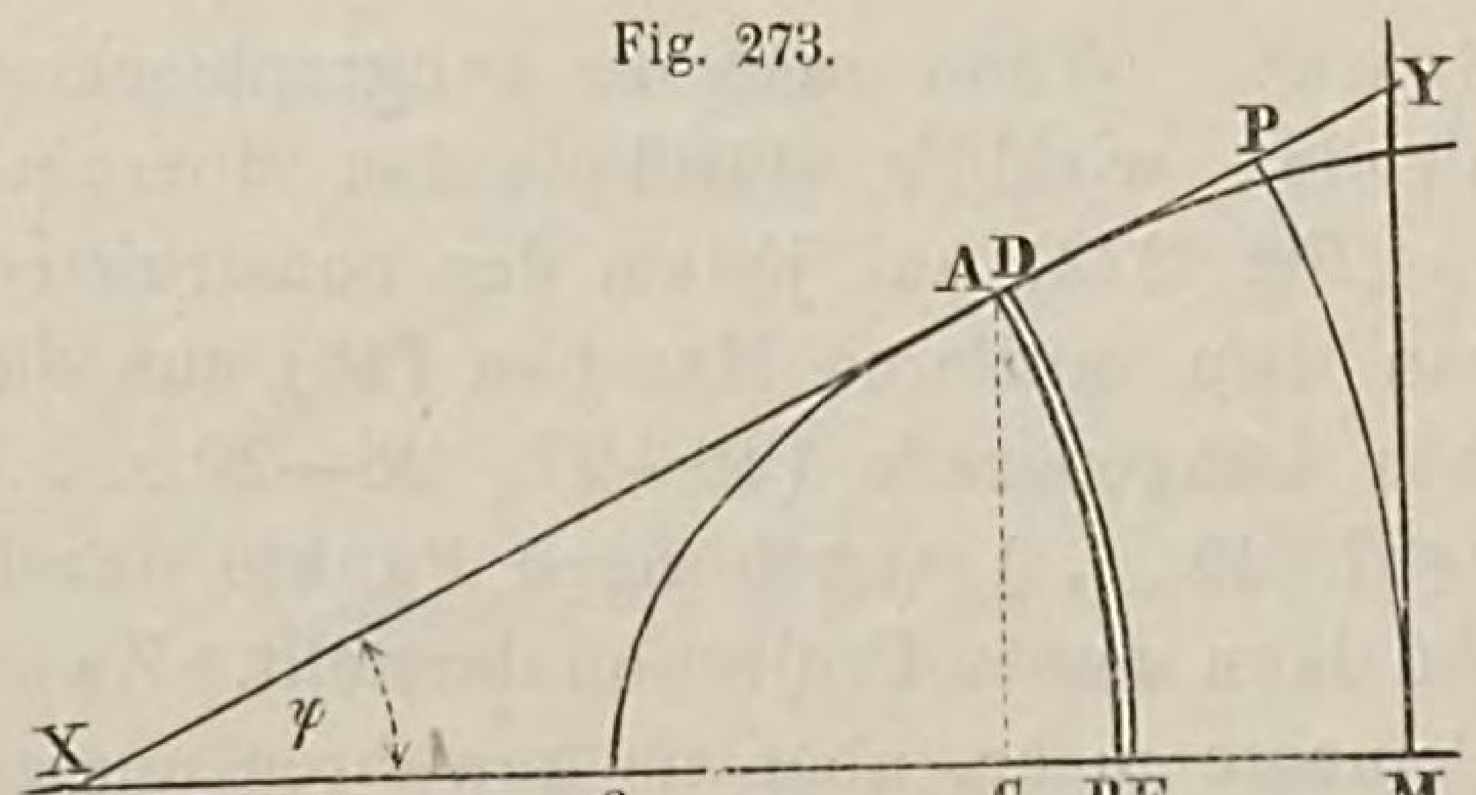
der Vierecke von 90⁰ zu erwähnen; diese Abweichungen betragen jedoch so wenig dass man sie bei nicht übermässiger Ausdehnung der Karte übersehen und die Entfernung zweier Punkte ohne erhebliche Differenz nach

Fig. 272.



einem gemeinschaftlichen Meilenmassstabe bestimmen kann. Dieser Umstand ist der in Rede stehenden Projection sehr günstig, und man kann wohl behaupten dass keine andere so häufig gebraucht wird als diese welche man die Bonne'sche oder modificirte Flamsteed'sche Projection nennt. In §. 141 ist auch bereits eine Anwendung von ihr gemacht, da sie der dortselbst besprochenen topographischen Karte von Thüringen und ebenso der von Bayern, Preussen, Frankreich und anderen Ländern zu Grunde liegt. Wegen ihrer Wichtigkeit soll sie etwas ausführlicher als die übrigen conischen Projectionen behandelt und dabei auch die sphäroidische Gestalt der Erde berücksichtigt werden.

Fig. 273.



Bestimmen wir zunächst die Coordinaten eines seiner geographischen

Lage nach gegebenen Punkts in Bezug auf zwei rechtwinklige Axen. Diese Axen seien nach Fig. 273 der mittlere Meridian M X für die Abscissen und der mittlere Parallelkreis M P für die Ordinaten; der Ursprung der Coordinaten liegt somit im Mittelpunkte der Karte, und es sei

β die geographische Breite dieses Punkts M,

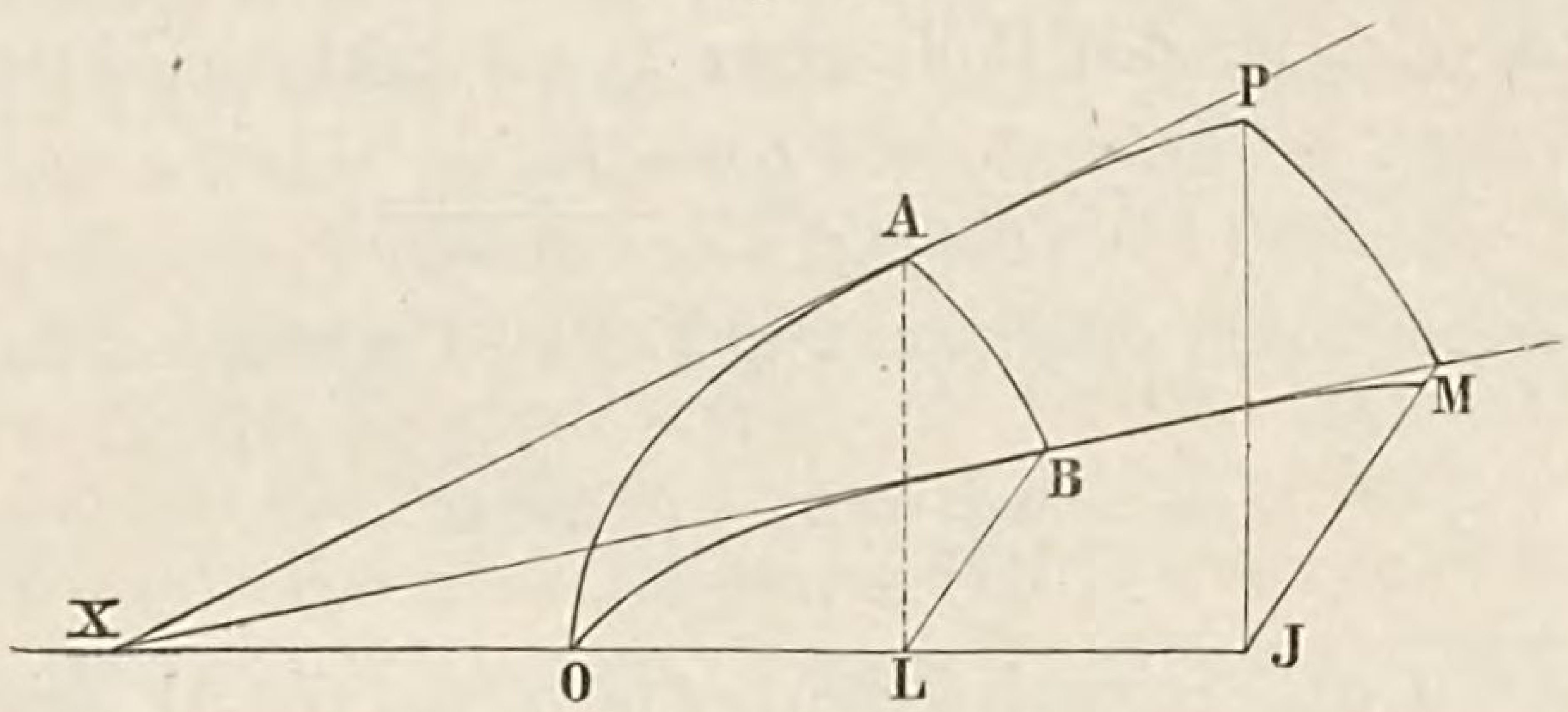
φ die geographische Breite irgend eines anderen Punkts A und

λ der geographische Längenunterschied zwischen den Punkten A und M im Bogenmass.

Unsere Aufgabe ist, aus diesen Stücken und den bekannten Erddimensionen die Coordinaten des Punkts A (M C = x und A C = y) zu finden.

In Fig. 274 sei O der Pol der Erde, M B O der mittlere Meridian, P A O der Meridian des Orts A, so dass also die elliptischen Bögen M O und A O zu den Complementen der Breiten β und φ gehören und A L B = λ ist, ferner sei M X Tangente des mittleren Meridians in dem Punkte M und folglich zugleich der Halbmesser des mittleren Parallels M P auf der Karte (Fig. 273). Bezeichnet nun weiter

Fig. 274.



a die halbe grosse Axe der die Erdoberfläche erzeugenden Ellipse, also den Halbmesser des Aequators,

e die Excentricität dieser Ellipse,

ϱ den Halbmesser M X des Kartenparallels M P von der Breite β,

ϱ' den Halbmesser des Kartenparallels A B von der Breite φ,

δ die Differenz $\varphi - \beta$ der geographischen Breiten von A und M,

α die Länge des Meridianbogens M B, und endlich

ψ den Winkel A X B welcher durch den Bogen A B = ε gemessen wird: so ist als bekannt anzunehmen dass die Länge der Tangente M X = ϱ an die bezeichnete Ellipse ausgedrückt wird durch

$$\varrho = \frac{a \cot \beta}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \beta)}} \tag{433}$$

und dass die Länge des Meridianbogens M B zwischen den geographischen Breiten φ und β gleich ist

$$\alpha = a\,(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{16} A^2)\,\delta - \tfrac{3}{2}\,a\,A \cos\gamma \sin\delta + \tfrac{15}{32}\,a\,A^2 \cos 2\gamma \sin 2\delta$$

wobei A die Abplattung und γ die Winkelsumme $\varphi + \beta$ oder $2\beta + \delta$ bedeutet. Den Bogen α braucht man übrigens nicht erst zu berechnen,

da es Tafeln gibt welche die Länge des Meridianbogens vom Aequator bis zu einem beliebigen Parallel darstellen, aus denen also durch Subtraction der Bogenlängen der Werth von α gefunden werden kann. Die Tafel Nr I des Anhangs enthält diese Längen von 30 zu 30 Minuten; in dem Berliner astronomischen Jahrbuche für 1852 sind sie aber von 10 zu 10 Minuten aufgeführt, und für zwischenliegende Breiten können die zugehörigen Werthe leicht eingeschaltet werden. Wir sehen daher α als eine gegebene Grösse an und erhalten somit den Halbmesser ϱ' des Kartenparallels A B welcher um die Länge α kleiner ist als ϱ, aus der Gleichung:

$$\varrho' = \varrho - \alpha \tag{434}$$

Nach der Bonne'schen Projection ist der Kartenparallelbogen A B dem wirklichen Bogen A B auf dem Sphäroide (Fig. 274) gleich; demnach auch arc A B = arc ε = B L . λ oder, wenn man den aus der höheren Geometrie ebenfalls bekannten Werth des Halbmessers B L einsetzt:

$$\varepsilon = \frac{a \lambda \cos \beta}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \beta)}} \tag{435}$$

Mit Hilfe dieses Werths erhält man die Grösse des Winkels A X B = ψ im Bogenmass (d. i. für den Halbmesser 1) auf bekannte Weise gleich

$$\psi = \frac{a \lambda \cos \beta}{\varrho' \sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \beta)}} \tag{436}$$

Damit aber ergeben sich sofort aus Fig. 273 die Coordinaten des Punkts A, nämlich

$$x = M C = \varrho - \varrho' \cos \psi \tag{437}$$

$$y = A C = \varrho' \sin \psi \tag{438}$$

Hat der Punkt M eine geographische Breite β von $50^0\,36'$ und der Punkt A eine Breite $\varphi = 51^0$; ist ferner der geographische Längenunterschied zwischen M und A = $1^0\,20'$, log a = 6,5148235 und log e = 8,9122052; und bedenkt man dass die Gleichung (436) den Winkel ψ auch im Gradmass liefert, sobald statt des Bogens λ der ihm entsprechende Winkel von $1^0\,20'$ gesetzt wird, so erhält man nach den vorstehenden Formeln und der Tafel Nr I:

$$\begin{aligned} \varrho &= 2\,693\,095{,}19 \text{ Toisen} \\ \alpha &= 22\,828{,}02 \quad " \\ \varrho' &= 2\,670\,267{,}17 \quad " \\ \psi &= 1^0\,2'\,20'' \\ x &= 23\,231{,}79 \text{ Toisen} \\ y &= 48\,427{,}67 \quad " \end{aligned}$$

Hätte man die Erde als Kugel vom Halbmesser $r = 3\,266\,608^t$ (log r = 6,514 0964) angenommen so würde man nahezu dieselben Werthe gefunden haben: die Unterschiede sind also unbedeutend, und man kann desshalb, so lange es sich nicht um Karten in grossen Massstäben handelt, recht wohl bei der Annahme dass die Erde eine Kugel sei verharren.

Die oben aufgestellte Behauptung dass die Flächen der Netzvierecke den gleichnamigen auf der Kugel proportional seien, lässt sich wie folgt beweisen. Denkt man sich auf der im natürlichen Massstabe gezeichneten Karte (Fig. 273) einen Bogen D E unendlich nahe an A B gezogen, so kann man, mit Vernachlässigung einer unendlich kleinen Grösse zweiter Ordnung, das Flächenelement A B D E eines Netzvierecks gleich

$$d F = A B . B E = \varepsilon . d \alpha$$

setzen. Auf dem Erdellipsoid (Fig. 274) ist (wenn man sich wie vorhin den Bogen D E unendlich nahe an A B gezogen denkt) das Flächenelement des Netzvierecks ebenfalls durch A B D E vorgestellt, und es ist nach bekannten Annahmen der Differentialrechnung, wenn dieses Element mit d F' und der Halbmesser des Parallels A B mit ϱ'' bezeichnet wird:

$$d F' = A B . B E = \lambda \varrho'' . d \alpha = \varepsilon d \alpha$$

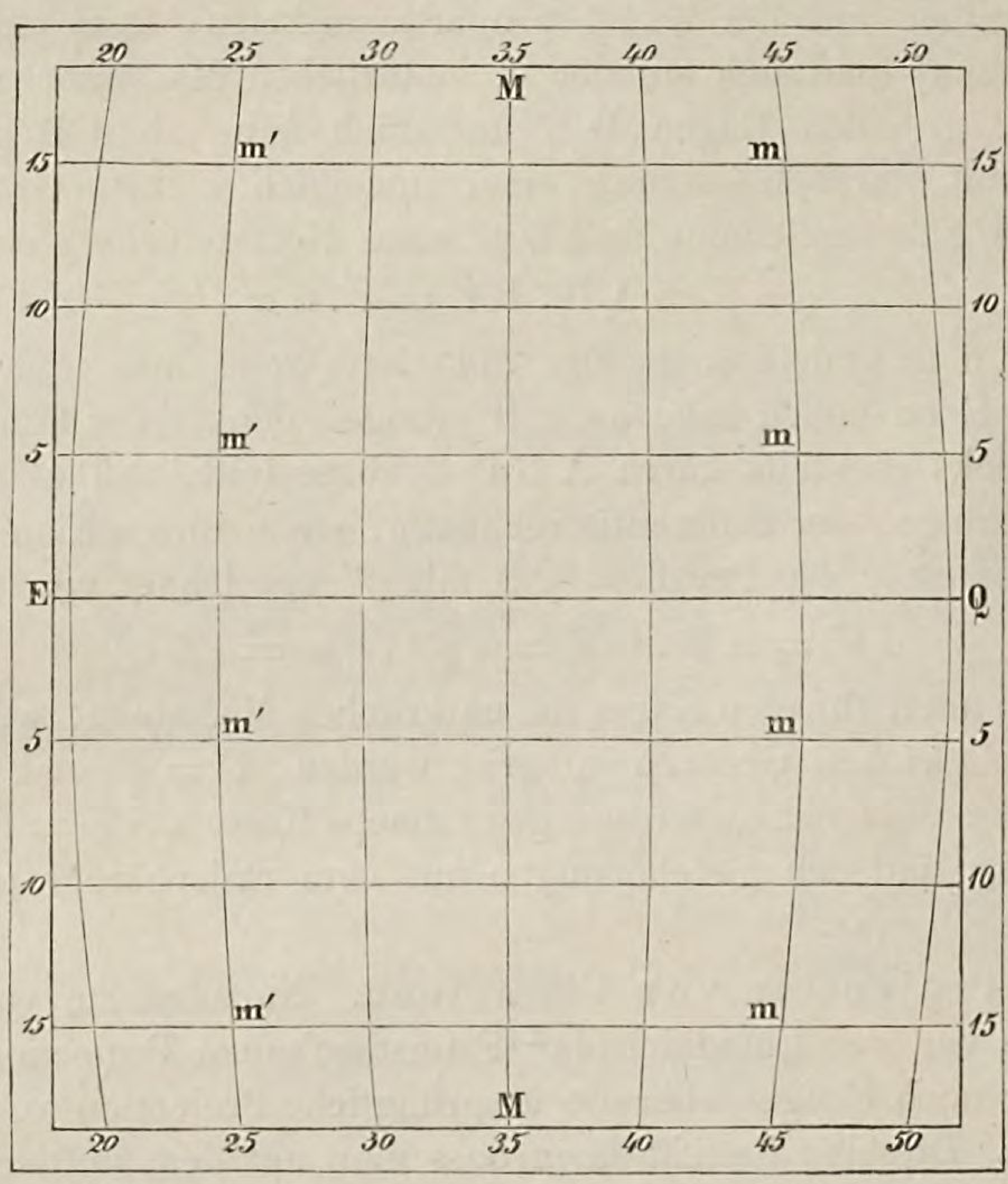
es ist folglich auch für eine Karte im natürlichen Massstabe, wenn d F und d F' zwischen gleichen Grenzen integrirt werden, $F = F'$ und für eine im m^{ten} Theile der natürlichen Grösse gezeichnete Karte $m^2 F = F'$, d. h. die Kartenvierecke sind den gleichnamigen auf dem Erdsphäroid proportional, was zu beweisen war.

§. 251. Projection von Flamsteed. Nachdem im vorigen Paragraph bereits von der „modificirten" Flamsteed'schen Projection die Rede war, ist hier noch Einiges über die ursprüngliche Projection von Flamsteed zu bemerken. Dieselbe besteht darin dass man auf dem mittleren Meridian die Längen der Meridiangrade abträgt; in den Theilungspunkten Senkrechte errichtet welche die Parallele vorstellen; auf diesen die entsprechenden Längen der Parallelgrade vom mittleren Meridian aus abmisst und durch die zusammengehörigen Theilpunkte krumme Linien zieht welche die Meridiane bezeichnen.

Dieses Kartennetz weicht für Länder die in der Nähe des Aequators liegen, nur wenig von der Wirklichkeit ab; die Abweichungen wachsen aber rasch mit dem Vorrücken des Landes gegen den Pol; darum wendet man es auch nur für Tropengegenden (z. B. für Karten von Afrika) an, wie auch Fig. 275 zeigt, in welcher M M der mittlere Meridian, E Q der Aequator, m m' ein Parallel und m m, m' m' je ein Meridian ist.

Dass für diese Zonen die Abweichungen nicht bedeutend sein können, geht aus Gl (433) hervor welche für $\beta = 0$ den Halbmesser des Aequators auf der Karte $\varrho = \infty$ liefert; also wird der Aequator auch bei der vorigen Projection eine Gerade; für $\beta = 10^0$ erhält man $\varrho = 18\,525\,826{,}00$ und für $\beta = 20^0$ den Halbmesser $\varrho = 8974\,918{,}20$ Toisen; die Krümmungen der zu diesen Breiten gehörigen Parallele sind also auch nach der verbesserten Flamsteed'schen Projection nur schwach, folglich können auch bei geraden Parallelen die Fehler nicht gross sein. Genauere Bestimmungen dieser Fehler übergehen wir wegen der seltenen Anwendung der Flamsteed'schen Projection.

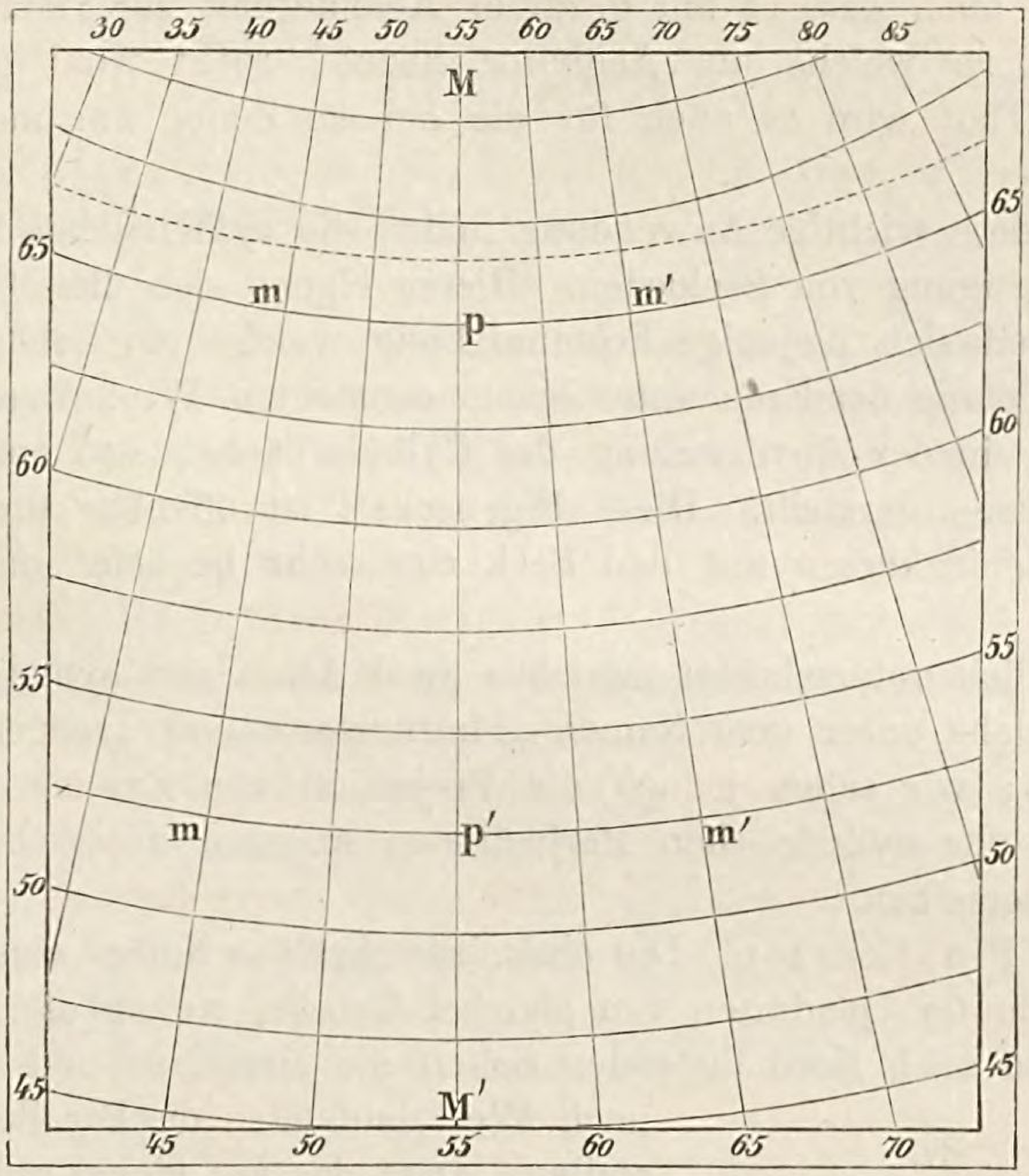
Fig. 275.



§. 252. Projection von De l'Isle. Die hier dargestellte conische Projection wurde nicht von De l'Isle, sondern von Mercator (Gerhard Krämer) erfunden, und zwar schon in der Mitte des sechzehnten Jahrhunderts. D'Avezac in seinem „Coup d'oeil historique sur la projection des Cartes“ (Bulletin de la Soc. de Géogr. Avril et Mai, 1863, p. 318) setzt die erste Anwendung dieser conischen Projection in das Jahr 1584. Die ausschliesslich nach Mercator benannte Projection ist eine cylindrische und in §. 255 beschrieben. Das Verfahren von De l'Isle, ein conisches Kartennetz anzufertigen (welches allein die vorstehende Bezeichnung rechtfertigt) besteht darin dass man von dem mittleren Meridian aus die Parallelkreise in derselben Weise wie nach Bonne (§. 250) beschreibt, dann aber auf den zwei Paralleikreisen p, p′ (Fig. 276) welche die äusseren Viertel M p, M′ p′ der Karte von der mittleren Hälfte abtrennen, die wahren Längen der Parallelgrade aufträgt und durch je zwei zusammengehörige Theilpunkte (m m, m′ m′ . . .) gerade Linien zieht welche die Meridiane vorstellen.

Diese Projection unterscheidet sich von der in Fig. 272 angedeuteten Kegelprojection namentlich darin dass die Meridiane nicht in dem Mittelpunkte A aller Parallele zusammenlaufen, sondern in verschiedenen Entfernungen sich schneiden, wenn man sie weit genug verlängert. Sie wurde

Fig. 276.



der Herstellung einer Generalkarte von Russland zu Grunde gelegt und bei dieser Gelegenheit von Euler theoretisch untersucht und namentlich desshalb empfohlen weil in Folge des Umstands dass die Meridiane gerade Linien sind, sich auch alle übrigen grössten Kreise nahezu als gerade Linien darstellen und folglich bei nicht zu grossen Ausdehnungen der Karte alle Entfernungen mit einem geradlinigen Meilenmassstabe annähernd richtig gemessen werden können.

2. Cylindrische Projectionen.

§. 253. Diese Projectionen bestehen darin dass man sich die Erdkugel von einem Cylinder umhüllt denkt welcher dieselbe nach dem Aequator berührt und dessen Erzeugende die Meridiane vorstellen, während seine Schnitte durch die Ebenen der Parallelkreise diese Kreise selbst bezeichnen. Wickelt man einen solchen Cylinder ab so ist klar dass sich die abgewickelten Meridiane und Parallele rechtwinklig schneiden und dass die letzteren um so näher an einander liegen, je weiter sie vom Aequator abstehen.

Man sieht sofort ein dass, wenn man dieses Princip für beliebig grosse und beliebig gelegene Theile der Erdoberfläche streng durchführen wollte,

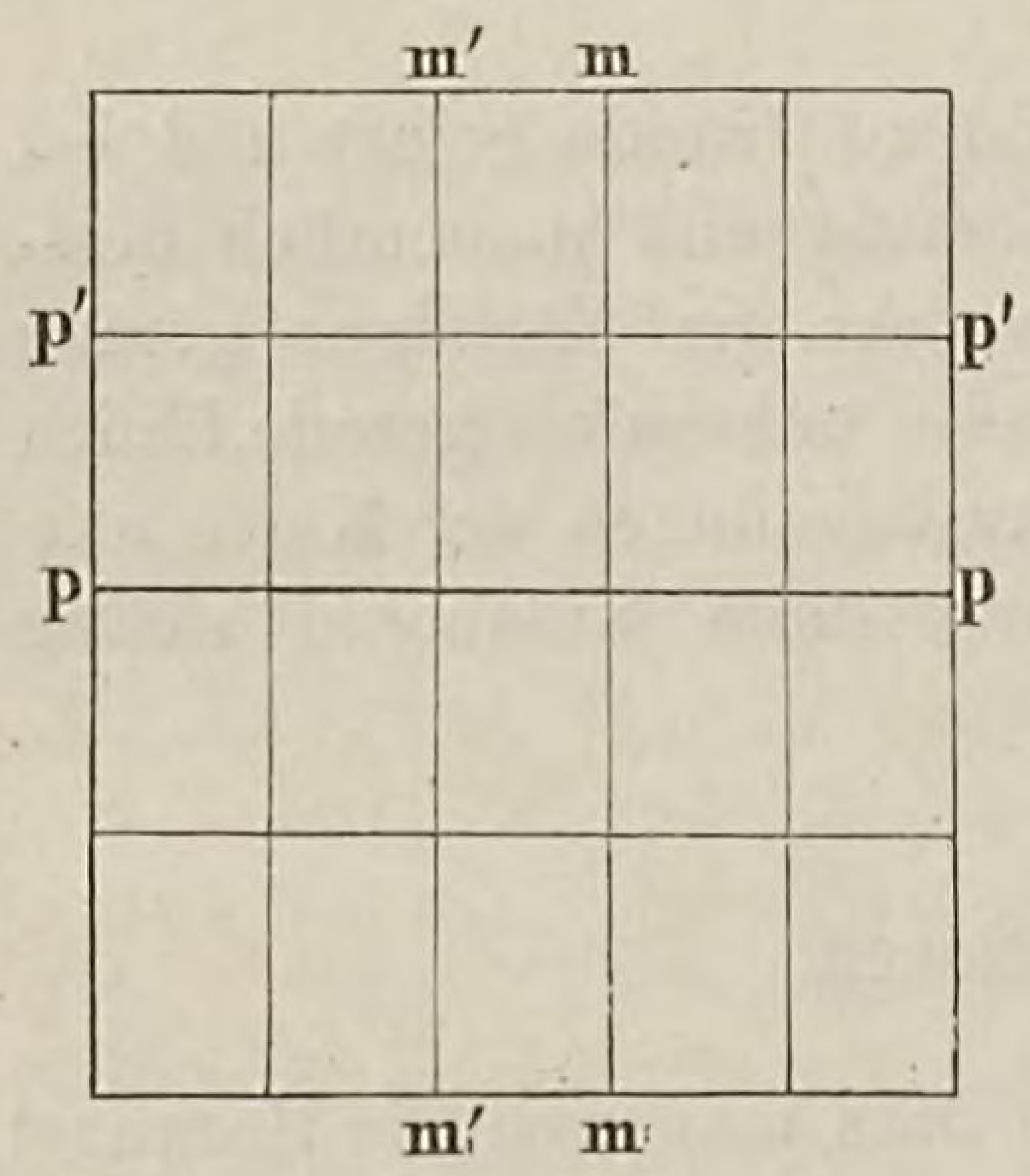
Karten entstünden welche zu den unrichtigsten von allen gehörten; man begreift aber auch dass es mit geringer Abänderung zur Darstellung von solchen Ländern welche am Aequator liegen, recht wohl geeignet ist. Und in der That wird es auch für die heissen Zonen am meisten angewendet.

Eine andere wichtige Anwendung finden die cylindrischen Projectionen bei der Anfertigung von Seekarten. Hierzu eignen sich dieselben desshalb besonders weil sich diejenige krumme Linie welche ein Schiff beschreibt, das alle Meridiane der Erde unter einem constanten Winkel schneidet (die Loxodrome), in der Abwickelung der Cylinderfläche, also auf der Karte, als eine Gerade darstellt. Diese Eigenschaft ist offenbar für die Zeichnung von Schiffskursen auf den Seekarten sehr bequem und daher zu benützen.

Gewöhnlich unterscheidet man nur zwei Arten von cylindrischen Projectionen welche unter dem Namen „Plattkarten“ und „reducirte Karten“ bekannt sind; wir sehen jedoch die Projection von Cassini als eine besondere Art der cylindrischen Projectionen an und unterscheiden daher drei Arten derselben.

§. 254. Plattkarten. Die einfachste Art des Netzes einer Plattkarte besteht aus lauter Quadraten von gleicher Grösse, wovon die in der Richtung von Süd nach Nord liegenden Seiten die Meridiane und die von Ost nach West laufenden die Parallelkreise vorstellen. Dass das auf einem solchen Netze dargestellte Bild eines Theils der Erdoberfläche sehr verzerrt ist, bedarf keines Beweises; sein einziger Vorzug ist dass man die geographische Länge und Breite eines Punkts sehr leicht eintragen und umgekehrt aus der Karte abnehmen kann.

Fig. 277.



Ein weniger mangelhaftes Bild liefert dasjenige Netz (Fig. 277), bei welchem die Meridiane und Parallelkreise durch Rechtecke in der Art vorgestellt sind dass die Entfernungen der Meridiane (m m, m' m') nach der Grösse der Grade des mittleren Parallelkreises p p und die der Parallelen (p p, p' p') nach der Grösse eines Meridiangrads bestimmt werden. Will man demnach ein Land darstellen dessen mittlere geographische Breite $= \varphi$ ist, so ist der Halbmesser des zugehörigen Breitenkreises $= r \cos \varphi$, der Umfang dieses Kreises $2 r \pi \cos \varphi$ und die Länge eines Grads des Parallels:

$$\lambda = \frac{r \pi \cos \varphi}{180} = m\, m' \qquad (439)$$

Sollen nun die Meridiane von Grad zu Grad aufgetragen werden und ist 1 : m die Verjüngung der Karte, so beträgt der Abstand der Meridiane

auf dem Netze den m^{ten} Theil von λ. Da ferner die Länge eines Meridiangrads

$$\beta = \frac{r\,\pi}{180} = p\,p' \tag{440}$$

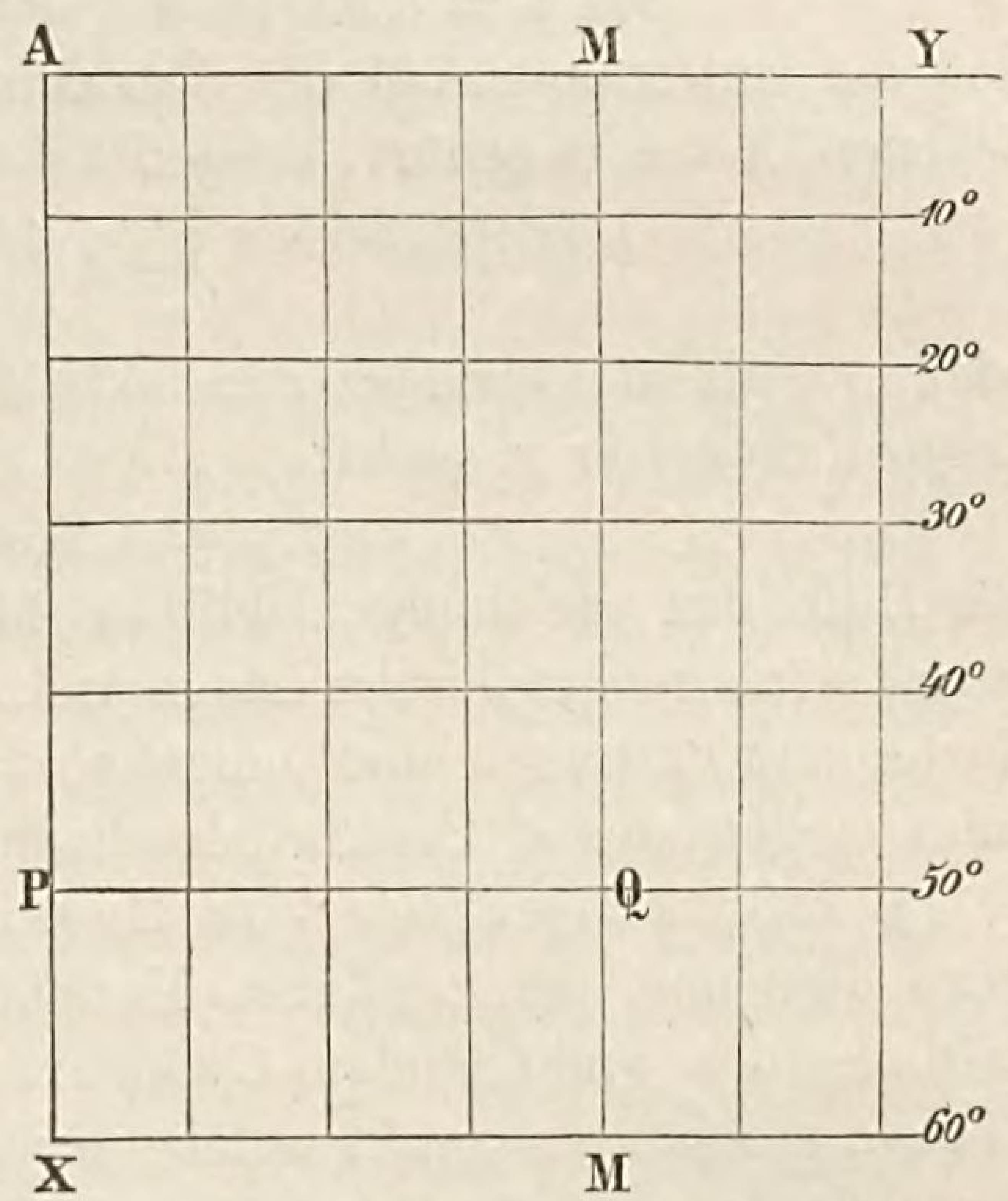
ist, so beträgt der Abstand der Parallelen von Grad zu Grad den m^{ten} Theil von β, und es verhält sich folglich

$$\beta : \lambda = 1 : \cos\varphi \tag{441}$$

Es versteht sich von selbst dass die Genauigkeit dieser Karten von der Mitte gegen die südlichen und nördlichen Grenzen sehr abnimmt und dass man, um die geographische Länge und Breite eines Orts in Gradmass auszudrücken, zwei Massstäbe anwenden muss welche sich beziehlich wie $\lambda : \beta$ oder wie $\cos\varphi : 1$ verhalten.

§. 255. Reducirte Karten: Projection von Mercator. Will man das cylindrische Kartennetz so einrichten dass durch dasselbe überall das richtige Verhältniss der Längen der Meridiangrade und der Grade der Parallelkreise dargestellt wird, so kann dieses nach einem Kartennetze geschehen das die Projection von Mercator genannt wird. (Dieser ausgezeichnete Geograph, geb. 1512, gest. 1594, der nach damaliger Sitte seinen deutschen Namen Krämer latinisirte, ist nicht bloss der Erfinder dieser Projectionsart sondern auch der nach De l'Isle (S. 518) benannten Projection, sowie überhaupt des Princips der conischen und cylindrischen Kartennetze.) Das Kartennetz von Mercator besteht im Allgemeinen darin dass man die Meridiane gleichweit, die Parallelkreise aber um so weiter von einander abstehen lässt, je mehr sie sich den Polen nähern.

Fig. 278.



Die Zunahme des Abstands der Parallele ergibt sich durch Rechnung wie folgt. Bezeichnet nämlich β die Länge des Meridianbogens der zu einem sehr kleinen Winkel α gehört, so hat nach der Gleichung (441) der zu demselben Winkel α gehörige Bogen eines Parallelkreises von der Breite φ die Länge $\lambda = \beta \cos\varphi$; beide Bögen verhalten sich folglich wie $1 : \cos\varphi$ und beispielsweise für $\varphi = 60^0$ wie $2 : 1$. Es müsste also an dieser Stelle der dem Winkel α zukommende Meridianbogen doppelt so gross sein als der zu α gehörige Bogen des Parallelkreises. Nimmt man nun, um die Rechnung allgemeiner zu machen, den abgewickelten Aequator A Y (Fig. 278) als die Ordinaten- und den abgewickelten ersten Meridian A X als die Abscissenaxe an und bezeichnet die Entfernung A P eines Parallels von der

Breite φ mit x, so kann man nach den Principien der Differentialrechnung die der Breitenänderung d φ entsprechende Aenderung von x mit d x bezeichnen. Drückt man die Aenderung des Breitenwinkels durch den Bogen vom Halbmesser r aus, so ist dieser unendlich kleine Bogen $= r\, d\, \varphi$, und es verhält sich folglich jetzt $d\,x : r\,d\,\varphi$ wie vorhin $\beta : \lambda$, das ist wie $1 : \cos \varphi$. Es ist somit

$$d\,x = \frac{r\,d\varphi}{\cos \varphi}$$

und daher, wenn man integrirt und bei der Constantenbestimmung berücksichtigt dass für $\varphi = 0$ auch $x = 0$ ist,

$$x = r \operatorname{Log} \operatorname{tg} (45^0 + \tfrac{1}{2} \varphi) \qquad (442)$$

Führt man statt der natürlichen Logarithmen (Log) die gemeinen (log) ein und drückt zugleich die vorstehende Gleichung logarithmisch aus, so wird, wenn man den Erdhalbmesser r = 857,43 geographische Meilen setzt, die in solchen Meilen ausgedrückte Länge x aus der Gleichung gefunden:

$$\log x = 3.2954144 + \log [\log \operatorname{tg} (45^0 + \tfrac{1}{2} \varphi)] \qquad (443)$$

Soll die Entfernung A M des Meridians M M welche zu einer in Graden gegebenen Länge ψ gehört, ausgedrückt werden, so dient dazu die Gleichung:

$$y = A\,M = \frac{r\,\pi}{180}\,\psi \qquad (444)$$

oder, wenn man wieder r = 857,43 geographische Meilen setzt und den Logarithmus von y sucht:

$$\log y = 1{,}1750761 + \log \psi \qquad (445)$$

Mit Hilfe der Gleichungen 442 bis 445 kann man selbstverständlich jeden durch seine geographische Länge und Breite gegebenen Ort in das reducirte Kartennetz eintragen und umgekehrt die geographische Länge und Breite eines eingetragenen Punkts berechnen.

§. 256. Projection von Cassini. Diese Projectionsmethode besteht darin dass man den mittleren Meridian des darzustellenden Landes als die Leitlinie des umhüllenden Cylinders ansieht und diesen Cylinder durch Ebenen geschnitten denkt welche der des mittleren Meridians parallel laufen. Der Cylinder und die Schnittebenen haben folglich gegen die gleichnamigen Flächen welche den gewöhnlichen Cylinderprojectionen zu Grunde liegen, eine senkrechte Stellung. Wickelt man den hieher gehörigen Cylinder ab, so stellen dessen Elemente die grössten Kreise vor welche durch sie und den Erdmittelpunkt bestimmt sind; während die Schnitte der dem Hauptmeridian parallel laufenden kleineren Kreise die Meridiane des Netzes bezeichnen.

Theilt man die von Ost nach West laufenden grössten Kreise vom Hauptmeridian aus in gleiche Theile, so ist klar dass die diesem Meridian parallel laufenden Schnittebenen immer näher zusammenrücken und dass folglich die Vierecke des Netzes um so unrichtiger werden, je weiter sie vom mittleren Meridian abliegen. Diese Nachtheile treten jedoch nicht stark hervor, wenn man die Cassini'sche Cylinderprojection auf ein Land

anwendet das sich in der Richtung von Ost nach West nicht weit ausdehnt. Cassini legte seiner Karte von Frankreich die nach ihm benannte Projection wohl desshalb zu Grunde, weil dieses Land sich etwas mehr von Süden nach Norden, als von Westen nach Osten erstreckt. Ein Vortheil den die in Rede stehende Projection gewährt, besteht darin dass sich die nach §. 135 berechneten Coordinaten der Eckpunkte eines grossen Dreiecksnetzes sehr leicht eintragen lassen, sowie man umgekehrt mit Hilfe der dortselbst entwickelten Formeln die Coordinaten eingetragener Punkte leicht berechnen kann.

C. Geographische und topographische Karten.

§. 257. Man theilt die Landkarten gewöhnlich in geographische (erdbeschreibende) und in topographische (ortbeschreibende) ein, und versteht unter den ersteren Karten in sehr kleinem Massstabe (von 1:200000 bis 1:2000000 herab) welche ganze Länder, Welttheile und selbst Hälften der Erdoberfläche bildlich darstellen; unter den letzteren aber Karten in grösserem Massstabe (von 1 : 10000 bis 1 : 200000) welche die Einzelnheiten der dargestellten Orte und Gegenden mehr berücksichtigen, als dieses bei den Landkarten im gewöhnlichen Sinne gebräuchlich und möglich ist. Der Unterschied zwischen geographischen und topographischen Karten entspringt somit lediglich aus dem Massstabe derselben. Eben desshalb liegt auch der Unterschied zwischen geographischen und topographischen Schrift- und Kartenzeichen bloss in der Grösse und nicht in der Form dieser Zeichen. Es wird daher genügen, wenn wir hier vorzugsweise die Zeichen für grössere Karten berücksichtigen, da dieselben mannichfaltiger sind als die der kleinen welche nur wenig Detail enthalten, und da jene Zeichen leicht verkleinert werden können. Auf einer Karte sind, wie schon bemerkt, nicht bloss räumliche, sondern auch politische und historische Verhältnisse darzustellen. Zu jenen gehören: die Wohnorte der Menschen, stehendes und fliessendes Wasser, und der Boden mit seinen natürlichen und künstlichen Bildungen; zu diesen: die Grenzen der Länder und ihrer Bestandtheile, die Fundorte wichtiger Mineralien, die Stätten grosser geschichtlicher Ereignisse, die Grösse der Bevölkerung u. s. w. Für alle diese Gegenstände werden wir die üblichen Bezeichnungen angeben.

1. Kartenzeichen.

§. 258. Bezeichnung der Berge. Von der geometrischen Gestalt einer Gegend bekommt man dann erst einen richtigen Begriff, wenn man ausser ihrer horizontalen Projection auch die Erhöhungen und Vertiefungen oder die Unebenheiten derselben kennt. Zur graphischen Darstellung derselben auf Karten bedient man sich nach der Angabe des sächsischen Majors Lehmann der Schraffirung der geneigten Flächen mittels Strichen deren

Dicke zu der Grösse der Neigung in einem bestimmten Verhältniss steht. Die Lehre von der Bezeichnung geneigter Terrainflächen durch solche Striche (die Lehmann'sche Theorie der Bergzeichnung) ist namentlich für topographische Karten die zu militärischen Zwecken benützt werden, sehr wichtig, und wir beginnen desshalb dieses Capitel mit einer kurzen Darstellung derselben.

Die Lehmann'sche Bergzeichnungstheorie beruht zum Theil auf dem Satze dass die Helligkeit einer Fläche welche von verticalen Strahlen erleuchtet wird, unter übrigens gleichen Umständen dem Cosinus ihres Neigungswinkels gegen den Horizont proportional ist. Die horizontale Fläche erscheint hiernach am hellsten, die verticale am dunkelsten. Wollte man nun jene ganz weiss, diese ganz schwarz und die dazwischen liegenden Abstufungen durch schwarze Striche mit weissen Zwischenräumen bezeichnen, so liesse sich leicht für jeden Neigungswinkel φ der beleuchteten Fläche angeben, wie breit die weissen Zwischenräume im Verhältniss zur Breite der schwarzen Striche sein müssten. Für $\varphi = 60^0$ würden z. B. die Striche eben so breit sein als die Zwischenräume, da $\cos \varphi = \cos 60^0 = 0{,}5$ ist.

Die strenge Durchführung dieses Princips hat indessen zur Folge dass die Abstufungen der Neigungen nicht so scharf in's Auge fallen, als es wünschenswerth ist. Daher, und weil die Erfahrung lehrt dass in der Natur Erdböschungen von mehr als 45^0 Neigung nur selten vorkommen, bezeichnete Lehmann schon eine unter 45^0 gegen den Horizont geneigte Fläche ganz schwarz, während er für die übrigen das Verhältniss der weissen und schwarzen Streifen nach der Annahme bestimmte dass sich die Breite der schwarzen Striche zur Breite der weissen Zwischenräume verhalten sollte wie der Neigungswinkel der Fläche gegen den Horizont zur Ergänzung dieses Winkels auf 45^0 Grad.

Diesen Vorschlag hat man fast auf allen topographischen Bureaux angenommen, nur mit dem Unterschiede dass man den Grenzwinkel φ bald auf 45, bald auf 50, bald auf 60^0 setzte. In Bayern z. B. bezeichnet man erst die unter 60^0 geneigten Flächen ganz schwarz, und es ergibt sich nach dieser Annahme die Proportion

$$S : W = \varphi : 60^0 - \varphi$$

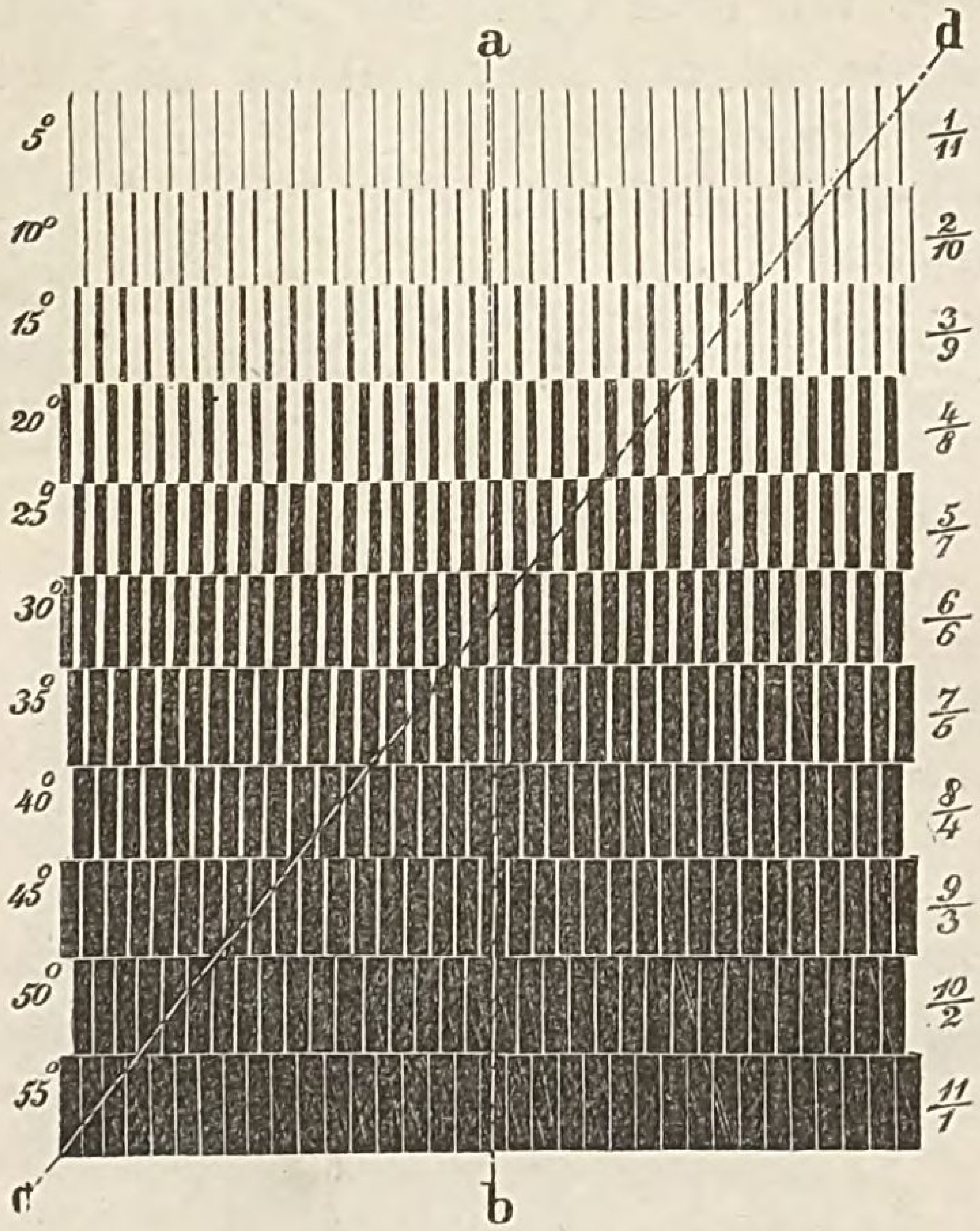
wenn S die Breite der schwarzen Striche und W die der weissen Zwischenräume bezeichnet. Aus dieser Proportion geht die vorstehende Tabelle hervor welche zugleich durch die beigedruckte Fig. 279 so erläutert ist dass jede weitere Bemerkung hierüber unnöthig erscheint.

Wenn eine topographische Karte genau nach diesem Schema gezeichnet ist, so kann man daraus die relative Höhenlage einzelner Punkte und beliebige Terrainprofile um so richtiger construiren, je genauer man das Verhältniss des Weissen zum Schwarzen zu schätzen im Stande ist.

Gesetzt, es handele sich um das Terrainprofil a b der Fig. 279, so hat man für die Länge der obersten Schichte das Verhältniss von $W : S = 11 : 1$,

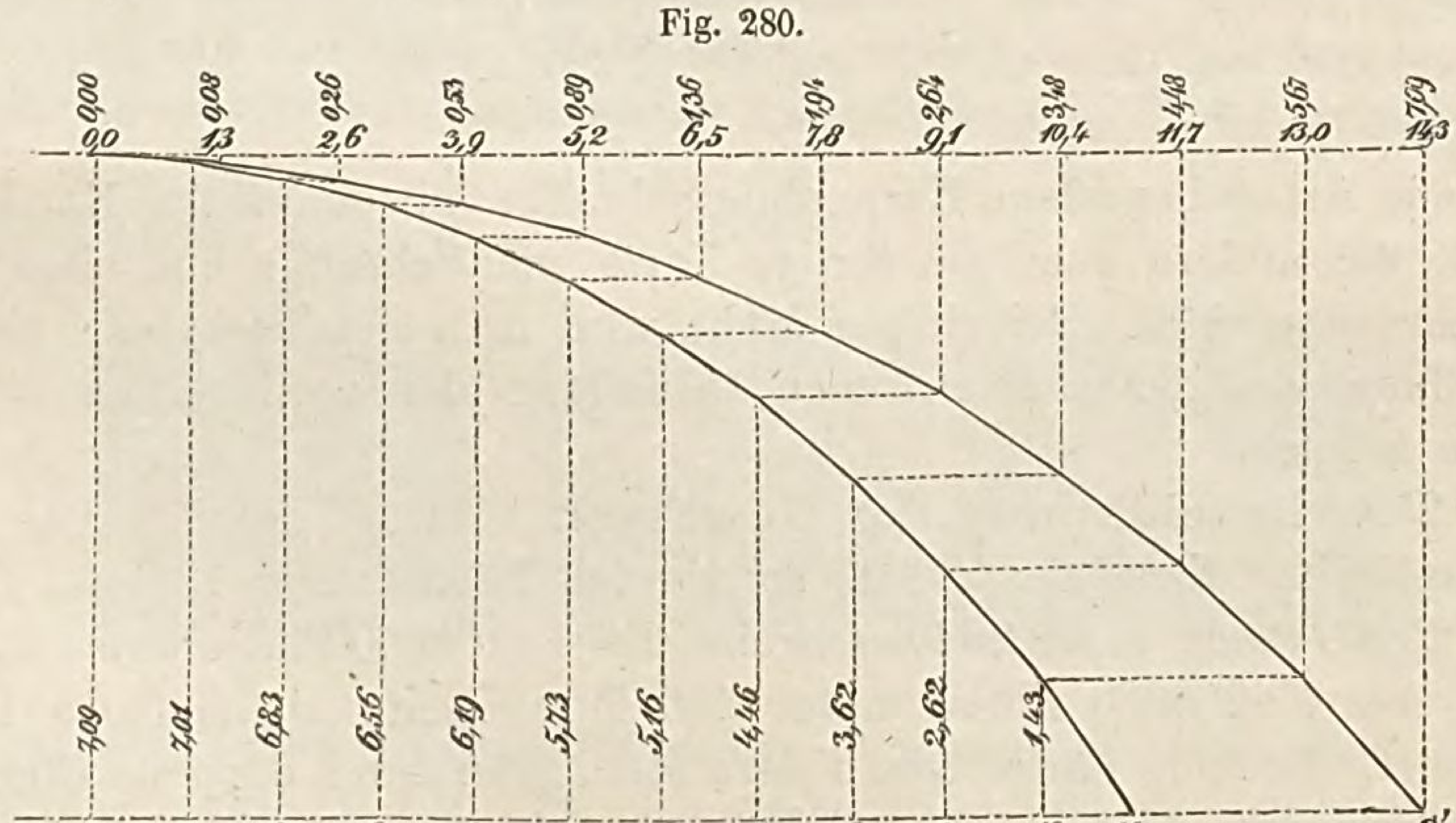
folglich eine Neigung von 5⁰; für die zweite Schichte das Verhältniss von W:S = 10:2, folglich eine Neigung von 10⁰; für die dritte Schichte W:S = = 9:3, mithin eine Neigung von 15⁰ u. s. w. Trägt man nun diese Neigungswinkel in der Länge der Schichten nach der Richtung a b an einander an, so entsteht die stärker geneigte untere Linie der Fig. 280 welche somit

Fig. 279.



φ	W : S	W : S
0⁰	60 : 0	12 : 0
5	55 : 5	11 : 1
10	50 : 10	10 : 2
15	45 : 15	9 : 3
20	40 : 20	8 : 4
25	35 : 25	7 : 5
30	30 : 30	6 : 6
35	25 : 35	5 : 7
40	20 : 40	4 : 8
45	15 : 45	3 : 9
50	10 : 50	2 : 10
55	5 : 55	1 : 11
60	0 : 60	0 : 12

Fig. 280.



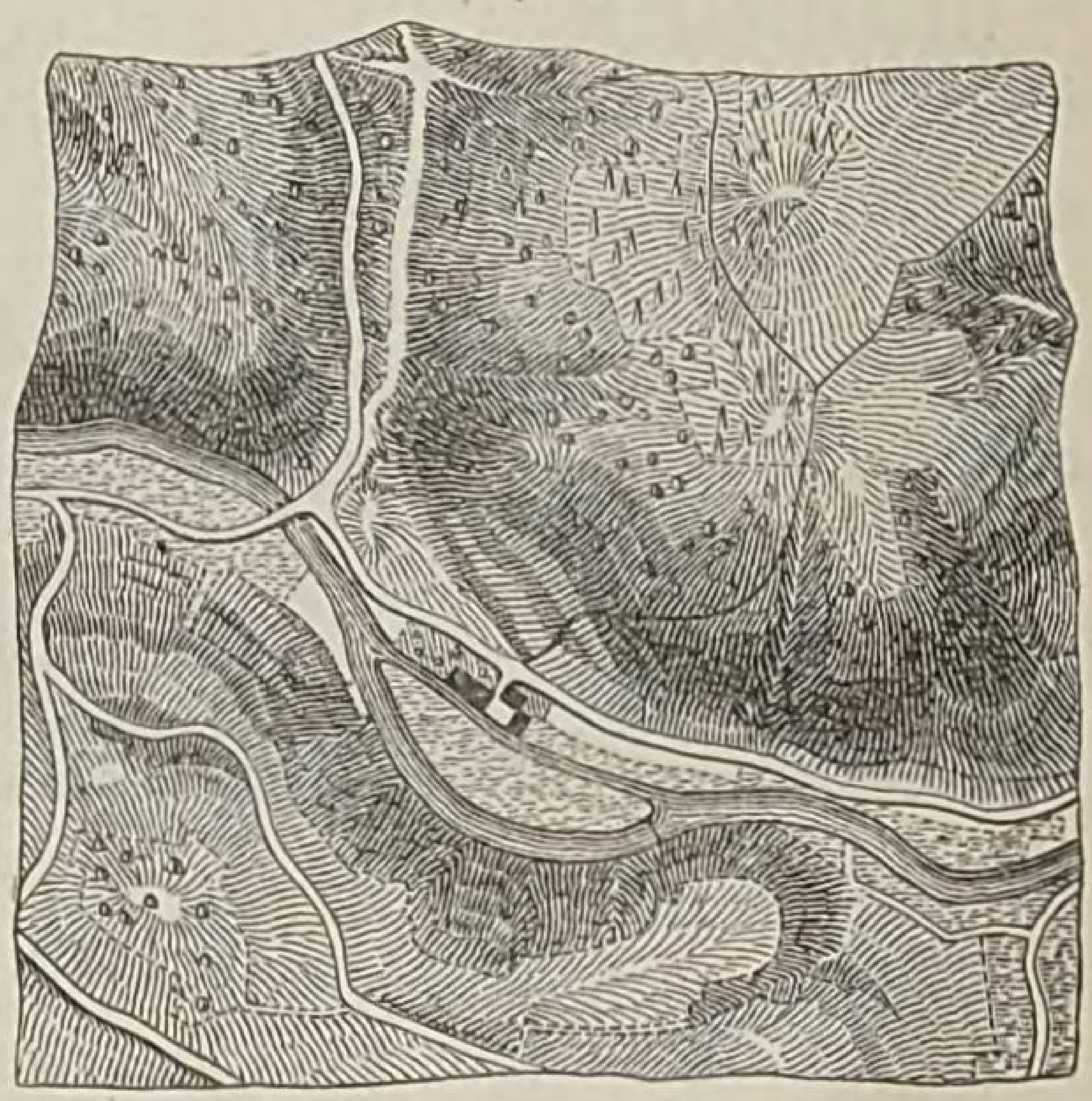
das gesuchte Profil a b vorstellt. In gleicher Weise findet man das Profil d c. Hier treten andere Neigungswinkel wie bei a b auf, da die horizontalen Erstreckungen der Schichten grösser sind, wesshalb auch das Profil sanfter wird, wie die obere gebrochene Linie 0 c' der Figur zeigt.

Die Darstellung eines Berges durch Schraffirung setzt dessen Horizontalcurven als bekannt voraus. Sind diese nach §. 180 bis 185 aufgenommen und auf dem Plane in Blei gezeichnet, so zieht man zwischen denselben in der Richtung des kleinsten Abstands und in der erforderlichen Breite die schwarzen Striche welche übrigens nicht mathematisch gerade zu sein brauchen sondern etwas geschlängelt sein dürfen. Erlaubt es die Fertigkeit der Hand nicht, die Striche sofort von einer Curve zur anderen auszuführen, so legt man Zwischencurven an und zieht zunächst die Striche bis an diese, worauf dann wie vorhin weiter fortgefahren und zuletzt jede als Hilfsmittel benützte Horizontalcurve ausgewischt wird. Berge gut zu schraffiren setzt viele Uebung voraus; unsere Absicht ist es aber nicht, das Zeichnen selbst sondern das Verstehen der Kartenzeichnungen zu lehren. Darum wird es genügen zwei Figuren (281 und 282) mitzutheilen, wovon

Fig. 281.



Fig. 282.

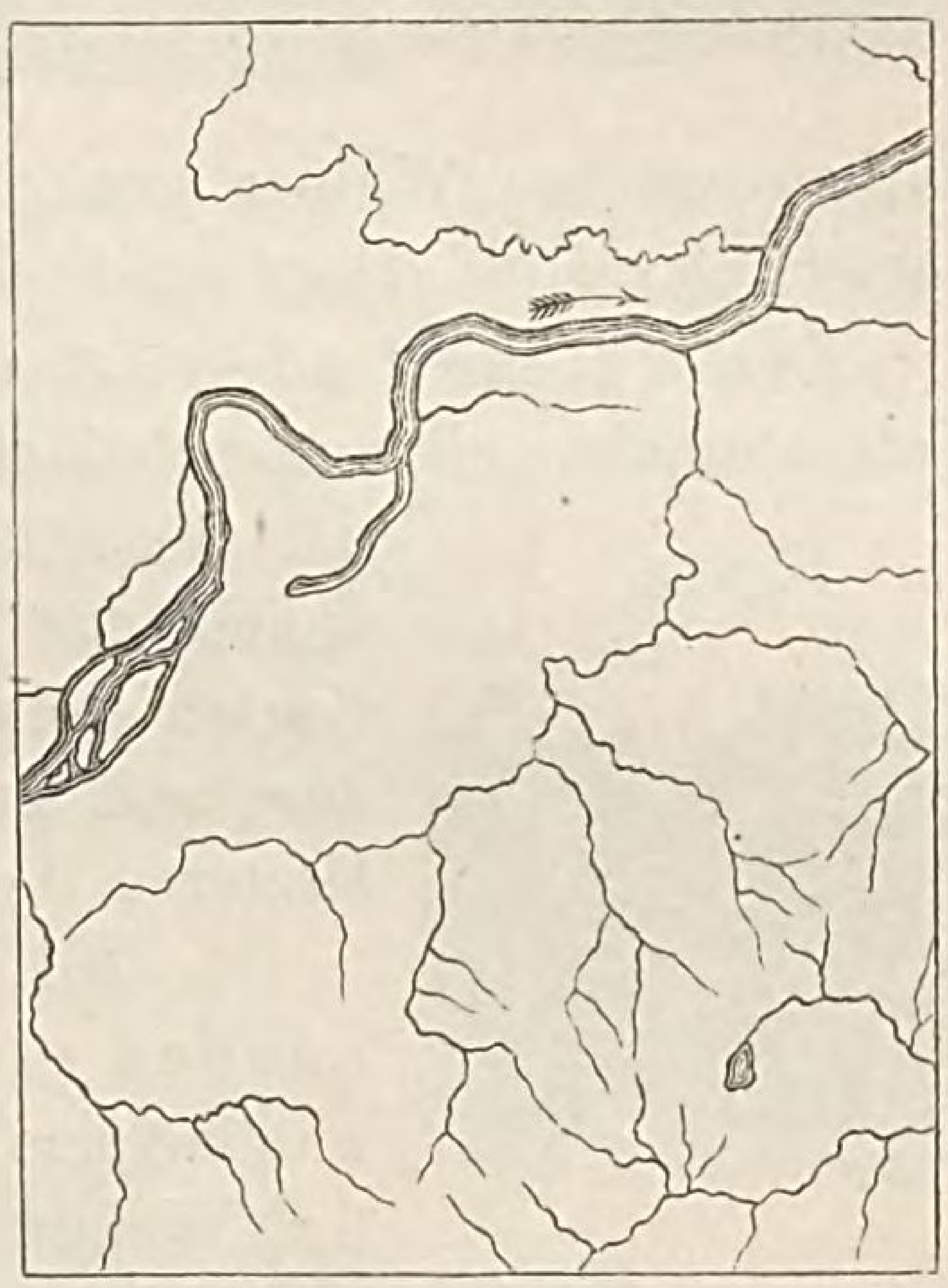


eine die in Arbeit begriffene Karte ohne Schraffur mit punktirten Horizontalcurven, die andere aber die fertige Karte mit Schraffur und ohne Horizontalcurven enthält. Bei einiger Mühe wird man sich leicht eine richtige Vorstellung von der geometrischen Gestaltung der vorliegenden Gegend machen können.

§. 259. **Bezeichnung der Gewässer.** Beträgt der Massstab einer topographischen Karte 1 : 10000, so werden Bäche unter 10 Fuss Breite, bei 1 : 25000 Bäche unter 20 Fuss Breite, bei 1 : 100000 Flüsse unter 40 Fuss Breite, bei 1 : 200000 Flüsse unter 160 Fuss Breite als einfache Linien gezeichnet. Breitere Bäche oder Flüsse stellt man durch doppelte Uferlinien mit der bekannten Wasserschraffirung dar. Diese wird um so feiner, je kleiner der Massstab ist; die Ufer auf der Schattenseite werden mit etwas stärkeren Linien ausgezogen, als die auf der Lichtseite. Der Lauf des Wassers wird durch einen kleinen Pfeil angedeutet der nach Massgabe des Raums entweder in oder neben der Wasserfläche liegt. Wird der Massstab der Karte kleiner als 1 : 100000, so werden kleine Bäche, Gräben

und Teiche ganz weggelassen; dagegen sind die einfachen Linien welche Flüsse darstellen, im Verhältniss ihrer Länge und der Zuflüsse welche sie erhalten, zu verstärken. Werden die topographischen Karten farbig gezeichnet, so ist das Wasser blau anzulegen und so zu laviren dass es gegen die Ufer dunkler erscheint. Diese aber werden, wenn es natürliche sind, schwarz, und wenn sie aus Mauerwerk bestehen, roth ausgezogen. Fig. 283 zeigt die Darstellung der Gewässer in schwarzer Manier und im Massstabe von 1 : 100000.

Fig. 283.



Es ist hier der Ort auf die Veränderungen aufmerksam zu machen, denen die Ufer der Flüsse in Folge der Einwirkung des Wassers unterworfen sind. Diese Veränderungen treten auf einer Karte um so mehr hervor, je grösser deren Massstab ist und je mehr Zeit zwischen der Aufnahme und dem Gebrauche liegt. In diesen Fällen, und wenn es sich darum handelt den Wasserlauf ziemlich genau zu kennen, ist es durchaus nöthig die Lage der Ufer einer geometrischen Revision zu unterwerfen.

§. 260. Bezeichnung des Bodens. Der Boden kann fest oder weich, kahl oder bewachsen sein und diese verschiedenen Beschaffenheiten desselben sind in der Karte entsprechend anzudeuten.

Beim kahlen Boden wird unterschieden, ob er an der Oberfläche aus Sand, Kies, Gerölle, Felsen oder beständig aus Eis besteht. Sand und Kies werden durch feinere und stärkere Punkte, Gerölle und Felsen

Fig. 284.

a b c

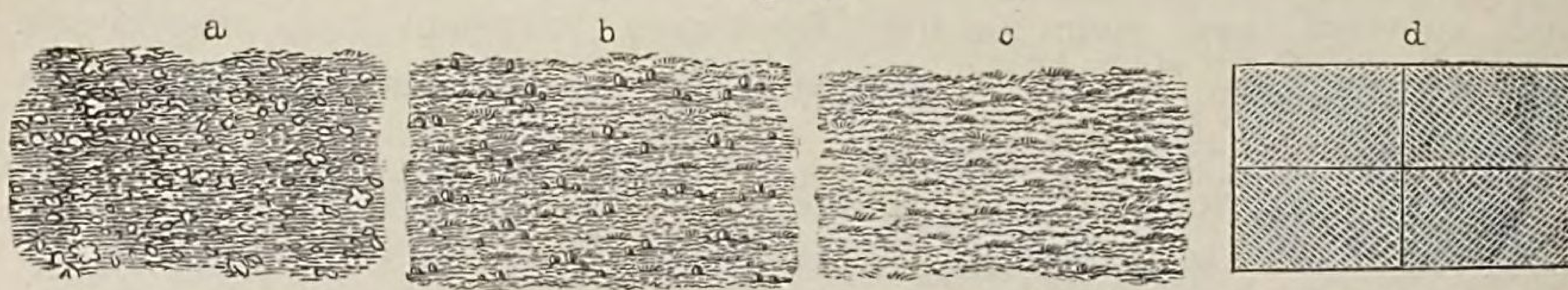


durch eckige Figuren, Gletscher durch entsprechende Schraffirungen bezeichnet, wie aus der Fig. 284 zu entnehmen ist, in welcher a Sand und Kies, b Gerölle und Felsen, c Hochgebirg mit einem Gletscher vorstellt. In farbigen Karten wird der kahle Boden blassroth, das beständige Eis blassblau angelegt; Sand und Kies werden auch hier schwarz punktirt, Gletscher schraffirt.

Der bewachsene Boden besteht entweder aus Wäldern, Feldern,

Haiden, Wiesen oder Gärten. Die Wälder werden nach Fig. 285 Abtheilung a, die Haiden nach b, die Wiesen nach c, Wein- und Hopfengärten nach d, Felder aber gar nicht bezeichnet, d. h. weiss gelassen. Auf Plänen kann man Laub- und Nadelholz unterscheiden, auf Karten aber nicht. In

Fig. 285.



Farben werden Wälder grau, Wiesen hellgrün, Haiden hellgelb, Weingärten rosenroth, Hopfengärten hellbraun bezeichnet.

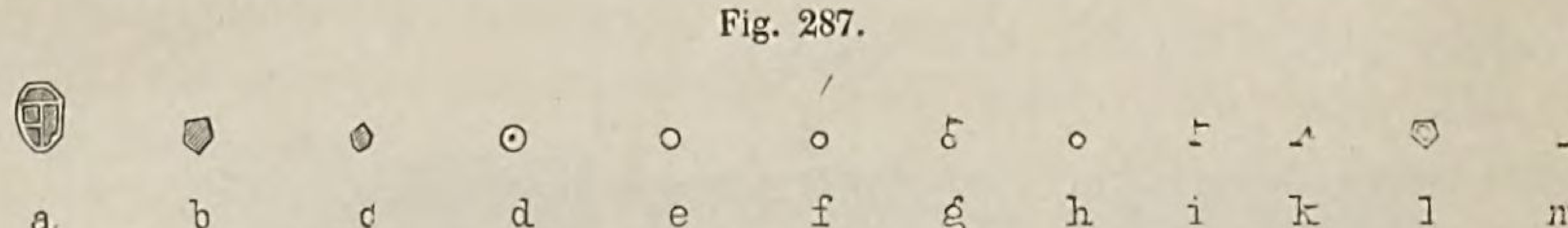
Der weiche Boden ist entweder ein Moor oder ein Sumpf. Diese Unterabtheilungen unterscheidet man nach Fig. 286 durch Punkte welche das Gesträuch der Moore und durch horizontale Linien welche das Wasser der Sümpfe andeuten. Auf farbigen Karten stellt man die Moore und Sümpfe wie Wiesen dar, und unterscheidet die ersteren durch braune, die letzteren durch blaue horizontale Streifen.

Fig. 286.



§. 261. Bezeichnung von Wohnorten, Gebäuden etc. Die auf topographischen Karten zu bezeichnenden Wohnorte sind: Städte, Marktflecken, Dörfer, Weiler, Schlösser, Einöden, Alpen; nicht bewohnte Gebäude: Kirchen, Kapellen, Ruinen etc. Ist der Kartenmassstab gross (1 : 10000 bis 1 : 50000), so deutet man die Hauptumrisse der Gebäude noch an, beträgt der Massstab aber weniger als 1 : 100000, so treten nur bestimmte Zeichen an die Stelle der Umrisse, wie aus Fig. 287 zu

Fig. 287.



entnehmen ist von welchen a, b, c grosse, mittlere und kleine Städte, d, e, f Marktflecken und Dörfer, g einen Ort mit Schloss, h einen Weiler und i ein einzelnes Schloss, k eine Ruine, l einen befestigten Ort und m eine Einöde vorstellt.

In farbigen Karten sind die Gebäude mit rothem Carmin anzulegen, in schwarzen zu schraffiren.

§. 262. Bezeichnung von Wegen und Grenzen. Zu den Wegen gehören die Land- und Wasserstrassen jeglicher Art mit ihren feststehenden oder beweglichen Brücken; zu den auf topographischen Karten noch darzustellenden Grenzen lediglich die Landes-, Kreis-, Bezirks- und Gemeindegrenzen.

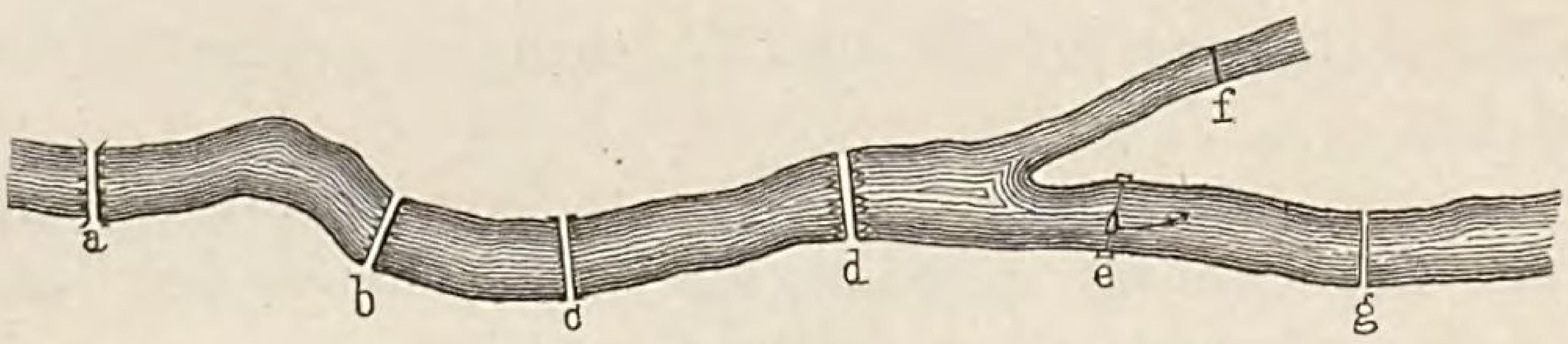
Hauptstrassen werden durch zwei Parallellinien, wovon die im Schatten liegende etwas stärker zu halten ist (Fig. 288, b), Nebenstrassen durch eine ausgezogene und eine punktirte Linie (c), Gemeindewege durch eine einfache Linie (d), Saumwege und Fusspfade durch gestrichelte und punktirte

Fig. 288.



Linien (e) bezeichnet. Bei Eisenbahnen unterscheidet man, ob sie schon im Betriebe stehen oder im Bau begriffen sind: die ersteren werden nach Art der Hauptstrassen durch ausgezogene und querabgetheilte Parallellinien (a), die letzteren wie diese, aber durch punktirte Linien vorgestellt. Schifffahrtscanäle werden wie Flüsse von gleicher Breite gezeichnet (k), und für Landes-, Kreis-, Bezirks- und Gemeindegrenzen gelten beziehungsweise stark abgesetzte Striche und gestrichelt-punktirte Linien (f, g, h, i). Für die Bezeichnung der Wege über Flüsse gebraucht man die Formen der Fig. 289, in

Fig. 289.



welcher a eine steinerne, b eine hölzerne, c eine eiserne Brücke, d eine Schiffbrücke, e eine fliegende Brücke, f einen Steg, g eine Furth bezeichnet. Wasserbauten von Bedeutung werden auf Karten selten angedeutet; wo man sie jedoch sichtbar machen will, wählt man ähnliche, jedoch kleinere Zeichen wie für die Pläne. (S. Fig. 315.)

2. Kartenschrift.

§. 263. Gegenstände der Benennung. Eine jede Karte bedarf zunächst eines Titels welcher ihre Hauptbestimmung und ihren Umfang bezeichnet: z. B. „hydrographische Karte von Bayern“, d. i. eine Karte welche lediglich die Quellen, Bäche, Flüsse, Ströme und See'n Bayerns darstellt. Dem Titel sind ferner Notizen beizufügen welche den Massstab, die topographischen Zeichen, die Zeit der Verfertigung und den Verfasser der Karte betreffen.

Die wichtigsten Bezeichnungen einer Karte sind ohne Zweifel die Ortsnamen; diese dürfen nirgends fehlen, und es müssen ihnen daher, wenn der Raum für minder wichtige Bezeichnungen zu klein wird, diese letzteren

weichen. Jedes Gebäude das in der Karte ein besonderes Zeichen hat, erhält seinen Namen.

Nächst den Orten erscheinen die Gewässer als wichtige geographische Objecte deren Benennung in einer Karte ebenfalls nicht fehlen darf, und die sich bei langen Flüssen mehrmals wiederholen muss, um das Ablesen der Karte zu erleichtern.

Ausserdem ist das Terrain in einer der Beziehungen zu benennen welche durch die Zeichnung nicht ausgedrückt werden können; z. B. das Donaumoos, das Wendelsteingebirge, der Schwarzwald u. s. w. Ferner sind, wo es nothwendig erscheint oder der Raum erlaubt, die Namen wichtiger Verkehrsanstalten anzuführen; z. B. der Hauptstrassen zwischen grossen Städten die auf der Karte selbst nicht liegen; der Eisenbahnen welche besondere Namen haben; der Dampfschiffwege auf dem Meere u. dgl. Endlich ist es unerlässlich das Kartennetz, d. i. die Meridiane und Parallele nach ihrer Länge und Breite richtig zu bezeichnen, so dass man aus der leicht zu erkennenden Projectionsart des Netzes sofort die geographische Lage jedes Orts bestimmen kann.

§. 264. Schriftzeichen. Bei der Wahl der Schriftzeichen kommt sowohl deren Form als Grösse in Betracht, um auch hierdurch Wichtigeres von Unwichtigerem zu trennen, mit einem Worte die Uebersicht zu erleichtern.

Was die Form der Schrift betrifft, so sind folgende Schriftgattungen im Gebrauche:

1. Die grosse römische stehende und liegende Schrift, auch stehende und liegende Capitalschrift genannt, für Titel, Namen der Landesbezirke und Benennung geographisch wichtiger Gegenstände.

2. Die kleine römische stehende und liegende Schrift, auch stehende und liegende Rotond genannt, für die geographischen und topographischen Einzelnheiten der Karte, und zwar für die grösseren Objecte.

3. Die topographische Cursivschrift für die kleineren und kleinsten Objecte einer Karte.

4. Die stehenden und liegenden römischen und arabischen Ziffern zur Bezeichnung von Netzabtheilungen, Einwohnerzahlen, Berghöhen u. dgl. Gewöhnlich finden jedoch nur die arabischen Ziffern Anwendung.

Hinsichtlich der Grösse der Schrift ist zu bemerken dass dieselbe zu dem Kartenmassstabe und den Kartenzeichen in einem passenden Verhältniss stehen soll: wichtigere Gegenstände werden durch grössere, minder wichtige durch kleinere Schrift bezeichnet, die grösste Schrift wird auf die Bezeichnung des Hauptzwecks der Karte und deren grösste Abtheilungen verwendet; bei Ortschaften richtet sich die Grösse der Schrift nach ihrer Classe oder Einwohnerzahl; bei Flüssen nach deren Länge und Bedeutung; bei See'n und Landobjecten nach deren Flächenraum. In Pfeiffer's Anleitung zum Plan- und Kartenzeichnen ist eine Tabelle über die Gattungen und Grössen der Plan- und Kartenschriften mitgetheilt welche hierüber

weitere Aufschlüsse gibt. In den früheren Auflagen dieses Werks war diese Tafel als letzte ebenfalls aufgenommen. Wir liessen sie hier weg auf Grund der Erfahrung dass die darin angegebenen Formen und Masse doch nicht in aller Strenge eingehalten werden.

Um eine Vorstellung von den Angaben der in dieser Auflage nicht mehr vorkommenden „Tafel über die Gattung und Höhe der Schrift für Plan- und Kartenobjecte“ zu geben fügen wir hier einige Zeilen derselben mit dem Bemerken bei dass die gebrauchten Abkürzungen folgendes bedeuten: S.C stehende Capitalschrift, L.C liegende Capitalschrift, S.R stehende Rotondschrift, T.C topographische Cursivschrift.

Gegenstand:	Schriftart:	Höhe der Schrift in Millimeter für den Massstab: $\frac{1}{5000}$	$\frac{1}{10000}$	$\frac{1}{20000}$	$\frac{1}{50000}$	$\frac{1}{100000}$
Stadt über 5000 Einw.	S.C	8,0	5,4	4,0	3,2	2,2
Wald, grosser	L.C	4,0	2,6	2,0	1,6	1,0
Wasserwerk, grosses	S.R	2,0	1,4	1,0	0,8	0,6
Steinbruch, grosser	T.C	0,6	0,6	0,4	0,4	0,4

§. 265. Stellung der Schrift. Durch entsprechende Stellung der Schrift kann nicht nur mancher Zweifel über den bezeichneten Gegenstand gehoben, sondern auch die Uebersicht und das Ablesen der Karten sehr erleichtert werden: dieselbe ist also nicht so unwichtig als es auf den ersten Augenblick scheinen mag.

Von der allgemeinen Regel die Schriftzeilen dem oberen oder unteren Kartenrande parallel zu ziehen werden nur wenige Ausnahmen gemacht. Zu diesen gehören die Bezeichnungen der Flüsse welche nach deren Längenausdehnung entweder in die Wasserfläche selbst oder an deren Ufer zu stellen sind. Ferner gehören hierher die Hauptstrassen. Endlich grosse Terrainflächen die sich längs eines Flusses oder Gebirgs hinziehen, und deren Bezeichnung in mässiger Krümmung ungefähr der Mitte der Flächenfigur folgt.

Für Ortsbenennungen gilt als Regel die Namen dicht oberhalb des Ortszeichens zu setzen. Bei beschränktem Raume darf man sich jedoch erlauben die Benennung neben das Zeichen zu setzen, aber nie soll sie unter demselben stehen.

Kommt es vor dass die Bezeichnung eines Terrainbezirks wegen dessen grosser Fläche gedehnt werden muss, so sieht man die doppelte Buchstabenhöhe als Grenze des Abstands der einzelnen Buchstaben an. Reicht eine solche Dehnung nicht aus, so unterlässt man dieselbe und bezeichnet dafür den fraglichen Bezirk zweimal, um jeden Zweifel über dessen Namen zu beseitigen.

Zweiter Abschnitt.

Planzeichnung.

§. 266. Zur Kartenzeichnung sind Netze erforderlich welche die Meridiane und Parallelkreise des abzubildenden Theils der Erdoberfläche darstellen, und in welche die einzelnen Objecte nach ihrer geographischen Lage mit mehr oder weniger Genauigkeit eingetragen werden. Die Zeichnung von Horizontalplänen gründet sich auch auf Netze, aber diese bestehen meist aus den Polygonen oder Dreiecksverbindungen welche behufs der Aufnahme der Pläne auf dem Felde ausgesteckt und gemessen wurden. An diese Netze schliesst sich die Zeichnung des Details um so besser an, je sorgfältiger jene gemessen und aufgetragen sind; es muss also hierauf alle Sorgfalt verwendet werden. Das Auftragen eines gut gemessenen Polygons oder Dreiecksnetzes in einem bestimmten Massstabe kann aber für Denjenigen der das geometrische Zeichnen versteht, durchaus keine Schwierigkeit haben, da es sich bloss darum handelt ähnliche Figuren zu zeichnen; wir werden desshalb hiervon eben so wenig, als von der ebenfalls bekannten Construction verjüngter Massstäbe handeln. Ueber die Zeichnung der Verticalpläne oder der Nivellemente von Linien und Flächen, von welcher in diesem Abschnitte zu handeln ist, geben theilweise schon die Betrachtungen über das Nivelliren Aufschluss; es braucht also hier nur das Fehlende nachgeholt zu werden. Und was die Grubenpläne betrifft die sich aus Horizontal- und Verticalprojectionen zusammensetzen, so werden auch über diese nur kurze Bemerkungen genügen, da sie entweder nach den vorausgesetzten Plänen oder nach den Regeln der darstellenden Geometrie behandelt werden deren Handhabung wir dem Leser eben so wie die Fertigkeit im Zeichnen zumuthen.

(Wenn in den nachfolgenden Darstellungen stellenweise noch vom Fussmasse die Rede ist, obwohl zur Zeit das Metermass fast allgemein gilt, so wolle man dieses mit dem Umstande entschuldigen dass die ausschliessliche Anwendung des letzteren Masses die Umarbeitung sehr vieler Holzschnitte zur Folge gehabt hätte, und dass das Wesen der Sache um die es sich hier handelt, nicht darunter leidet, ob es an der Hand des Fuss- oder des Metermasses erklärt wird.)

A. Horizontal- oder Situationspläne.

1. Bezeichnung der darzustellenden Gegenstände.

§. 267. Die geometrische Aufnahme erstreckt sich nur auf die Horizontalprojection der natürlichen oder künstlichen Grenzen von Eigenthum,

der Bodencultur und Verkehrsanstalten; die Verticalprojection des Terrains wird nur in bestimmten Fällen aufgenommen und auf Horizontalplänen in Form von Schichtenlinien, worüber bereits in den §§. 177 bis 185 gehandelt wurde, dargestellt. Die in dem §. 258 beschriebene Bergzeichnung wendet man in der Regel auf Karten, selten auf Plänen an, da sie erstens nicht so genau wie Schichtenlinien die Höhenverhältnisse des Bodens darstellt, zweitens mühsam auszuführen ist, und drittens bei stark geneigtem Terrain die Pläne so schwarz macht dass Bau- und Culturprojecte in dieselben nicht mehr deutlich eingezeichnet werden können. Es bleibt uns also hier nur übrig die Bezeichnungen für die erstgenannten Objecte vorzuführen und zu erläutern. Die mitzutheilenden Figuren passen leider bloss für schwarze und nicht für farbige Pläne; wer aber jemals eine Anleitung zum Zeichnen farbiger Pläne angesehen hat, wird durch die nachfolgenden Bemerkungen über die Colorirung der Horizontalpläne an die conventionelle Darstellung eines beliebigen Objects in Farbe wieder erinnert werden.

§. 268. Bezeichnung natürlicher Gebilde. Die auf Plänen darzustellenden natürlichen Gebilde umfassen alles Land und Wasser der Erdoberfläche; der Boden kann dabei kahl oder bewachsen, weich oder fest, nass oder trocken sein.

Der kahle Boden stellt sich als Sand-, Kies-, Geröll-, Lehm- oder Felsboden, oder als ewiges Eis dar. Die Bezeichnungen für diese verschiedenen Arten des kahlen Bodens stimmen mit denen des §. 260 im Allgemeinen überein, nur sind sie hier, weil grösser, bestimmter.

Wir fügen desshalb den früher gegebenen Bezeichnungen noch folgende bei: in Fig. 290 die Zeichen von Lehm- und Sandgruben, in Fig. 291 die von Steinbrüchen, in Fig. 292 die von Felsen im Hochgebirge, in Fig. 293 die von Kohlenflötzen, und bemerken hierzu dass in farbigen Plänen die Sandgruben einen röthlichen Ton mit eingezeichneten schwarzen Punkten und Strichen (wie in Fig. 290) erhalten; die Lehmgruben aber mit Terra di Siena in zwei oder drei verschiedenen Tönen angelegt und mit Sepia gestrichelt werden; ferner dass Steinbrüche mit hellbrauner und Kohlenflötze mit dunkelbrauner Farbe (Sepia) angelegt und wie in den Fig. 291 und 293 schwarz bezeichnet werden.

Fig. 290.

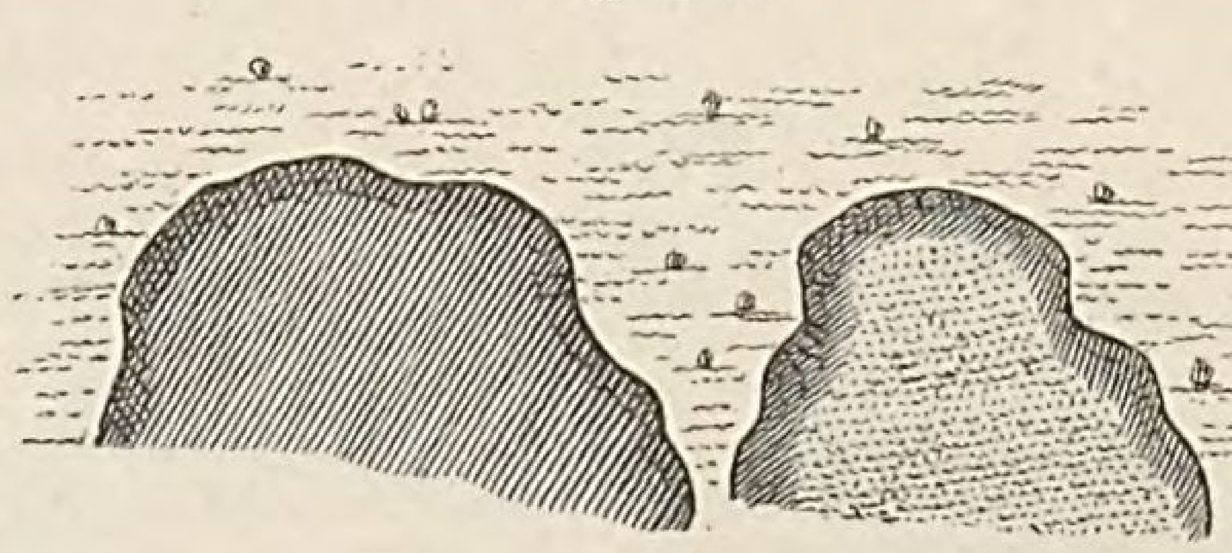
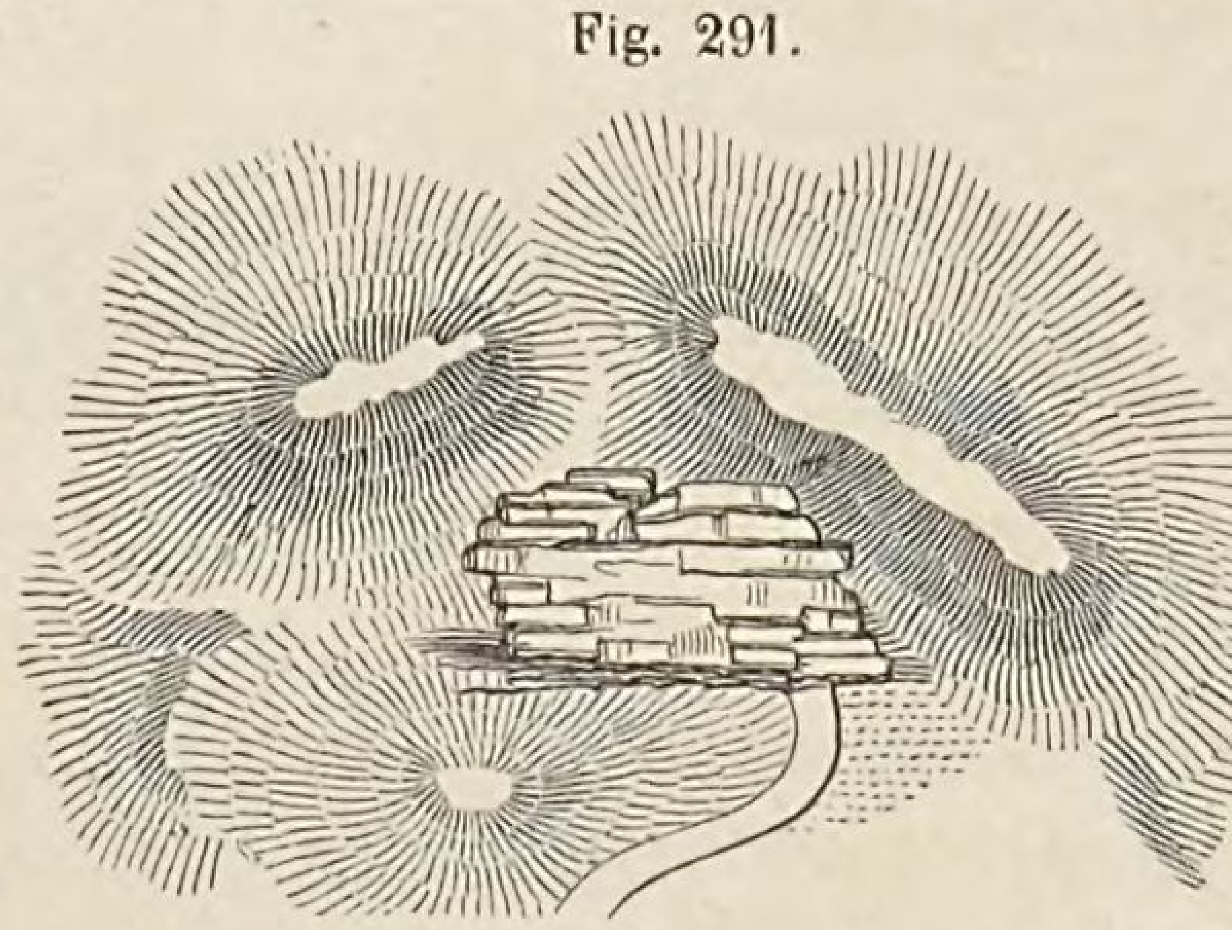


Fig. 291.



Der bewachsene Boden umfasst die von Wäldern, Gesträuchen, Feldern, Gärten, Wiesen, Haiden, Mooren und Sümpfen eingenommenen

Flächen. Bei der Darstellung von Wäldern und Gebüschen ist das Laub- und Nadelholz zu unterscheiden. In schwarzen Plänen geschieht es nach den Fig. 294 und 295, in farbigen aber durch Anwendung eines lichtgrauen Tons für Nadelholz und eines blaugrauen für Laubholz. Grosse Waldflächen werden in schwarzen Plänen gewöhnlich nicht vollständig sondern nur theilweise mit den betreffenden Charakteren bezeichnet; dagegen setzt man zweckmässig die Buchstaben P.W. (Privatwaldung), St.W. (Staatswaldung), C.W. (Communalwaldung) bei, um sogleich auch die Kategorie der Besitzer zu bezeichnen. (Fig. 296).

Fig. 292.

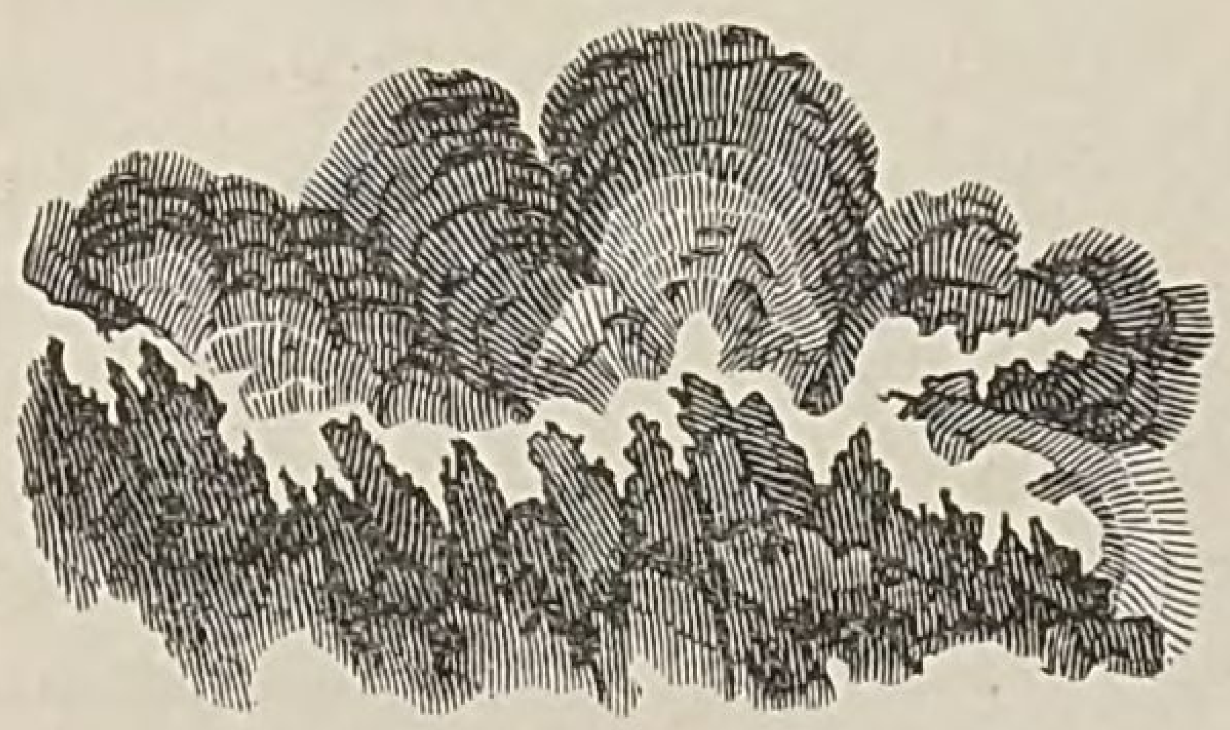
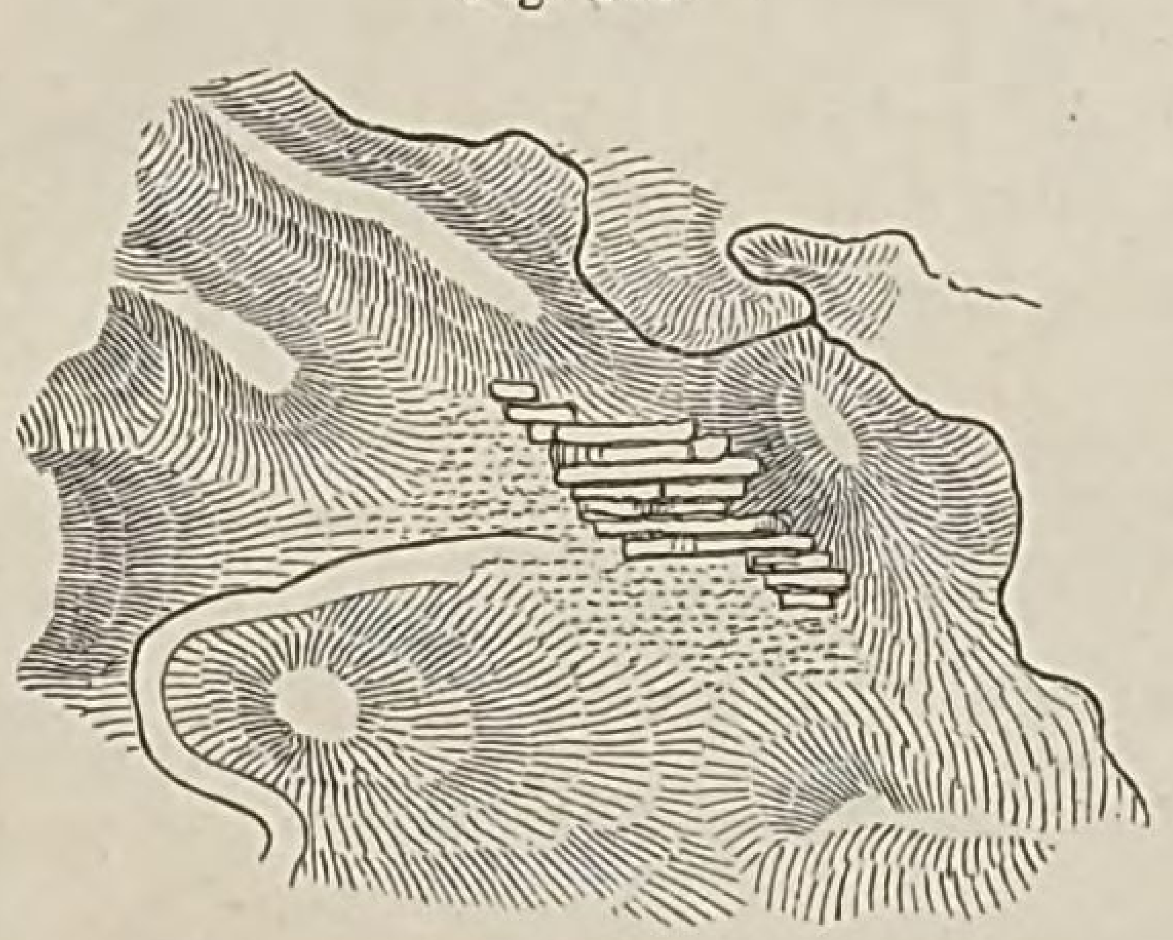


Fig. 293.



Die Felder bleiben sowohl in schwarzen als farbigen Plänen in der Regel weiss wie das Papier; sind sie aber mit Bäumen besetzt, so deutet man dieses auf die aus Fig. 297 ersichtliche Weise an.

Bei Gärten ist zu unterscheiden, für welche Gewächse sie vorzugsweise bestimmt sind: Baumgärten werden in schwarzen Plänen nach Fig. 298 bezeichnet; in farbigen Plänen erhält der Boden die für ihn bestimmte

Fig. 294.

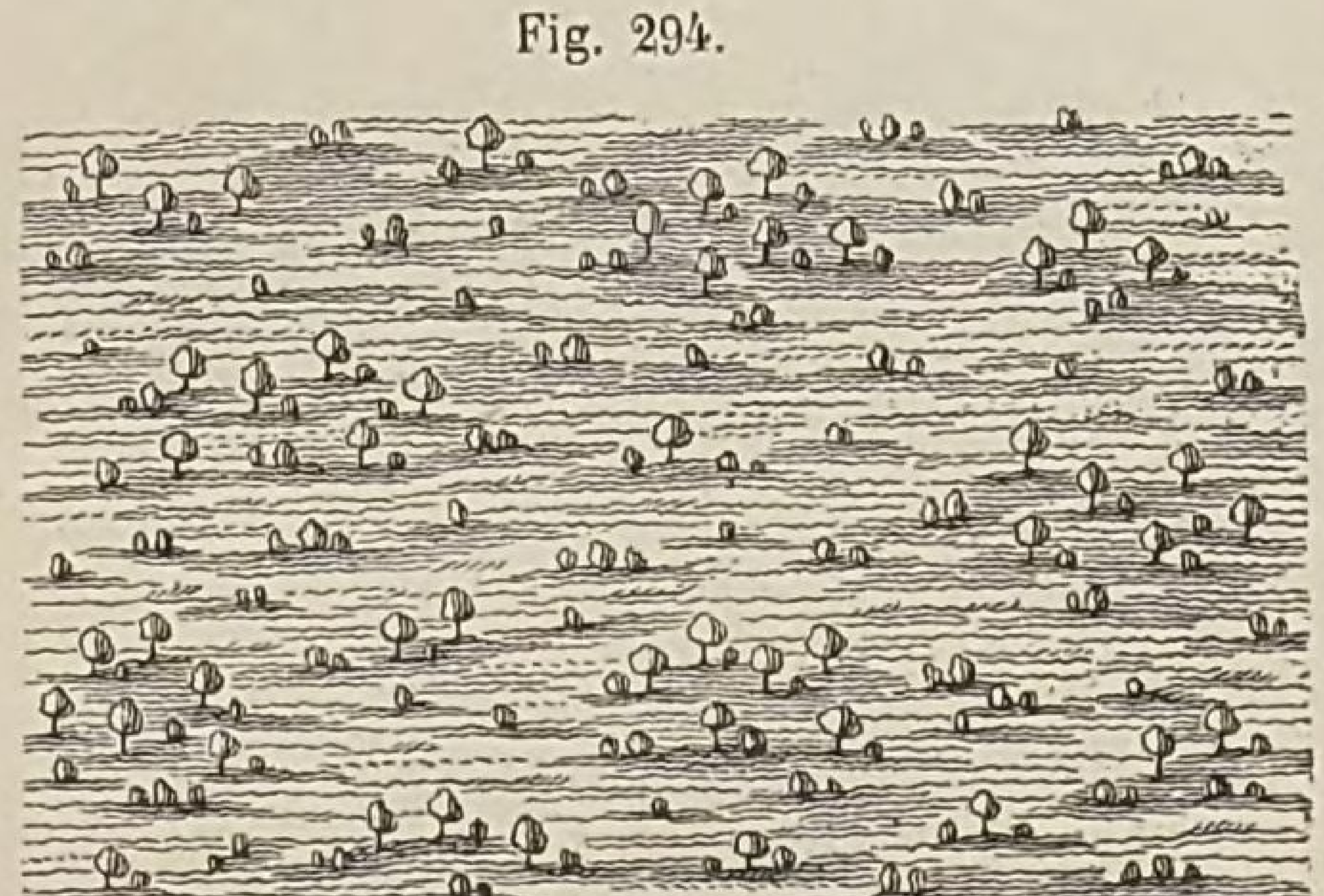
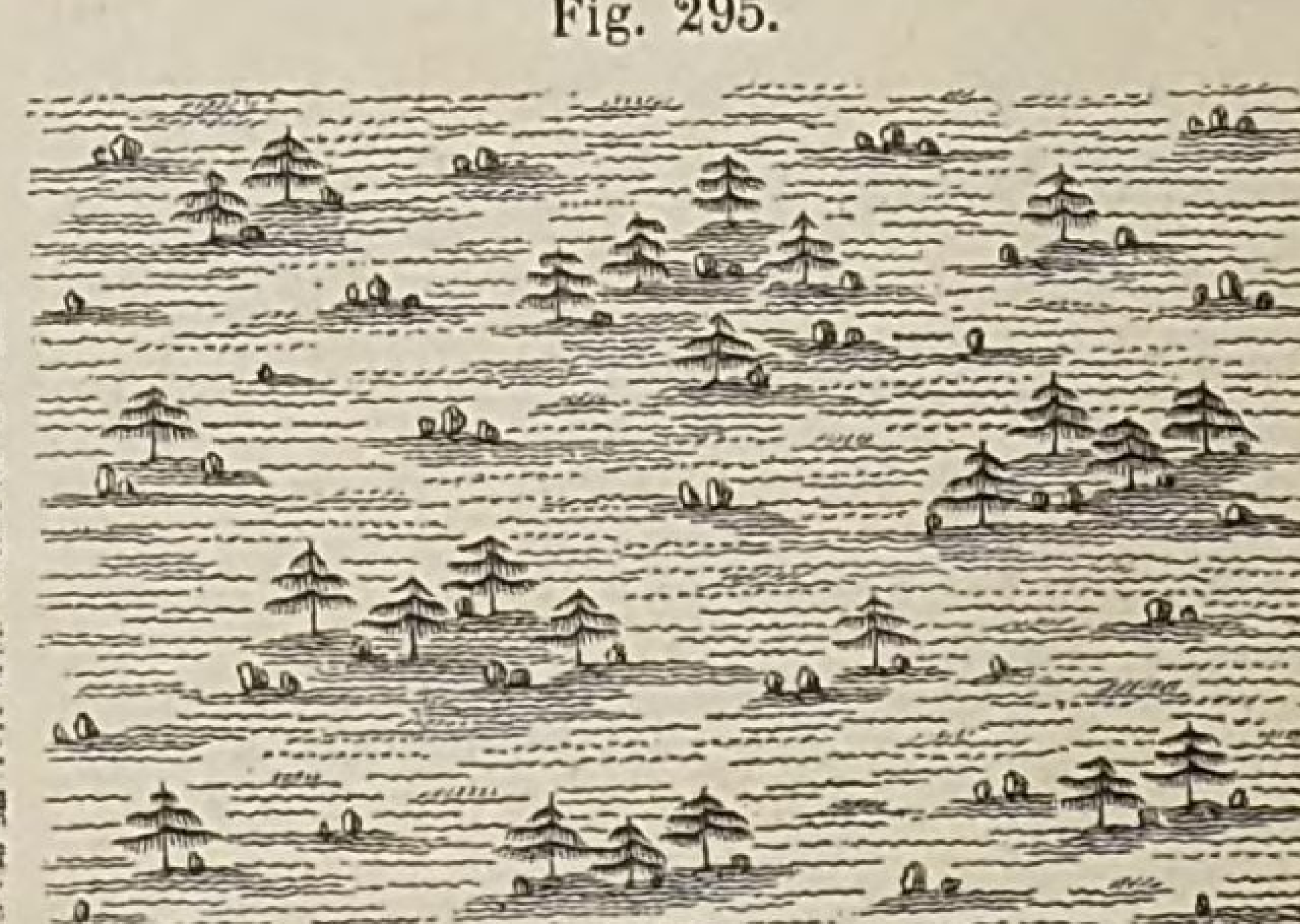


Fig. 295.



Farbe. Zier- oder Blumengärten deutet man in schwarzen Plänen nach Fig. 299, Gemüsegärten nach Fig. 300 an. In farbigen Plänen werden Zier- und Gemüsegärten durch grün punktirte parallele Linien bezeichnet. Weinberge und Hopfengärten erhalten in schwarzen Plänen die aus Fig. 301 ersichtlichen Zeichen; in farbigen werden die ersteren blassroth mit Carmin, die letzteren rothbraun mit Terra di Siena angelegt. Englische Anlagen werden in schwarzen Plänen nach Fig. 302, in farbigen wie eine Zusammensetzung von Wiesen, Gebüsch, Wald und Wegen behandelt.

Für Wiesen gilt die in Fig. 303 dargestellte Bezeichnung; in farbigen Plänen werden sie hellgrün angelegt, wobei die Mischung der Farbe aus Grünspanauflösung und Gummigutt besteht. Oedungen und Haiden deutet man in schwarzen Plänen bald nach Fig. 304, bald nach Fig. 305, in farbigen Plänen aber blassgelb (mit Gummigutt) an.

Fig. 296.

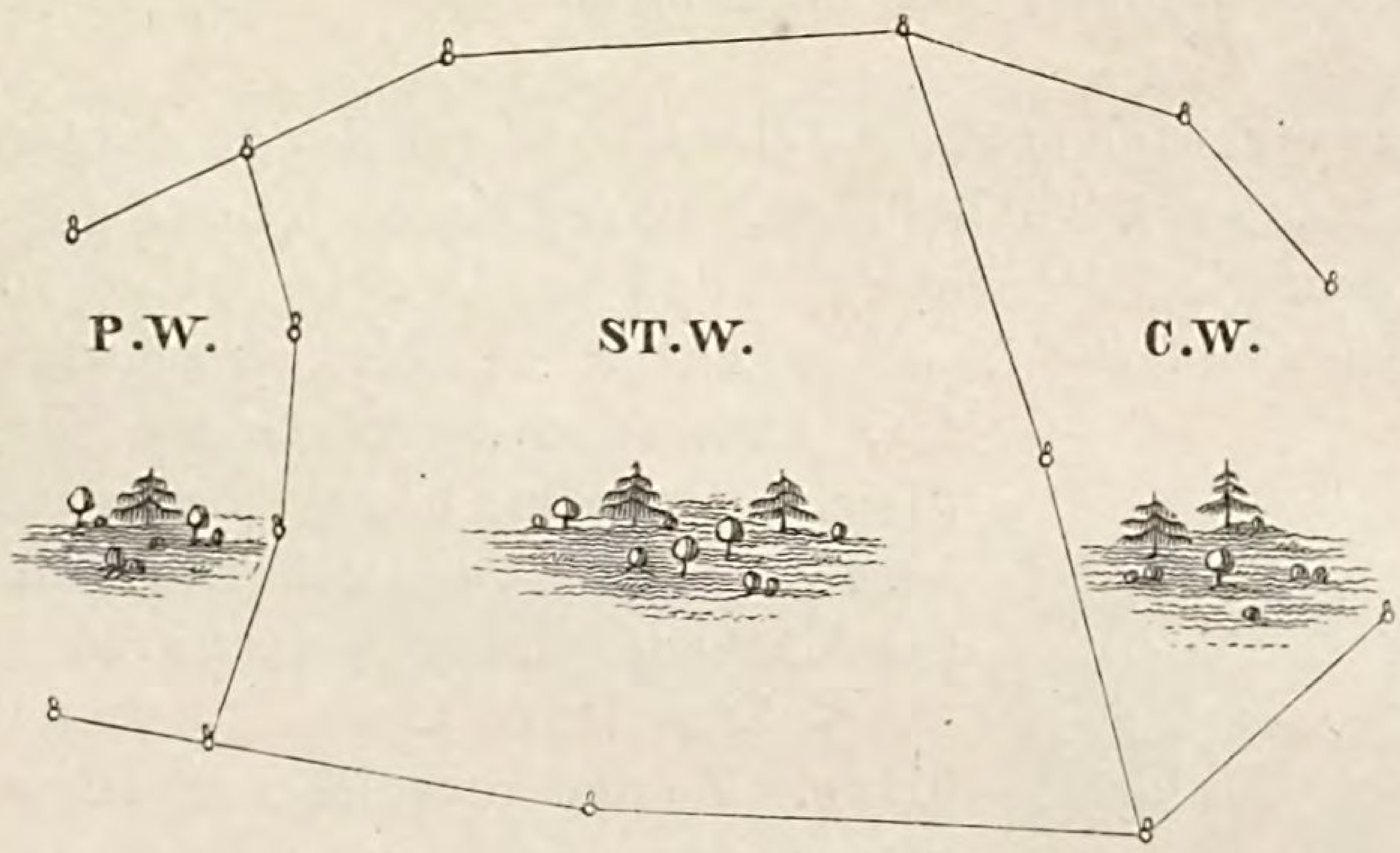


Fig. 297.

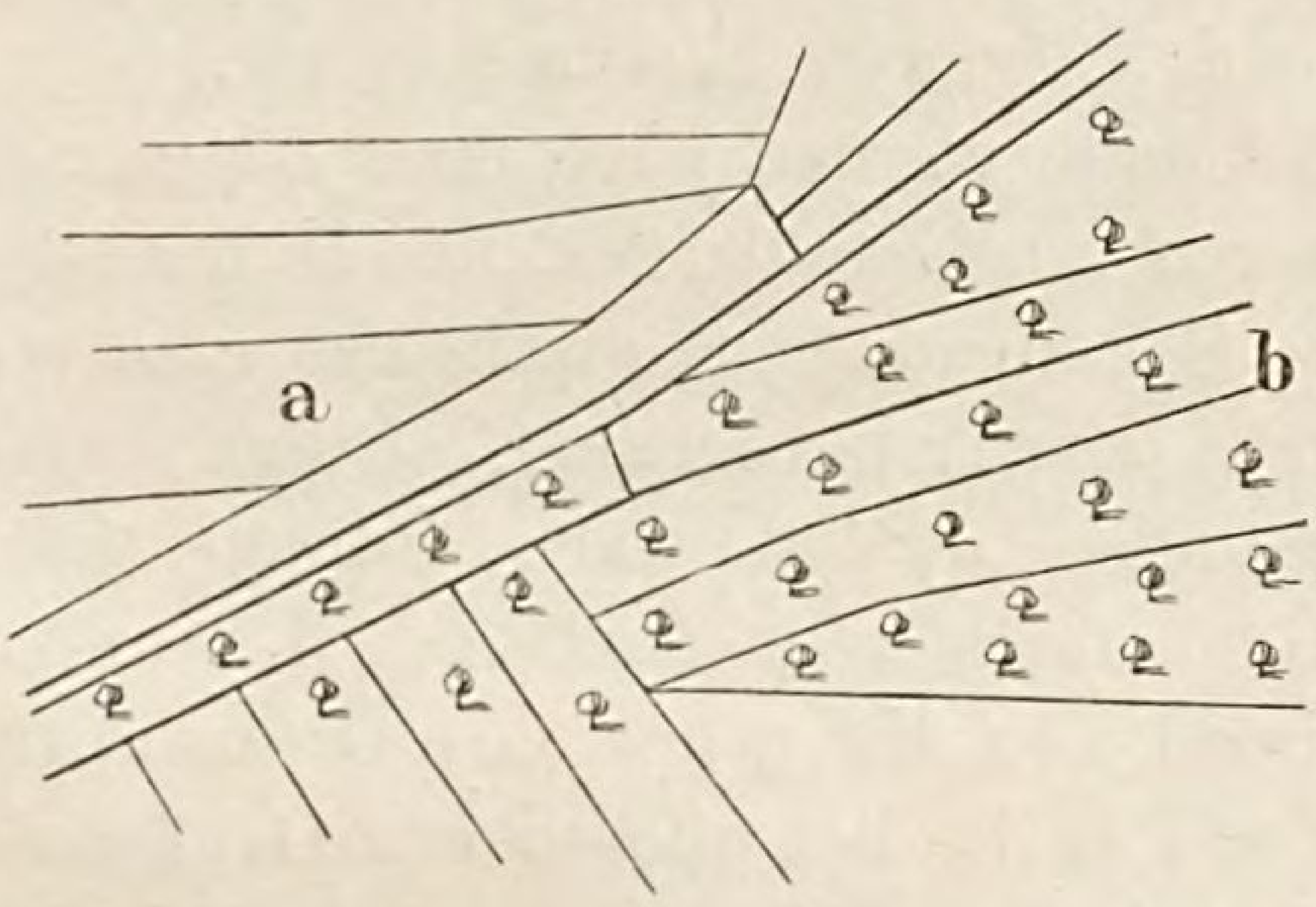


Fig. 301.

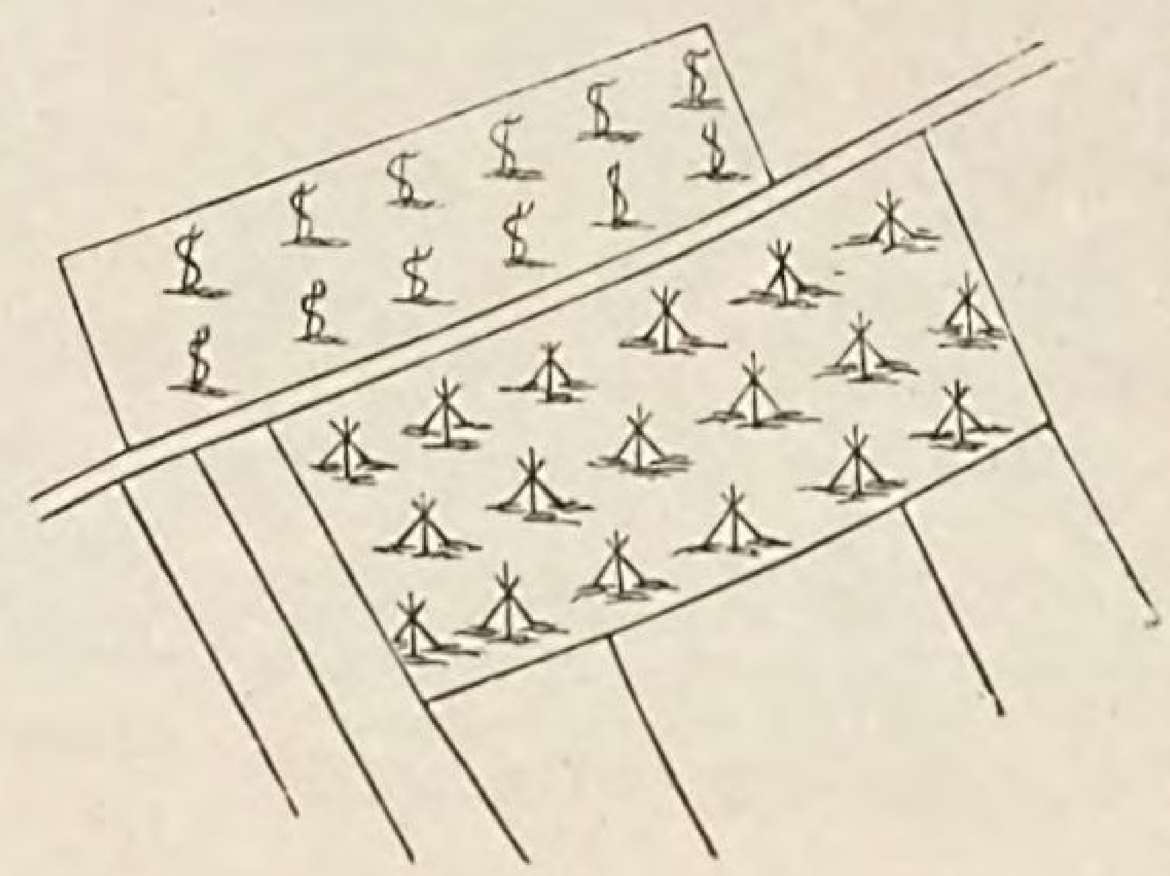


Fig. 298.

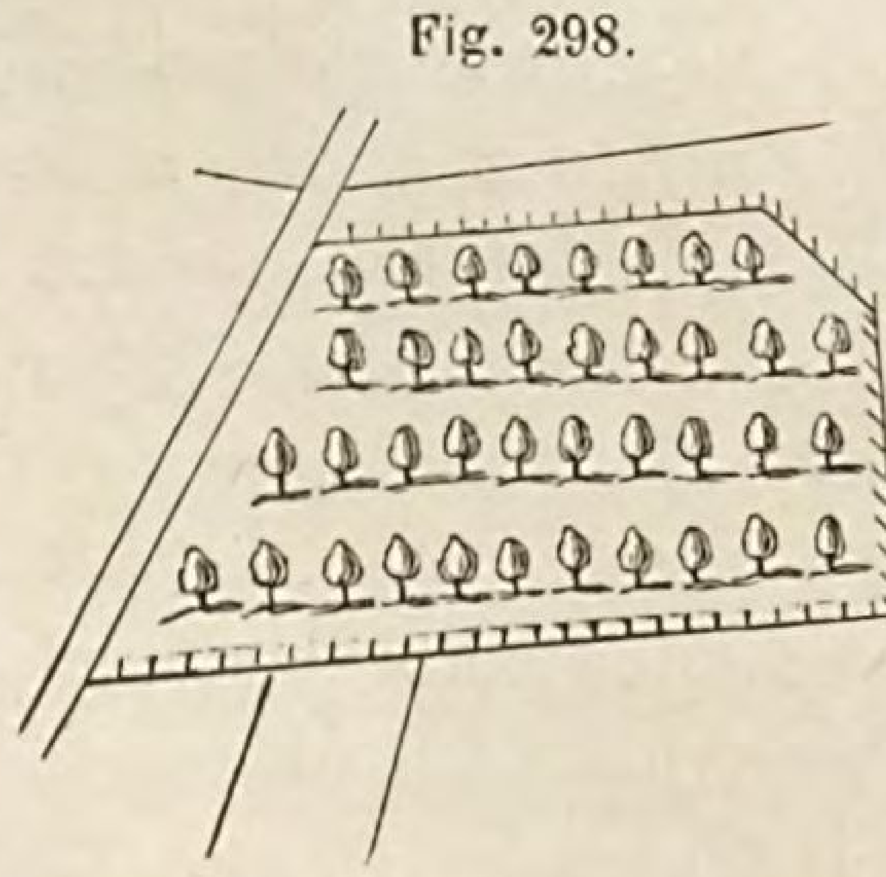
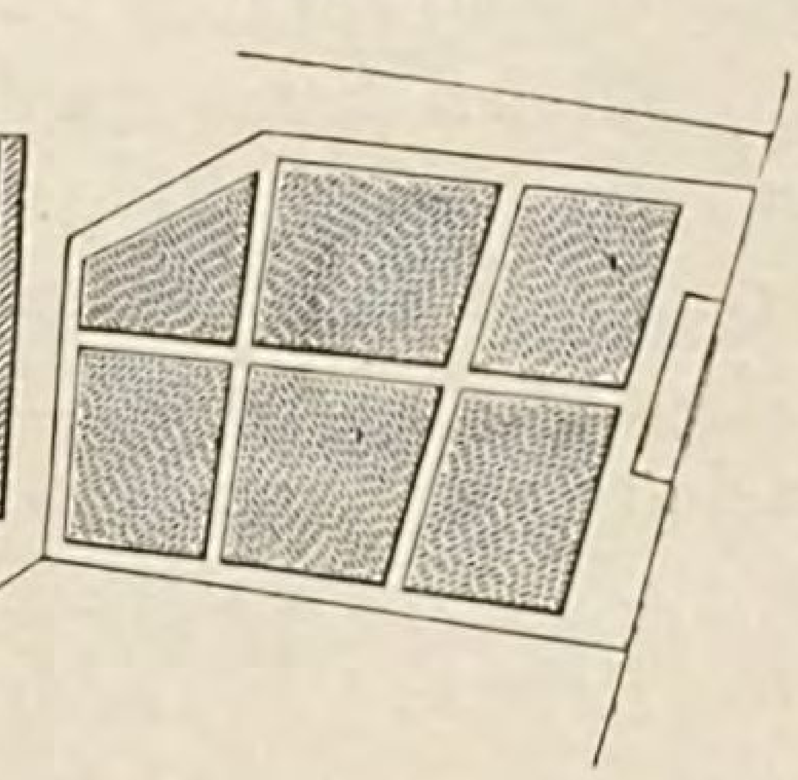


Fig. 299.



Fig. 300.



Moore werden, wenn sie kein Krummholz tragen, nach Fig. 306, wenn sie aber damit bewachsen sind, in welchem Falle sie Filze heissen, nach Fig. 307 dargestellt. In farbigen Plänen werden die Moore wie nasse Wiesen behandelt, erhalten aber lichtbraune und blaue Streifen, und in die Filze wird noch überdiess Gebüsch eingezeichnet. Da sich die Sümpfe

von den Mooren nur dadurch unterscheiden dass sie mehr Wasser enthalten als diese, so werden sie auch in schwarzen und farbigen Plänen als wasserreiche Moore behandelt, d. h. man bringt in der Zeichnung (Fig. 308) mehr Wasserstriche als bei einem gewöhnlichen Moore an und lässt dafür einen Theil der in Fig. 306 enthaltenen Punkte weg.

Wenn in einem Moore Torfstiche vorkommen, so werden dieselben nach Fig. 309 bezeichnet, und in farbigen Plänen ausserdem noch braun angelegt.

Das Wasser wird in Plänen ebenso wie auf Karten dargestellt, wesshalb wir uns hier auf §. 259 beziehen. Ist der Massstab des Plans = 1 : 5000, so zeichnet man die Bäche unter 5′ und bei 1 : 2000 Gräben von weniger als 2′ Breite als einfache Linien welche aber selbst in schwarzen Plänen blau auszuziehen sind. Grosse Wasserflächen (Teiche, See'n etc.) kann man nach Fig. 310 behandeln, um das mühsame Schraffiren mit geschlängelten Linien zu ersparen.

Fig. 302.



§. 269. Bezeichnung künstlicher Gebilde. Zu den künstlichen Gebilden welche in Plänen anzuzeigen sind, gehören: Gebäude, Strassen, Brücken, Wasserbauten, Befestigungen, Begrenzungen, Signale, Monumente etc.

Die Gebäude werden nach ihrer Lage und ihren äusseren Umrissen dargestellt. Durch entsprechende Schraffirung unterscheidet man ob sie aus Stein oder Holz bestehen, ob sie Privat- oder öffentliche Gebäude oder Ruinen sind. Massive Gebäude werden nach Fig. 312 unter einem Winkel von 45° gegen ihre Grundlinien schraffirt und es ist bei öffentlichen Gebäuden die Schraffirung dunkler zu halten als bei Privatgebäuden. Hölzerne Gebäude schraffirt man parallel zu ihren Grundlinien, wie die beiden Gebäude in Fig. 311. Kirchen kann man noch durch ein Kreuz und den Standpunkt des Thurms durch einen Ring mit Mittelpunkt kenntlich machen. Ruinen werden nur an den Rändern schraffirt, um gleichsam anzudeuten dass ein Theil des Mauerwerks fehlt. Bei Mühlen und anderen Wasserwerken sind nebenbei kleine Sternchen anzubringen welche Wasserräder bedeuten. Kirchhöfe werden wie Wiesen behandelt und erhalten zum Unterschiede von diesen kleine Kreuze. In farbigen Plänen legt man die massiven Gebäude roth (mit Carmin), die hölzernen gelb (mit Gummigutt) an. Oeffentliche Gebäude werden in beiden Fällen zweimal angelegt.

Die Strassen werden nach ihrer Grösse und Bedeutung verschieden bezeichnet. (Fig. 313.)

Lit. a. Eine Hauptstrasse (Staats- und Kreisstrasse, Strasse 1 und 2 Classe). Befinden sich an derselben Alleebäume, so werden dieselben

angedeutet. In farbigen Plänen zieht man die inneren Begrenzungslinien roth aus und legt die Oberfläche blassroth an.

Lit. b. Eine Nebenstrasse (Bezirksstrasse, Gemeindeweg, Strasse 3 und 4 Classe). Hinsichtlich der Alleebäume und Colorirung derselben gelten die vorhergehenden Bemerkungen.

Fig. 303.



Fig. 304.

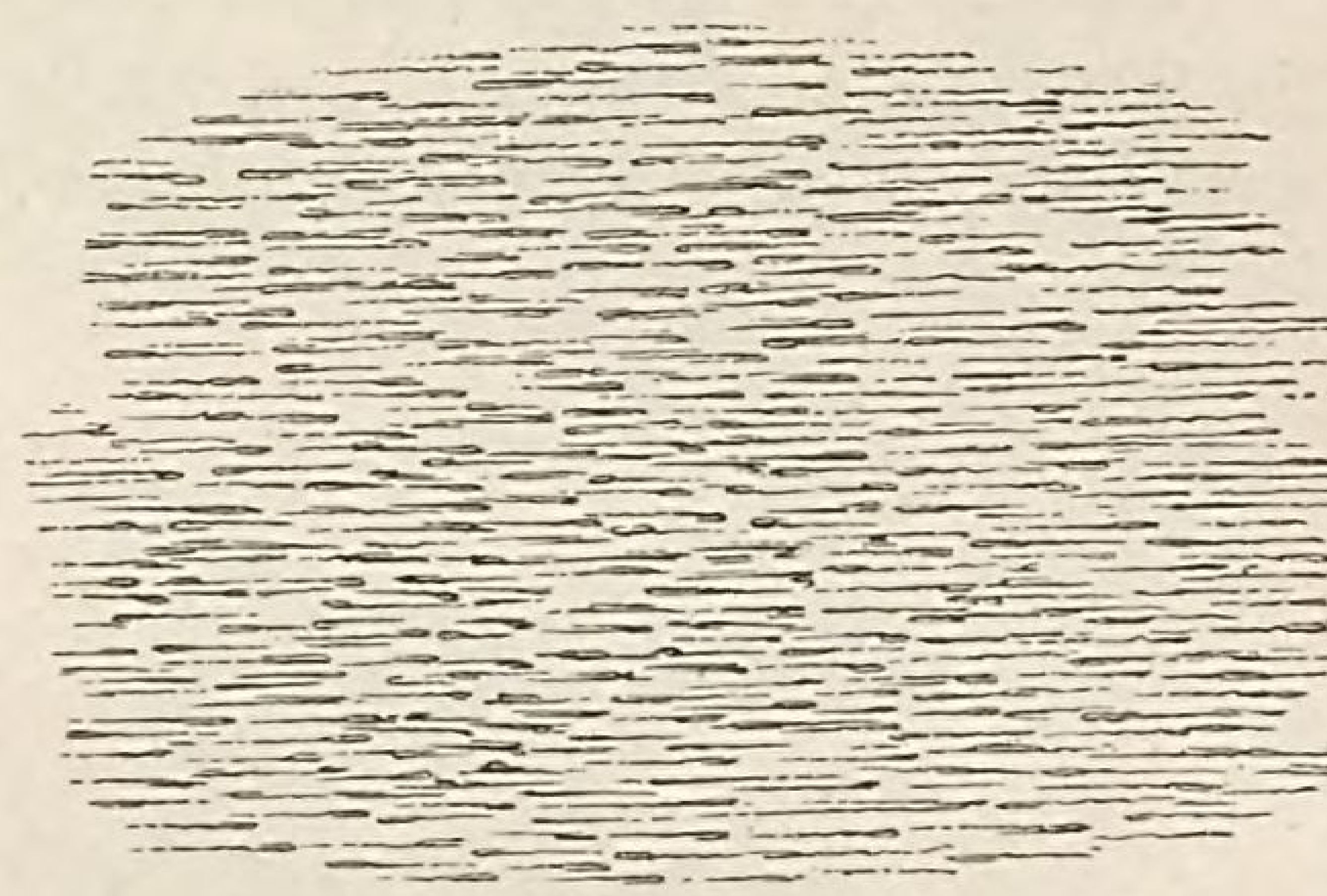


Fig. 305.

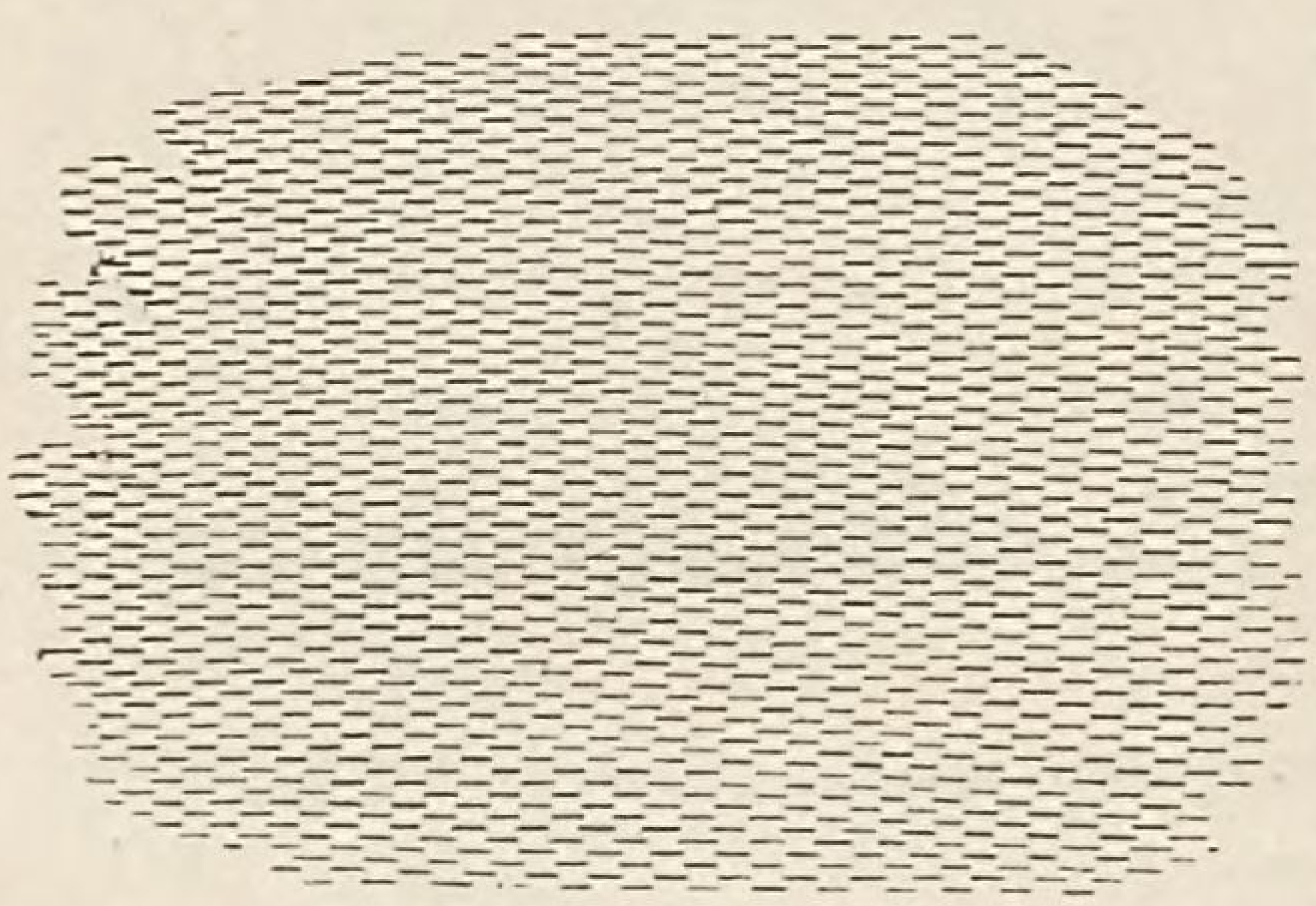


Fig. 306.

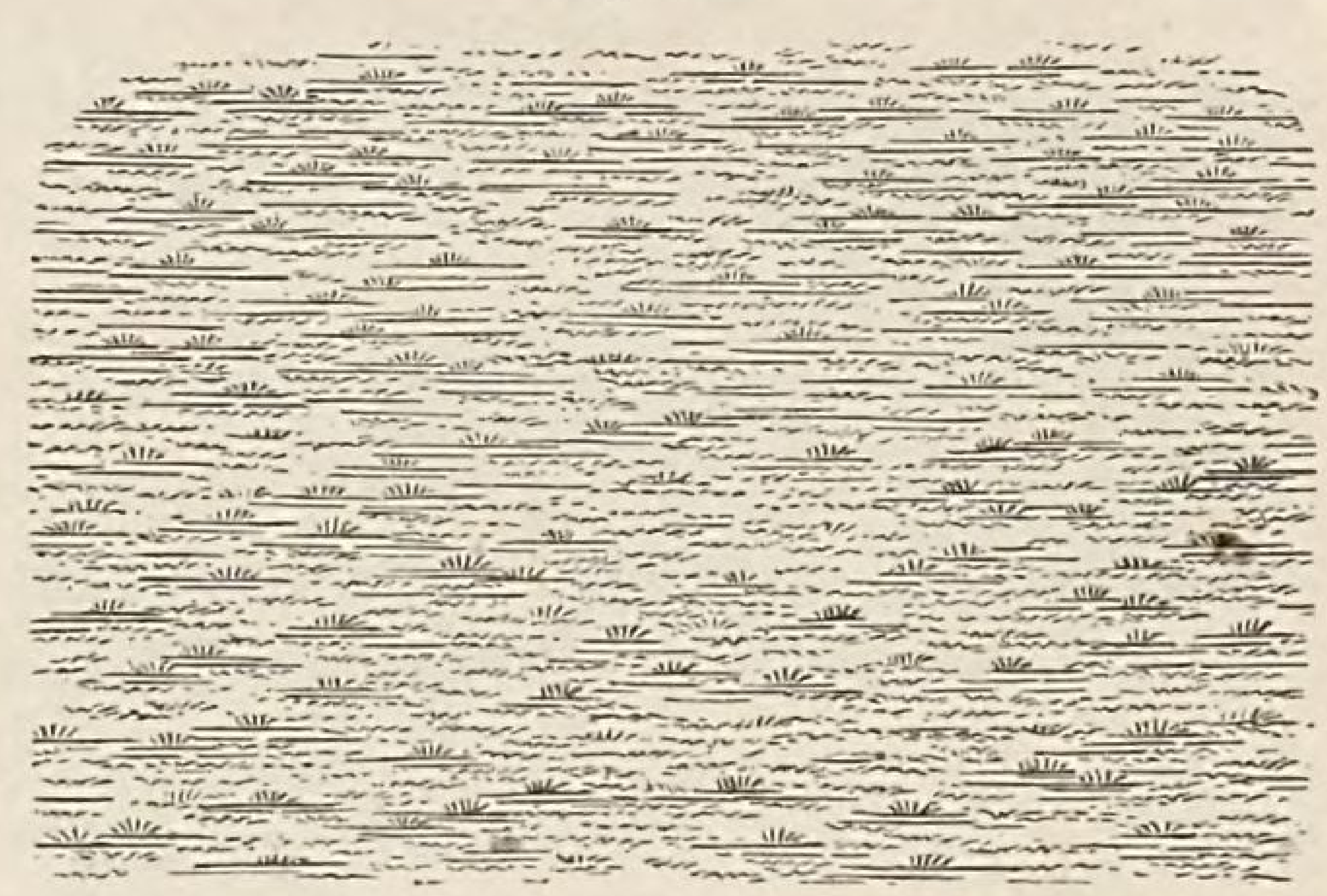


Fig. 307.

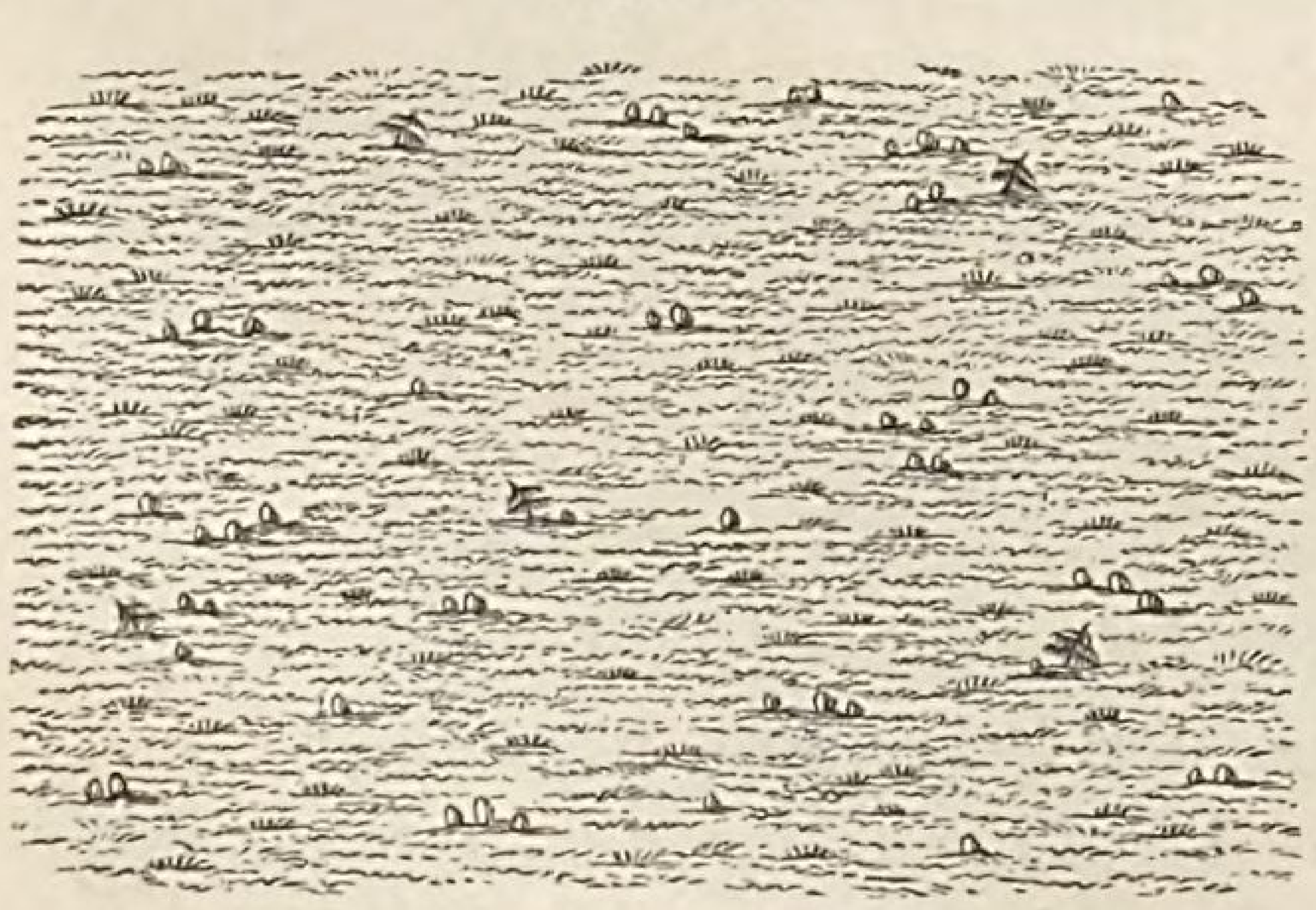


Fig. 308.



Lit. c. Ein Feld- oder Waldweg. Es soll immer die obere Linie ausgezogen und die untere punktirt werden. In farbigen Plänen legt man den Zwischenraum lichtbraun an.

Lit. d. Ein Fussweg. Statt dieser Bezeichnung wird häufig auch nur eine aus Strichen und Punkten zusammengesetzte Linie angewendet.

Lit. e. Ein Damm (Erdschüttung, Auftrag). In farbigen Plänen wird die Dammkrone blassroth angelegt und jede Böschung mit Carmin verwaschen.

Lit. f. Ein Hohlweg (Trockengraben, Einschnitt). In farbigen Plänen legt man die Sohle lichtbraun und die Böschungen gelb an, letztere verwaschen.

Lit. g. Ein Knüppelweg. Die Querstriche bezeichnen die Knüppel. Die lichten Stellen macht man in farbigen Plänen, je nach der Bedeutung des Wegs, blassroth oder lichtbraun.

Fig. 309.

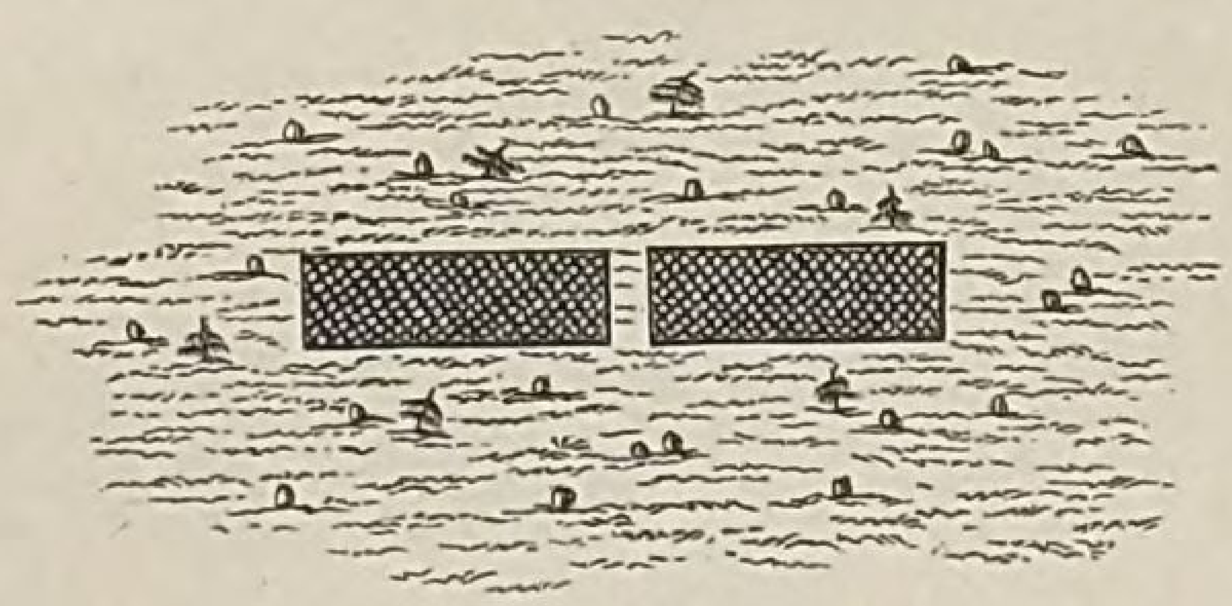


Fig. 313.

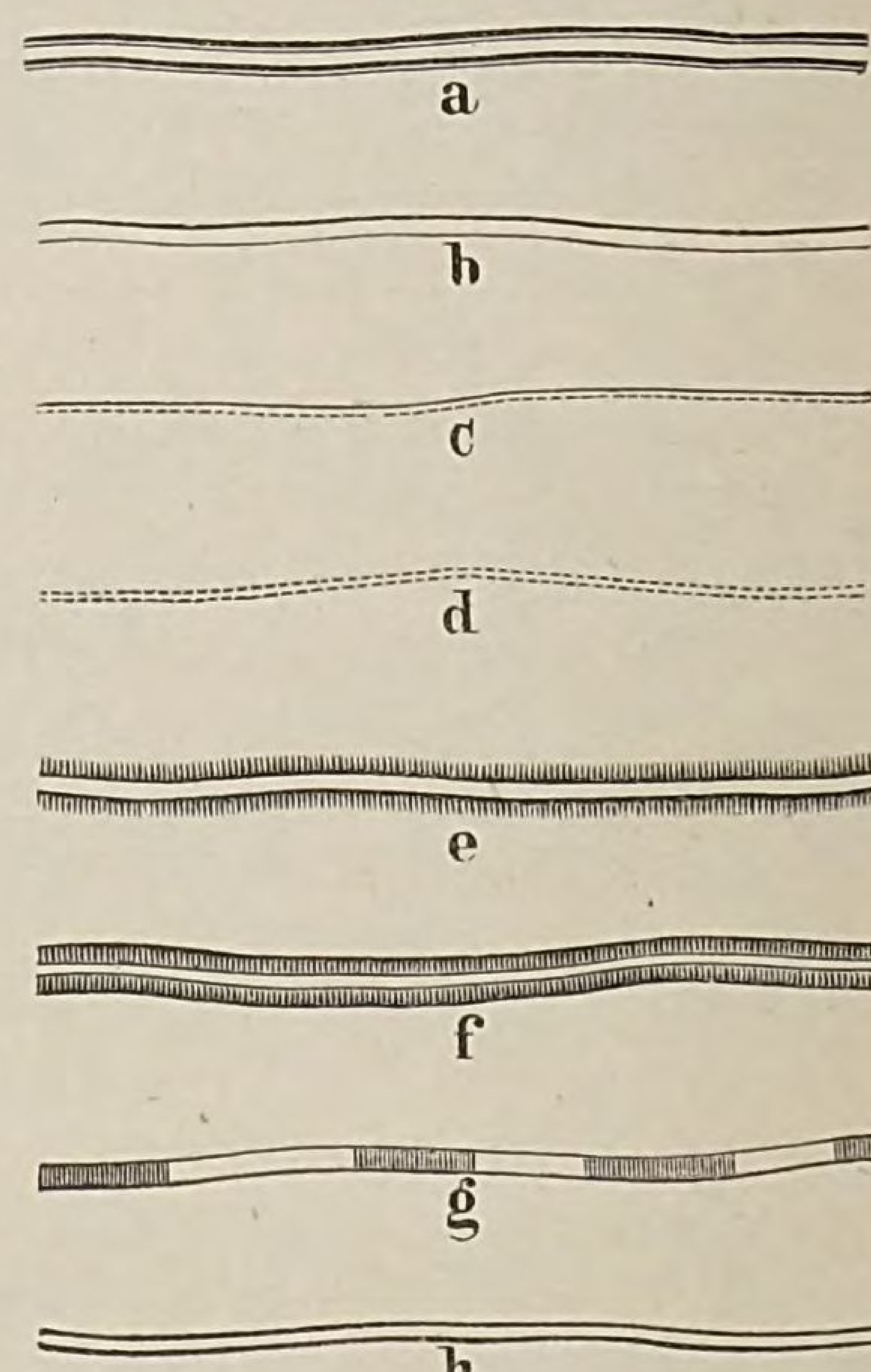


Fig. 310.

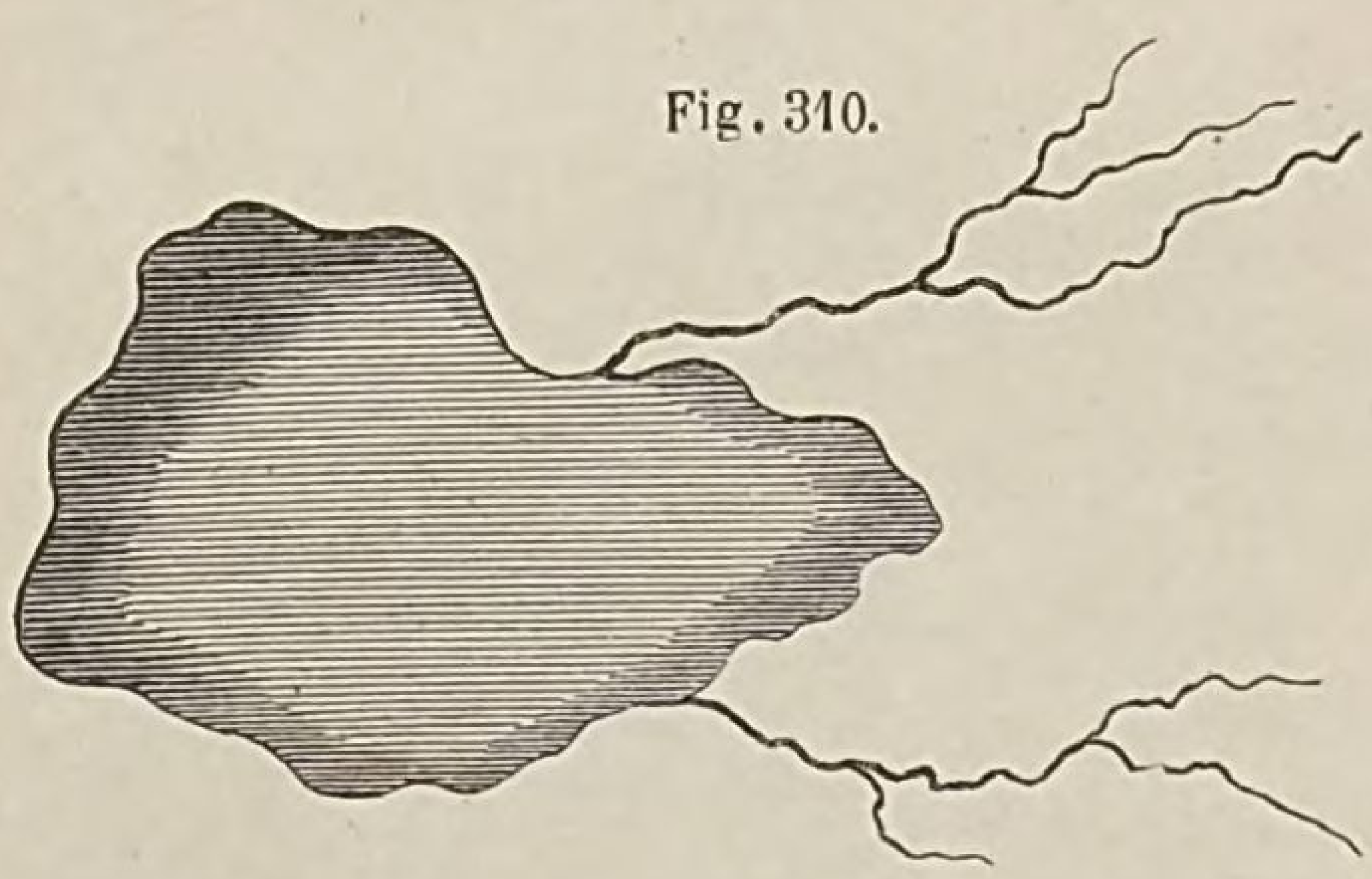


Fig. 311.

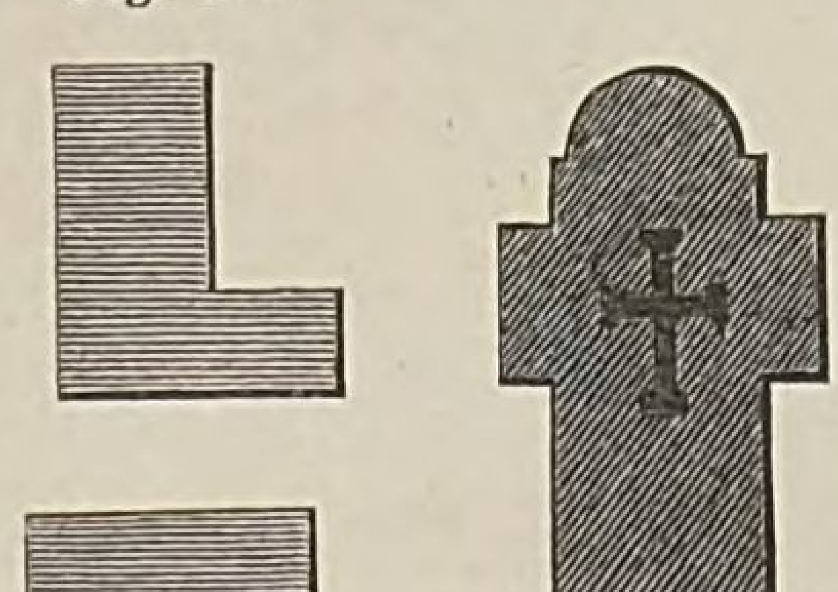
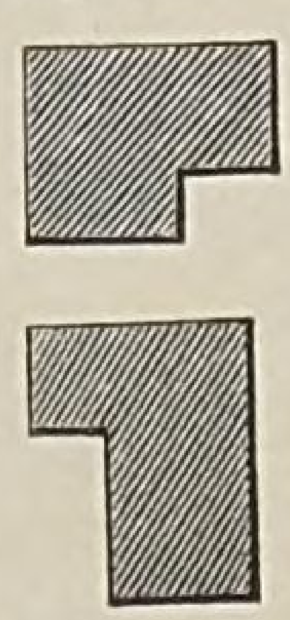


Fig. 312.



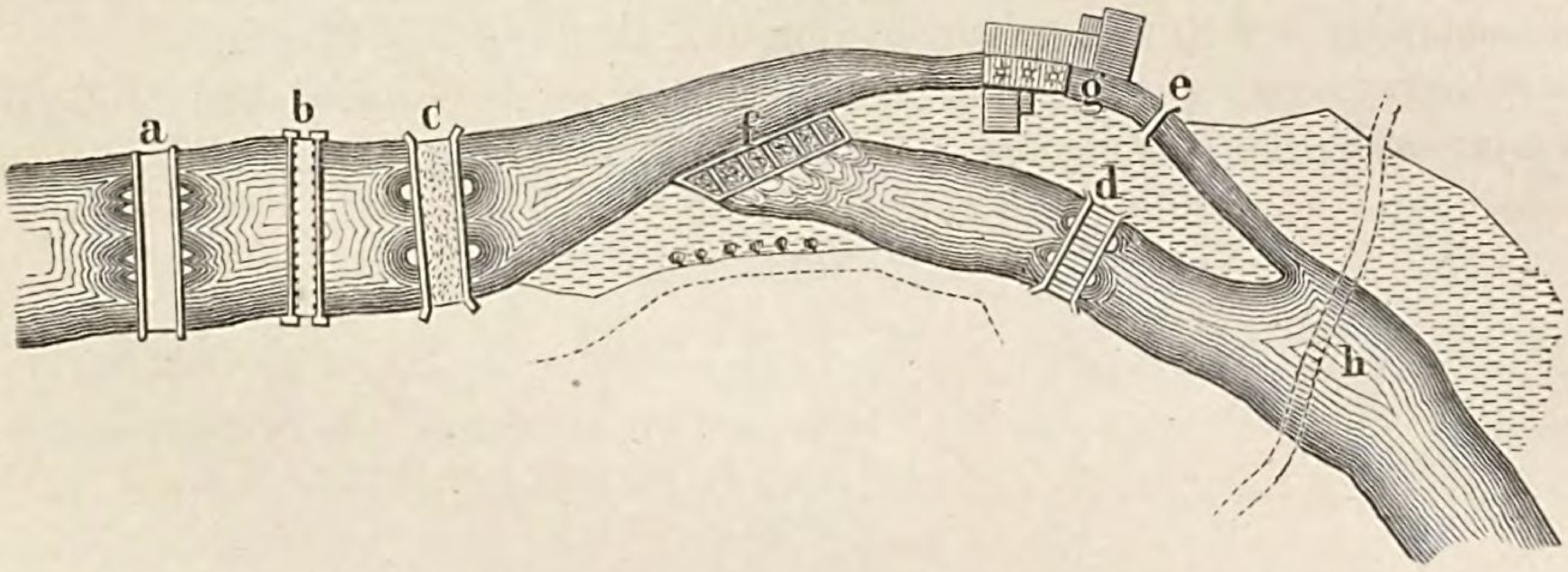
Lit. h. Eine Eisenbahn. Nebenbei werden grosse Aufdämmungen nach Lit. e und bedeutende Einschnitte nach Lit. f angedeutet. In farbigen Plänen kann man die beiden Grenzlinien der Bahnkrone blau ausziehen.

Von den Brücken gibt man die Hauptlinien der horizontalen Projection an; in farbigen Plänen werden die steinernen roth, die hölzernen gelb, die eisernen graublau angelegt.

In Fig. 314 bezeichnet: a eine Schiffbrücke bei welcher je zwei Schiffe (Pontons) ein Joch bilden, b eine eiserne und insbesondere eine Kettenbrücke, c eine steinerne, d eine hölzerne Brücke, e einen Steg. An seichten Stellen der Flüsse werden die Brücken bisweilen durch Furthen (h) ersetzt.

Kommen in colorirten Zeichnungen Brücken vor, so bleibt die Form dieselbe wie in schwarzen Plänen, aber das vorherrschende Baumaterial wird, je nachdem es Stein, Holz oder Eisen ist, durch rothe, gelbe oder blaue Farbe angedeutet.

Fig. 314.

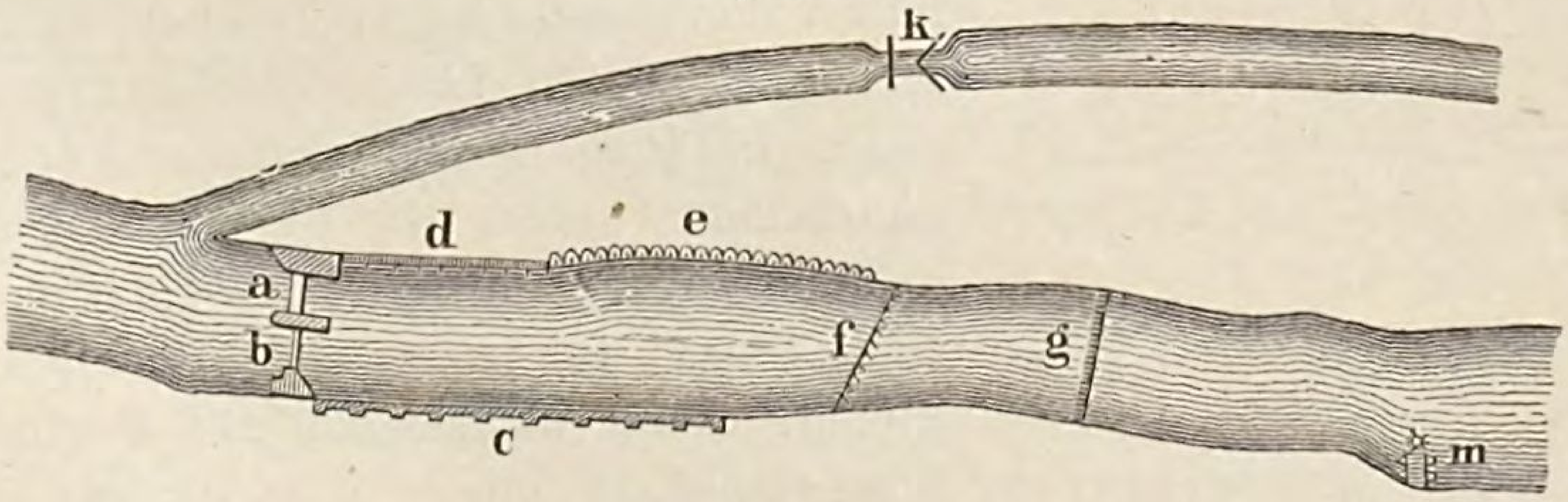


Die Wasserbauten werden in schwarzen oder farbigen Plänen nach ihren Grundformen und ihrer Grösse dargestellt und man unterscheidet dabei, ob sie aus Stein oder Holz, oder aus beiden zugleich bestehen. In Fig. 315 bedeutet a eine steinerne und b eine hölzerne Schleuse; erstere wird in farbigen Plänen carminroth, letztere aber hellgelb (Gummigutt) angelegt.

Lit. c stellt ein steinernes und d ein hölzernes Beschlächt vor; in colorirten Plänen legt man jenes carminroth, dieses unter Weglassung der Schraffirung hellgelb an. Lit. e ist ein Flechtwerk welches auch in farbigen Plänen in ähnlicher Weise wie hier behandelt wird. Dasselbe gilt von dem in f dargestellten Holzrechen und den mit g bezeichneten Ueberfällen. Ein grösseres Ueberfallwehr ist in Fig. 314 durch den Buchstaben f angedeutet.

Lit. k stellt eine Kammerschleuse vor: aus Steinen gebaut wird sie in farbigen Plänen wie Mauerwerk, aus Holz wie Zimmerwerk behandelt.

Fig. 315.



Lit. m ist eine Schiffmühle: das vorne angebrachte Sternchen bezeichnet hier (ähnlich wie bei den feststehenden Mühlen) den Ort des Wasserrads. In farbigen Plänen lässt man die Schraffur ganz weg und behandelt die Figur mit einem blassgelben Farbenton. Eine Landmühle ist in Fig. 314 mit g bezeichnet.

Zu den Wasserbauten sind auch die Triftklausen oder jene ganz oder halb massiven Schleusenwehre zu rechnen welche in grossen Wäldern quer durch Schluchten gebaut werden, um Quellen und kleine Bäche so weit aufzustauen dass sie nach Oeffnung der Schleusenthore im Stande sind das in dem Klausenhofe angesammelte Holz den Berg hinab zu triften. Die Bezeichnung der Klause geschieht durch Andeutung des Wehrs.

Befestigungen werden ebenfalls nach ihren Grundformen und der Verjüngung des Plans entsprechend horizontal projicirt. Böschungen werden

Fig. 316.

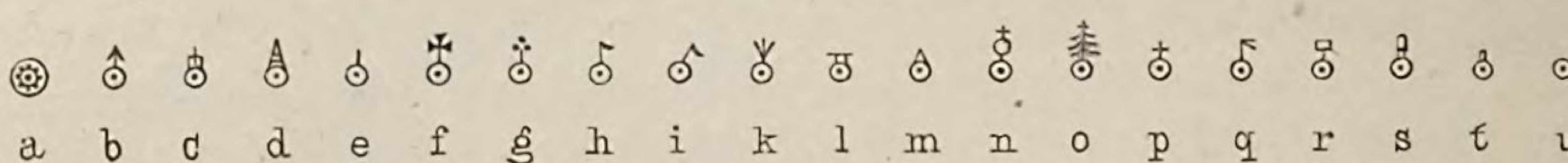
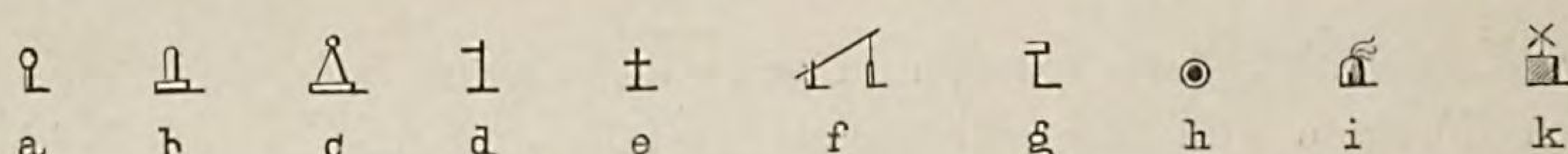
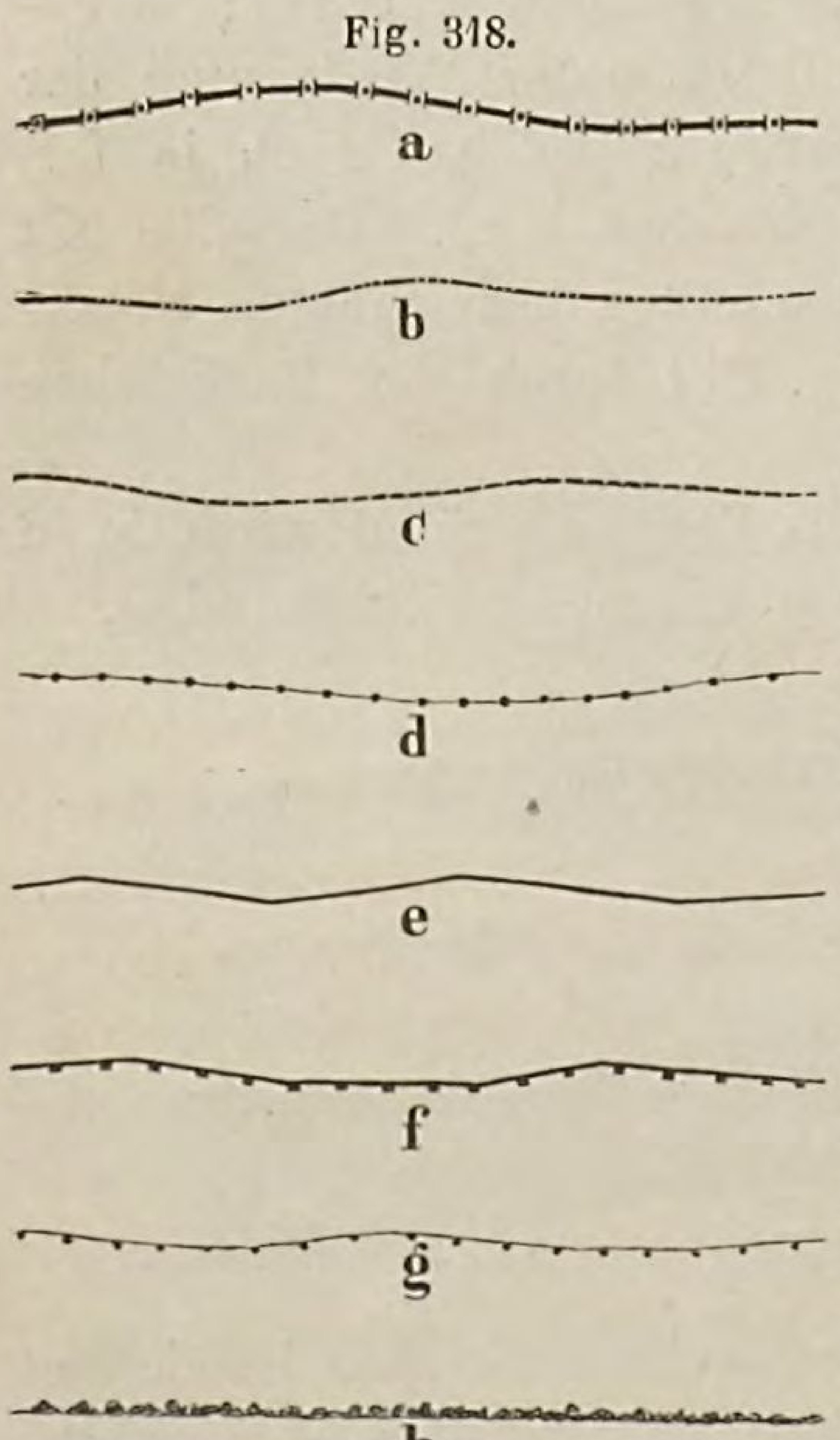


Fig. 317.



nach dem Grade ihrer Neigung heller oder dunkler schraffirt; die Sohle trockener Gräben ist in schwarzen Plänen zu punktiren, in farbigen aber lichtbraun anzulegen; nasse Gräben werden dagegen in schwarzen und farbigen Plänen wie Flüsse behandelt. Für Mauer-, Holz- und Eisenwerk gelten die schon bekannten Unterscheidungszeichen.

Fig. 318.



Für Signale, Monumente und die übrigen künstlichen Gebilde welche unter den vorhergehenden nicht begriffen und auch keine Grenzen sind, bedient man sich der in Fig. 316 und 317 enthaltenen, gleichmässig für schwarze und farbige Pläne geltenden Bezeichnungen. Die Fig. 316 enthält vorzugsweise solche Zeichen welche bei Netzanlagen für Landesvermessungen und daher in Plänen von starker Verjüngung gebraucht werden. In derselben bedeutet: a einen Normalpunkt (§. 135), b ein massives Signal für eine Basis, c ein Gerüst-Signal, d ein dergleichen mit Dach, e ein Stecksignal, f einen Kirchthurm, g eine Kapelle, h ein bewohnbares Schloss, i eine Schlossruine, k einen Blitzableiter, l einen Kamin, m einen Dachgiebel, n ein Baumsignal (Laubholz), o ein dergleichen von Nadelholz, p ein Feldkreuz, q einen Wegweiser, r eine Ortstafel, s eine Martersäule, t einen Markstein,

u einen untergeordneten Netzpunkt. In Fig. 317 bezeichnet: a einen Bildstock, b einen massiven Meilenzeiger, c ein Monument, d einen Wegweiser, e ein Feldkreuz, f einen Schlagbaum, g eine Orts- und Warnungstafel, h eine Kohlstätte (Meiler), i einen Kalkofen, k eine Windmühle.

Für Begrenzungen sind folgende Bezeichnungen im Gebrauche (Fig. 318): a Landesgrenzen, b Kreisgrenzen, c Bezirks- oder Landgerichtsgrenzen, d Gemeinde- und Flurgrenzen, e einfache Umfassungsmauern, f Umfassungsmauern mit Strebepfeilern, g Bretterwände, h lebendige Zäune.

2. Herstellung der Horizontalpläne.

§. 270. Messtischaufnahmen anzufertigen. Die Horizontalpläne werden entweder mit oder ohne Messtisch aufgenommen. In dem ersteren Falle werden die Umrisse des Plans schon bei seiner Aufnahme gezeichnet, und er bedarf nur noch der Vollendung oder Ausfertigung; in dem letzteren Falle aber ist der Plan aus den Messungs- und Rechnungsergebnissen erst herzustellen, und es wird seine Anfertigung ausschliesslich im Arbeitszimmer des Geometers vorgenommen.

Die Ausfertigung der mit dem Messtische aufgenommenen Pläne geschieht entweder mit oder ohne Farbe. In Bezug auf die schwarzen Pläne ist zu bemerken dass sie grösstentheils schon während der Aufnahme mit guter schwarzer Tusche ausgezogen werden, so dass nach der Aufnahme die dargestellten Objecte nur noch mit den in den §§. 268 und 269 abgebildeten üblichen Zeichen zu versehen, der Massstab der Aufnahme beizufügen und die Schrift auszuführen ist welche zum Verständniss des Plans erfordert wird. Sollen in den Horizontalplan Schichtenlinien eingezeichnet werden, um zugleich die Erhöhungen und Vertiefungen des Bodens anschaulich zu machen, so ist zu rathen dass man diese Linien selbst in einem schwarzen Plane mit farbiger Tusche ausziehe, um jede Veranlassung zu Zweifeln über die Grenze der dargestellten Objecte abzuschneiden. Am natürlichsten erscheint es diese Curven braun und nur jede fünfte oder zehnte vor den übrigen durch eine besondere Farbe (etwa grün) auszuzeichnen, um hierdurch den Ueberblick der Figurirung des Terrains zu erleichtern. Farbige Pläne werden der Hauptsache nach zunächst wie schwarze Pläne behandelt, nur dass bei der Auszeichnung mit Tusche in den Planzeichen die Schraffirungen und Punktirungen wegbleiben welche durch die Farbe selbst ersetzt werden und worüber die beiden vorhergehenden Paragraphen Aufschluss geben. Die Behandlung der Farben wird als bekannt vorausgesetzt und bezüglich der Horizontalcurven, des Massstabs und der Schrift gelten die für schwarze Pläne gemachten Bemerkungen.

§. 271. Pläne nach Coordinatenmessungen anzufertigen. Die ersten Arbeiten zur Herstellung dieser Pläne bestehen darin dass man das aufgespannte Papier mit einem genau construirten Quadratnetze über-

zieht dessen Seiten den für die Berechnung der Aufnahme gewählten Coordinatenaxen parallel laufen. Die Quadratseiten des Netzes macht man für die Massstäbe 1 : 5000, 1 : 2500, 1 : 1200 beziehlich $^1/_2$, 1, 2 Decimalzoll lang, so dass jede Seite in der Natur eine Länge von 250 Fuss hat; und wenn die Verjüngungen 1 : 4000, 1 : 2000, 1 : 1000 sind, so macht man auf den Plänen die Quadratseiten abermals beziehlich $^1/_2$, 1, 2 Decimalzoll lang, so dass jede Seite einer natürlichen Länge von 200 Fuss entspricht. Wählt man von den Netzpunkten einen entsprechenden als Anfangspunkt der Coordinaten der Stationen so ergeben sich damit auch die Axen des Blatts, und es wird keiner Schwierigkeit unterliegen, unter Berücksichtigung des in §. 142 auseinander gesetzten Verfahrens, diese Stationspunkte selbst richtig in das Plannetz einzutragen. Hat man diese Punkte, so sind damit wiederum untergeordnete Abscissenaxen für die Aufnahme von Grenzen oder anderen Linien etc. gegeben welche sich also auch leicht in den Plan eintragen lassen. Um die übrigen Punkte zu erhalten, ahmt man die zu ihrer Aufnahme auf dem Felde angewendeten Constructionen auf dem Papiere nach. Geschieht es dabei dass ein Punkt als der Schnitt zweier Linien bestimmt wird welche durch Stationspunkte gehen, die ausserhalb des Planrands liegen, so sind jedesmal nach den bekannten einfachen Sätzen der Trigonometrie oder analytischen Geometrie die Coordinaten des Schnittpunkts zu berechnen und danach aufzutragen; denn es würde zu unsicher und zeitraubend sein wenn man die ausser dem Plane liegenden Stationspunkte erst construiren wollte, um durch eine entsprechende Verbindung derselben den gesuchten Punkt sofort direct zu erhalten. Findet man die gerade Verbindungslinie zweier Punkte welche für die Aufnahme von Details mit der Kette als Abscissenaxe diente, grösser oder kleiner als sie der wirklichen Messung nach sein soll, und ist die Differenz keinem groben Versehen beim Messen oder Auftragen zuzuschreiben: so müssen entweder die gemessenen Abscissen auf die im Plane gegebene Länge der Abscissenaxe, oder es muss diese auf die gemessenen Abscissen reducirt werden. Das erstere Verfahren ist für sich klar; zur Erläuterung des zweiten welches intelligente Praktiker vorziehen, dürfte ein einfaches Beispiel genügen.

Hat nämlich die Kettenmessung für eine Linie 784,2′ und der Plan nur 781,2′ ergeben so verlängert man die Linie auf dem Plane um 800 — 784,2 = 15,8, so dass deren Gesammtlänge jetzt = 781,2′ + 15,8 = 797′ ist, und nimmt diese Länge für 800′ an. Theilt man diese Länge in 8 gleiche Theile, so wird jeder 99,6′ statt 100′ lang. Die Differenz von 0,4′ ist bei Massstäben welche kleiner als 1 : 2000 sind, kaum mehr sichtbar und darf daher wohl vernachlässigt werden. Ist der Massstab grösser als 1 : 2000 oder die Differenz grösser als hier, so braucht man nur die Anzahl der Theile in welche man die reducirte Linie zerlegt, zu vergrössern, um die Theildifferenzen so klein zu erhalten dass sie vernachlässigt werden dürfen.

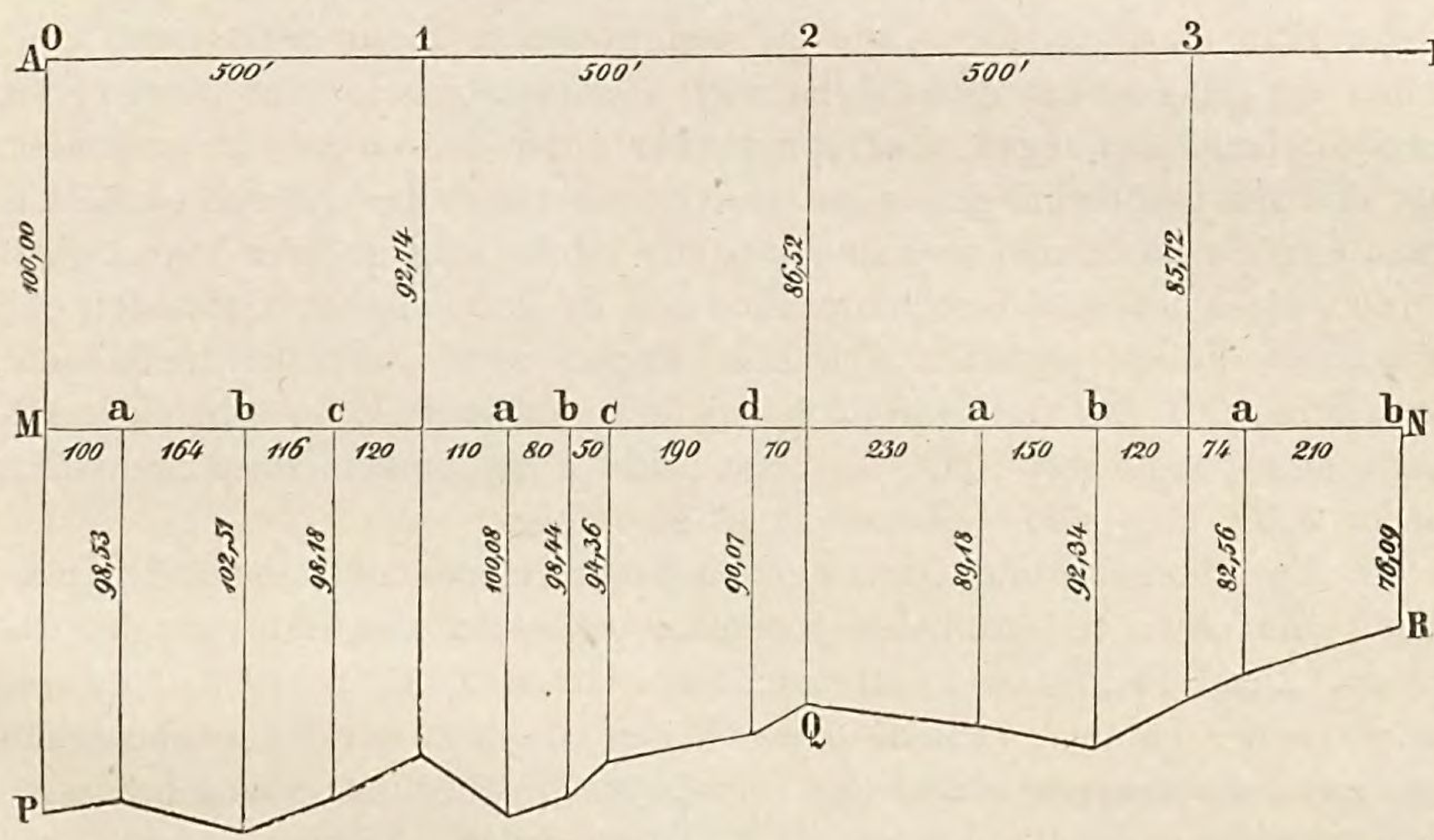
Man begreift dass sich das in vorstehendem Beispiele versinnlichte Verfahren auch anwenden lässt um eine geneigte Abscissenlinie, die nicht horizontal sondern dem stetig steigenden oder fallenden Boden entlang gemessen worden ist, auf den Horizont zu reduciren. Ist man so weit gekommen dass alle Punkte und Linien aufgetragen und alle Umrisse mit Tusche ausgezogen sind so wird der Plan nach §. 270 ausgefertigt.

B. Vertical- oder Nivellementspläne.

1. Längenprofile.

§. 272. Die Zeichnung eines Längenprofils der Erdoberfläche besteht der Hauptsache nach in dem Auftragen der gemessenen und berechneten

Fig. 319.



Abscissen und Ordinaten aller Brechungs- und Abtheilungspunkte der nivellirten Linie. Da dergleichen Profile oft sehr lang sind, so kommt es darauf an die Zeichnung möglichst übersichtlich zu machen. Zu dem Ende ist es Gebrauch:

1. Die Horizontalprojection der Linie nach welcher das Terrainprofil genommen wird, auf dem Felde schon in gleiche Abschnitte von einer in runder Zahl auszudrückenden Länge (z. B. 100 Meter, 100 Klafter, 100 Ruthen, 500 Fuss, 1000 Fuss etc.) zu theilen und diese Abtheilungspunkte von 0 angefangen fortlaufend zu numeriren. Diese Numerirung gibt sofort die Längen der Abscissen an; denn beträgt eine Abtheilung 100 Ruthen à 10 Fuss, so gibt die Abtheilungs- oder Profilnummer 37 an dass der damit bezeichnete Punkt 3700 Ruthen oder 37000 Fuss vom Anfangspunkte der Linie entfernt sei. Diese Hauptabtheilungen werden in der Zeichnung

auf die Weise hervorgehoben, wie Fig. 319 zu erkennen gibt, in der die Linie A H den Horizont bezeichnet auf den sich die Abstände der Terrainpunkte beziehen. Es ist ferner Gebrauch:

2. die zwischen den Hauptpunkten liegenden Brechungspunkte des Terrains auf dem Felde und in der Zeichnung durch Buchstaben zu benennen, wie dieses abermals aus der vorstehenden Figur zu entnehmen ist. Würde man die Buchstaben a, b, c auch über die Linie A H setzen, so liessen sich die Ziffern 1, 2, 3 nicht mehr so gut übersehen, als dieses der Fall ist wenn man in einer Entfernung von 1 bis 2 Zoll eine Parallele M N zu A H zieht und über diese Parallele den Namen der Zwischenpunkte setzt. Wenn auch in der Zeichnung die Ordinaten dieser Punkte nur bis an die Linie M N ausgezogen sind, so beziehen sich die beigeschriebenen Verticalabstände doch auf die durch A H angedeutete gemeinsame Horizontalebene. Weiter ist es gebräuchlich:

3. die horizontalen Entfernungen der einzelnen Profilpunkte unter sich in den Plan einzuschreiben, wie die mehrgenannte Figur zeigt; und zwar stehen die Längen der Hauptabtheilung unmittelbar unter der oberen, die der Zwischenabtheilungen aber unmittelbar unter der unteren Horizontalen. Für die Hauptabtheilungen wäre das Einschreiben der Längen unnöthig, wenn es nicht manchmal vorkäme dass eine Abtheilung grösser oder kleiner werden muss als das bestimmte Mass; z. B. bei Flüssen, Gebäuden etc. In solchen Fällen ergänzen sich aber immer zwei Nachbarabtheilungen; denn kann z. B. die eine nur 920′ lang gemacht werden so erhält die folgende eine Länge von 1080′, so dass beide Abtheilungen zusammen doch wieder 2000′ lang sind. Ebenso ist es eingeführt:

4. die Abscissen und Ordinaten nach verschiedenen Massstäben aufzutragen und zwar die Ordinaten in einem grösseren Massstabe als die Abscissen. Der Höhenmassstab ist nach Erforderniss 5, 10, 20, 100mal grösser als jener der Längen. Durch diese Verschiedenheit der Massstäbe erhält man zwar ein verzerrtes Bild des Terrainprofils, aber man übersieht dessen Steigungen und Gefälle besser. Es hindert jedoch Nichts, Längen und Höhen nach einerlei Massstab aufzutragen wenn man dazu Lust oder sonst wie Veranlassung hat. Endlich ist es ein allgemeines Uebereinkommen:

5. alle Linien, Zahlen und Worte welche sich auf das natürliche Terrain beziehen, schwarz, jene aber welche sich auf ein herzustellendes Bauwerk, z. B. eine Strasse, Eisenbahn, einen Canal, Durchstich etc. beziehen, roth zu zeichnen und zu schreiben, um durch diese Farben das Bestehende von dem Werdenden oder den auf dem Terrain vorzunehmenden Veränderungen anzuzeigen.

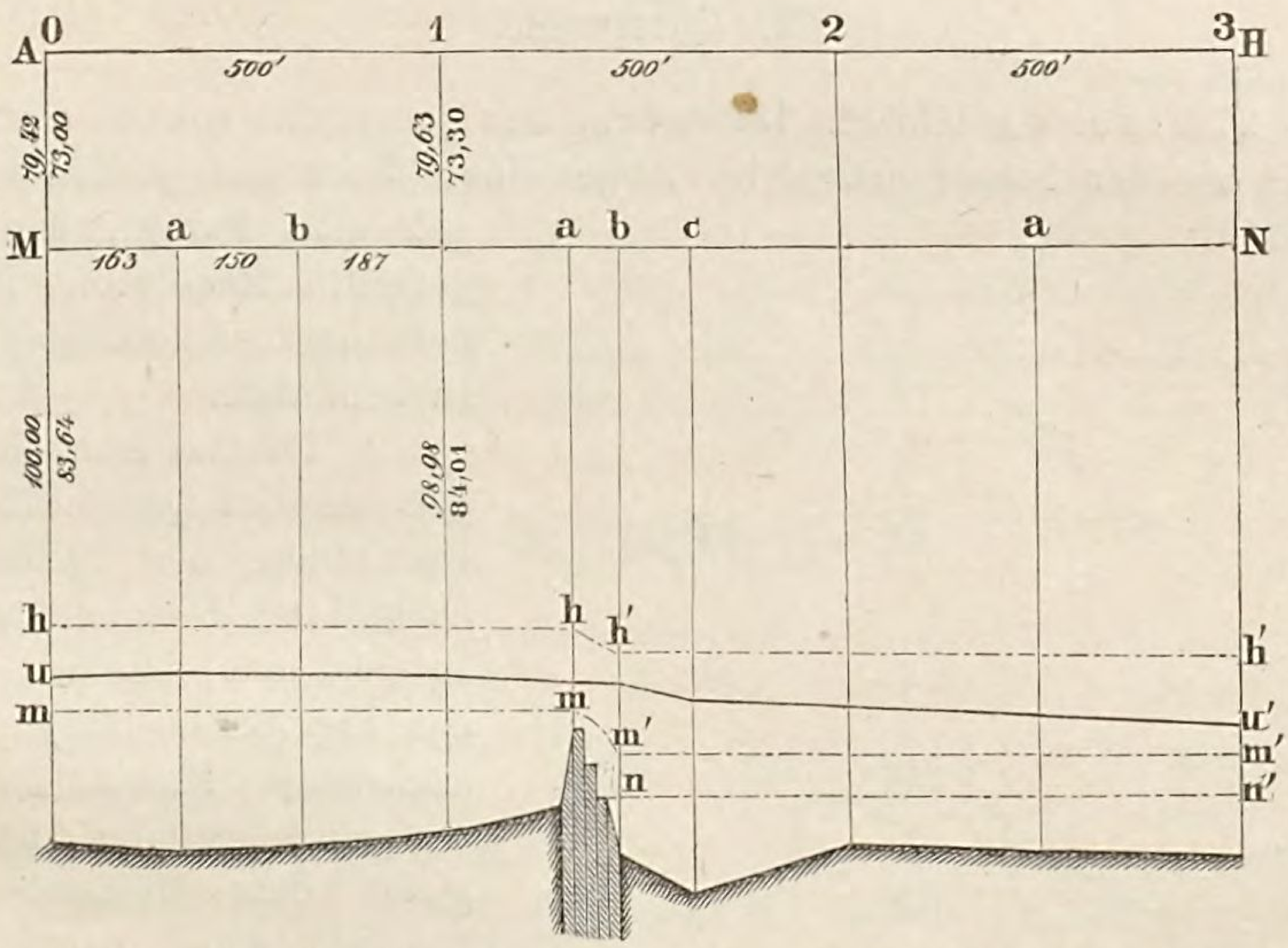
Näher hierauf einzugehen liegt ausser dem Zwecke dieses Buchs und gehört in das Reich des Ingenieurwesens; wen es jedoch interessirt die gebräuchliche Anlage und Ausstattung von Nivellementsplänen für Erdbauwerke näher kennen zu lernen, findet dergleichen in des Verfassers „Vorlegeblättern zur Strassen- und Eisenbahnbaukunde mit erläuterndem Texte“

welche (zum Theil in Farbendruck) im Jahre 1856 in der literarisch-artistischen Anstalt der J. G. Cotta'schen Buchhandlung zu München erschienen.

§. 273. Das Längenprofil eines Flusses unterscheidet sich von dem einer trockenen Terrainstrecke nur insofern, als es ausser dem Nivellement der Stromrinne oder des Thalwegs welches gerade wie ein Terrain-Längenprofil dargestellt wird, noch die Wasserspiegel des Flusses bei verschiedenen Wasserständen und in der Regel auch ein Ufer desselben bildlich darstellt. Nehmen wir an dass das Nivellement des Flusses nach §. 233 aufgenommen und das des Thalwegs nach §. 272 aufgetragen sei, so ist hinsichtlich des Einzeichnens der Wasserspiegel und des Flussufers unter Bezugnahme auf Fig. 320 welche ein Stück eines Flussnivellements vorstellt, noch Folgendes zu bemerken:

1. Die Linien und Zahlen welche sich auf die Wasserstände beziehen,

Fig. 320.



werden blau gezeichnet und geschrieben. Da wir aber diese Farbe in Fig. 320 nicht anwenden konnten so haben wir die Wasserspiegel durch gestrichelt-punktirte Linien (—·—·—) und die sich auf sie beziehenden Zahlen durch stehende Schrift angedeutet. Die übrigen an den Ordinaten 0 und 1 sich befindenden Zahlen beziehen sich auf den Thalweg und das Flussufer und gehen denen für die Wasserstände jederzeit voraus.

2. Ob die blauen Zahlen dem Hochwasser (h, h′), oder dem Mittelwasser (m, m′), oder dem Niederwasser (n, n′) angehören, ergibt die Ansicht der Zeichnung ohne Weiteres. Ebenso versteht es sich von selbst welche schwarze Zahl dem Thalwege und welche dem Ufer angehört. Die Uferlinie wird ebenfalls schwarz ausgezogen.

3. Für den Gebrauch des Längenprofils eines Flusses ist es bequemer

dasselbe so abzustecken und abzubilden dass die fortlaufenden Nummern der Hauptabtheilungen und die Schrift welche auf den Plan gehört, in der Richtung des Flusslaufs stehen. Man kann zwar ein Nivellement welches in der entgegengesetzten Richtung aufgenommen und gezeichnet ist, ebenso gut wie das vorige gebrauchen; aber es tritt dem der an die erstere Darstellungsweise gewöhnt ist — und das ist wohl der grössere Theil der Ingenieure — einigermassen störend entgegen.

4. Die Befolgung der hier gegebenen Regeln setzt keineswegs, wie oft behauptet wird (z. B. in Bachmann's „Theorie und Praxis des Nivellirens", Weimar 1838, S. 185), voraus dass die Aufnahme auf dem linken Flussufer geschehen müsse: sie kann unbeschadet der Darstellung ebenso gut auf dem rechten Ufer vorgenommen werden, da es offenbar gleichgiltig ist ob die sichtbare Uferlinie (u, u') diesseits oder jenseits des Wasserprofils (m' m) liegt.

2. Querprofile.

§. 274. Für die bildliche Darstellung der Querprofile sowohl des festen Bodens als der Flüsse gelten im Allgemeinen die in den beiden vorhergehenden Paragraphen mitgetheilten Regeln; im Besondern ist aber noch Folgendes zu bemerken.

Fig. 321.

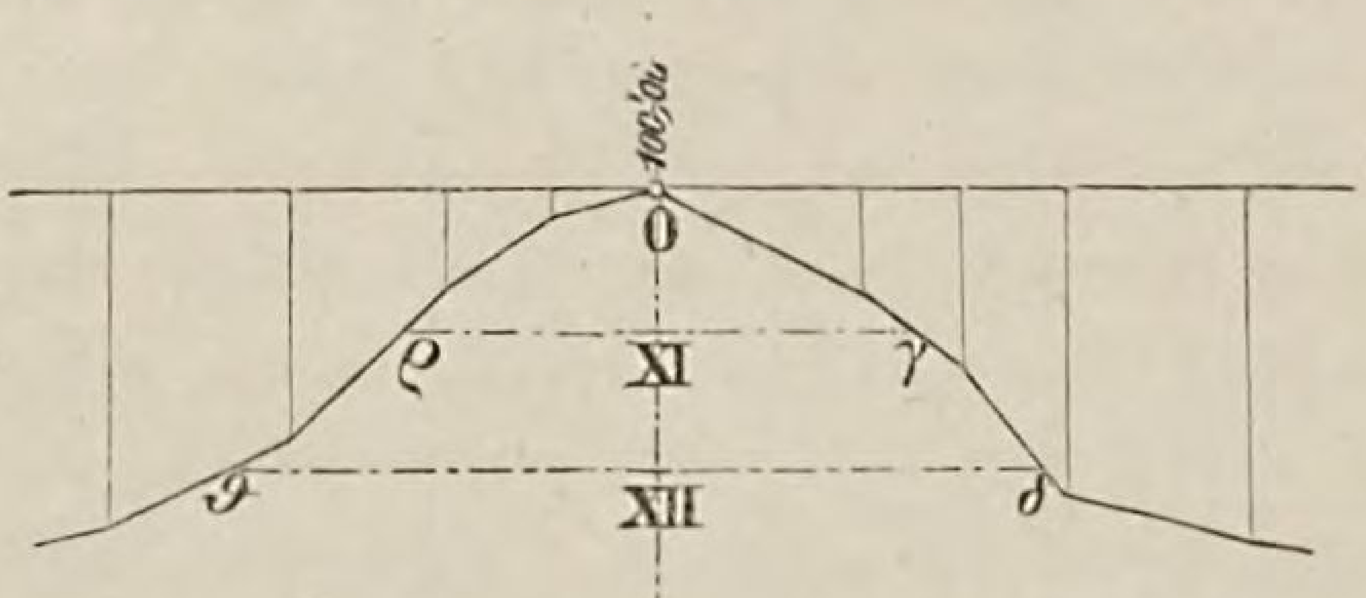


Fig. 322.

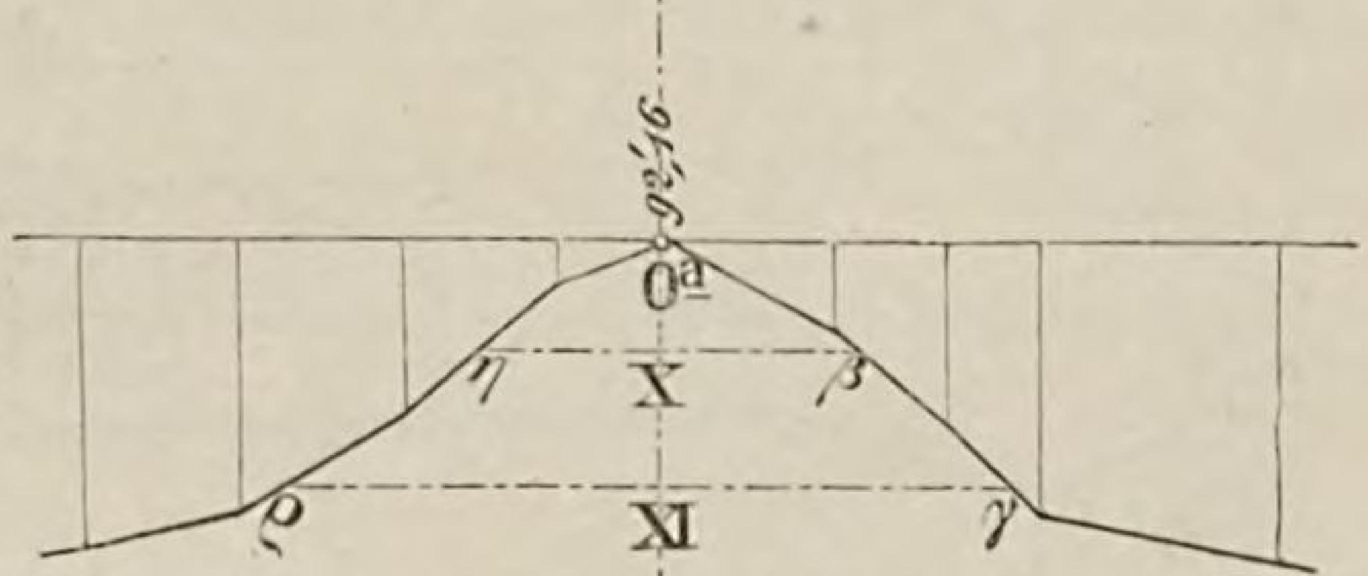
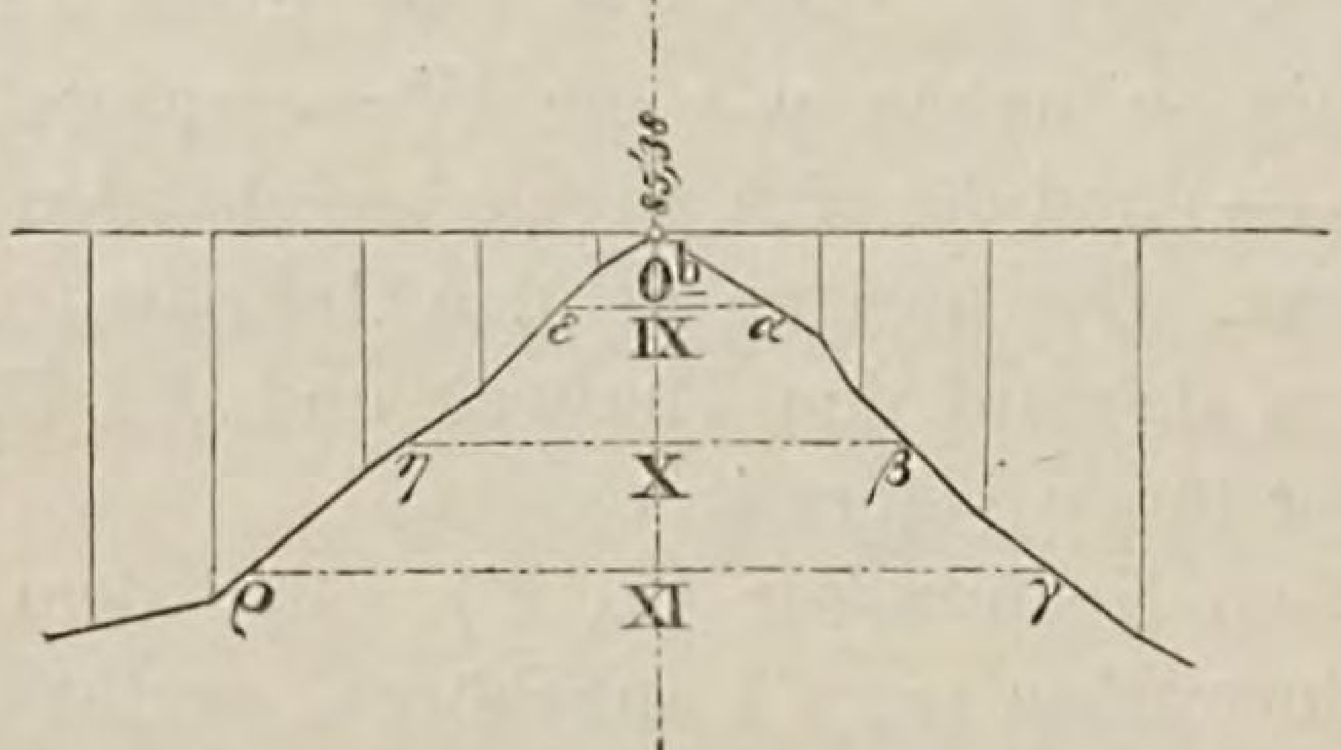


Fig. 323.



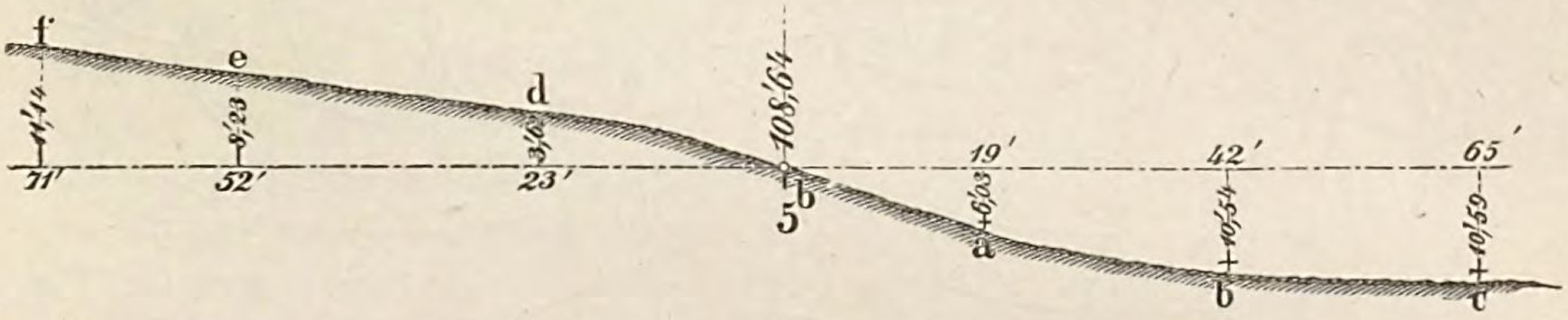
1. Benützt man die aufgenommenen Querprofile zur Darstellung der Bodenoberfläche durch Horizontalcurven, so trägt man dieselben (nach den Fig. 321 bis 323) in verschiedenen Massstäben auf und nimmt den der Abscissen gleich dem Massstabe des Horizontalplans worauf die genannten Curven verzeichnet werden sollen, den der Ordinaten aber 5 oder 10mal grösser.

2. Gebraucht man die Querprofile zur Berechnung von Erdmassen oder zu Constructionen für Erdbauwerke, so werden die Abscissen und Ordinaten wie in Fig. 324 in gleichem Massstabe aufgetragen, und dieser selbst wird so gross genommen dass man die Dimensionen der zu berechnenden Flächentheile des Profils noch mit der Genauigkeit abgreifen

kann welche die Rechnung oder die Construction erfordert. Der gebräuchlichste Massstab ist 1 : 100; weniger oft wird 1 : 200 oder 1 : 50 angewendet.

3. Die Querprofile der Flüsse werden entweder nach Fig. 320 oder 324 gezeichnet, je nachdem man sie bloss zur Darstellung der Beschaffenheit eines Flusses oder zu Erdberechnungen und Constructionen braucht; ausserdem werden in sie mit blauer Farbe die Wasserstände eingetragen, wie solche an der betreffenden Stelle des Längenprofils enthalten sind.

Fig. 324.



4. Schliesslich wiederholen wir die schon früher gemachte Bemerkung dass bei der Zeichnung der Querprofile die rechte und linke Seite derselben nicht verwechselt werden darf, wenn man nicht Gefahr laufen will die Construction oder Rechnung, wofür man solche Profile braucht, ganz zu entstellen und folglich unbrauchbar zu machen.

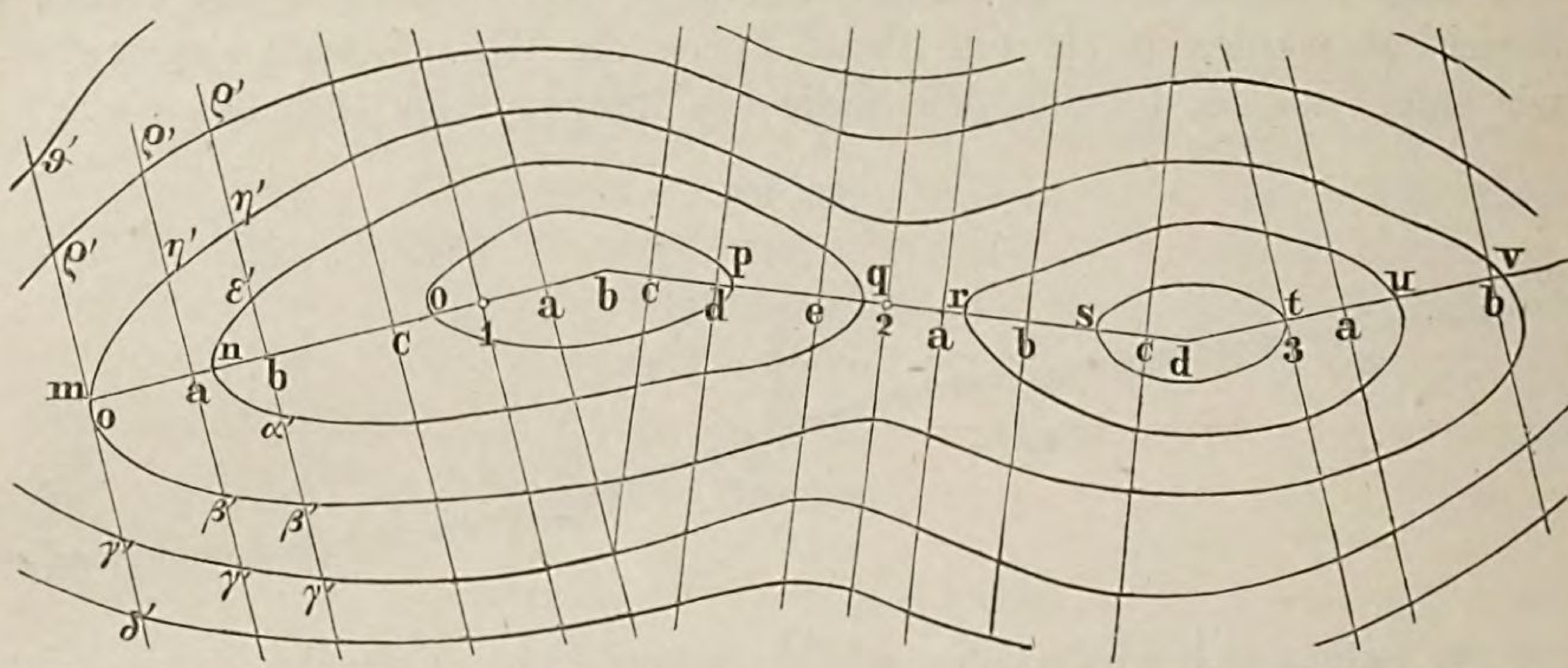
3. Horizontalcurven.

§. 275. Wie die Horizontalcurven aus gegebenen Terrainaufnahmen construirt werden, ist schon in den §§. 180 bis 185 gezeigt worden, da sich die Aufnahme derselben vollständiger erklären lässt, wenn man zugleich die verschiedenen Methoden die Curven daraus zu finden, kennt. Eben so haben wir früher schon daran erinnert dass es zweckmässig erscheine, selbst auf schwarzen Horizontalplänen die Schichtenlinien farbig (etwa braun) auszuziehen und bei sehr durchschnittenem Terrain jede fünfte oder zehnte Curve durch eine besondere Farbe (etwa grün) vor den übrigen auszuzeichnen, weil sich dadurch deren Gang und hiermit die Gestaltung des Terrains leichter erkennen lasse. In Fig. 189 §. 184 ist eine solche Curve (X) gestrichelt, während die übrigen ausgezeichnet sind; und in unseren „Vorlegeblättern zur Strassen- und Eisenbahnbaukunde" ist ein farbiger Situationsplan mit Horizontalcurven enthalten.

Ist eine Terrainfläche durch Horizontalcurven dargestellt, so lässt sich aus denselben nach jeder beliebigen Richtung ein Profil construiren. Denn angenommen, Fig. 325 stelle das Nivellement einer Fläche vor und der Abstand der Curve m vom allgemeinen Horizont sei = 100 Fuss, so wird man das Längenprofil nach der Richtung m b d v erhalten, wenn man zuerst diese gebrochene Linie in Hauptabtheilungen (0, 1, 2, 3) von etwa

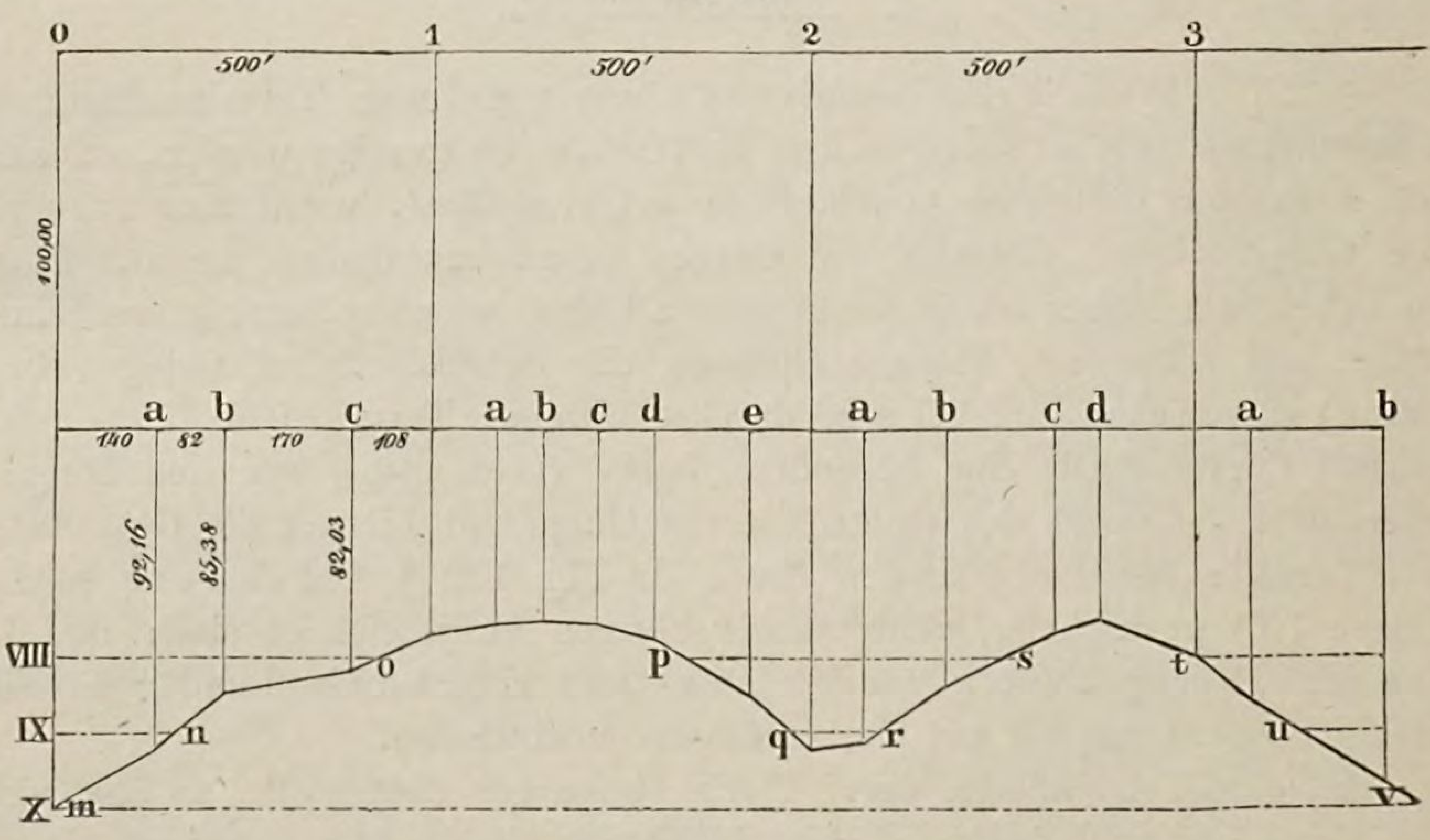
500 Fuss Länge und in passende Zwischenabtheilungen (a, b, c) zerlegt und die Verticalabstände dieser Punkte bestimmt. Für m = 0 ist dieser Abstand = 100′; für 0ª findet man ihn folgendermassen. Denkt man sich in der Richtung m b das Terrain durch eine Verticalebene geschnitten und

Fig. 325.



in a und n Senkrechte zur Horizontalprojection m n errichtet, bis sie die Terrainlinie in a′ und n′ schneiden: so hat man zwei ähnliche Dreiecke m n n′ und m a a′ in welchen drei Stücke bekannt sind, nämlich: n n′ = 10′ = dem Abstande der Horizontalebenen, m n = 178,6′ und m a = 140′ = den

Fig. 326.



Längen welche der im Massstabe von 1 : 5000 angefertigte Horizontalplan liefert; man findet desshalb aus der Proportion

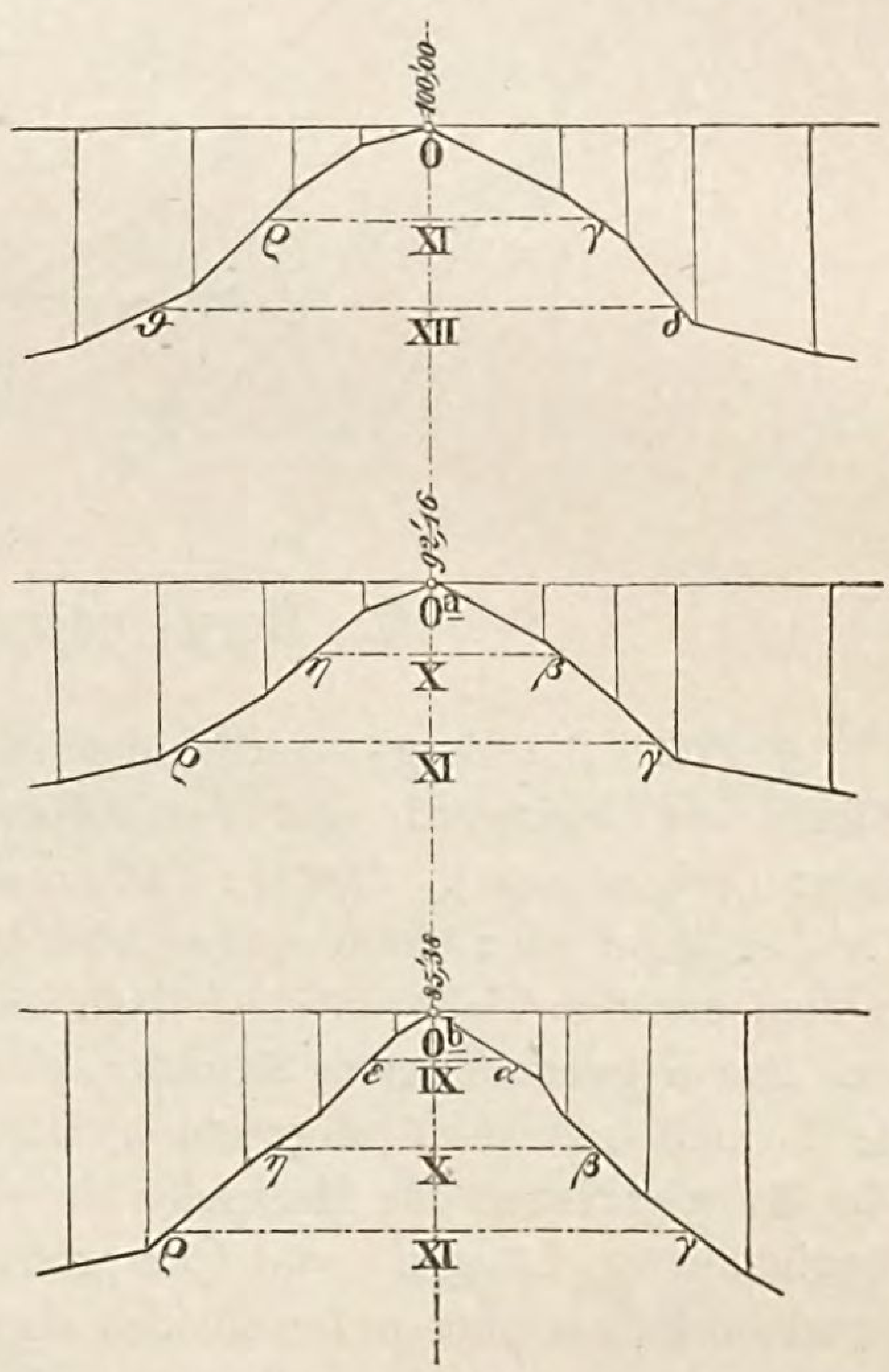
m n : m a = n n′ : a a′ oder aus 178,6′ : 140′ = 10′ : a a′, a a′ = 7,84′

und es ist folglich der Abstand des in a projicirten Punkts a′ oder 0ª, da

er 7,84′ über m das den Abstand 100′ hat, gleich 100 — 7,84 = 92,16. So fortfahrend erhält man die Abstände und Entfernungen der Punkte 0^b, 0^c, 1, 1^a, 1^b n, o, p, q und kann damit folglich den gesuchten und in Fig. 326 dargestellten Längendurchschnitt zeichnen.

In gleicher Weise kann man in Bezug auf das Längenprofil m n o p q.... Querprofile aus den Horizontalcurven construiren. Will man z. B. in dem Punkte m oder 0 der Fig. 325 ein zu m b senkrecht stehendes und folglich in der Richtung ϱ' m δ' zu nehmendes Querprofil zeichnen, so hat man zunächst für den Punkt m oder 0 den Abstand = 100′; für die Punkte γ' und ϱ' die Ordinaten = 110′, die Abscissen beziehlich = m γ' und = m ϱ'; für δ' und ϑ' die Ordinaten = 120′, die Abscissen = m δ' und m ϑ'. Damit ist das erste Querprofil 0 in Fig. 327 bestimmt. Durch ein gleiches Verfahren findet man auch die Querprofile 0^a, 0^b u. s. w.

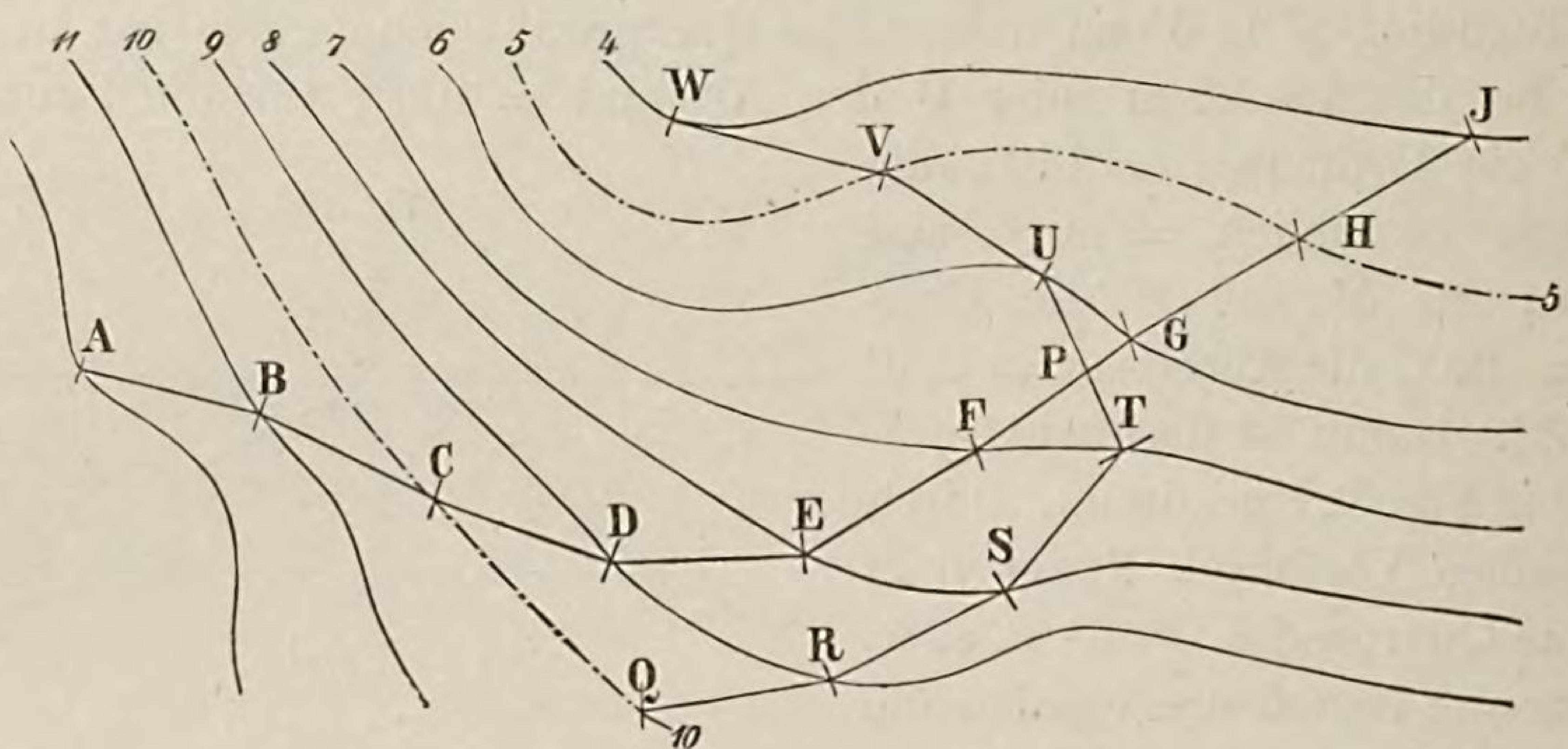
Fig. 327.



Für die Ingenieure werden die Horizontalcurven namentlich dadurch von besonderer Wichtigkeit, dass sie gestatten auf sehr einfache Weise eine Linie von bestimmter Neigung aufzusuchen welche von einem gegebenen Punkte ausgeht und in einem anderen gegebenen Punkte ankommt. Soll z. B. eine solche Linie von 5% Steigung zwischen den Punkten A und W der Fig. 328 gesucht werden und ist der Abstand der Horizontalebenen = 10 Fuss, der Massstab des Horizontalplans = 1 : 5000 gegeben, so verfährt man folgendermassen. Man berechnet zuerst die Länge der Horizontalprojection einer Linie deren oberer Endpunkt gerade um 10′ höher liegt als der untere (diese Länge beträgt hier 200′); alsdann schneidet man mit dieser auf den Massstab des Plans reducirten Länge (hier mit einer Zirkelöffnung von 0,04′) von dem Punkte A aus die Punkte B, C, D, E und von W aus die Punkte V, U, T, S ab. Die Linien A B C D E und W V U T S schneiden sich im Punkte P; da nun die Stücke F P (von F G) und P U (von T U) ebenfalls 5% Steigung haben, so erfüllt die Linie A B C D E F P U V W die gegebenen Bedingungen, und es ist dieselbe folglich eine der möglichen Lösungen der gestellten Aufgabe. Die Richtigkeit des Verfahrens bedarf wohl keines besonderen Beweises; und dass viele Lösungen möglich

sind, erkennt man sofort an dem Umstande dass von jedem Punkte A, B, C W, V, U aus im Allgemeinen zwei Schnittpunkte auf der nächst höheren oder tieferen Curve erhalten werden von welchen aus wieder je zwei Schnitte möglich sind. Zu entscheiden welche von den aufgefundenen Linien einem ausgesprochenen Zwecke am besten genügt gehört nicht mehr hierher.

Fig. 328.



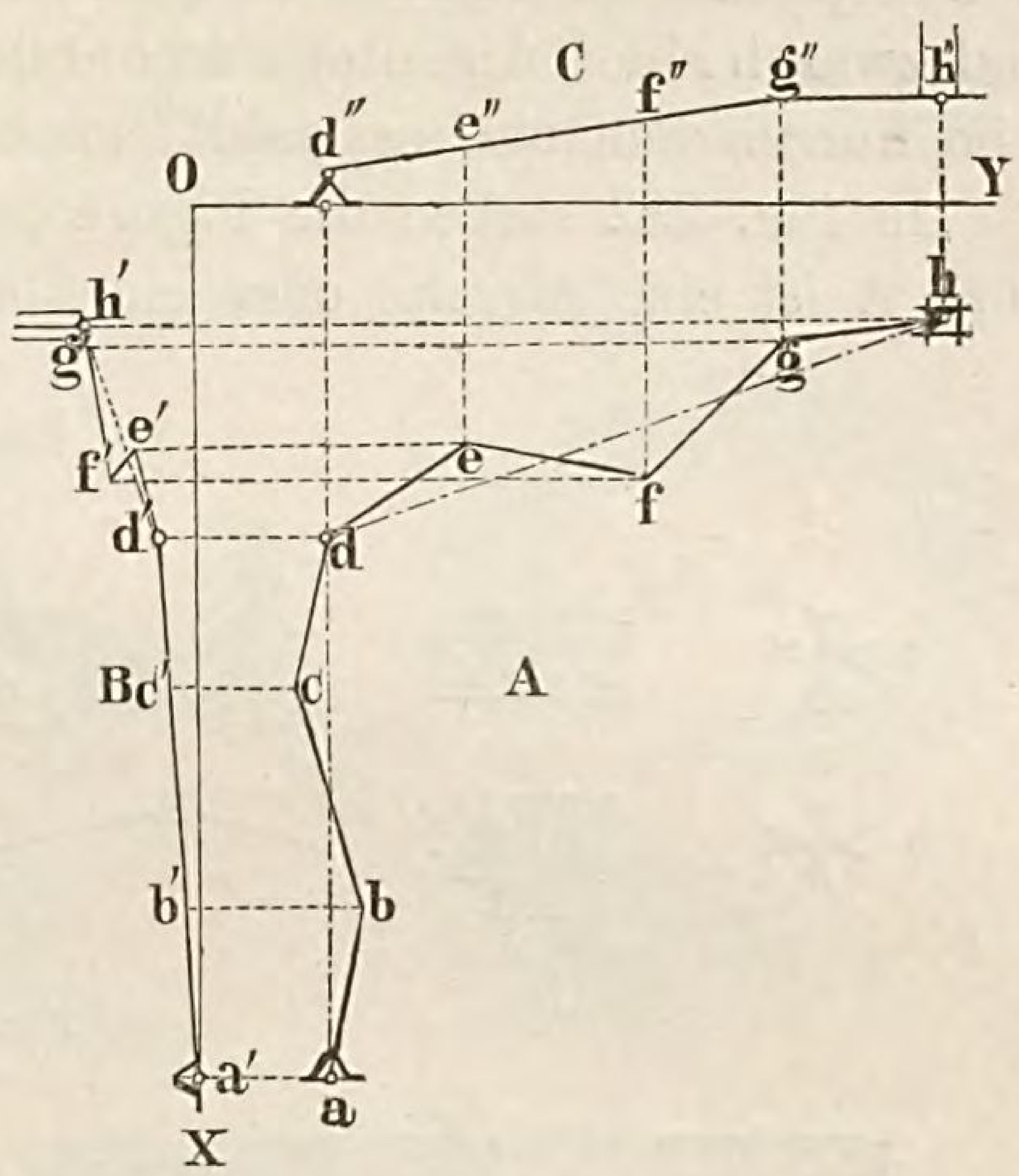
C. Berg- oder Grubenpläne.

§. 276. Die Berg- oder Grubenpläne bestehen, wie die geometrischen Pläne, aus Horizontal- und Verticalprojectionen oder aus Grund- und Aufrissen (Seigerrissen). Die Grundrisse stellen entweder einen Theil der Erdoberfläche oder einen wagrechten Durchschnitt eines Grubenwerks vor; in dem ersteren Falle unterscheiden sie sich der Form nach durch Nichts von einem geometrischen Situationsplane, und im letzteren Falle stimmen sie formell mit dem wagrechten Durchschnitte eines Gebäudes überein. Die Seigerrisse der Markscheider vertreten im Allgemeinen die schon abgehandelten Längen- und Querprofile der Ingenieure und Geometer; in einzelnen Fällen aber unterscheiden sie sich dadurch von den geometrischen Profilen dass sie wirkliche Verticalprojectionen sind, während die genannten Längen- und Querprofile stets als Abwickelungen lothrecht stehender Prismen- oder Cylinderflächen erscheinen. In solchen Fällen sind dann auch gewöhnlich drei Projectionen eines Grubengebäudes vereinigt, nämlich die horizontale (söhlige Projection, Grundriss) und zwei auf einander senkrecht stehende (erste und zweite verticale Projection, Aufriss und Kreuzriss); es werden also ausnahmsweise die aufgenommenen Linien und Winkel auf drei senkrechte Coordinatenebenen nach den Regeln der analytischen und darstellenden Geometrie projicirt.

Die Wahl der Projectionsaxen und beziehungsweise der Projectionsebenen ist im Wesentlichen unbeschränkt; man wird jedoch gut thun bei Darstellungen von Stollen, Strecken, Querschlägen u. dgl. eine der Axen

in das allgemeine Streichen dieser Grubenbaue zu legen, damit wenigstens eine verticale Projection nahezu unverkürzt ist. Ferner erscheint es zweckmässig die horizontale Projectionsebene bei Stollenbauten durch den tiefsten Punkt der Stollensohle und bei Tiefbauten in die höchste Stelle des Schachtes, d. i. in seinen Tagkranz zu legen; endlich kann man auch, wenn es die bildliche Darstellung übersichtlicher oder verständlicher macht, die beiden verticalen Projectionsebenen unter einem spitzen oder stumpfen Winkel sich schneiden lassen.

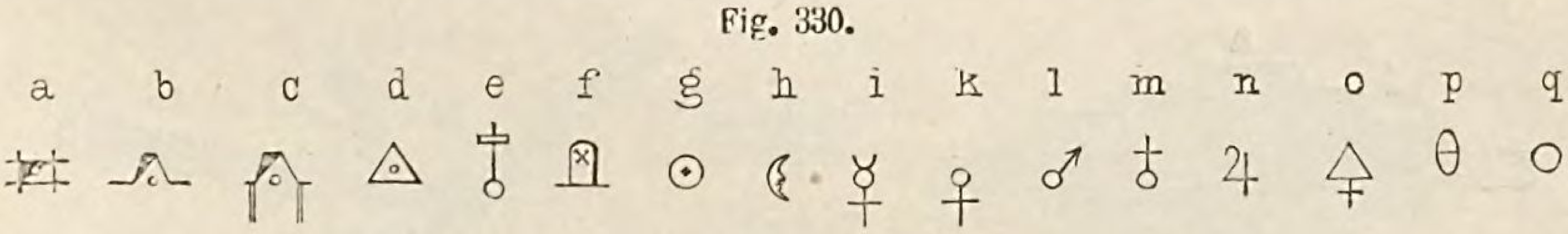
Fig. 329.



In Fig. 329 ist die Axe O X dem allgemeinen Streichen a d des Stollens parallel, die Axe O Y aber senkrecht auf O X gestellt; A ist der Grundriss, B der Aufriss, C der Kreuzriss des Stollens a d und seines Querschlags d h. Dass dieses Auftragen nur auf Grund eines vollständig berechneten Markscheidezugs, wozu die §§. 211 bis 216 Anleitung geben, geschehen kann, versteht sich von selbst, und dass auch hier die Höhen in der Regel nach einem anderen Massstabe aufgetragen werden als die Längen, bedarf wohl kaum der Erinnerung.

Besondere allgemein übliche Zeichen (Charaktere) für die Horizontal- und Verticalprojectionen von Gegenständen die ausschliesslich dem Bergbaue und beziehungsweise der Markscheidekunst angehören, gibt es nur wenige. Die gebräuchlichsten sind in den folgenden 6 Figuren zusammengestellt und erklärt. In Fig. 330 bedeutet a einen Schacht, b ein Stollenmundloch ohne

Fig. 330.



Rösche und c eines mit offener Rösche, d einen Bohrpunkt, e ein Schurfzeichen, f einen Mark- oder Lochstein. Die Mineralgattung welche in einem Bergwerke gewonnen oder anderswo gefunden wird, bezeichnet man sowohl in topographischen Karten als in Situationsplänen und Grundrissen meist mit den in der Astronomie gebräuchlichen Zeichen der Himmelskörper, nämlich mit dem Zeichen der Sonne (g) das Gold, mit dem Zeichen des Monds (h) das Silber, mit dem des Merkurs (i) das Quecksilber, mit dem der Venus (k) das Kupfer, mit dem des Mars (l) das Eisen, mit dem der Erde (m) das Blei, mit dem des Jupiters (n) das Zinn.

Für Schwefel gebraucht man das Zeichen (o), für Kochsalz das (p) und für Alaun das (q).

In Fig. 331 bedeutet a einen Anhaltepunkt, b einen Abgebepfahl; c einen Anhaltepunkt an einem Berggebäude (das roth schraffirt wird), d einen Anhaltepunkt an einem Privatgebäude (schwarz schraffirt), e stellt Anhaltepunkte an Bäumen vor, f Rainsteine, g Anhaltepunkte in Schächten, und zwar h einen Anhaltepunkt auf der Hängebank, k im Schachtliegenden, i im kurzen Schachtstoss und l im Schachthangenden.

In Fig. 332 stellen die Figuren A bis H Strecken, Stollen und Gänge vor: A ist eine Strecke oder ein Stollen auf einem seiger fallenden Gang

Fig. 331.

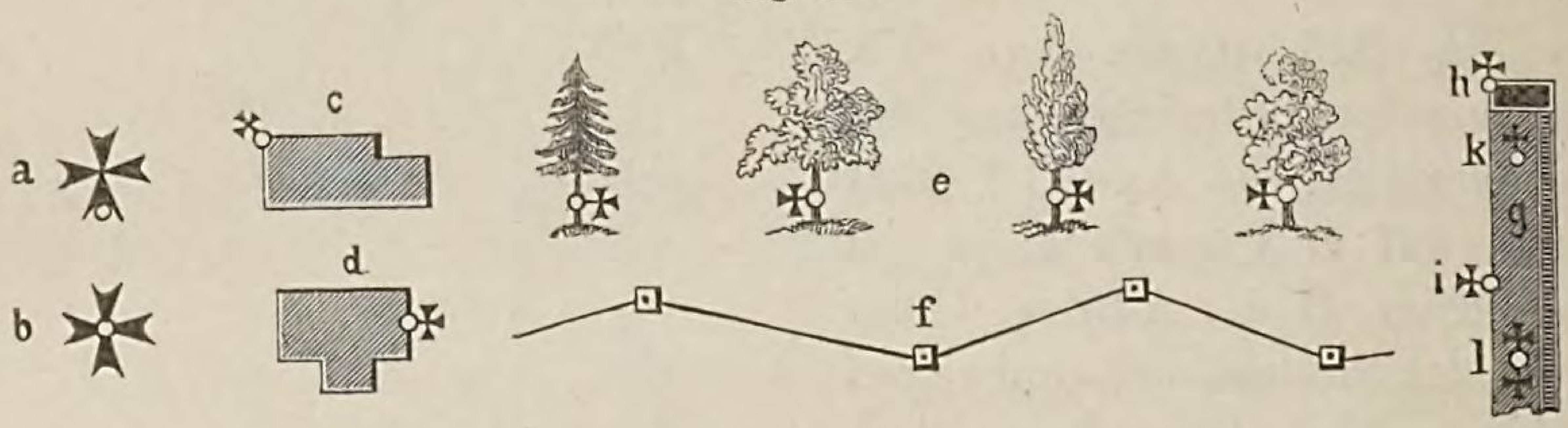


Fig. 332.

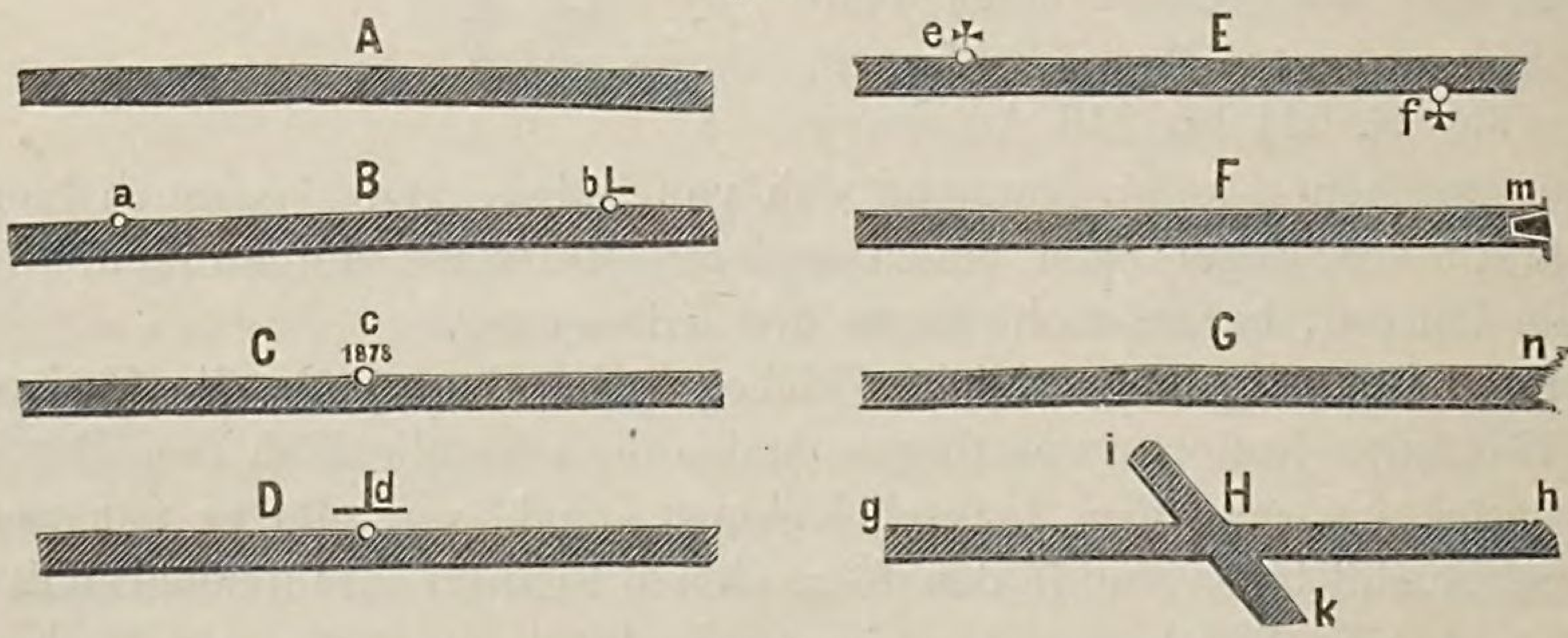
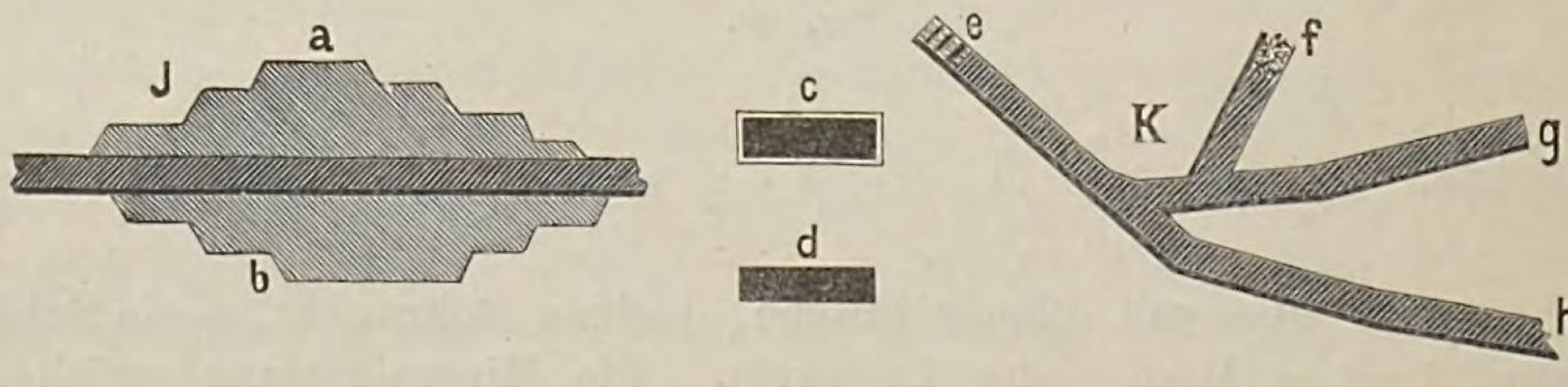


Fig. 333.



oder im Quergestein, in B bezeichnet der Buchstabe a einen Dübel und b eine Quartalstufe, in C die Jahreszahl c eine Jahrestafel oder Jahresstufe, in D der Buchstabe d einen Durchschlagspunkt, in E der Buchstabe e einen Anhaltepunkt im Liegenden und f einen solchen im Hangenden, in F stellt der Buchstabe m ein gangbares und in G der Buchstabe n ein verfallenes Stollenmundloch vor, in H bezeichnen der Gang g h und die Strecke i k ein Gangkreuz.

In Fig. 333 stellt J den Ausbau eines Ganges vor, und zwar a einen Förstenbau und b einen Strossenbau, c ist ein Füllort über Tage, d ein Füllort in der Grube, während in K der Buchstabe e ein versetztes Ort, f ein verbrochenes Ort, g ein anstehendes Ort und h ein abgebrochen gezeichnetes Ort vorstellt.

In Fig. 334 ist a ein fahrbarer oder Durchschnittschacht, b ein unfahrbarer Schacht, c bezeichnet ein Abteufen, d ein Ueberhauen, e ein übersetzendes Trum, f ein fortsetzendes Trum, g eine Bergfeste; M ist eine Halde mit Kaue und N eine Pinge.

Fig. 334.

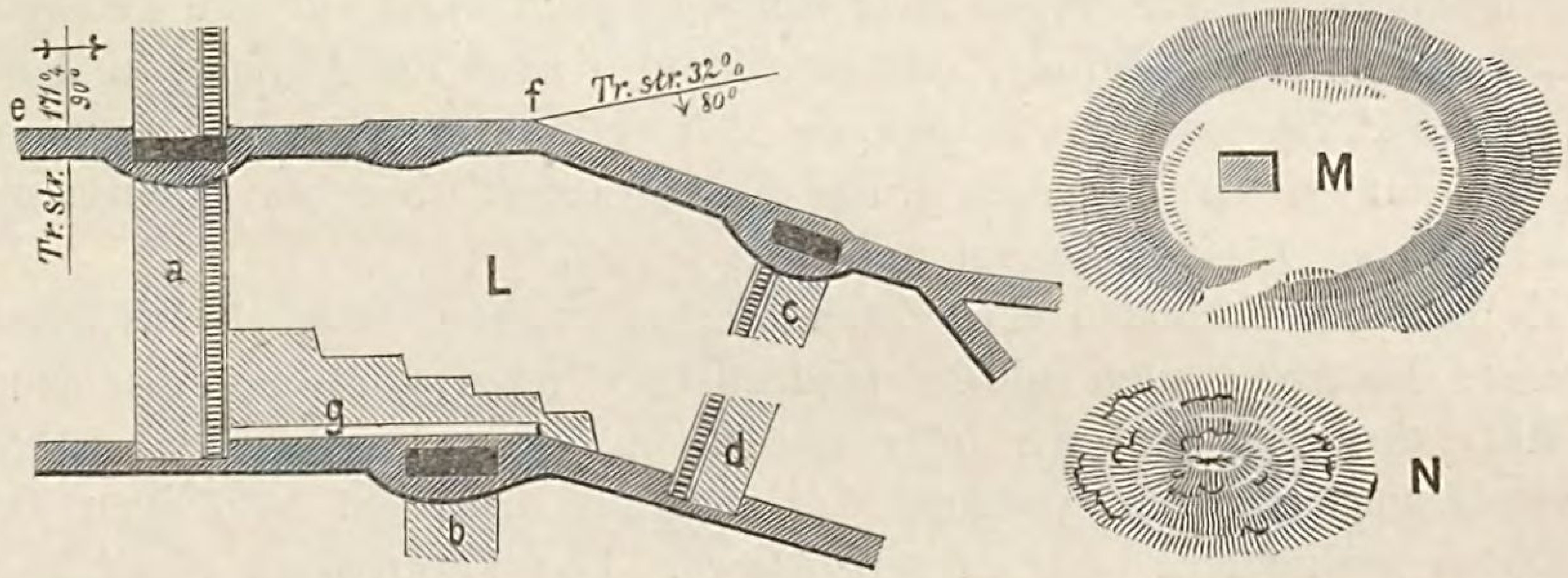
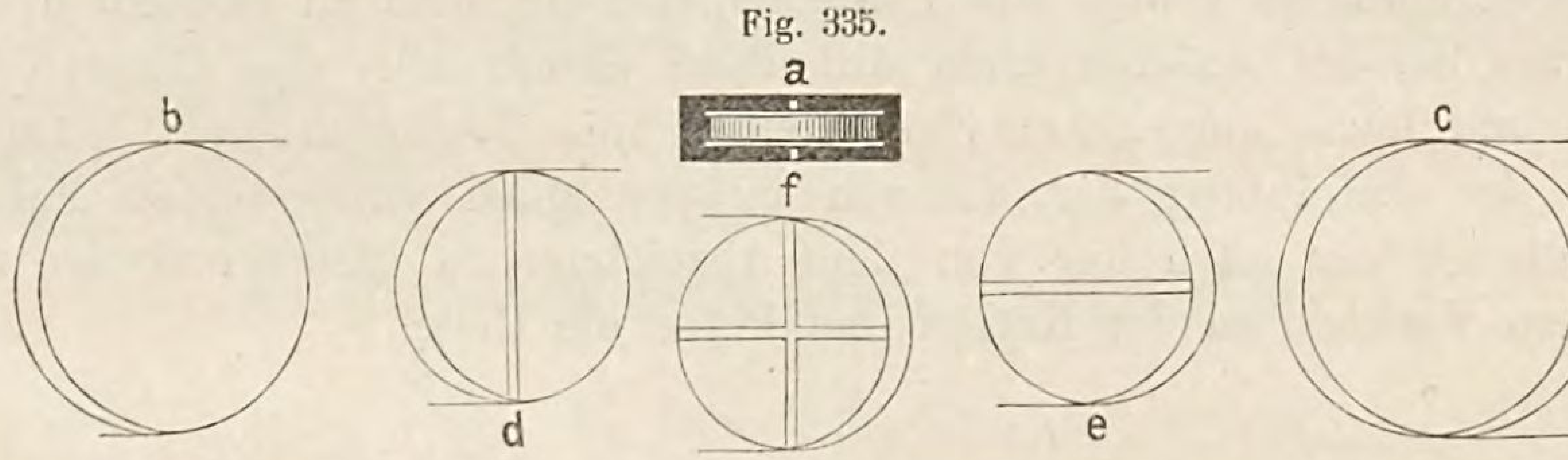


Fig. 335.



In Fig. 335 stellt a eine Radstube, b ein Kunstrad, c ein Kehrrad, d ein Pochrad, e ein Wäschrad, f ein Poch- und Wäschrad vor.

Für das Ueberschreiben und Copiren der Grubenpläne gelten die für geometrische Pläne mitgetheilten Regeln; und was das Coloriren der Zeichnungen betrifft, so gibt man den oberirdischen Gegenständen dieselben Farben welche sie in topographischen Karten und Plänen erhalten, während die Bezeichnung der unterirdischen Objecte mit Farben noch immer ziemlich willkürlich ist. Man muss desshalb wünschen dass sich die bildlichen Darstellungen der Markscheider denen der Geometer und Ingenieure eben so nähern mögen, wie dieses bei den Messungsmethoden bereits der Fall ist.

Dritter Abschnitt.

Abzeichnung der Karten und Pläne.

§. 277. Wenn auch in neuerer Zeit die in den meisten europäischen Staaten hergestellten topographischen Karten und Katasterpläne durch Lithographie und Kupferstich vervielfältigt werden und besondere Copien derselben desshalb unnöthig erscheinen, so ist doch diese Art des Copirens der Originalzeichnungen wegen ihrer Kostspieligkeit nicht auf alle geometrischen Aufnahmen anwendbar, und es gibt also noch Fälle genug in denen Karten und Pläne jeder Art in gleicher oder verjüngter Grösse abzuzeichnen sind. Darum dürfen hier auch einige Erörterungen über das Copiren und Reduciren von Originalzeichnungen nicht fehlen.

Es gibt drei Methoden eine Zeichnung zu copiren, nämlich das Durchzeichnen, das Abzeichnen mittels quadratischer Netze, und das Abzeichnen mit Hilfe des Pantographen oder Storchschnabels. Die beiden letzteren Methoden sind zugleich geeignet das Original in einem beliebigen Verhältniss zu verkleinern oder zu vergrössern. Das Vergrössern einer Karte oder eines Plans ist jedoch aus demselben Grunde nicht zu empfehlen, aus dem man bei der geometrischen Aufnahme immer nur vom Grossen in's Kleine und nicht umgekehrt vom Kleinen in's Grosse arbeitet, nämlich wegen der Anhäufung der dadurch unvermeidlich entstehenden Fehler. Desshalb ist hier auch nur von dem Abzeichnen in gleicher Grösse und von dem Verkleinern der Karten und Pläne die Rede.

A. Das Durchzeichnen.

§. 278. Man kann drei Arten des Durchzeichnens unterscheiden, nämlich das Durchzeichnen mittels Strohpapiers oder Bausleinwand (das Bausen), das Durchzeichnen mittels des Copirpultes, und das Durchzeichnen mittels der Pikirnadel (das Pikiren).

Das Bausen setzt ein durchscheinendes Gewebe auf dem weder Tusch noch Farbe fliessen, voraus. Bisher hat man immer das bekannte sogenannte Strohpapier dazu verwendet; in neuerer Zeit bedient man sich aber namentlich zu Bausen welche längere Dauer haben sollen, der Bausleinwand. Diese Leinwand (oder das Strohpapier) breitet man über die zu bausende Zeichnung glatt aus und befestigt sie daran mit etwas Wachs oder kleinen Zwingen; hierauf zieht man (unter Benützung eines Dreiecks für die geraden Linien) die Grenzen der Figuren mit Tusch so genau als möglich aus, und bringt schliesslich die topographischen Zeichen, Schrift und Farben am rechten Ort und in der rechten Weise an. Zum Gebrauche

spannt man dergleichen Bausen, mögen sie auf Strohpapier oder Bausleinwand gemacht sein, auf weisses Papier, wobei zu rathen ist nicht bloss die Ränder der Bause, sondern deren ganze Fläche festzukleben.

Das Copirpult dessen man zur zweiten Art des Durchzeichnens bedarf, besteht aus einer hinreichend grossen ebenen Glastafel welche von einem Holzrahmen umschlossen ist und mit diesem um ein Scharnier wie eine Pultplatte gedreht werden kann. Zwei Spreizen dienen dazu der Glastafel die Neigung zu geben welche zum Zeichnen gewünscht wird. Mit diesem Apparate copirt man eine Zeichnung dadurch dass man sie erst mit dem Zeichenpapiere überspannt und dann beide auf der Glastafel des Pultes befestigt. Dieses wird gegen das Fenster gerückt und so lange gehoben oder gesenkt bis man die Conturen gut durchscheinen sieht, wobei zu bemerken ist dass man durch das Herablassen einer Rolette bis auf den oberen Holzrand des Pultes die Deutlichkeit der durchscheinenden Linien noch etwas vermehren kann. Hierauf wird wie beim Bausen verfahren.

Das Pikiren einer Karte oder eines Plans besteht darin dass man alle Eck- und Krümmungspunkte der Originalzeichnung mittels einer feinen, in Holz befestigten Nadel durchsticht und auf diese Weise in das unverrückbar darunter liegende Zeichenpapier überträgt. Nachdem dieses geschehen ist, verbindet man die zusammengehörigen Punkte durch gerade oder krumme Linien und vollendet die Zeichnung wie früher angegeben. Dass diese Art des Durchzeichnens das Original verdirbt, bedarf wohl keiner weiteren Erinnerung.

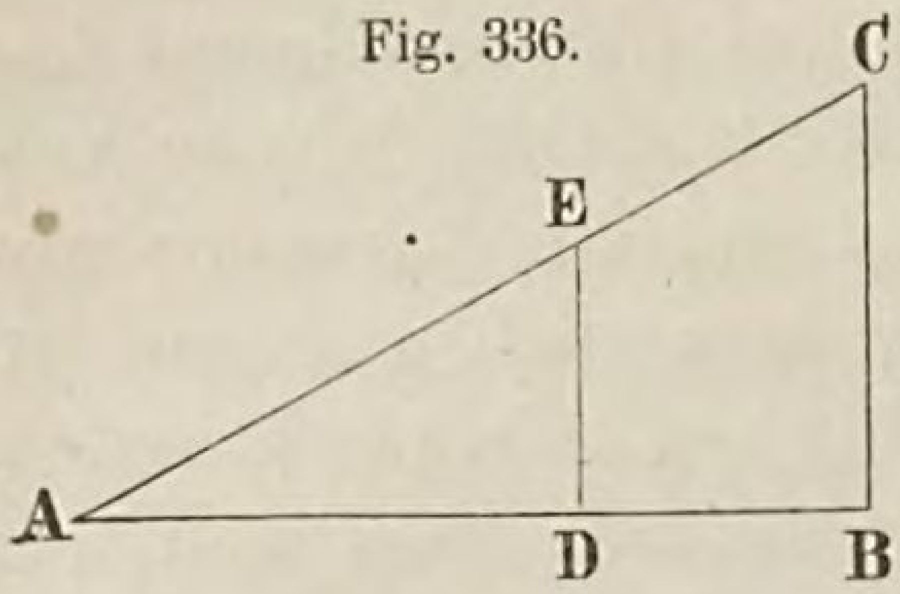
B. Das Abzeichnen durch Quadratnetze.

§. 279. Soll die Copie die Grösse des Originals erhalten, so wird erfordert dass man sowohl dieses als das Zeichenpapier der Copie mit feinen Bleilinien in Quadrate von gleicher Grösse eintheilt und in jedes Quadrat der Copie Alles einträgt was das entsprechende Quadrat des Originals enthält. Das Einzeichnen in die Quadrate von 5 bis 10 Millimeter Seitenlänge geschieht im Allgemeinen nach dem Augenmasse, es hindert jedoch Nichts einzelne Punkte mit dem Zirkel auf den Quadratseiten abzumessen oder in die Quadratfläche durch sich schneidende Kreisbögen zu übertragen. Quadrate welche viel Detail enthalten, theilt man noch durch ihre Diagonalen um weitere Anhaltspunkte für das Uebertragen nach dem Augenmasse zu erhalten.

Ist für die Copie ein kleinerer Massstab vorgeschrieben und verhält sich dieser zu dem Massstabe des Originals wie $c : o$, so müssen sich die Quadratseiten der Copie ebenfalls wie $c : o$ verhalten. Wäre $o = \frac{1}{2000}$ und und $c = \frac{1}{5000}$, so hätte man $c : o = 2 : 5 = 0{,}4 : 1$, d. h. die Quadratseiten der Copie dürften nur 0,4 der Länge der Seiten der Originalquadrate haben. Das Uebertragen des Details in die Copiequadrate geschieht wiederum nach

dem Augenmasse, man kann jedoch auch einzelne Entfernungen entweder mit Hilfe eines Proportionalzirkels oder mittels eines Reductions-Dreiecks abmessen. Von diesem Dreiecke verhalten sich zwei Seiten A B, B C (Fig. 336) zu einander wie o : c und machen bei B einen beliebigen (also z. B. einen rechten) Winkel. Ist nun A D die zu reducirende Länge, so gibt die zu B C parallele Gerade D E den im Verhältniss von o : c verjüngten und in die Copie überzutragenden Abstand. Hat man eine Zeichnung zu copiren deren Kostbarkeit nicht gestattet sie mit einem Netze von Bleilinien zu überziehen, so zeichnet man dieses Netz mit Tusche auf Bausleinwand und befestigt diese auf dem Rande der Originalzeichnung so lange bis die Copie gemacht ist. Netze von Seidenfäden die man über die zu copirenden Karten und Pläne spannt, und ebenso auf Glastafeln geritzte Netze verursachen viel mehr Umstände und Kosten als die auf Bausleinwand angebrachten, wesshalb diese nicht bloss in dem bezeichneten Falle sondern überhaupt vorzuziehen sind, da man sich damit die Mühe ersparen kann für jede Copie ein Quadratnetz auf das Original zu zeichnen.

Fig. 336.



C. Das Abzeichnen mit dem Pantographen oder Storchschnabel.

§. 280. Zweck und Theorie. Für das Copiren von Plänen und Zeichnungen ist eine mechanische Vorrichtung höchst wünschenswerth welche das Original verkleinert oder vergrössert oder gleich gross, mit geometrischer Treue aber einfacher als es die vorstehend unter A und B beschriebenen Verfahrungsweisen thun, wiedergibt. Dieses Bedürfniss hat der auch durch astronomische Beobachtungen bekannte Jesuit Scheiner vor 250 Jahren befriedigt durch die Herausgabe eines Werks welches den Titel führt „Pantographice seu ars delineandi res quaslibet etc.", Romae, 1631, und es besteht die Erfindung Scheiners wesentlich in der Verbindung zweier Paare von Linealen oder Stäben zu einem beweglichen Parallelogramm A B C D (Fig. 337) das sich um einen festen Punkt F einer Seite oder Diagonale verschieben lässt und dadurch zwei mit F in gerader Linie liegende Punkte E und G veranlasst: zwei ähnliche Figuren um den Drehpunkt zu beschreiben deren gleichnamige Abmessungen ein bestimmtes Verhältniss u : v zu einander haben. Dieses Parallelogramm nannte sein Erfinder wegen seiner Verwendbarkeit zum Copiren jeder Art von Zeichnungen Pantograph (von παντοῖος allerlei und γραφω ich schreibe oder zeichne), und in Deutschland hat man ihm den Namen Storchschnabel gegeben. Der Drehpunkt F kann auch in dem Ende einer Seite oder Diagonale und somit auch in einer Ecke des Parallelogramms liegen, und Gleiches gilt von den Punkten E und G. Je nach der Lage des Dreh-

punkts (der lothrechten Axe F) und der die Figuren beschreibenden Punkte (Fahrstift E und Zeichenstift G) unterscheidet man verschiedene Systeme von Storchschnäbeln, von denen wir jedoch nur drei theoretisch betrachten und zwei nach ihrer Construction und ihrem Gebrauche näher beschreiben wollen.

1) Von dem in Fig. 337 dargestellten ältesten System lässt sich leicht beweisen: erstens dass der Stift G eine Figur beschreibt welche der vom Stifte E durchlaufenen ähnlich ist, und zweitens dass sich die homologen Seiten beider Figuren wie die Abstände der Axe F von den Stiften E und G verhalten. Denn es verhält sich in den ähnlichen Dreiecken A E G und D F G:

$$A\,E : D\,F = E\,G : F\,G = A\,G : D\,G$$

und wenn man die erste Figur in die zweite Lage (Fig. 338) versetzt, in den ähnlichen Dreiecken A′ E′ G′ und D′ F G′:

$$A'\,E' : D'\,F = E'\,G' : F\,G' = A'\,G' : D'\,G'$$

Weil nun vermöge der Construction D′ F = D F und A′ E′ = A E, so folgt

$$E\,G : F\,G = E'\,G' : F\,G' \text{ oder } E\,F : F\,G = E'\,F : F\,G'$$

Fig. 337.

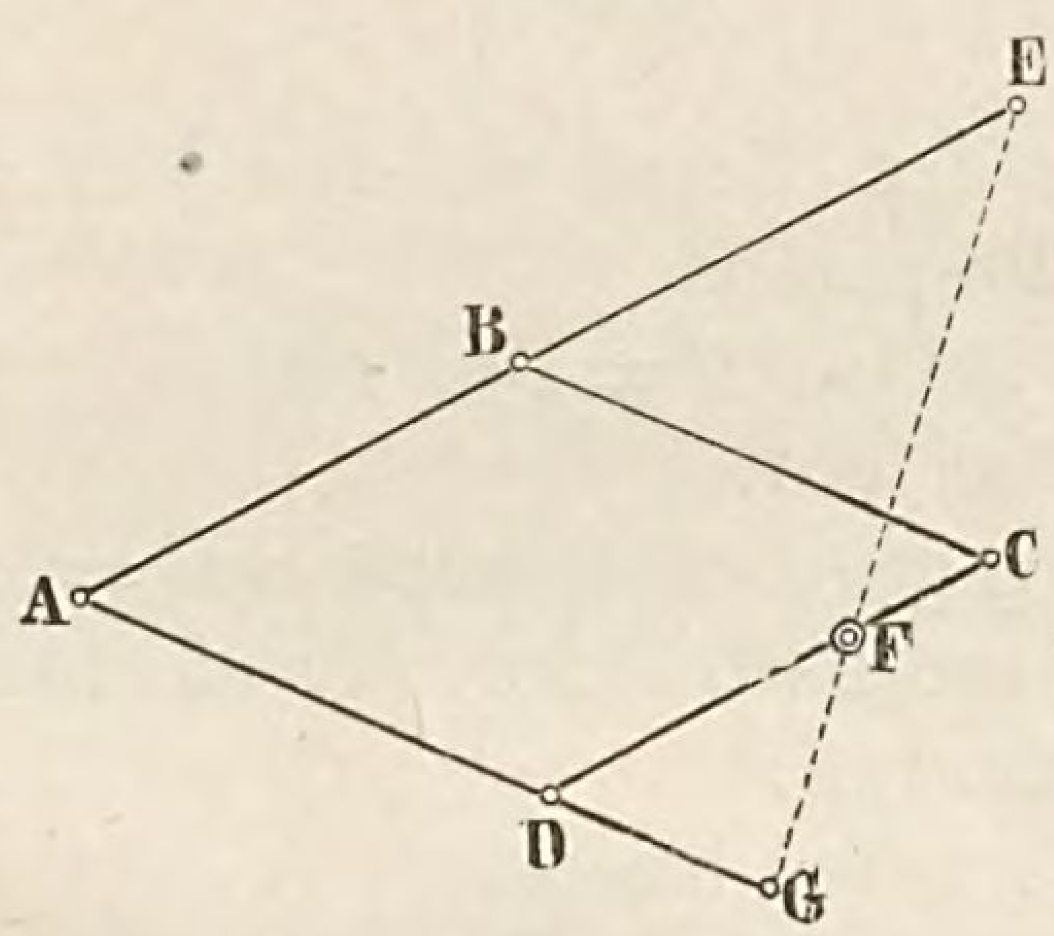
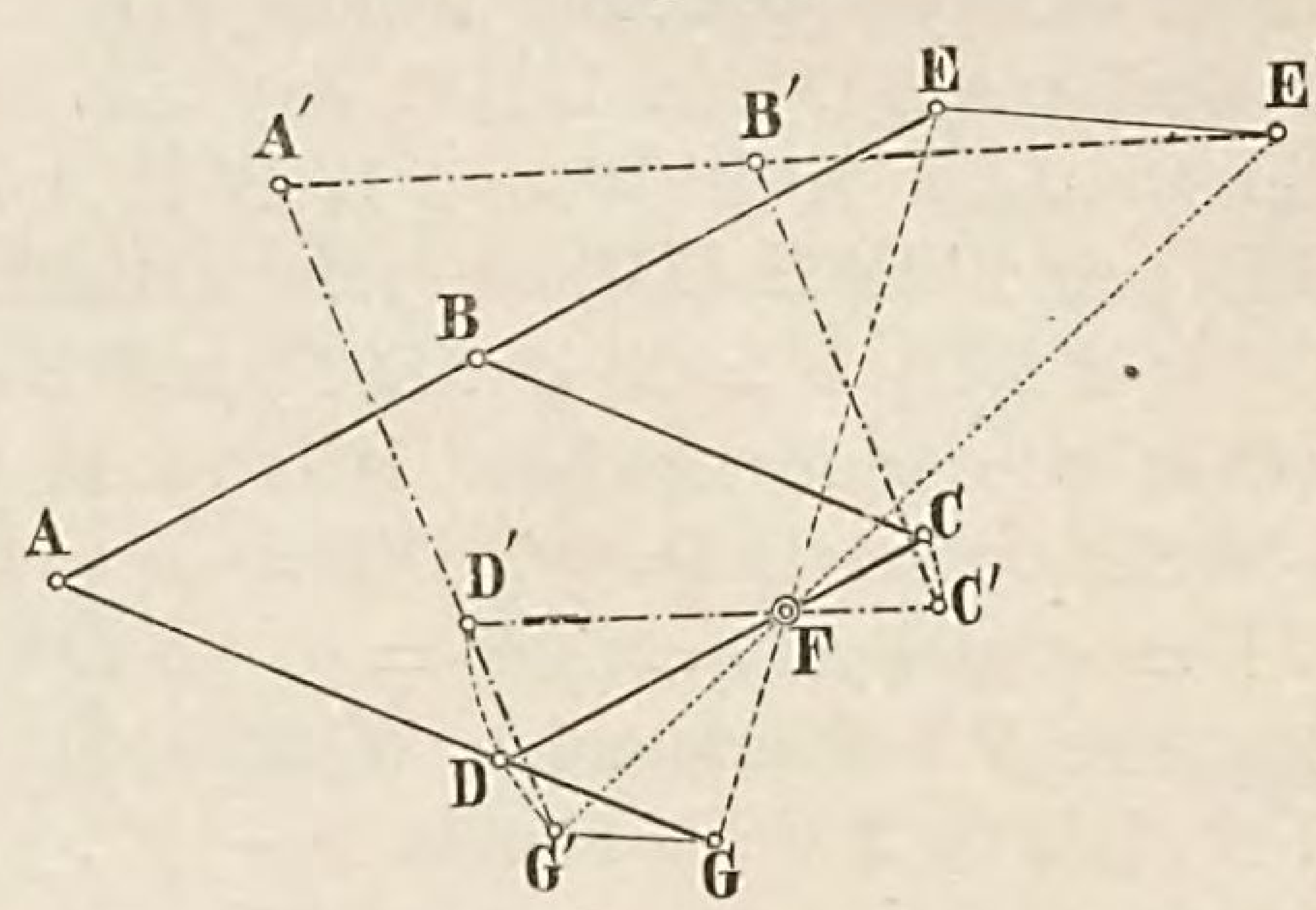


Fig. 338.



d. h. die Dreiecke F G G′ und F E E′ sind ähnlich, und der vom Stifte G durchlaufene Weg G G′ verhält sich zu dem Wege E E′ des Stifts E wie F G zu F E. Was aber von diesen zwei Dreiecken gilt, ist von allen wahr in die sich die von den Stiften E und G beschriebenen Figuren von F aus zerlegen lassen, und damit ist auch bewiesen was behauptet wurde. Nennt man die constanten Längen A D und A E beziehlich p und q, die veränderlichen Grössen D G und D F beziehlich x und y, und setzt das Verhältniss der Abstände F G : F E = u : v, so hat man wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke A E G und D F G (Fig. 337):

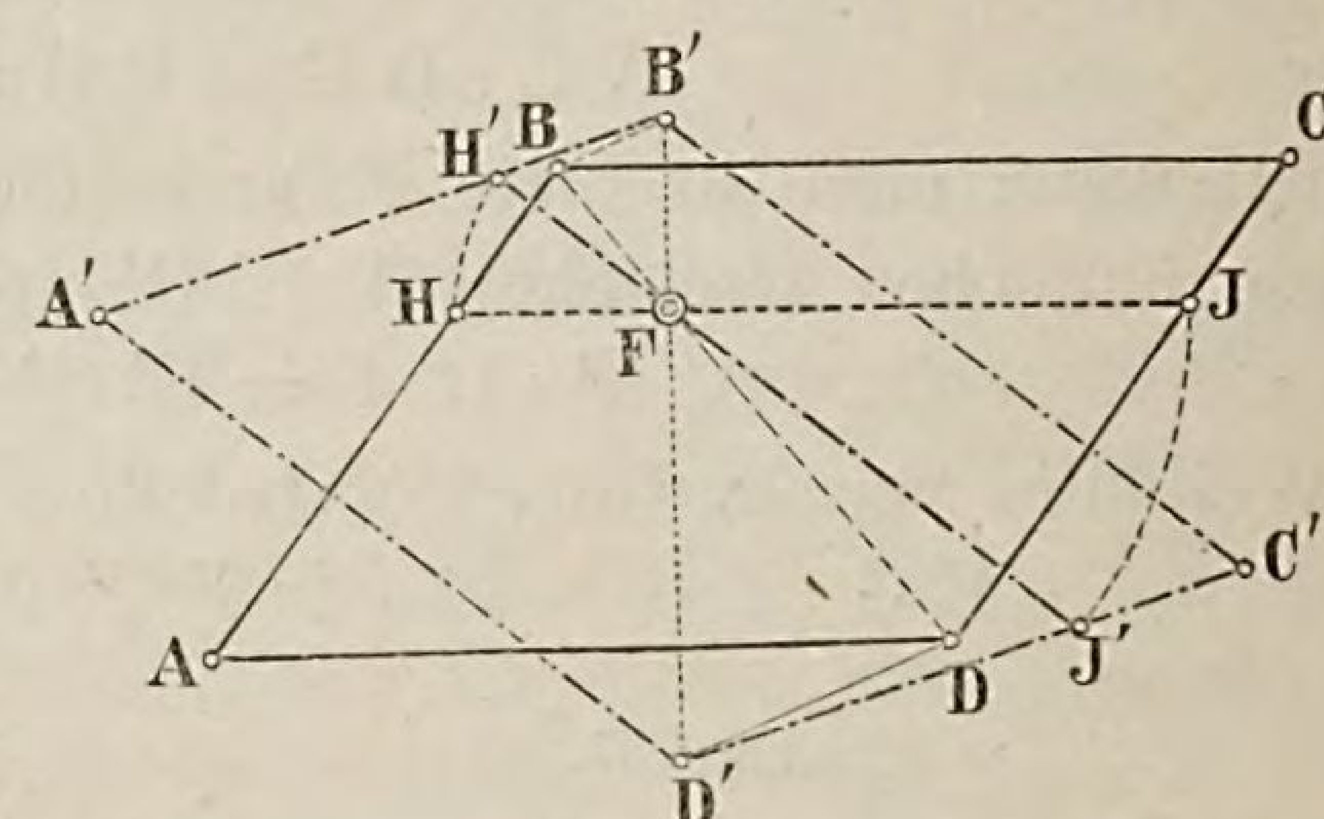
$$x = \frac{u}{v}\,p \text{ und } y = \frac{u}{u+v}\,q \qquad (446)$$

Ertheilt man den Grössen p und q die Werthe welche einem bestimmten Instrumente entsprechen, und nimmt man das Verhältniss von u : v ebenfalls als gegeben an, so kann man die Werthe von x und y berechnen, welche dazu dienen auf dem Arme A D den Stift G (durch Abzählung von

x = D G) und auf dem Arme C D die Axe F (durch Abmessung von y = D F) so festzustellen dass die mit dem Stifte E umfahrene Figur von F in dem Verhältniss von v : u verkleinert wird. Von der genauen Abmessung der Werthe von x und y kann man überzeugt sein, sobald die Punkte E, F und G in einer Geraden liegen.

2) Eine Abänderung des eben betrachteten Systems besteht darin dass die Stifte E und G in den Endpunkten B und D des Parallelogramms A B C D (Fig. 337) stehen und die Axe F in die Diagonale B D verlegt ist, wie in der beigedruckten Fig. 339 worin die accentuirten Buchstaben die aus der Drehung um die Axe F entstandene zweite Lage des Parallelogramms A B C D bezeichnen. Soll diese Vorrichtung wie die vorige wirken, so ist nachzuweisen dass △ D D′ F dem △ B B′ F ähnlich ist, wenn alle Seiten des Parallelogramms und die Parallele H J gleiche und unveränderliche Längen haben. Man findet aber aus der Aehnlichkeit der Dreiecke A B D und H B F, so wie der Dreiecke A′ B′ D′ und H′ B′ F, und aus dem Umstande dass F H′ = F H und B′ H′ = B H ist, sehr einfach die Proportion

Fig. 339.



B D : B F = B′ D′ : B′ F, und hieraus D F : B F = D′ F : B′ F

womit wiederum bewiesen ist was zu beweisen war.

Setzt man D J = y′, D F = u und die gegebenen Werthe H B = x′, B F = v und A B = A D = p, so hat man zur Berechnung der die Lage der Axe F bestimmenden Werthe die Gleichungen:

H B : D J = B F : D F oder p — y′ : y′ = v : u und hieraus

$$y' = \frac{u}{u + v}\, p \tag{447}$$

Da ferner nach der Fig. 339 die Proportion stattfindet:

$$D\,J : J\,C = D\,F : B\,F = u : v \tag{448}$$

so ist es hier gleichgültig, ob man sagt: der Stift D verkleinert im Verhältniss der Abstände der Stifte von der Axe F, oder im Verhältniss des Abstands der Linie H J von den parallelen Seiten A D und B C.

3) Bei dem dritten System liegt der Drehpunkt oder die Axe F in der Ecke A des Parallelogramms, der Fahrstift E in der verlängerten Seite B C (in einem Abstande von B gleich B E = q) und der Zeichenstift G auf der Seite C D = A B = p in einem Abstande von C gleich C G = x und in der Geraden E F welche sich zu F G wie v : u verhält. Bezeichnen in Fig. 340 die ausgezogenen Linien die Anfangsstellung und die gestrichelten Linien die Stellung des Storchschnabels, wenn der Fahrstift von E bis E′ vorgerückt ist, so sieht man sofort dass △ E′ C′ G′ dem △ E′ B′ F ähnlich sein muss, weil vermöge der Natur des Parallelogramms der Winkel

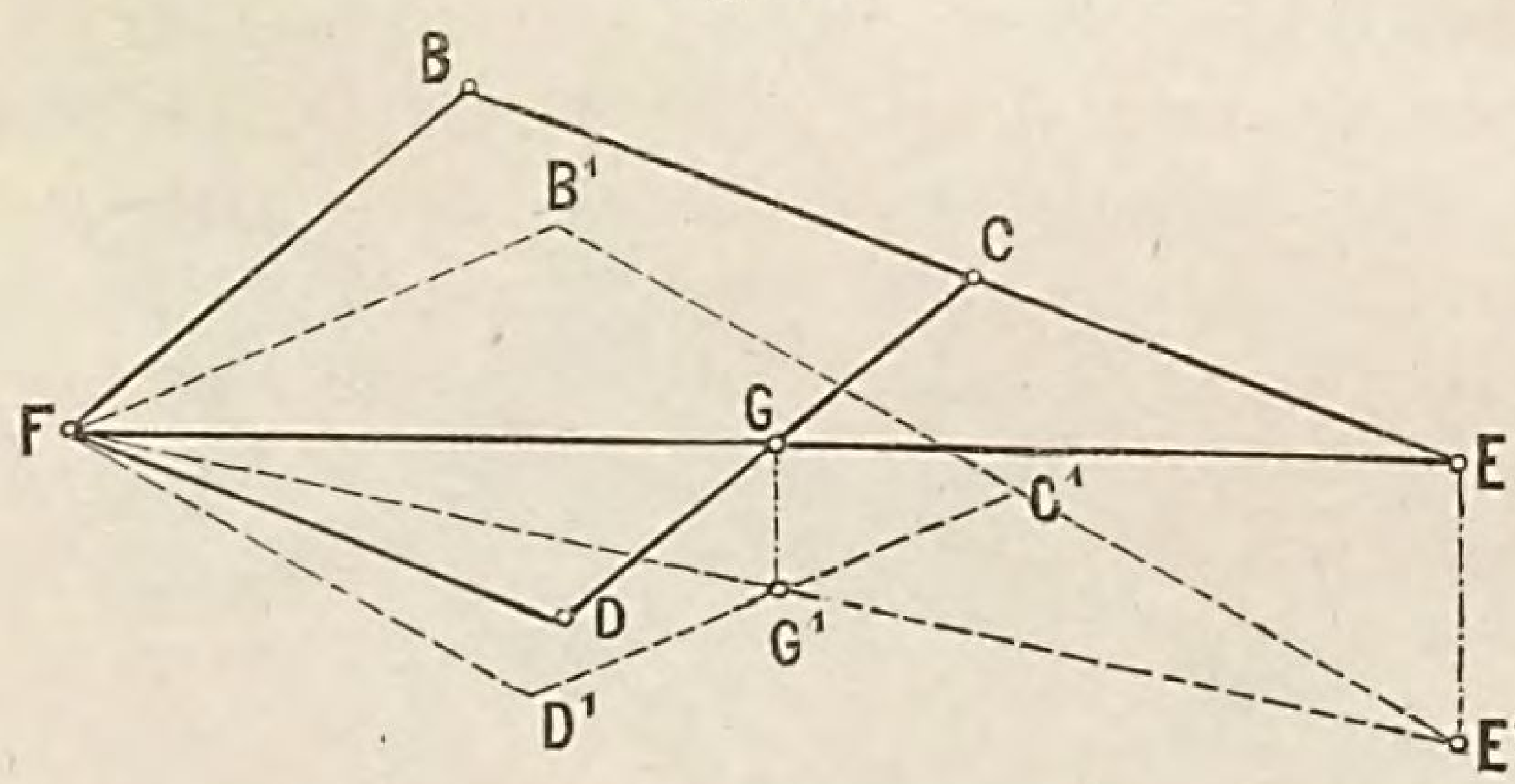
E' C' G' = dem Winkel E' B' F ist und weil vermöge der Uebereinstimmung der diese Winkel bildenden Schenkel mit den Schenkeln der Winkel E C G und E B F die Seiten der Dreiecke E' C' G' und E' B' F welche die gleichen Winkel einschliessen, in Proportion stehen. Es ist desshalb auch

$$E'F : E'G' = E'B' : E'C' = EB : EC = EF : EG$$

und in Folge dieser gleichen Verhältnisse und des beiden Dreiecken angehörigen gleichen Winkel E F E' sind die Dreiecke E F E' und G F G' einander ähnlich und daher

$$FG' : FE' = FG : FE = u : v$$

Fig. 340.



Das was hier von den Dreiecken F B E und F B' E' gilt lässt sich auch von den weiteren Dreiecken F B'' E''.... in welche die zu beschreibenden Figuren zerlegt werden können, sagen, und daher sehen wir nunmehr als bewiesen an dass die von G beschriebene Figur der von E umfahrenen ähnlich ist und die Entfernungen gleichnamiger Punkte dieser Figuren von dem Pole F wie u : v sich verhalten. Will man nun den Zeichenstift G so stellen dass er dieses Verhältniss erhält, so muss man seine Entfernung von C oder C G = x berechnen; es ist aber E F : B F = E G : C G oder v : v — u = p : x und daher

$$x = \left(1 - \frac{u}{v}\right) p \qquad (449)$$

Wollte man lieber die dem Verjüngungsverhältnisse u : v entsprechende Entfernung des Stifts E von C oder C E = y ausdrücken, so hätte man dazu die Proportion E F : E G = E B : E C oder v : v — u = q : y zu benützen aus der folgt

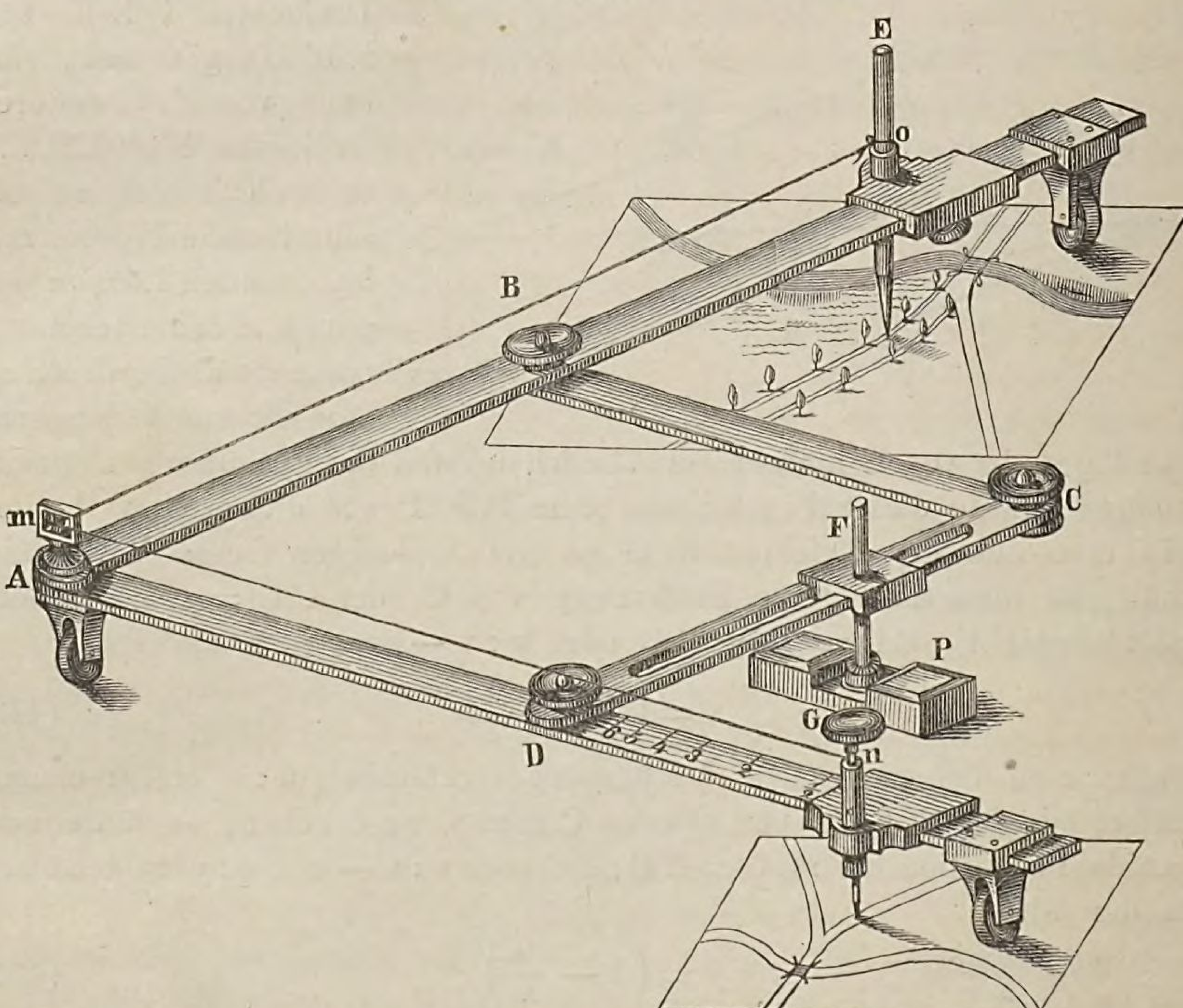
$$y = \left(1 - \frac{u}{v}\right) q \qquad (450)$$

Dieser Storchschnabel verkleinert immer, so lange der Zeichenstift in G steht, er kann aber auch vergrössern, wenn man Fahr- und Zeichenstift miteinander verwechselt. Auch erkennt man sofort dass hier die gezeichnete und die umfahrene Figur gleiche Lagen haben und keine entgegengesetzten wie bei den zwei ersten Anordnungen des Storchschnabels.

§. 281. Der Ertel'sche Storchschnabel. Die Fig. 341 stellt den (in seinen Stäben verkürzt gezeichneten und daher im Bilde zu dick erscheinenden) Ertel'schen Storchschnabel vor, dem das in Fig. 338 vorgestellte ältere System zu Grunde liegt. Das verschiebbare Parallelogramm ist auch hier mit A B C D, der auf der Originalzeichnung herumzuführende

Fahrstift mit E, der Zeichenstift mit G, und endlich die verticale Axe um welche sich das Instrument während der Arbeit dreht, mit F bezeichnet. Die zwei Lineale A B, A D bewegen sich an ihren Enden auf Rollen von Bein, während das dritte C D geschlitzt ist und dadurch gestattet die Axe F mittels eines Schiebers so zu verstellen dass sie in die durch die Stifte E und F bestimmte Gerade kommt. Mit ihrem unteren Theile ist die Axe F in ein eben bearbeitetes Stück Blei P das in Folge seines Gewichts und dreier sehr feiner kurzen Spitzen während der Arbeit auf dem Zeichentisch unverrückt liegen bleibt, eingelassen. Die Stifte E und F lassen sich, wie man sieht, auf den Linealen A B und A D ebenfalls mittels

Fig. 341.



Schiebern verstellen: wenn sie die richtige Lage haben, so werden sie wie der Schieber für F mittels Druckschrauben an den Linealen festgehalten. Um die in den Gleichungen (446) dargestellten Werthe von x und y von D aus auf den Linealen A D und C D abmessen zu können, sind auf denselben entsprechende Theilungen angebracht deren Einrichtung durch die beigefügten Zahlen von selbst klar ist. Durch die Linien m n, m o ist ein Faden angedeutet der sich bei n um die Röhre welche den Zeichenstift trägt, schlingt, bei m durch den Kopf des Zapfens A geht und bei o von dem Zeichner gehalten wird. Dieser Faden hat den Zweck durch Anziehen

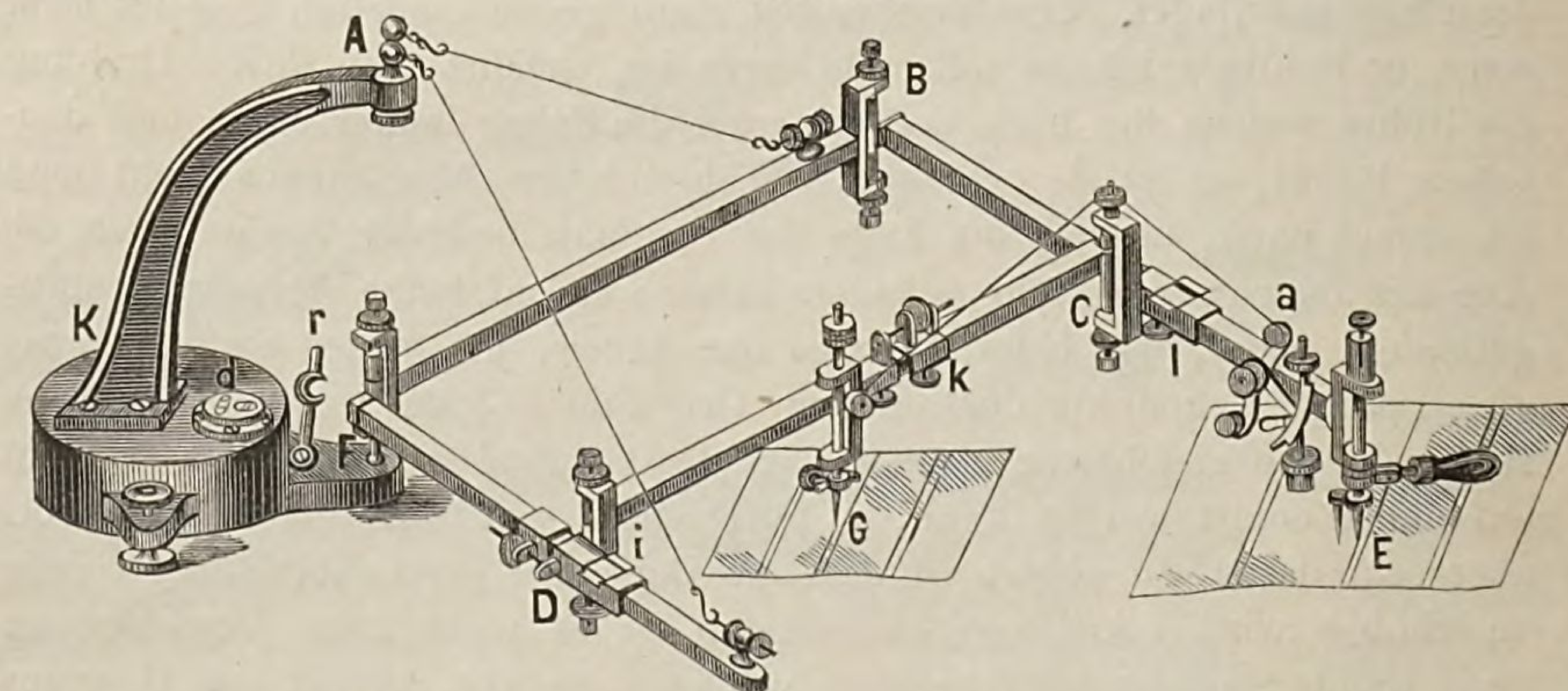
den Zeichenstift G dann zu heben, wenn der Fahrstift E beim Versetzen von einem Punkte zum anderen eine Linie beschreibt die nicht nachgezeichnet werden soll.

Der Gebrauch des beschriebenen Pantographen ist zwar im Wesentlichen schon in seiner Theorie und Beschreibung enthalten, wir wollen aber doch noch einige Bemerkungen beifügen. Zum Nachzeichnen ist ein Tisch mit ganz ebener Platte oder ein Reissbrett nöthig worauf Original und Copie hinreichend Raum finden. Um dem Papier der letzteren gegen das bereits festgelegte Original die richtige Lage zu geben, ist es gut dieses mit einem Rechtecke zu umgeben dessen homologe Seiten in dem Verhältniss der Massstäbe der Copie und des Originals stehen. Verrückt man nun dieses zweite Rechteck so lange, bis nacheinander drei Eckpunkte desselben vom Zeichenstifte berührt werden, wenn der Fahrstift auf den gleichnamigen Eckpunkten des Originalrechtecks steht, so wird die Nachzeichnung den gewünschten Platz auf dem Papiere einnehmen. Ist diese Lage gefunden, so befestigt man Original und Copie auf dem Zeichentische so dass während der Abzeichnung nicht die mindeste Verrückung desselben stattfindet. Der Zeichenstift muss genau centrisch gespitzt sein, wenn er richtig zeichnen soll. Ob er es ist, erfährt man durch Drehung der Röhre welche ihn hält: deckt hierbei die Spitze immer einen und denselben Punkt, so ist sie centrisch. Während des Abzeichnens sieht man manchmal nach, ob sich die Lage des Originals und der Copie gegen die Axe des Instruments nicht geändert haben: es hat keine Aenderung stattgefunden, wenn, wie beim Anfange der Arbeit, die beiden Stifte je zwei gleichnamige Eckpunkte der auf dem Originale und der Copie befindlichen Hilfsrechtecke gleichzeitig decken. Ist das Original so gross dass es nicht auf einmal copirt werden kann, so geschieht dieses in Abtheilungen, wobei aber sehr darauf zu achten ist dass die Copie bei jeder Abtheilung richtig verschoben wird. Am zweckmässigsten ist es wohl diese Verschiebung nach Richtungslinien vorzunehmen welche man vor Anfang des Copirens in das Original- und Zeichenblatt unter Berücksichtigung des Reductionsverhältnisses auf's Genaueste eingezeichnet hat.

§. 282. Der Storchschnabel von Ott & Coradi. Die mechanische Werkstätte von Ott & Coradi in Kempten verfertigt seit längerer Zeit Pantographen von vorzüglicher Leistungsfähigkeit, die es um so mehr verdienen hier beschrieben zu werden, als sie zugleich sehr billig sind. Diesen Storchschnäbeln liegt kein neues Princip zu Grunde, es sind nur gut erfundene und ausgeführte Detailconstructionen welche die Bewegungen aller Theile erleichtern und dadurch deren Gesammtheit eine grössere Genauigkeit der graphischen Darstellung verleihen. Hiezu gehört insbesondere ein zuerst von dem bekannten Mechaniker J. Goldschmid in Zürich angewendetes gusseisernes krahnenartiges Gestelle (Krahn) welches mittels gespannter Drähte den grössten Theil des Pantographen frei schwebend erhält. Nur beim Fahrstift ruht dieser mit einem Elfenbeingriff welcher

zugleich zum Führen dient, auf dem Zeichnungstische. Die Axe des Gestells steht senkrecht zur Unterlage und ist lothrecht sobald die letztere wagrecht liegt, was mit einer Dosenlibelle d erkannt werden kann. Die Axe F endigt unten in einer Stahlkugel um welche sich das ganze Instrument dreht; diese Kugel kann mittels einfachen Handgriffs vom Gestelle abgelöst und mittels des seitwärts gestellten Riegels r in dem Gesenke erhalten werden. Die messingnen Schienen des Instruments sind hohl und 9 auf 16mm stark; (die Zeichnung stellt sie ebenfalls verkürzt, folglich zu dick dar.) Ihre Bewegung erfolgt zwischen Spitzschrauben welche den Gang stets zu berichtigen gestatten. Das Lockerwerden dieser Schrauben wird durch Gegenmuttern verhindert. Die Stäbe sind in Millimeter getheilt und an den Hülsen i, k, l befinden sich Nonien mit $\frac{1}{10}$mm Angabe. Die Nullpunkte der Theilungen stehen von den Axen F, B, D genau eben so weit ab als die Nullpunkte der Nonien beziehlich von den Axen D, G, C entfernt sind, um hiemit und den in der Figur sichtbaren auf die Hülsen wirkenden Mikrometerschrauben die Abstände der Axen D, C und des

Fig. 342.



Stifts G mit aller Schärfe herstellen zu können. Der Blei- oder Punktirstift G kann durch einen leichten Druck auf den Auslösehebel a gehoben und durch Nachlassen gesenkt werden. Am Fahrstift E und über dessen Hülse befindet sich in einem cylindrischen Gehäuse eine Spiralfeder welche diesen Stift durch ihre Federkraft hebt und durch Druck zu senken gestattet.

Die Vortheile des Pantographen von Ott & Coradi bestehen erstens in der leichteren und sicherern Führung welche durch den Wegfall der Frictionsrollen und weiter dadurch erreicht wird dass nur ein geringer Theil des Instruments auf dem Tische gleitet; zweitens in der Verwendbarkeit jedes gewöhnlichen Tisches zum Nachzeichnen, indem die Schienen des Pantographen ohne Nachtheil über diesen hinausreichen dürfen, wenn nur der Theil worauf das Eingangs erwähnte gusseiserne Gestelle ruht, wagrecht gestellt werden kann; drittens in dem Zusammentreffen grösserer Genauigkeit und geringerer Anschaffungskosten.

Tafeln zur Vermessungskunde.

In diesem Anhange zu den Elementen der Vermessungskunde haben wir 30 Tafeln zusammengestellt welche denjenigen die sich dieses Buchs entweder auf dem Felde oder in dem Arbeits- oder Studirzimmer bedienen, bei grösseren Zahlenrechnungen Hilfe zu leisten oder Aufschluss zu geben haben über oft gebrauchte und bei den Berechnungen vorausgesetzte constante Grössen deren Entwickelung keinen Lehrgegenstand der Vermessungskunde bildet. Dieses ist der Fall mit den Tafeln welche die Längen der Erdmeridiane und Parallelkreise, die Krümmungshalbmesser des Erdellipsoids, mit einem Worte, die Dimensionen des Erdkörpers vorstellen. Diese Tafeln und jene welche zwar in das Gebiet der Astronomie gehören aber doch manchmal vom Geodäten gebraucht werden, wie z. B. die Tafel über die mittleren astronomischen Refractionen, gehen allen übrigen voraus und umfassen die ersten 8 Nummern; die folgenden von Nr 9 bis Nr 30 erstrecken sich über die verschiedensten Gegenstände der technischen Geometrie und werden in der Praxis des Ingenieurs, des Markscheiders, des Geometers und des Geographen vorzugsweise oft gebraucht. Letztere sind gegen früher theils vermehrt theils umgerechnet worden; wenn jedoch noch einige auf das Fussmass sich beziehen, so wurden diese in der gegenwärtigen Auflage nur desshalb noch beibehalten, weil manche Messinstrumente (z. B. Distanzmesser, Reichenbach'sche Strommesser u. dergl.) Theilungen im Fussmasse haben die man nicht sofort abändern lassen kann oder will und bei deren Gebrauch man die Umrechnung des Resultats in Metermass nicht scheut. Bei einer folgenden Auflage wird diese Rücksicht wohl nicht mehr zu nehmen sein. Der Gebrauch der Tafeln ist in den nachstehenden Legenden erklärt.

Tafel Nr I

gibt verschiedene oft gebrauchte Grössen der Erdgestalt. Sie ist nach den in dem Berliner astronomischen Jahrbuche für 1852 enthaltenen „Tafeln für die Gestalt der Erde nach Bessel's Bestimmungen“ zusammengestellt, und

bedarf hinsichtlich ihrer Einrichtung und ihres Gebrauchs wohl nur der Bemerkung dass, wenn man die Grösse des Halbmessers eines Parallelkreises aus der in der Tafel enthaltenen Länge eines Grads in Toisen finden will, diese Länge lediglich zu multipliciren ist mit der Zahl

$$\frac{180}{\pi} = 57{,}2957795, \text{ deren } \log = 1{,}7581226.$$

Wegen der Formeln zur Berechnung dieser Tafel auf das genannte Jahrbuch (S. 318—342) verweisend, fügen wir noch einige Zahlen bei welche als eine Ergänzung der Tafel I anzusehen sind.

1) Will man die in Toisen angegebenen Längen der Meridiane und Parallelkreise in Meter ausdrücken, so ist dem Logarithmus der in der Tafel gegebenen Zahl noch die Zahl 0,2898199 beizufügen, um den Logarithmus der gesuchten Länge für Meter zu erhalten. So ist z. B. für 29^0 Breite die Gradlänge = 56861,105 t und log 56861,105 = 4,7548153; daher, wenn x diese Gradlänge in Meter bedeutet:

$$\log x = 4{,}7548153 + 0{,}2898199 = 5{,}0446351 \text{ und } x = 110824{,}36 \text{ m.}$$

Zu erinnern ist noch dass diese Länge als das arithmetische Mittel aus den Gradlängen von 28—29^0 (= 110816,2 m) und von 29—30^0 (= 110832,6 m) angesehen werden darf; denn es ist $\frac{1}{2}$ (110816,2 + 110832,6) = 110824,4 m.

2) Bezeichnet a die halbe grosse, b die halbe kleine Axe und e die Excentricität eines elliptischen Erdmeridians, so ist

$$\begin{array}{ll} a = 3\,272\,077,140^t & \log a^t = 6{,}5148235 \\ \;\; = 6\,377\,397,156^m & \log a^m = 6{,}8046435 \\ b = 3\,261\,139,328^t & \log b^t = 6{,}5133693 \\ \;\; = 6\,356\,078,963^m & \log b^m = 6{,}8031893 \\ a^2 e^2 = a^2 - b^2 & \log e = 8{,}9122052 \end{array}$$

3) Nach diesen Bestimmungen ist die Länge einer geographischen Meile wovon 15 auf einen Grad des Aequators gehen, = 3807,23463 Toisen (log = 3,5806096) = 7420,43854 Meter (log = 3,8704296); ferner ist 1 Kilometer = 0,13476292 geographischen Meilen (log = 9,1295704), weiter 1 Quadratkilometer = 0,018161046 geographischen Quadratmeilen (log = 8,2591409) und endlich 1 geographische Quadratmeile = 55,0629081 Quadratkilometer (log = 1,7408591).

Tafel Nr II

ist theilweise eine Wiederholung der Tafel Nr I, insoferne sie auch die Grössen der Längen- und Breitengrade enthält; ein wesentlicher Unterschied beider Tafeln besteht jedoch darin dass hier alle Längen in Kilometern und die Meridiangrade zwischen den Breiten φ und $\varphi + 1$ ausgedrückt, überdiess auch die Flächeninhalte aller Gradabtheilungen, d. i. der aus je zwei Meridianbögen von 1^0 und aus je zwei Parallelbögen von 1^0 gebildeten Vierecke in Quadrat-Kilometern und geographischen Quadratmeilen ange-

geben sind. Diese Tafel ist wie die drei folgenden von Prof. Jordan berechnet und mit seiner Erlaubniss hier abgedruckt. Einer weiteren Erklärung bedarf sie jedenfalls nicht.

Tafel Nr III

enthält die Längen der Parallelkreisbögen unter allen Breiten von 0 bis 90° in Meter, und ist desshalb für viele geodätische Berechnungen bequem. In den Spalten 1 und 2 sind die auf dem Bessel'schen Erdellipsoid gemessenen Längen von je 1 Bogenminute und 1 Bogensecunde, und in den Spalten 3 und 4 die Bogen-Längen in Meter angegeben welche ein Punkt der Erdoberfläche in 1 Minute oder 1 Secunde Zeit durchläuft. Es ist klar dass die Zahlen in der dritten und vierten Spalte beziehungsweise 15mal grösser sind als die in der ersten und zweiten, da die Erde in 1 Stunde Zeit einen Bogen von 15° durchläuft.

Tafel Nr IV

enthält in zwei Abtheilungen (IV a von 0 bis 90° und IV b von 47 bis 53° reichend) die verschiedenen Krümmungshalbmesser der Erdoberfläche nach Bessels Bestimmung der Axen und der Abplattung des Erd-Ellipsoids und nach der Berechnung von Jordan in dessen Handbuch der Vermessungskunde, Bd II, S. 48. In dieser Tafel bezeichnet φ die geographische Breite des Punkts für welchen die Logarithmen der Krümmungshalbmesser R_1, R_2, r und deren Unterschiede Δ angegeben sind:

R_1 ist der Krümmungshalbmesser des Meridians im Punkte φ nach der Formel

$$R_1 = \frac{a\,(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^3}}$$

R_2 ist der Querkrümmungs-Halbmesser in demselben Punkt und in der Richtung der Normale von der Oberfläche bis zur Erdaxe gemessen, nach der Formel

$$R_2 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

r ist der Halbmesser der berührenden Kugel welche man bei Landesvermessungen statt des Ellipsoids dem trigonometrischen Hauptnetze zu Grunde legen darf, nach der Formel

$$r = \sqrt{R_1\,R_2} = \frac{a\sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

a ist die in Tafel Nr I angegebene grosse Halbaxe und

e die dort ebenfalls näher bestimmte Excentricität der Meridian-Ellipse.

Tafel Nr V

enthält mehrere in der höheren Geodäsie, namentlich bei den trigonometrischen Berechnungen der Dreiecksnetze für Landesvermessungen häufig gebrauchte Functionen des in Tafel Nr IV enthaltenen mittleren Krümmungshalbmessers r. Dieselbe wurde von Prof. Jordan berechnet und in Bd II, S. 50 seines Handbuchs der Vermessungskunde mitgetheilt. Ihr Gebrauch ist selbstverständlich, wenn man folgende Bezeichnungen kennt:

Δ ist die Differenz zweier auf einander folgenden Logarithmen,
ϱ ist der in Bd I, S. 7 definirte Reductionsfactor 206265″ und
M ist der Modul der brigg. Logarithmen und log M = 9,63778 — 10

Tafel Nr VI

ist nach der in den „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie“ von Gauss befindlichen Tafel zusammengestellt und enthält die einander entsprechenden geographischen Breiten auf dem Erdellipsoid und der dafür substituirten Kugelfläche. Da es häufiger vorkommt dass die Breite auf der Kugel gegeben und die für das Sphäroid gesucht wird, als umgekehrt, so bildet jene Breite das Argument der Tafel. Gauss lässt dieses innerhalb 12 Graden von Minute zu Minute wachsen und gibt die Secunden der Breiten des Ellipsoids auf 5 Decimalstellen genau an, um die Tafel „für die allerschärfste Berechnung einer trigonometrischen Vermessung, nämlich für eine Durchführung derselben mit zehnzifferigen Logarithmen vollkommen zureichend“ zu machen; für unsere Zwecke genügt es jedoch das Argument von 2 zu 2 Minuten fortschreiten zu lassen und die Secunden der elliptischen Breiten auf 2 Decimalstellen genau anzugeben. Die in der Tafel nicht vorkommenden Breiten lassen sich mit hinreichender Genauigkeit aus den Differenzen je zweier Nachbarwerthe berechnen. Denn gesetzt, man wolle die elliptische Breite φ' finden welche der Kugelbreite $\varphi = 49^0\,25'\,10''$ entspricht, so liefert die Tafel für $29^0\,24'$ eine elliptische Breite von $49^0\,25'\,44{,}74''$ und für $49^0\,26'$ eine elliptische Breite von $49^0\,27'\,44{,}96''$; die Differenz für 2 Minuten Kugelbreite beträgt also $2'\,0{,}22''$ elliptische Breite und folglich genau genug $1'\,10{,}13''$ elliptische Breite für $1'\,10''$ Kugelbreite. Es ist somit die gesuchte Breite $\varphi' = 49^0\,25'\,44{,}74'' + 1'\,10{,}13'' = 49^0\,26'\,54{,}87''$.

Tafel Nr VII

enthält die von Soldner in München für die bayerische Landesvermessung bereits im Jahre 1810 berechnete und A d d i t a m e n t e n t a f e l genannte Tabelle zur Verwandlung des Logarithmus eines Sinus in den Logarithmus des zugehörigen (in bayerischen Ruthen) ausgedrückten Bogens, d. h. sie stellt die Werthe von log n auf welche zu log sin φ addirt, den log φ

geben, nach der am Schlusse des §. 129 dieses Bands (S. 261) entwickelten Gleichung $\log \varphi = \log \sin \varphi + \log n$. Der Logarithmus des Sinus bildet immer den Eingang in die Tafel (das Argument). Will man zu $\log \sin \varphi = 7{,}6494198$ den $\log \varphi = x$ finden, so liefert die Tafel sofort mit dem Argumente 7,64 den ersten Werth 6,3402046 . 8 und für 0,009 die achte Decimalstelle = 5, da für 0,010 die Differenz = 6 Einheiten der achten Stelle beträgt. Somit ist hier

$$\begin{aligned} \log n &= 6{,}3402047 \\ \log \sin \varphi &= 7{,}6494198 \\ \hline x = \log \varphi &= 3{,}9896245 \end{aligned}$$

Tafel Nr VIII

gibt die mittleren Werthe der astronomischen Refraction für alle Höhenwinkel zwischen 0 und 90°. Diese Werthe bedürften noch Verbesserungen wegen der Temperatur und des Barometerstands, wofür es ebenfalls nach Bessel's Bestimmungen entworfene Tafeln gibt. (Besonders zu empfehlen: Wolf, Handbuch der Mathematik etc. Bd II, Seite 401). Da aber diese Verbesserungen nur ganz unbedeutende Grössen sind und die in diesem Buche vorkommenden und die Berücksichtigung der astronomischen Refraction erfordernden geodätischen Aufgaben nur angenäherte Resultate liefern sollen, so unterblieb die Mittheilung der Correctionstafeln. Die Berechnung der mittleren Refraction für andere als in der Tabelle vorkommende Höhenwinkel geschieht mit Hilfe der Proportionaltheile.

Tafel Nr IX

gibt die Reductionen der zwischen 600 und 760 Millimeter und 1 bis 30 Grad Celsius abgelesenen Barometerstände auf die Normaltemperatur 0°. Sie setzt eine Messingscala des Barometers voraus deren Normaltemperatur $\tau = 0^0$ ist und beruht auf der Formel $c = 0{,}00016275\, b\, t$, in der b den Barometerstand und t die Temperatur bezeichnet. Das Vorzeichen von c stimmt mit dem von t überein.

Tafel Nr X

gibt die Reductionen der zwischen 23 und 28,5 P. Zoll oder 276 und 342 P. Linien und — 6° bis + 25° R. beobachteten Barometerstände auf die Temperatur 0°. Sie setzt einen messingnen Massstab von der Normaltemperatur 13° R. voraus und beruht auf der Formel $c = -(0{,}0003052 + 0{,}0002017\, t)\, b$, worin b den Barometerstand in P. Linien und t die Temperatur nach Réaumur bedeutet.

Tafel Nr XI

enthält die von Delcros nach der Formel von Schleiermacher berechneten und in Poggendorff's Annalen (Bd 60, S. 377) sowie in Marbach's physik. Lexikon (Bd 1, S. 739) zusammengestellten Werthe der Capillardepressionen des Quecksilbers in Barometerröhren. Man findet die zu einer gegebenen Röhrenweite und Kuppenhöhe gehörige Depression, indem man den Halbmesser der Röhre in der ersten Verticalspalte und die Höhe der Quecksilberkuppe in der obersten Horizontalreihe aufsucht, und von diesen beiden Stellen aus wagrecht und lothrecht fortgeht bis sich die betreffenden Spalten schneiden. An dem Schnittpunkte steht die gesuchte Depression in Millimeter.

Tafel Nr XII

oder die 1 hypsometrische Tafel gibt den zu $(T + t)$ gehörigen Werth $A = \log k + \log [1{,}0025 + 0{,}0000057\,(T + t)] + \log [1 + 0{,}0029\,(T + t)]$ sowohl für $k = 18404{,}9$ Meter als für $k = 56660$ Pariser Fuss. Der letztere Werth ist mit A' bezeichnet. Für Bruchtheile der Temperaturgrade findet man den zugehörigen Werth von A oder A' durch einfache Interpolation.

Tafel Nr XIII

oder die 2 hypsometrische Tafel gibt für jede geographische Breite ψ der Beobachtungsstationen die Correction wegen der Veränderlichkeit der Schwere oder $\log G = \log (1 + 0{,}0026 \cos 2\psi)$. Diese Correction ist für $\psi = 45^0$ null, für Breiten unter 45^0 positiv, und für Breiten über 45^0 negativ. Hiernach versteht sich der Gebrauch dieser Tafel von selbst.

Tafel Nr XIV

oder die 3 hypsometrische Tafel gibt den Werth von $\log Z = \log (1 + (2z + h) : r)$ in der Art dass man mit dem aus $A + \log u$ zusammengesetzten Werthe von $\log h$ in die erste Verticalspalte eingeht wenn die Höhe h in Meter, und in die letzte wenn h in Pariser Fuss gesucht wird, hierauf die zugehörige Horizontalreihe durchfährt bis an die Verticalreihe deren Kopf die beiläufige Meereshöhe z der unteren Station enthält, und die daselbst stehende Zahl als Einheiten der fünften Stelle des gesuchten Logarithmus ansieht. Für $z = 390$ m und $A + \log u = 3{,}54275$ ist $\log Z = 0{,}00027$; aber für $z = 390$ m und $A' + \log u = 3{,}54275$ wird $\log Z = 0{,}00012$.

Tafel Nr XV

oder die 4 hypsometrische Tafel gibt die Maximalspannungen des in der Luft vorkommenden Wasserdampfs und zwar in der Abtheilung A für Réaumur'sche Grade der Lufttemperatur in Pariser Linien, und in der Ab-

theilung B für Centigrade in Millimetern Quecksilberdruck. Für Bruchtheile von Graden wird der entsprechende Druck durch einfaches Interpoliren gefunden. (Vergl. die Schlussbemerkung zu Tafel XVI.)

Tafel Nr XVI

oder die 5 hypsometrische Tafel gibt das zweite Glied des Ausdrucks zur Berechnung des wirklichen Dampfdrucks der Atmosphäre nach der Formel: $\sigma = \sigma' - \mu\,(t - t')\,b$, und zwar in der Abtheilung A in Pariser Linien wenn der Barometerstand b in derselben Masseinheit und die psychrometrische Differenz $t - t'$ in Réaumur'schen Graden gegeben ist, und in der Abtheilung B in Millimetern Quecksilberdruck wenn der Barometerstand in Millimetern und die psychrometrische Differenz in Centigraden bekannt ist. Diese und die vorige Tafel liefern zusammen die Spannung σ.

Tafel Nr XVII

oder die 6 hypsometrische Tafel gibt den $\log F = \log\,(1 + \frac{3}{8}\,\varphi)$ wenn man den mittleren Barometerstand b der beiden Stationen und den mittleren Dampfdruck σ kennt. Ist b und σ in Linien gegeben, so benützt man die Abtheilung A; hat man aber b und σ in Millimetern, so findet sich log F in der Abtheilung B. Wenn in der obersten Horizontalreihe der 5 und 6 hypsometrischen Tafel beziehungsweise nur ganze Grade und Linien (oder Millimeter) stehen, während die Werthe von $\mu\,(t - t')\,b$ und $\log\,(1 + \frac{3}{8}\,\varphi)$ auch für Bruchtheile von Graden und Linien (oder Millimetern) gesucht werden, so ist zu bemerken dass in dem vorliegenden Falle die gesuchten Werthe den Temperaturen und Dampfspannungen proportional sind, also für Zehntel- und Hundertel-Grade und Linien (oder Millimeter) leicht durch Division mit 10 oder 100 gefunden werden können. So ist z. B. für $t - t' = 6{,}54^0$ R und $b = 310'''$ nach Abtheilung A der 5 Tafel: $\mu\,(t - t')\,b = 1{,}860 + 0{,}155 + 0{,}012 = 2{,}027'''$ und für $\sigma = 10{,}51'''$ und $b = 275'''$ nach Abtheilung A der 6 Tafel:

$$\log\,(1 + \tfrac{3}{8}\,\varphi) = 0{,}00592 + 0{,}000296 + 0{,}0000059 = 0{,}00622$$

Statt der Tafeln XV, XVI, XVII kann man sich der in Bd. II, §. 196, Seite 400 mitgetheilten Ersatztafel (welche als 4 hypsometrische Tafel erscheint) bedienen, wenn die Feuchtigkeit der Luft nicht beobachtet worden ist.

Tafel Nr XVIII

dient zur näherungsweisen Berechnung der barometrisch gemessenen Höhenunterschiede nach der Formel $h = C\,\Delta$ auf Seite 408 des II Bands, worin C den barometrischen Coefficienten oder den Höhenunterschied für 1 Millimeter Barometerdifferenz und Δ den Unterschied der beobachteten Barometerstände $B_0 - b_0$ vorstellt. Eine solche Barometertafel war von dem

Verfasser schon im Jahre 1875 berechnet worden; wenn er aber gleichwohl die vorliegende aus der von Jordan 1877 berechneten und im ersten Bande seines Handbuchs (S. 523) mitgetheilten Tafel zusammengesetzt hat, so geschah es, weil letztere in Beziehung auf die Temperaturen umfangreicher ist als die Tafel vom Jahre 1875. Der Gebrauch der Tafel XVIII versteht sich fast von selbst: Hat man nämlich für irgend einen mittleren Barometerstand $\Sigma = \frac{1}{2} B_0 + b_0) = 714{,}5$ mm und eine mittlere Temperatur $\tau = \frac{1}{2}(T + t) = 11{,}8^0$ C einen Unterschied der Barometerstände $\Delta = B_0 - b_0 = 10{,}4$ mm beobachtet, so geht man mit Σ in die oberste Horizontalreihe ein (hier bis zu 715) und mit τ in die erste Verticalspalte (hier bis 12): in der durch diese Zahlen bestimmten rechtwinkeligen Ecke auf der Zeile τ und senkrecht unter Σ findet man $C = 11{,}71$ m, und es ist daher der gesuchte Höhenunterschied $h = C\,\Delta = 11{,}71 \,.\, 10{,}4 = 121{,}78$ m.

Tafel Nr XIX

dient zur Reduction der mit dem Reichenbach'schen Distanzmesser gemessenen schiefen Längen auf den Horizont. Die Theorie zur Berechnung derselben ist in §. 243, Bd. I enthalten, und die zu Grunde gelegten Constanten beziehen sich auf die Reichenbach'schen Distanzmesser welche Ertel und Sohn in München für Messtisch-Aufnahmen liefern.

Da es nicht gleichgültig ist ob die zu reducirende Linie über oder unter dem Horizont des Instruments liegt, so zerfällt die Tafel in zwei Abtheilungen, wovon die mit „Erhebung des Rohrs“ bezeichnete die Reductionen für beobachtete Höhen- oder Elevationswinkel, die zweite mit der Ueberschrift „Senkung des Rohrs“ die Reductionen für Tiefen- oder Depressionswinkel liefert. Bei dem Gebrauche jeder Abtheilung der Tafel sucht man die abgelesene schiefe Länge oder eine ihr nahestehende in der obersten Horizontalreihe, den Neigungswinkel oder seinen Nachbarwerth in der ersten Verticalreihe auf und zieht von beiden Stellen aus ab- und seitwärts senkrechte Linien bis sie sich begegnen: an dem Schnittpunkte steht die Länge welche von der Ablesung abzuziehen ist. Ist z. B. bei einem Höhenwinkel von $14^0\,36'$ eine Ablesung von $438{,}5'$ gemacht worden, so benützt man in der Abtheilung 1 die Verticalreihe $14^0\,30'$ und die Horizontalreihe $450'$: beide zusammen geben die Reductionsgrösse $12{,}8'$ und somit beträgt die reducirte Länge $438{,}5 - 12{,}8 = 425{,}7$ Fuss. Würde dieselbe Ablesung bei einem Tiefenwinkel von $14^0\,36'$ gemacht worden sein, so lieferte die Abtheilung 2 als Reductionsgrösse $16{,}1'$ und die reducirte Länge wäre $= 438{,}5 - 16{,}1 = 422{,}4$ Fuss.

Die Tafel Nr XIX ist für jedes bestimmte Fussmass zu benützen wenn das Distanzfernrohr und die Distanzlatte dafür eingerichtet sind. Diese Einrichtung erfordert nur dass die in §. 243, Bd. I mit c, d, l bezeichneten Constanten ihre Werthe auch in dem neuen Masse behalten, und wird von der Ertel'schen Werkstätte auf Verlangen besorgt.

Tafel Nr XX

gibt die Reductionen für den Ertel'schen und jeden Reichenbach'schen Distanzmesser welchem die in §. 248, Bd. I besprochenen Constanten zukommen. Einrichtung und Gebrauch stimmen ganz und gar mit denen der vorhergehenden Tafel überein, sowie auch die für diese Tafel gemachte Schlussbemerkung hier gültig ist.

Tafel Nr XXI

gibt die Reductionen $e \sin^2 \omega$ für alle nach Reichenbach eingerichteten Distanzmesser, wenn die Latte nicht mit einem Diopter versehen ist um damit senkrecht zur Absehlinie gestellt zu werden, wie die Tafeln Nr XIX und Nr XX voraussetzen, sondern wenn sie mittels Senkel oder Libelle lothrecht gehalten werden kann. Da die Unterscheidung zwischen Höhen- und Tiefenwinkeln hier wegfällt, so bedarf der Gebrauch dieser auf der Betrachtung in §. 245, Seite 408 bis 411) des I Bands beruhenden Tafel keiner weiteren Erläuterung.

Tafel Nr XXII

gehört wie die beiden nächsten zum Gebrauche des zum Distanzmessen eingerichteten Nivellirinstruments von Stampfer und Starke. Nach der in §. 260, Bd I enthaltenen Theorie, worauf die Berechnung beruht, liefert diese der „Anleitung zum Nivelliren" von Stampfer entnommene Tafel den Werth des ersten Glieds in dem Ausdrucke Nr 185 für die Horizontalprojection der gemessenen schiefen Länge, nämlich den Werth von

$$e = \frac{324}{o - u} \text{ von } \frac{1}{100} \text{ zu } \frac{1}{100} \text{ Schraubengang.}$$

Sind die Schraubengänge bis auf 0,001 abgelesen worden, so findet man den Werth des genannten ersten Glieds mit Hilfe der „Proportionaltheile" welche hinter der „Distanz" stehen. Diese Proportionaltheile sind so gestellt dass sie mit den Endziffern der ersten Spalte ($o - u$) correspondiren. So steht z. B. der Proportionaltheil für 0,003 in jener Zeile worin der genäherte Werth von $o - u$ die Endziffer 3 hat, und beträgt, wenn $o - u = 1{,}03$ ist, 0,88; wenn $o - u = 1{,}13$ ist, 0,74 u. s. w. Diese Proportionaltheile müssen stets von der in der zweiten Spalte aufgesuchten Distanz abgezogen werden, da die Entfernung abnimmt wenn die Differenz $o - u$ wächst. Wie gross ist e, wenn $o - u = 2{,}784$ gefunden worden?

Zunächst ist für 2,78 die Distanz . .	= 116,55
alsdann für 0,004 der Proportionaltheil	= 0,17
daher der gesuchte Werth	= 116,38

Mit dieser Zahl ist die in der Formel (185) enthaltene Grösse d zu multipliciren, wenn die Entfernung e in Ruthen, Klaftern, Fussen u. s. w.

ausgedrückt werden soll. Stehen die beiden Scheiben der Distanzlatte genau 1 Klafter von einander ab, so ist d = 1 Klafter und daher in dem vorstehenden Falle e = 116,38 Klafter. Hätte man aber die Scheiben 2 Meter auseinander gestellt, so wäre d = 2 m und e = 2 × 116,38 = 232,76 m.

Die Werthe 1 und 10 für o — u welche in der Tafel enthalten sind, werden zwar selten überschritten werden; sollte aber o — u kleiner als 1 werden, so suche man die Distanz für den zehnfach grösseren Werth von o — u und nehme dieselbe zehnmal grösser; wird o — u grösser als 10, so verfahre man entgegengesetzt. Ist z. B. o — u = 0,943, so findet man für 9,43 die Distanz = 34,36; es entspricht also 0,943 der Werth 343,6. Wäre o — u = 12,34, so hätte man für 1,234 die Distanz = 262,59 und daher für 12,34 die Entfernung = 26,259.

Tafel Nr XXIII

enthält die Verbesserung der Distanz welche wegen des veränderlichen Werths der Schraubengänge oder desshalb nöthig wird, weil die Grösse k von dem Mittelwerthe 324 nach welchem die Tafel Nr XXII berechnet ist, mehr oder weniger abweicht. In Gl (185) ist die genannte Verbesserung durch den Ausdruck

$$\cdot \frac{0{,}0356\,(o + u - 2m)}{o - u}$$

gegeben, wobei m nach Gl (186) bestimmt wird; in der Tafel kommen die Glieder (o — u) und (o + u — 2m) ebenfalls vor.

Will man nun für einen gegebenen Werth von (o — u) den Werth der fraglichen Verbesserung in Tafel Nr XXIII finden, so berechnet man zuerst die Summe (o + u — 2 m), sucht deren Werth in der obersten Horizontalreihe und (o — u) in der ersten Verticalreihe auf und fährt ab- und seitwärts bis zum Schnittpunkte der Zeilen wo sich die gesuchte Verbesserung findet welche mit (o + u — 2 m) zugleich positiv oder negativ ist. Wenn sich der berechnete Werth von (o + u — 2m) oder der gegebene von (o — u) nicht genau in der Tafel findet, was häufig der Fall sein wird, so genügt es die nächstliegenden Werthe der Tafel dafür zu nehmen. Und sollte (o — u) kleiner als 1 oder grösser als 10 sein, so verfährt man nach dem letzten Absatze der zu Tafel Nr XXII gegebenen Anweisung.

Tafel Nr XXIV

gibt die Reduction der aus den beiden vorhergehenden Tafeln erhaltenen Entfernung auf den Horizont oder das letzte Glied

$$- \frac{0{,}0031\,(h - u)^2}{o - u}$$

der Formel Nr 185. Sie wird in derselben Weise wie Tafel Nr XXIII gebraucht. Die gefundene Reduction ist stets abzuziehen; in den meisten

Fällen ist sie so gering dass sie vernachlässigt werden kann. Sollte (h — u) grösser als 22 sein, so suche man zu $\frac{1}{2}$ (h — u) die Reduction und sehe deren 4fachen Werth als die zu (h — u) gehörige Reduction an. Wenn z. B. d = 1 Klafter, m = 28,1 gegeben und h = 23,937, o = 18,280, u = 16,757 beobachtet worden sind; wie gross ist die horizontale Entfernung der Latte vom Instrumente?

Mit o — u = 1,523 liefert Tafel Nr XXII:	+ 212,76
mit o + u — 2m = — 21,2 Tafel Nr XXIII:	— 0,47
mit h — u = 7,2 gibt die Tafel Nr XXIV:	— 0,11
und daher ist die gesuchte Entfernung	= 212,18 Klafter

Tafel Nr XXV

enthält die Werthe von $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$ und log $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$, deren man bedarf um aus den am Stromquadranten beobachteten Ablenkungswinkeln α die Geschwindigkeit des Wassers nach der Formel $v = k\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$ zu berechnen. Da k für jedes Instrument einen anderen Werth hat, so konnte hier nicht mehr als der Factor $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$ und dessen Logarithmus gegeben werden.

Tafel Nr XXVI

dient zur Berechnung der Geschwindigkeiten des Wassers in Flüssen und Canälen, wenn mit dem Reichenbach'schen Strommesser oder der Darcy'schen Röhre die Grösse h' beobachtet und für das Instrument die Constante k bekannt ist. Nimmt man aus der Tafel den Werth von $\sqrt{h'}$ und multiplicirt ihn mit k, so ist die zu h' gehörige Geschwindigkeit gefunden. Die Tabelle gilt zwar für jede Masseinheit, sie darf aber nur für diejenige Einheit angewendet werden in der k bestimmt ist. Hier ist zunächst der Fuss als Masseinheit angenommen, für welchen $k = m\sqrt{2g}$ und, wenn m = 1 ist, $k = \sqrt{2g} = \sqrt{2 . 31{,}25} = \sqrt{62{,}5} = 7{,}9'$ rheinl. Für $h' = 1{,}04'$ wird $v = k\sqrt{h'} = 8{,}06'$ in der Secunde. Grössere Geschwindigkeiten misst man nicht mit dem Reichenbach'schen Strommesser oder der Darcy'schen Röhre.

Tafel Nr XXVII

dient zur Absteckung von Kreisbögen und enthält die Ordinaten für gegebene Abscissen. Sie ist nach der Gleichung $y = r - \sqrt{(r + x)(r - x)}$ berechnet. Für Kreise bis zu 130 m Halbmesser wachsen die auf den Tangenten von den Berührungspunkten aus gezählten Abscissen von 5 zu 5 m, für Kreise zwischen 140 und 1000 m Halbmesser von 10 zu 10 m, und für Kreise von 1000 bis 5000 m Halbmesser von 20 zu 20 Meter. Der Gebrauch dieser Tafel für eine andere Längeneinheit als Meter bedarf wohl keiner Erläuterung, da sie für jede Einheit gilt. Wenn hier Meter besonders

genannt sind, so geschah es wegen der Länge der Abscissenunterschiede die man in der Praxis anzuwenden pflegt und die nach den Halbmessern bald 5, bald 10, bald 20 m betragen.

Tafel Nr XXVIII

setzt abgesteckte Kreisbögen deren Längen entweder 50 oder 100 Längeneinheiten betragen, voraus, und dient alsdann zur Absteckung von Zwischenpunkten dieser Bögen. Soll in der Mitte der Sehne eine senkrechte Ordinate abgesteckt werden, so findet man deren Werth in der Spalte welche mit „Ordinate zu $\frac{1}{2}$ b" überschrieben ist; und braucht man die Ordinate im ersten oder dritten Viertel der Sehne, so liefert die Spalte „Ordinate zu $\frac{1}{4}$ b" die gesuchte Ordinate. Die Längeneinheit der Bögen, Sehnen, Halbmesser und Ordinaten kann selbstverständlich eine beliebige sein, wenn sie nur für alle Stücke eine und dieselbe ist, z. B. Fuss, Meter, Decimeter u. s. w. Wollte man wissen wie gross die Ordinaten zu $\frac{1}{2}$ b und $\frac{1}{4}$ b sind, wenn $b = 10$ m und $r = 250$ m ist, so suche man die Ordinaten zu $\frac{1}{2}$ b und $\frac{1}{4}$ b unter Nr 2 für $b = 100$ dcm und $r = 2500$ dcm. Die Tabelle gibt $y_1 = 0{,}50$ dcm $= 0{,}05$ m und $y_2 = 0{,}37$ dcm $= 0{,}037$ m.

Tafel Nr XXIX.

Diese Tafel dient zur Ersparung von Rechnungen bei der Anwendung der auf Seite 65 bis 68 des zweiten Bands beschriebenen Methode des Absteckens von Kreisbögen durch Peripheriewinkel welche einen gemeinsamen Scheitel haben. Da es sich bei jener Methode darum handelt die Winkel $T\,D\,p_1 = \frac{1}{2}\alpha$, $T\,D\,p_2 = 2\,.\,\frac{1}{2}\alpha$, $T\,D\,p_3 = 3\,.\,\frac{1}{2}\alpha$, $T\,D\,p_4 = 4\,.\,\frac{1}{2}\alpha$ u. s. w. zu kennen um sie nach einander an die Tangenten D T, p_4 T' u. s. w. anzutragen, so mussten zuerst für verschiedene gegebene Halbmesser r und eine gegebene Sehne $s = D\,p_1 = p_1\,p_2 = p_2\,p_3$ u. s. w. aus der Gleichung $2\,r\,.\,\sin\frac{1}{2}\alpha = s$ die Peripheriewinkel $\frac{1}{2}\alpha$ und damit dann die Vielfachen $2\,.\,\frac{1}{2}\alpha$, $3\,.\,\frac{1}{2}\alpha$ u. s. f. bestimmt werden. Dieses ist nun in Tafel Nr XXIX geschehen, und zwar für Halbmesser von 100 bis zu 2500 Längeneinheiten und für eine Sehne von 20 solchen Einheiten. Ist also der Halbmesser z. B. $r = 100$ m und die Sehne des Centriwinkels α zu 20 m gegeben, so findet man $\sin\frac{1}{2}\alpha = 0{,}1$ und hieraus $\frac{1}{2}\alpha = 5^0\,44'\,21''$, oder auch $= 180^0 - 5^0\,44'\,21'' = 174^0\,15'\,39''$. Damit ergibt sich weiter, wenn bloss der spitze Winkel berücksichtigt wird: $2\,.\,\frac{1}{2}\alpha = 11^0\,28'\,42''$; $3\,.\,\frac{1}{2}\alpha = 17^0\,13'\,3''$; $4\,.\,\frac{1}{2}\alpha = 22^0\,57'\,24''$; $5\,.\,\frac{1}{2}\alpha = 28^0\,41'\,45''$ u. s. w. Soll nun der ganze Kreisbogen aus $2\,.\,5$ oder 10 Bogenstücken, jedes mit der Sehne von 20 m bestehen, so wird der Centriwinkel $10\,\alpha$ zwischen den Berührungspunkten $= 10\,.\,(11^0\,28'\,42'') = 114^0\,47'$ und der Schnittwinkel der Tangenten $\varphi = 180^0 - 114^0\,47' = 65^0\,13'$. Man könnte auch noch die Ergänzungen der Peripheriewinkel auf 180^0 oder die Winkel der Sehne mit der zweiten

Tangentenrichtung ($180^0 - \frac{1}{2}\alpha$) in die Tafel aufnehmen, hier blieben aber diese Winkel weg, da sie in jedem einzelnen Falle aus $\frac{1}{2}\alpha$ leicht zu berechnen sind.

Tafel Nr XXX

stellt die Quadrate und Quadratwurzeln der um Zehntel fortschreitenden Zahlen n von n = 1,0 bis n = 24,9 und damit auch die Quadrate aller Zahlen vor welche aus den in der Tafel stehenden n durch Verschieben des Decimalzeichens nach links oder rechts entstehen. Denn man weiss aus der Lehre von den Decimalbrüchen dass, wenn das Product zweier Zahlen bekannt ist und man verschiebt in beiden Factoren das Decimalzeichen um je 1, 2, 3 Stellen nach rechts oder links, so muss dieses Zeichen in den Producten beziehungsweise um 2, 4, 6 Stellen nach rechts oder links verschoben werden. Wenn nun das Quadrat von 1,7 = 2,89 ist, so wird das von 17 = 289 und das von 0,17 = 0,0289 sein. Aehnlich verhält es sich mit den Quadratwurzeln. Will man nämlich die Quadratwurzeln von $n \,.\, 10^{-2}$ oder von $n \,.\, 10^{-4}$ finden, so braucht man nur die in der Tafel stehende $\sqrt{n}$ mit 10 und beziehungsweise mit 100 zu dividiren, d. h. das Decimalzeichen in dem Wurzelwerthe $\sqrt{n}$ um eine und beziehungsweise zwei Stellen von rechts nach links zu rücken. Wenn nun $\sqrt{1,7} = 1,3038$ ist, so wird $\sqrt{0,017} = 0,13088$ und $\sqrt{0,00017} = 0,013088$. Sollte $\sqrt{0,17}$ gefunden werden, so gienge das nicht unmittelbar, weil der Wurzelwerth von 1,7 mit $\sqrt{10}$ zu dividiren wäre; denkt man sich aber 0,17 als den Bruch 17 : 100 geschrieben, so ist $\sqrt{100} = 10$ und nach der Tafel $\sqrt{17} = 4,1231$; folglich $\sqrt{0,17} = 0,41231$. Hienach wird man sich bei allen mit der Tafel XXX zu lösenden Aufgaben zu helfen wissen.

Tafel Nr I

Längen der Erdmeridiane und Parallelkreise in Toisen.

Geogr. Breite	Grad im Meridian	Grad senkrecht zum Meridian	Grad des Parallels	Vom Aequator bis zum Parallel
0°	56727,356	57108,519	57108,519	0,000
1	56727,529	57108,578	57099,880	56727,414
2	56728,048	57108,752	57073,963	113455,173
3	56728,912	57109,041	57030,776	170183,624
4	56730,120	57109,447	56970,331	226913,111
5	56731,670	57109,967	56892,646	283643,977
6	56733,562	57110,602	56797,744	340376,565
7	56735,792	57111,350	56685,651	397111,214
8	56738,358	57112,211	56556,399	453848,261
9	56741,257	57113,184	56410,026	510588,041
10	56744,485	57114,267	56246,573	567330,885
11	56748,039	57115,459	56066,088	624077,120
12	56751,915	57116,760	55868,621	680827,071
13	56756,107	57118,166	55654,231	737581,056
14	56760,611	57119,677	55422,978	794339,389
15	56765,421	57121,290	55174,930	851102,380
16	56770,532	57123,005	54910,156	907870,332
17	56775,938	57124,818	54628,735	964643,543
18	56781,632	57126,727	54330,746	1021422,304
19	56787,607	57128,731	54016,276	1078206,900
20	56793,856	57130,826	53685,416	1134997,608
21	56800,372	57133,011	53338,261	1191749,700
22	56807,147	57135,283	52974,912	1248598,439
23	56814,173	57137,638	52595,473	1305409,078
24	56821,441	57140,074	52200,055	1362226,865
25	56828,943	57142,589	51788,773	1419052,038
26	56836,670	57145,179	51361,746	1475884,826
27	56844,612	57147,840	50919,099	1532725,449
28	56852,760	57150,571	50460,959	1589574,119
29	56861,105	57153,367	49987,461	1646431,035
30	56869,635	57156,225	49498,743	1703296,390
31	56878,341	57159,141	48994,947	1760170,364
32	56887,213	57162,113	48476,221	1817053,127
33	56896,240	57165,136	47942,717	1873944,841
34	56905,410	57168,207	47394,592	1930845,655
35	56914,713	57171,322	46832,006	1987755,706
36	56924,138	57174,478	46255,124	2044675,121
37	56933,673	57177,670	45664,118	2101604,018
38	56943,306	57180,895	45059,160	2158542,500
39	56953,027	57184,148	44440,430	2215490,659
40	56962,822	57187,427	43808,110	2272448,578
41	56972,681	57190,726	43162,389	2329416,324

Geogr. Breite	Grad im Meridian	Grad senkrecht zum Meridian	Grad des Parallels	Vom Aequator bis zum Parallel
42°	56982,591	57194,041	42503,456	2386393,957
43	56992,541	57197,370	41831,508	2443381,520
44	57002,518	57200,708	41146,746	2500379,048
45	57012,510	57204,050	40449,371	2557386,561
46	57022,505	57207,392	39739,594	2614404,068
47	57032,490	57210,731	39017,625	2671431,567
48	57042,454	57214,063	28283,681	2728469,042
49	57052,385	57217,383	37537,981	2785516,465
50	57062,270	57220,687	36780,749	2842573,796
51	57072,097	57223,972	36012,212	2899640,985
52	57081,854	57227,232	35232,602	2956717,966
53	57091,529	57230,466	34442,154	3013804,665
54	57101,111	57233,667	33641,105	3070900,993
55	57110,587	57236,833	32829,699	3128006,851
56	57119,946	57239,959	32008,179	3185122,128
57	57129,176	57243,042	31176,795	3242246,700
58	57138,267	57246,079	30335,800	3299380,434
59	57147,206	57249,064	29485,448	3356523,184
60	57155,984	57251,995	28625,997	3413674,793
61	57164,588	57254,867	27757,711	3470835,094
62	57173,009	57257,679	26880,852	3528003,908
63	57181,236	57260,425	25995,689	3585181,047
64	57189,258	57263,103	25102,492	3642366,311
65	57197,067	57265,709	24201,534	3699559,492
66	57204,652	57268,240	23293,092	3756760,370
67	57212,003	57270,693	22377,443	3813968,718
68	57219,113	57273,065	21454,868	3871184,297
69	57225,971	57275,354	20525,651	3928406,860
70	57232,570	57277,555	19590,078	3985636,153
71	57238,901	57279,667	18648,435	4042871,911
72	57244,957	57281,687	17701,015	4100113,863
73	57250,729	57283,612	16748,107	4157361,730
74	57256,211	57285,440	15790,007	4214615,225
75	57261,396	57287,169	14827,011	4271874,053
76	57266,277	57288,797	13859,414	4329137,916
77	57270,849	57290,322	12887,518	4386406,505
78	57275,105	57291,741	11911,623	4443679,508
79	57279,041	57293,053	10932,030	4500956,608
80	57282,651	57294,257	9949,043	4558237,481
81	57285,931	57295,350	8962,967	4615521,799
82	57288,876	57296,332	7974,108	4672809,231
83	57291,484	57297,202	6982,772	4730099,440
84	57293,751	57297,957	5989,267	4787392,086
85	57296,674	57298,598	4993,902	4844686,827
86	57297,251	57299,124	3996,985	4901938,318
87	57298,479	57299,533	2998,826	4959281,212
88	57299,357	57299,826	1999,735	5016580,159
89	57299,885	57300,002	1000,023	5073879,809
90°	57300,061	57300,061	0,000	5131179,811

Tafel Nr II

Längen- und Breitengrade nebst Gradabtheilungen in Kilometer.

Breite	1° Länge	Diffrz	Breite	1° Breite	Diffrz	1 Gradabtheilung in □ Kilometer	1 Gradabtheilung in geogr. □ Meilen
0°	111,3066	—	0— 1	110,5638	+	12305,86	223,4873
1	2897	169	1— 2	5645	7	12302,21	4210
2	2392	505	2— 3	5658	13	12294,91	2885
3	1550	842	3— 4	5678	20	12283,97	0898
4	0372	1178	4— 5	5705	27	12269,38	222,8249
5	110,8858	1514	5— 6	5739	34	12251,16	4939
6	7009	1849	6— 7	5779	40	12229,30	0968
7	4824	2185	7— 8	5826	47	12203,81	221,6339
8	2305	2519	8— 9	5879	53	12174,69	1051
9	109,9452	2853	9—10	5939	60	12141,95	220,5106
10	6266	3186	10—11	6005	66	12105,61	219,8505
11	2748	3518	11—12	6077	72	12065,66	1250
12	108,8900	3848	12—13	6156	79	12022,12	218,3343
13	4721	4179	13—14	6241	85	11975,00	217,4785
14	0214	4507	14—15	6331	90	11924,30	216,5578
15	107,5379	4835	15—16	6428	97	11870,05	215,5725
16	0219	5160	16—17	6531	103	11812,25	214,5228
17	106,4734	5485	17—18	6639	108	11750,92	213,4089
18	105,8926	5808	18—19	6752	113	11686,07	212,2312
19	2797	6129	19—20	6871	119	11617,71	210,9899
20	104,6348	6449	20—21	6996	125	11545,87	209,6852
21	103,9582	6766	21—22	7126	130	11470,56	208,3175
22	2500	7082	22—23	7260	134	11391,81	206,8871
23	102,5105	7395	23—24	7399	139	11309,62	205,3945
24	101,7398	7707	24—25	7543	144	11224,02	203,8399
25	100,9382	8016	25—26	7691	148	11135,03	202,2237
26	1059	8323	26—27	7844	153	11042,66	200,5464
27	99,2432	8627	27—28	8001	157	10946,96	198,8083
28	98,3502	8930	28—29	8162	161	10847,94	197,0099
29	97,4270	9228	29—30	8326	164	10745,61	195,1516
30	96,4748	9526	30—31	8494	168	10640,03	193,2340
31	95,4929	9819	31—32	8666	172	10531,20	191,2575
32	94,4819	10110	32—33	8840	174	10419,15	189,2226
33	93,4421	10398	33—34	9018	178	10303,91	187,1298
34	92,3738	10683	34—35	9198	180	10185,52	184,9797
35	91,2773	10965	35—36	9380	182	10064,01	182,7728
36	90,1529	11244	36—37	9565	185	9939,40	180,5098
37	89,0010	11519	37—38	9752	187	9811,73	178,1912
38	87,8219	11791	38—39	9940	188	9681,03	175,8176
39	86,6160	12059	39—40	111,0131	191	9547,34	173,3897
40	85,3836	12324	40—41	0322	191	9410,70	170,9081
41	84,1251	12585	41—42	0515	193	9271,14	168,3735
42	82,8408	12843	42—43	0708	193	9128,69	165,7866
43	81,5311	13097	43—44	0902	194	8983,41	163,1481
44	80,1965	13346	44—45	1097	195	8835,32	160,4587
45°	78,8373	13592	0—45	4984,4393		499699,59	9075,0670

Breite	1° Länge	Diffrz	Breite	1° Breite	Diffrz	1 Gradabtheilung in □ Kilometer	1 Gradabtheilung in geogr. □ Meilen
		—			+		
45°	78,8373	1,3834	45—46	111,1292	159	8684,47	157,7192
46	77,4539	1,4071	46—47	1487	194	8530,91	154,9303
47	76,0468	1,4305	47—48	1681	194	8374,68	152,0928
48	74,6163	1,4534	48—49	1875	193	8215,81	149,2076
49	73,1629	1,4759	49—50	2068	192	8054,35	146,2754
50	71,6870	1,4979	50—51	2260	191	7890,36	143,2972
51	70,1891	1,5195	51—52	2451	189	7723,87	140,2736
52	68,6696	1,5406	52—53	2640	188	7554,95	137,2057
53	67,1290	1,5613	53—54	2828	186	7383,62	134,0943
54	65,5677	1,5814	54—55	3014	183	7209,96	130,9403
55	63,9863	1,6012	55—56	3197	182	7033,99	127,7446
56	62,3851	1,6204	56—57	3379	178	6855,79	124,5083
57	60,7647	1,6391	57—58	3557	176	6675,40	121,2323
58	59,1256	1,6574	58—59	3733	173	6492,88	117,9175
59	57,4682	1,6751	59—60	3906	169	6308,28	114,5650
60	55,7931	1,6923	60—61	4075	166	6121,66	111,1757
61	54,1008	1,7090	61—62	4241	162	5933,07	107,7507
62	52,3918	1,7253	62—63	4403	159	5742,57	104,2911
63	50,6665	1,7408	63—64	4562	154	5550,22	100,7979
64	48,9257	1,7560	64—65	4716	150	5356,09	97,2721
65	47,1697	1,7706	65—66	4866	145	5160,22	93,7150
66	45,3991	1,7846	66—67	5011	141	4962,68	90,1275
67	43,6145	1,7982	67—68	5152	137	4763,54	86,5108
68	41,8163	1,8111	68—69	5289	131	4562,85	82,8661
69	40,0052	1,8234	69—70	5420	126	4360,68	79,1945
70	38,1818	1,8353	70—71	5546	120	4157,09	75,4971
71	36,3465	1 8466	71—72	5666	116	3952,15	71,7751
72	34,4999	1,8572	72—73	5782	109	3745,92	68,0298
73	32,6427	1,8674	73—74	5891	104	3538,47	64,2623
74	30,7753	1,8769	74—75	5995	99	3329,86	60,4738
75	28,8984	1,8859	75—76	6094	92	3120,17	56,6656
76	27,0125	1,8943	76—77	6186	85	2909,45	52,8388
77	25,1182	1,9020	77—78	6271	80	2697,79	48,9947
78	23,2162	1,9093	78—79	6351	74	2485,23	45,1345
79	21,3069	1,9159	79—80	6425	67	2271,87	41,2595
80	19,3910	1,9219	80—81	6492	61	2057,76	37,3710
81	17,4691	1,9273	81—82	6553	55	1842,97	33,4703
82	15,5418	1,9321	82—83	6608	47	1627,58	29,5585
83	13,6097	1,9364	83—84	6655	40	1411,65	25,6371
84	11,6733	1,9400	84—85	6695	34	1195,26	21,7072
85	9,7333	1,9430	85—86	6729	28	978,48	17,7702
86	7,7903	1,9455	86—87	6757	20	761,37	13,8273
87	5,8448	1,9472	87—88	6777	14	544,02	9,8799
88	3,8976	1,9485	88—89	6791	7	326,48	5,9292
89	1,9491	1,9491	89—90	6798		108,84	1,9767
90°	0,0000		45—90	5016,4165		208565,31	3787,7641
			0—45	4984,4393		499699,59	9075,0670
			0—90	10000,8558		708264,90	12862,8311

Tafel Nr III

Länge der in Winkel und Zeit gegebenen Parallelkreisbögen in Meter.

Breite	1′	1″	1m	1s	Breite	1′	1″	1m	1s
0°	1855	30,9	27827	464	45°	1314	21,9	19709	328
1	55	30,9	822	464	46	1291	21,5	363	323
2	54	30,9	810	464	47	68	21,1	012	317
3	53	30,9	789	463	48	44	20,7	18654	311
4	51	30,8	759	463	49	19	20,3	291	305
5	48	30,8	721	463	50	1195	19,9	17922	299
6	45	30,8	675	462	51	70	19,5	547	292
7	41	30,7	621	461	52	45	19,1	167	286
8	37	30,6	558	460	53	19	18,6	16782	280
9	32	30,5	486	458	54	1093	18,2	393	273
10	27	30,5	407	457	55	67	17,8	15997	267
11	21	30,4	319	455	56	40	17,3	596	260
12	15	30,2	222	454	57	13	16,9	191	253
13	08	30,1	118	452	58	986	16,4	14781	247
14	00	30,0	005	450	59	58	16,0	367	240
15	1792	29,9	26884	448	60	30	15,5	13948	233
16	84	29,7	755	446	61	02	15,0	525	226
17	75	29,6	618	444	62	873	14,6	098	218
18	65	29,4	473	441	63	44	14,1	12667	211
19	55	29,2	320	439	64	15	13,6	231	204
20	44	29,1	159	436	65	786	13,1	11792	197
21	33	28,9	25990	433	66	57	12,6	350	189
22	21	28,7	812	430	67	27	12,1	10904	182
23	09	28,5	628	427	68	697	11,6	454	174
24	1696	28,3	435	424	69	67	11,1	001	167
25	82	28,0	235	421	70	36	10,6	9545	159
26	68	27,8	026	417	71	06	10,1	087	152
27	54	27,6	24811	414	72	575	9,6	8625	144
28	39	27,3	588	410	73	44	9,0	161	136
29	24	27,1	357	406	74	13	8,5	7694	128
30	08	26,8	119	402	75	482	8,0	225	120
31	1592	26,5	23873	398	76	50	7,5	6753	113
32	75	26,2	620	394	77	19	7,0	280	105
33	57	26,0	361	389	78	387	6,4	5804	97
34	40	25,7	093	385	79	55	5,9	327	89
35	21	25,4	22819	380	80	23	5,4	4848	81
36	03	25,0	538	376	81	291	4,8	367	73
37	1483	24,7	250	371	82	59	4,3	3885	65
38	64	24,4	21955	366	83	27	3,8	402	57
39	44	24,1	654	361	84	195	3,2	2918	49
40	23	23,7	346	356	85	62	2,7	433	41
41	02	23,4	031	350	86	30	2,2	1948	33
42	1381	23,0	20710	345	87	097	1,6	461	24
43	59	22,6	383	340	88	65	1,1	0974	16
44	37	22,3	049	334	89	33	0,5	487	8
45°	14	21,9	19709	328	90	0	0,0	0	0

Tafel Nr IV^a

Die Krümmungshalbmesser des Erdellipsoids in Meter.

a) Am Anfange und Ende von 5^0 zu 5^0, in der Mitte von 1^0 zu 1^0.

Breite	log R_1	Δ	log R_2	Δ	log r	Δ
0^0	6,801 7351.0		6,804 6434.6		6,803 19	
		+ 330.3		+ 110.1		+ 2
5	7681.3		6544.7		21	
		981.0		327.0		7
10	8662.3		6871.7		28	
		1602.0		534.0		10
15	6,802 0264.3		7405.7		38	
		2174.9		725.0		15
20	2439.2		8130.7		53	
		2682.2		894.1		18
25	5121.4		9024.8		71	
		3108.6		1036.2		20
30	8230.0		6,805 0061.0		91	
		663.7		220.9		5
31	8893.7		0281.9		96	
		678.0		226.3		4
32	9571.7		0508.2		6,804 00	
		689.6		229.8		5
33	6,803 0261.3		0738.0		05	
		699.9		233.3		5
34	0961.2		0971.3		10	
		709.9		236.7		4
35	1671.1		1208.0		14	
		719.1		239.7		5
36	2390.2		1447.7		91	
		727.4		242.5		5
37	3117.6		1690.2		24	
		734.6		244.8		5
38	3852.2		1935.0		29	
		741.5		247.2		5
39	4593.7		2182.2		34	
		746.9		249.0		5
40	5340.6		2431.2		39	
		751.6		250.5		5
41	6092.2		2681.7		44	
		755.4		251.8		5
42	6847.6		2933.5		49	
		758.2		252.7		5
43	7605.8		3186.2		54	
		760.2		253.4		5
44	8366.0		3439.6		59	
		761.2		253.8		5
45	9127.2		3693.4		64	
		761.3		253.7		5
46	9888.5		3947.1		69	
		760.5		253.5		5
47	6,804 0649.0		4200.6		74	
		758.7		252.9		5
48	1407.7		4453.5		79	
		756.0		252.0		5
49	2163.7		4705.5		84	
		752.3		250.8		5
50	2916.0		4956.3		89	
		747.9		249.3		5
51	3663.9		5205.6		94	
		742.4		247.5		5
52	4406.3		5453.1		99	
		736.1		245.3		5
53	5142.4		5698.4		6,805 04	
		728.7		242.9		5
54	5871.1		5941.3		09	
		720.7		240.3		5
55	6591.8		6181.6		14	
		711.7		237.2		5
56	7303.5		6418.8		19	
		701.8		233.9		4
57	8005.3		6652.7		23	
		691.0		230.3		5
58	8696.3		6883.0		28	
		679.4		226.5		4
59	9375.7		7109.5		32	
		666.9		222.3		5
60	6,805 0042.6		7331.8		37	
		3120.6		1040.2		21
65	3163.2		8372.0		58	
		2694.9		898.3		18
70	5858.1		9270.3		76	
		2186.8		729.0		14
75	8044.9		9999.3		90	
		1611.8		537.2		11
80	9656.7		6,806 0536.5		6,806 01	
		987.2		329.1		6
85	6,806 0643.9		0865.6		07	
		332.5		110.8		3
90^0	0976.4		0976.4		10	

Tafel Nr IV b

Die Krümmungshalbmesser des Erdellipsoids in Meter.

b) Zwischen 47° und 53° von 10 zu 10 Minuten.

R_1 = Meridiankrümmungshalbmesser,
R_2 = Querkrümmungshalbmesser,
r = dem mittleren Krümmungshalbmesser.

Breite	log R_1	Δ	log R_2	Δ	log r	Breite
47° 0′	6,804 0649.0	+126.6	6,805 4200.6	+42.2	6,80474	47° 0′
10	0775.6	126.5	4242.8	42.2	75	10
20	0902.1	126.5	4285.0	42.2	76	20
30	1028.6	126.4	4327.2	42.1	77	30
40	1155.0	126.4	4369.3	42.1	78	40
50	1281.4	126.3	4411.4	42.1	78	50
48° 0′	1407.7	126.2	4453.5	42.0	79	48° 0′
10	1533.9	126.1	4495.5	42.0	80	10
20	1660.0	126.0	4537.5	42.0	81	20
30	1786.0	126.0	4579.5	42.0	82	30
40	1912.0	125.9	4621.5	42.0	83	40
50	2037.9	125.8	4663.5	42.0	84	50
49° 0′	2163.7	125.6	4705.5	41.9	84	49° 0′
10	2289.3	125.5	4747.4	41.9	85	10
20	2414.8	125.5	4789.3	41.8	86	20
30	2540.3	125.4	4831.1	41.8	87	30
40	2665.7	125.2	4872.9	41.7	88	40
50	2790.9	125.1	4914.6	41.7	89	50
50° 0′	2916.0	125.0	4956.3	41.7	89	50° 0′
10	3041.0	124.8	4998.0	41.6	90	10
20	3165.8	124.7	5039.6	41.6	91	20
30	3290.5	124.6	5081.2	41.5	92	30
40	3415.1	124.5	5122.7	41.5	93	40
50	3539.6	124.3	5164.2	41.4	94	50
51° 0′	3663.9	124.1	5205.6	41.4	94	51° 0′
10	3788.0	124.0	5247.0	41.3	95	10
20	3912.0	123.8	5288.3	41.3	96	20
30	4035.8	123.7	5329.6	41.2	97	30
40	4159.5	123.5	5370.8	41.2	98	40
50	4283.0	123.3	5412.0	41.1	98	50
52° 0′	4406.3	123.2	5453.1	41.1	99	52° 0′
10	4529.5	123.0	5494.2	40.9	6,80500	10
20	4652.5	122.7	5535.1	40.9	01	20
30	4775.2	122.6	5576.0	40.8	02	30
40	4897.8	122.4	5616.8	40.8	03	40
50	5020.2		5657.6		03	50

Tafel Nr V

Functionen des mittleren Erdkrümmungshalbmessers r.

($\varrho = 206265$; $M = 0{,}43429448$; Δ = Unterschied.)

Breite	$\log \frac{1}{r}$	Δ	$\log \frac{1}{r^2}$	Δ	$\log \frac{\varrho}{r^2}$	Δ	$\log \frac{M}{r^2}$	Δ	$\log\left(1+\frac{1}{r}\right) = \frac{M}{r}$
	— 10	—	— 20	—	— 10	—	— 20	—	
0°	3,196 81		6,393 62		1,708 05		6,031 41		0,0000000·6833
5	79	2	58	4	00	5	36	5	6832
10	72	7	45	13	1,707 87	13	23	13	6831
15	62	10	23	22	66	21	02	21	6830
20	47	15	6,392 94	29	37	29	6,030 73	29	6827
25	29	18	59	35	01	36	37	36	6825
30	09	20	17	42	1,706 60	41	6,029 96	41	6821
31	04	5	08	9	51	9	87	9	6821
32	00	4	6,391 99	9	42	9	78	9	6820
33	3,195 95	5	90	9	33	9	68	10	6819
34	90	5	81	9	23	10	59	9	6818
35	86	4	71	10	14	9	50	9	6818
36	81	5	62	9	04	10	40	10	6817
37	76	5	52	10	1,705 94	10	30	10	6817
38	71	5	42	10	85	9	21	9	6815
39	66	5	32	10	75	10	11	10	6815
40	61	5	22	10	65	10	01	10	6814
41	56	5	12	10	55	10	6,028 91	10	6813
42	51	5	02	10	45	10	81	10	6812
43	46	5	6,390 92	10	35	10	71	10	6812
44	41	5	82	10	24	11	60	11	6811
45	36	5	72	10	14	10	50	10	6810
46	31	5	62	10	04	10	40	10	6809
47	26	5	52	10	1,704 94	10	30	10	6808
48	21	5	41	11	84	10	20	10	6808
49	16	5	31	10	74	10	10	10	6807
50	11	5	21	10	64	10	00	10	6806
51	06	5	11	10	54	10	6,027 90	10	6805
52	01	5	01	10	44	10	80	10	6804
53	3,194 96	5	6,389 92	9	34	10	70	10	6804
54	91	5	82	10	24	10	60	10	6803
55	86	5	72	10	15	9	51	9	6802
56	81	5	63	9	05	10	41	10	6802
57	77	4	53	10	1,703 96	9	32	9	6801
58	72	5	44	9	87	9	23	9	6800
59	68	4	35	9	78	9	14	9	6800
60	63	5	26	9	69	9	05	9	6799
65	42	21	6,388 85	41	27	42	6,026 63	42	6795
70	24	18	49	36	1,702 91	36	27	36	6792
75	10	14	20	29	62	29	98	29	6790
80	3,193 99	11	6,387 98	22	41	21	76	22	6789
85	93	6	85	13	27	14	63	13	6787
90°	90	3	80	5	23	4	59	4	6787

Tafel Nr VI

Correspondirende geographische Breiten.

Geographische Breite		Geographische Breite		Geographische Breite	
Kugel	Ellipsoid	Kugel	Ellipsoid	Kugel	Ellipsoid
46° 40′	46° 41′ 24,75″	47° 58′	47° 59′ 34,84″	49° 16′	49° 17′ 43,88″
42	43 25,02	48 0	48 1 35,09	18	19 44,09
44	45 25,29	2	3 35,33	20	21 44,31
46	47 25,56	4	5 35,58	22	23 44,53
48	49 25,83	6	7 35,82	24	25 44,74
50	51 26,10	8	9 36,06	26	27 44,96
52	53 26,37	10	11 36,30	28	29 45,17
54	55 26,64	12	13 36,54	30	31 45,39
56	57 26,91	14	15 36,78	32	33 45,60
58	59 27,17	16	17 37,02	34	35 45,81
47 0	47 1 27,44	18	19 37,26	36	37 46,02
2	3 27,70	20	21 37,50	38	39 46,23
4	5 27,97	22	23 37,74	40	41 46,44
6	7 28,23	24	25 37,97	42	43 46,65
8	9 28,49	26	27 38,21	44	45 46,86
10	11 28,76	28	29 38,44	46	47 47,07
12	13 29,02	30	31 38,68	48	49 47,28
14	15 29,28	32	33 38,91	50	51 47,48
16	17 29,54	34	35 39,14	52	53 47,69
18	19 29,80	36	37 39,38	54	55 47,89
20	21 30,06	38	39 39,61	56	57 48,10
22	23 30,32	40	41 39,84	58	59 48,30
24	25 30,57	42	43 40,07	50 0	50 1 48,51
26	27 30,83	44	45 40,30	2	3 48,71
28	29 31,09	46	47 40,53	4	5 48,91
30	31 31,34	48	49 40,76	6	7 49,11
32	33 31,60	50	51 40,98	8	9 49,31
34	35 31,85	52	53 41,21	10	11 49,51
36	37 32,10	54	55 41,44	12	13 49,71
38	39 32,36	56	57 41,66	14	15 49,91
40	41 32,61	58	59 41,89	16	17 50,11
42	43 32,86	49 0	49 1 42,11	18	19 50,31
44	45 33,11	2	3 42,33	20	21 50,50
46	47 33,36	4	5 42,56	22	23 50,70
48	49 33,61	6	7 42,78	24	25 50,90
50	51 33,86	8	9 43,00	26	27 51,09
52	53 34,10	10	11 43,22	28	29 51,28
54	55 34,35	12	13 43,44	30	31 51,47
56	57 34,60	14	15 43,66	32	33 51,66

Geographische Breite		Geographische Breite		Geographische Breite	
Kugel	Ellipsoid	Kugel	Ellipsoid	Kugel	Ellipsoid
50° 34′	50° 35′ 51,86″	52° 2′	52° 3′ 59,60″	53° 30′	53° 32′ 6,02″
36	37 52,04	4	5 59,76	32	34 6,15
38	39 52,23	6	7 59,92	34	36 6,28
40	41 52,43	8	10 0,08	36	38 6,41
42	43 52,61	10	12 0,24	38	40 6,54
44	45 52,80	12	14 0,39	40	42 6,66
46	47 52,99	14	16 0,55	42	44 6,79
48	49 53,18	16	18 0,71	44	46 6,92
50	51 53,36	18	20 0,86	46	48 7,04
52	53 53,55	20	22 1,02	48	50 7,17
54	55 53,73	22	24 1,17	50	52 7,29
56	57 53,92	24	26 1,33	52	54 7,42
58	59 54,10	26	28 1,48	54	56 7,54
51 0	51 1 54,28	28	30 1,63	56	58 7,66
2	3 54,46	30	32 1,78	58	54 0 7,79
4	5 54,64	32	34 1,93	54 0	2 7,91
6	7 54,82	34	36 2,08	2	4 8,03
8	9 55,00	36	38 2,23	4	6 8,15
10	11 55,18	38	40 2,38	6	8 8,27
12	13 55,36	40	42 2,53	8	10 8,39
14	15 55,54	42	44 2,68	10	12 8,51
16	17 55,72	44	46 2,83	12	14 8,62
18	19 55,90	46	48 2,97	14	16 8,74
20	21 56,07	48	50 3,12	16	18 8,86
22	23 56,24	50	52 3.26	18	20 8,97
24	25 56,42	52	54 3,41	20	22 9,09
26	27 56,59	54	56 3,55	22	24 9,20
28	29 56,76	56	58 3,69	24	26 9,31
30	31 56,94	58	53 0 3,84	26	28 9,43
32	33 57,11	53 0	2 3,98	28	30 9,54
34	35 57,28	2	4 4,12	30	32 9,65
36	37 57,45	4	6 4,26	32	34 9,76
38	39 57,62	6	8 4,40	34	36 9,87
40	41 57,79	8	10 4,54	36	38 9,98
42	43 57,95	10	12 4,67	38	40 10,09
44	45 58,12	12	14 4,81	40	42 10,19
46	47 58,29	14	16 4,95	42	44 10,30
48	49 58,45	16	18 5,08	44	46 10,41
50	51 58,62	18	20 5,22	46	48 10,52
52	53 58,78	20	22 5,35	48	50 10,62
54	55 58,95	22	24 5,49	50	52 10,73
56	57 59,11	24	26 5,62	52	54 10,83
58	59 59,27	26	28 5,75	54	56 10,93
52 0	52 1 59,44	28	30 5,89	56	58 11,03

Geographische Breite		Geographische Breite		Geographische Breite	
Kugel	Ellipsoid	Kugel	Ellipsoid	Kugel	Ellipsoid
54° 58′	55° 0′ 11,14″	56° 12′	56° 14′ 14,45″	57° 26′	57° 28′ 16,88″
55 0	2 11,24	14	16 14,53	28	30 16,93
2	4 11,34	16	18 14,61	30	32 16,99
4	6 11,44	18	20 14,68	32	34 17,04
6	8 11,54	20	22 14,76	34	36 17,09
8	10 11,64	22	24 14,83	36	38 17,14
10	12 11,74	24	26 14,91	38	40 17,19
12	14 11,83	26	28 14,98	40	42 17,24
14	16 11,93	28	30 15,05	42	44 17,29
16	18 12,03	30	32 15,12	44	46 17,34
18	20 12,12	32	34 15,20	46	48 17,39
20	22 12,21	34	36 15,27	48	50 17,44
22	24 12,31	36	38 15,34	50	52 17,48
24	26 12,41	38	40 15,41	52	54 17,53
26	28 12,50	40	42 15,48	54	56 17,57
28	30 12,59	42	44 15,54	56	58 17,62
30	32 12,68	44	46 15,61	58	58 0 17,66
32	34 12,77	46	48 15,68	58 0	2 17,71
34	36 12,86	48	50 15,74	2	4 17,75
36	38 12,95	50	52 15,81	4	6 17,79
38	40 13,04	52	54 15,87	6	8 17,83
40	42 13,13	54	56 15,94	8	10 17,87
42	44 13,22	56	58 16,00	10	12 17,89
44	46 13,30	58	57 0 16,07	12	14 17,95
46	48 13,39	57 0	2 16,13	14	16 17,99
48	50 13,48	2	4 16,19	16	18 18,03
50	52 13,56	4	6 16,25	18	20 18,07
52	54 13,65	6	8 16,31	20	22 18,11
54	56 13,73	8	10 16,37	22	24 18,14
56	58 13,81	10	12 16,43	24	26 18,18
58	56 0 13,89	12	14 16,49	26	28 18,21
56 0	2 13,97	14	16 16,55	28	30 18,25
2	4 14,06	16	18 16,60	30	32 18,28
4	6 14,14	18	20 16,66	32	34 18,31
6	8 14,22	20	22 16,72	34	36 18,35
8	10 14,30	22	24 16,77	36	38 18,38
10	12 14,37	24	26 16,83	38	40 18,41
				40	42 18,44

Tafel Nr VII

Soldner's Hilfstafel zur Verwandlung des log sin φ in log arc φ.

(Additamententafel)

log sin	log n		Diff	log sin	log n		Diff
6,90	6,340	20335	0	7,31	6,340	20360	2
6,91		20335	0	7,32		20362	1
6,92		20335	0	7,33		20363	2
6,93		20335	0	7,34		20365	1
6,94		20335	1	7,35		20366	2
6,95		20336	0	7,36		20368	2
6,96		20336	0	7,37		20370	2
6,97		20336	1	7,38		20372	2
6,98		20337	0	7,39		20374	2
6,99		20337	0	7,40	6,340	20376	2
7,00	6,340	20337	1	7,41		20378	2
7,01		20338	0	7,42		20380	2
7,02		20338	0	7,43		20382	3
7,03		20338	1	7,44		20385	2
7,04		20339	0	7,45		20387	3
7,05		20339	1	7,46		20390	3
7,06		20340	0	7,47		20393	3
7,07		20340	0	7,48		20396	3
7,08		20340	1	7,49		20399	3
7,09		20341	0	7,50	6,340	20402	4
7,10	6,340	20341	1	7,51		20406	3
7,11		20342	1	7,52		20409	4
7,12		20343	0	7,53		20413	4
7,13		20343	1	7,54		20417	4
7,14		20344	0	7,55		20421	4
7,15		20344	1	7,56		20425	5
7,16		20345	1	7,57		20430	5
7,17		20346	1	7,58		20435	5
7,18		20347	0	7,59		20440	5
7,19		20347	1	7,60	6,340	20445	5
7,20	6,340	20348	1	7,61		20450	6
7,21		20349	1	7,62		20456	6
7,22		20350	1	7,63		20462	6
7,23		20351	1	7,64		20468	6
7,24		20352	1	7,65		20474	7
7,25		20353	1	7,66		20481	7
7,26		20354	1	7,67		20488	8
7,27		20355	1	7,68		20496	8
7,28		20356	2	7,69		20504	8
7,29		20358	1	7,70	6,340	20512	8
7,30	6,340	20359	1	7,71		20520	9

log sin	log n	Diff	log sin	log n	Diff
7,72	6,340 20529	10	8,17	6,340 21914	74
7,73	20539	10	8,18	21988	78
7,74	20549	10	8,19	22066	82
7,75	20559	11	8,20	6,340 22148	86
7,76	20570	11	8,21	22234	90
7,77	20581	12	8,22	22324	94
7,78	20593	12	8,23	22418	98
7,79	20605	13	8,24	22516	103
7,80	6,340 20618	14	8,25	22619	108
7,81	20632	14	8,26	22727	113
7,82	20646	15	8,27	22840	118
7,83	20661	15	8,28	22958	124
7,84	20676	17	8,29	23082	130
7,85	20693	17	8,30	6,340 23212	136
7,86	20710	18	8,31	23348	142
7,87	20728	19	8,32	23490	149
7,88	20747	19	8,33	23639	156
7,89	20766	21	8,34	23795	163
7,90	6,340 20787	21	8,35	23958	171
7,91	20808	23	8,36	24129	180
7,92	20831	23	8,37	24309	187
7,93	20854	25	8,38	24496	196
7,94	20879	26	8,39	24692	206
7,95	20905	27	8,40	6,340 24898	215
7,96	20932	28	8,41	25113	226
7,97	20960	30	8,42	25339	236
7,98	20990	31	8,43	25575	247
7,99	21021	33	8,44	25822	259
8,00	6,340 21054	34	8,45	26081	271
8,01	21088	36	8,46	26352	284
8,02	21124	37	8,47	26636	298
8,03	21161	40	8,48	26934	311
8,04	21201	41	8,49	27245	325
8,05	21242	43	8,50	6,340 27570	342
8,06	21285	45	8,51	27912	358
8,07	21330	47	8,52	28270	374
8,08	21377	49	8,53	28644	392
8,09	21426	52	8,54	29036	411
8,10	6,340 21478	53	8,55	29447	429
8,11	21531	57	8,56	29876	451
8,12	21588	59	8,57	30327	471
8,13	21647	62	8,58	30798	494
8,14	21709	65	8,59	31292	517
8,15	21774	68	8,60	6,340 31809	
8,16	21842	72			

Tafel Nr VIII

Mittlere astronomische Refraction nach Bessel.

Scheinbare Höhe	Refraction		Scheinbare Höhe	Refraction		Scheinbare Höhe	Refraction	
0° 0′	34′ 54,1″	124,9″	6° 40′	7′ 39,2″	10,0″	13° 20′	3′ 58,8″	2,9″
10	32 49,2	116,9	50	7 29,2	9,5	30	3 55,9	2,9
20	30 52,3	108,8	7 0	7 19,7	9,2	40	3 53,0	2,8
30	29 3,5	100,8	10	7 10,5	8,8	50	3 50,2	2,8
40	27 22,7	92,9	20	7 1,7	8,4	14 0	3 47,4	5,3
50	25 49,8	85,2	30	6 53,3	8,2	20	3 42,1	5,1
1 0	24 24,6	77,9	40	6 45,1	7,9	40	3 37,0	4,9
10	23 6,7	71,1	50	6 37,2	7,6	15 0	3 32,1	4,7
20	21 55,6	64,7	8 0	6 29,6	7,3	20	3 27,4	4,5
30	20 50,9	59,0	10	6 22,3	7,1	40	3 22,9	4,3
40	19 51,9	53,9	20	6 15,2	6,8	16 0	3 18,6	4,1
50	18 58,0	49,4	30	6 8,4	6,6	20	3 14,5	4,0
2 0	18 8,6	45,6	40	6 1,8	6,4	40	3 10,5	3,9
10	17 23,0	42,3	50	5 55,4	6,1	17 0	3 6,6	3,7
20	16 40,7	39,8	9 0	5 49,3	6,0	20	3 2,9	3,6
30	16 0,9	37,5	10	5 43,3	5,7	40	2 59,3	3,5
40	15 23,4	35,6	20	5 37,6	5,6	18 0	2 55,8	3,3
50	14 47,8	33,2	30	5 32,0	5,5	20	2 52,5	3,2
3 0	14 14,6	30,9	40	5 26,5	5,2	40	2 49,3	3,2
10	13 43,7	28,7	50	5 21,3	5,1	19 0	2 46,1	3,0
20	13 15,0	26,7	10 0	5 16,2	5,0	20	2 43,1	2,9
30	12 48,3	24,6	10	5 11,2	4,8	40	2 40,2	2,9
40	12 23,7	23,0	20	5 6,4	4,7	20 0	2 37,3	2,8
50	12 0,7	21,8	30	5 1,7	4,5	20	2 34,5	2,6
4 0	11 38,9	20,6	40	4 57,2	4,4	40	2 31,9	2,6
10	11 18,3	19,7	50	4 52,8	4,3	21 0	2 29,3	2,5
20	10 58,6	19,0	11 0	4 48,5	4,2	20	2 26,8	2,5
30	10 39,6	18,4	10	4 44,3	4,1	40	2 24,3	2,4
40	10 21,2	17,9	20	4 40,2	3,9	22 0	2 21,9	2,3
50	10 3,3	16,8	30	4 36,3	3,9	20	2 19,6	2,2
5 0	9 46,5	15,6	40	4 32,4	3,7	40	2 17,4	2,2
10	9 30,9	14,9	50	4 28,7	3,7	23 0	2 15,2	2,2
20	9 16,0	14,1	12 0	4 25,0	3,6	20	2 13,0	2,1
30	9 1,9	13,5	10	4 21,4	3,4	40	2 10,9	2,0
40	8 48,4	12,8	20	4 18,0	3,4	24 0	2 8,9	1,9
50	8 35,6	12,3	30	4 14,6	3,3	20	2 7,0	1,9
6 0	8 23,3	11,7	40	4 11,3	3,2	40	2 5,1	1,9
10	8 11,6	11,3	50	4 8,1	3,2	25 0	2 3,2	1,8
20	8 0,3	10,8	13 0	4 4,9	3,1	20	2 1,4	1,8
30	7 49,5	10,3	10	4 1,8	3,0	40	1 59,6	1,8

Scheinbare Höhe	Refraction		Scheinbare Höhe	Refraction		Scheinbare Höhe	Refraction	
26° 0′	1′ 57,8″	1,7″	37° 0′	1′ 16,5″	0,9″	58°	36,1″	1,4″
20	1 56,1	1,7	20	1 15,6	0,9	59	34,7	1,4
40	1 54,4	1,6	40	1 14,7	0,9	60	33,3	1,3
27 0	1 52,8	1,6	38 0	1 13,8	0,9	61	32,0	1,3
20	1 51,2	1,5	20	1 12,9	0,9	62	30,7	1,3
40	1 49,7	1,5	40	1 12,0	0,8	63	29,4	1,2
28 0	1 48,2	1,5	39 0	1 11,2	0,8	64	28,2	1,3
20	1 46,7	1,4	20	1 10,3	0,8	65	26,9	1,2
40	1 45,3	1,5	40	1 9,5	0,8	66	25,7	1,2
29 0	1 43,8	1,4	40 0	1 8,7	0,8	67	24,5	1,2
20	1 42,4	1,4	20	1 7,9	0,8	68	23,3	1,1
40	1 41,0	1,3	40	1 7,1	0,8	69	22,2	1,2
30 0	1 39,7	1,3	41 0	1 6,3	0,8	70	21,0	1,1
20	1 38,4	1,3	20	1 5,5	0,8	71	19,9	1,1
40	1 37,1	1,3	40	1 4,7	0,7	72	18,8	1,1
31 0	1 35,8	1,3	42 0	1 4,0		73	17,7	1,1
20	1 34,5	1,2				74	16,6	1,1
40	1 33,3	1,2	42°	64,0″	2,2″	75	15,5	1,0
32 0	1 32,1	1,2	43	61,8	2,1	76	14,5	1,1
20	1 30,9	1,1	44	59,7	2,0	77	13,4	1,1
40	1 29,8	1,1	45	57,7	2,0	78	12,3	1,1
33 0	1 28,7	1,1	46	55,7	1,9	79	11,2	1,0
20	1 27,6	1,1	47	53,8	1,9	80	10,2	1,1
40	1 26,5	1,1	48	51,9	1,7	81	9,1	1,0
34 0	1 25,4	1,1	49	50,2	1,8	82	8,1	1,0
20	1 24,3	1,0	50	48,4	1,7	83	7,1	1,0
40	1 23,3	1,0	51	46,7	1,6	84	6,1	1,0
35 0	1 22,3	1,0	52	45,1	1,6	85	5,1	1,0
20	1 21,3	1,0	53	43,5	1,6	86	4,1	1,0
40	1 20,3	1,0	54	41,9	1,5	87	3,1	1,0
36 0	1 19,3	1,0	55	40,4	1,5	88	2,1	1,0
20	1 18,3	0,9	56	38,9	1,4	89	1,1	1,1
40	1 17,4	0,9	57	37,5	1,4	90	0,0	

Tafel Nr IX

Reduction des Barometerstands auf 0° für Millimeter, Centigrade und Messingscala von 0° Normaltemperatur.

t° C	Abgelesener Barometerstand in Millimeter											t° C	
	600	**620**	**640**	**660**	**680**	**700**	**710**	**720**	**730**	**740**	**750**	**760**	
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	
1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	1
2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	2
3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	0,4	0,4	3
4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	4
5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	5
6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	6
7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,9	7
8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	1,0	1,0	8
9	0,9	0,9	0,9	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,1	1,1	1,1	1,1	9
10	1,0	1,0	1,0	1,1	1,1	1,1	1,1	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	10
11	1,1	1,1	1,1	1,2	1,2	1,2	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,4	11
12	1,2	1,2	1,2	1,3	1,3	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,5	1,5	12
13	1,3	1,3	1,3	1,4	1,4	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6	13
14	1,4	1,4	1,4	1,5	1,5	1,6	1,6	1,6	1,6	1,7	1,7	1,7	14
15	1,4	1,5	1,5	1,6	1,6	1,7	1,7	1,7	1,8	1,8	1,8	1,9	15
16	1,5	1,6	1,6	1,7	1,8	1,8	1,8	1,9	1,9	1,9	1,9	2,0	16
17	1,6	1,7	1,8	1,8	1,9	1,9	1,9	2,0	2,0	2,0	2,1	2,1	17
18	1,7	1,8	1,9	1,9	2,0	2,0	2,1	2,1	2,1	2,1	2,2	2,2	18
19	1,8	1,9	2,0	2,0	2,1	2,1	2,2	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	19
20	1,9	2,0	2,1	2,1	2,2	2,3	2,3	2,3	2,4	2,4	2,4	2,5	20
21	2,0	2,1	2,2	2,2	2,3	2,4	2,4	2,4	2,5	2,5	2,5	2,6	21
22	2,1	2,2	2,3	2,3	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	2,6	2,7	2,7	22
23	2,2	2,3	2,4	2,4	2,5	2,6	2,6	2,7	2,7	2,7	2,8	2,8	23
24	2,3	2,4	2,5	2,6	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8	2,9	2,9	3,0	24
25	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,8	2,9	2,9	3,0	3,0	3,0	3,1	25
26	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,0	3,0	3,1	3,1	3,2	3,2	26
27	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,1	3,2	3,2	3,2	3,3	3,3	27
28	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,2	3,3	3,3	3,4	3,4	3,5	28
29	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,3	3,4	3,4	3,5	3,5	3,6	29
30	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,4	3,5	3,5	3,6	3,6	3,7	30
t° C	**600**	**620**	**640**	**660**	**680**	**700**	**710**	**720**	**730**	**740**	**750**	**760**	t° C

Tafel Nr X

Reduction des Barometerstands auf 0° für Par. Linien, Réaumur'sche Grade und Messingscala von + 13° R. Normal-Temperatur.

t° R	Abgelesener Barometerstand in Pariser Linien										t° R
	276	288	300	306	312	318	324	330	336	342	
	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
— 6	0,25	0,26	0,27	0,28	0,28	0,29	0,29	0,30	0,30	0,31	— 6
— 5	0,19	0,20	0,21	0,22	0,22	0,22	0,23	0,23	0,24	0,24	— 5
— 4	0,14	0,14	0,15	0,15	0,16	0,16	0,16	0,17	0,17	0,17	— 4
— 3	0,08	0,09	0,09	0,09	0,09	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	— 3
— 2	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	— 2
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
— 1	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,04	0,04	— 1
0	0,08	0,09	0,09	0,09	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0
+ 1	0,14	0,15	0,15	0,16	0,16	0,16	0,16	0,17	0,17	0,17	+ 1
+ 2	0,20	0,20	0,21	0,22	0,22	0,23	0,23	0,23	0,24	0,24	+ 2
+ 3	0,25	0,26	0,27	0,28	0,28	0,29	0,30	0,30	0,31	0,31	+ 3
+ 4	0,31	0,32	0,33	0,34	0,35	0,35	0,36	0,37	0,37	0,38	+ 4
+ 5	0,36	0,38	0,39	0,40	0,41	0,42	0,43	0,43	0,44	0 45	+ 5
+ 6	0,42	0,44	0,45	0,46	0,47	0,48	0,49	0,50	0,51	0,52	+ 6
+ 7	0,47	0,49	0,52	0,53	0,54	0,55	0,56	0,57	0,58	0,59	+ 7
+ 8	0,53	0,55	0,58	0,59	0,60	0,61	0,62	0,63	0,64	0,66	+ 8
+ 9	0,59	0,61	0,64	0,65	0,66	0,67	0,69	0,70	0,71	0,72	+ 9
+ 10	0,64	0,67	0,70	0,71	0,72	0,74	0,75	0,77	0,78	0,79	+ 10
+ 11	0,70	0,73	0,76	0,77	0,79	0,80	0,82	0,83	0,85	0,86	+ 11
+ 12	0,75	0,78	0,82	0,83	0,85	0,87	0,88	0,90	0,91	0,93	+ 12
+ 13	0,81	0,84	0,88	0,90	0,91	0,92	0,95	0,96	0,98	1,00	+ 13
+ 14	0,86	0,90	0,94	0,96	0,97	0,99	1,01	1,03	1,05	1,07	+ 14
+ 15	0,92	0,96	1,00	1,02	1,04	1,05	1,08	1,10	1,12	1,14	+ 15
+ 16	0,98	1,02	1,06	1,08	1,10	1,12	1,14	1,16	1,18	1,20	+ 16
+ 17	1,03	1,08	1,12	1,14	1,17	1,18	1,21	1,23	1,25	1,27	+ 17
+ 18	1,09	1,13	1,18	1,20	1,22	1,25	1,27	1,29	1,32	1,34	+ 18
+ 19	1,14	1,19	1,24	1,27	1,29	1,31	1,34	1,36	1,39	1,41	+ 19
+ 20	1,20	1,25	1,30	1,33	1,35	1,38	1,40	1,43	1,45	1,48	+ 20
+ 21	1,25	1,31	1,36	1,39	1,41	1,44	1,47	1,49	1,52	1,55	+ 21
+ 22	1,31	1,37	1,42	1,45	1,47	1,50	1,53	1,56	1,59	1,61	+ 22
+ 23	1,36	1,42	1,48	1,51	1,54	1,57	1,59	1,62	1,65	1,68	+ 23
+ 24	1,42	1,48	1,54	1,57	1,60	1,63	1,66	1,69	1,72	1,75	+ 24
+ 25	1,48	1,54	1,60	1,64	1,67	1,70	1,73	1,76	1,80	1,83	+ 25

Tafel Nr XI

Capillardepressionen der Quecksilber-Barometer in Millimeter.

Halbmesser der Röhre	Höhe der Quecksilberkuppe in Millimeter											
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6
mm												
1,0	1,268	2,460	3,516	4,396	5,085	—	—	—	—	—	—	—
1,2	0,876	1,715	2,484	3,162	3,728	4,190	—	—	—	—	—	—
1,4	0,638	1,256	1,836	2,363	2,825	3,218	3,542	—	—	—	—	—
1,6	0,484	0,955	1,404	1,820	2,196	2,528	2,812	3,050	—	—	—	—
1,8	0,378	0,747	1,103	1,437	1,746	2,024	2,270	2,483	—	—	—	—
2,0	0,302	0,598	0,885	1,158	1,413	1,648	1,859	2,046	2,348	—	—	—
2,2	0,245	0,487	0,723	0,948	1,161	1,360	1,541	1,705	1,978	—	—	—
2,4	0,203	0,403	0,599	0,787	0,966	1,135	1,292	1,436	1,680	1,866	—	—
2,6	0,170	0,337	0,502	0,661	0,813	0,958	1,093	1,218	1,436	1,608	—	—
2,8	0,143	0,285	0,425	0,560	0,691	0,815	0,932	1,041	1,235	1,392	1,511	—
3,0	0,122	0,243	0,362	0,478	0,591	0,698	0,800	0,896	1,068	1,210	1,322	—
3,2	0,105	0,209	0,312	0,412	0,509	0,602	0,691	0,776	0,928	1,057	1,161	1,238
3,4	0,091	0,181	0,269	0,356	0,441	0,523	0,601	0,675	0,810	0,926	1,021	1,095
3,6	0,079	0,157	0,234	0,310	0,384	0,455	0,524	0,590	0,710	0,814	0,901	0,970
3,8	0,069	0,137	0,205	0,271	0,336	0,399	0,459	0,517	0,624	0,718	0,797	0,861
4,0	0,060	0,120	0,180	0,238	0,295	0,350	0,404	0,455	0,551	0,635	0,707	0,766

Tafel Nr XII

Erste hypsometrische Tafel: Werthe von A und A′.

T + t R⁰	A Meter	A′ Par. Fuss	T + t R⁰	A Meter	A′ Par. Fuss	T + t R⁰	A Meter	A′ Par. Fuss
— 16⁰	4,24976	4,73809	— 3⁰	4,26301	4,75134	+ 10⁰	4,27587	4,76420
— 15	4,25079	4,73912	— 2	4,26401	4,75234	+ 11	4,27684	4,76517
— 14	4,25182	4,74015	— 1	4,26501	4,75334	+ 12	4,27781	4,76614
— 13	4,25285	4,74118	0	4,26601	4,75434	+ 13	4,27878	4,76711
— 12	4,25388	4,74221	+ 1	4,26701	4,75533	+ 14	4,27975	4,76808
— 11	4,25490	4,74323	+ 2	4,26800	4,75632	+ 15	4,28071	4,76904
— 10	4,25592	4,74425	+ 3	4,26899	4,75731	+ 16	4,28167	4,77000
— 9	4,25694	4,74527	+ 4	4,26998	4,75830	+ 17	4,28263	4,77096
— 8	4,25796	4,74629	+ 5	4,27097	4,75929	+ 18	4,28359	4,77192
— 7	4,25897	4,74730	+ 6	4,27196	4,76028	+ 19	4,28455	4,77288
— 6	4,25998	4,74831	+ 7	4,27294	4,76126	+ 20	4,28550	4,77383
— 5	4,26099	4,74932	+ 8	4,27392	4,76224	+ 21	4,28645	4,77478
— 4	4,26200	4,75033	+ 9	4,27490	4,76322	+ 22	4,28740	4,77573
— 3	4,26301	4,75134	+ 10	4,27587	4,76420	+ 23	4,28835	4,77668

T + t R⁰	A Meter	A′ Par. Fuss	T + t R⁰	A Meter	A′ Par. Fuss	T + t R⁰	A Meter	A′ Par. Fuss
+ 23⁰	4,28835	4,77668	+ 32⁰	4,29680	4,78513	+ 41⁰	4,30508	4,79342
+ 24	4,28930	4,77763	+ 33	4,29773	4,78606	+ 42	4,30599	4,79433
+ 25	4,29025	4,77858	+ 34	4,29866	4,78699	+ 43	4,30690	4,79524
+ 26	4,29119	4,77952	+ 35	4,29958	4,78791	+ 44	4,30781	4,79614
+ 27	4,29213	4,78046	+ 36	4,30050	4,78883	+ 45	4,30871	4,79704
+ 28	4,29307	4,78140	+ 37	4,30142	4,78975	+ 46	4,30961	4,79794
+ 29	4,29401	4,78234	+ 38	4,30234	4,79067	+ 47	4,31051	4,79884
+ 30	4,29494	4,78327	+ 39	4,30326	4,79159	+ 48	4,31141	4,79974
+ 31	4,29587	4,78420	+ 40	4,30417	4,79251	+ 49	4,31231	4,80064
+ 32	4,29680	4,78513	+ 41	4,30508	4,79342	+ 50	4,31321	4,80153

Tafel Nr XIII

Zweite hypsom. Tafel: Werthe von $\log G = \log (1 + 0{,}0026 \cos 2\,\psi)$

ψ +	log G	ψ −	ψ +	log G	ψ −	ψ +	log G	ψ −	ψ +	log G	ψ −	ψ +	log G	ψ −
0⁰	0,00114	90⁰	10⁰	0,00107	80⁰	20⁰	0,00087	70⁰	30⁰	0,00057	60⁰	40⁰	0,00020	50⁰
1	114	89	11	106	79	21	85	69	31	54	59	41	16	49
2	114	88	12	104	78	22	82	68	32	50	58	42	12	48
3	114	87	13	103	77	23	79	67	33	46	57	43	8	47
4	113	86	14	101	76	24	76	66	34	43	56	44	4	46
5	112	85	15	99	75	25	73	65	35	39	55	45	0	45
6	112	84	16	97	74	26	70	64	36	35	54			
7	111	83	17	95	73	27	67	63	37	31	53			
8	110	82	18	92	72	28	64	62	38	28	52			
9	109	81	19	90	71	29	60	61	39	24	51			

Tafel Nr XIV

Dritte hypsometrische Tafel: Werthe von $\log Z = \log \left(1 + \frac{2\,z + h}{r}\right)$ in Einheiten der 5 Decimale.

log h	0m	100m	200m	300m	400m	500m	600m	700m	800m	900m	1000m	1200m	1500m	2000m	log h′
2,0	1	2	3	5	6	8	9	10	12	13	14	17	21	28	2,5
2,2	1	2	4	5	7	8	9	11	12	13	15	17	22	28	2,7
2,4	2	3	4	6	7	9	10	11	13	14	15	18	22	29	2,9
2,6	3	4	5	7	8	10	11	12	14	15	16	19	23	30	3,1
2,8	4	6	7	9	10	11	13	14	15	17	18	21	25	32	3,3
3,0	7	8	10	11	12	14	15	16	18	19	20	23	27	34	3,5
3,2	11	12	14	15	16	18	19	20	22	23	25	27	31	38	3,7
3,4	17	18	20	21	22	24	25	27	28	29	31	34	38	44	3,9
3,6	27	29	30	31	33	34	35	37	38	39	41	44	48	54	4,1
3,8	43	44	46	47	48	50	51	52	54	55	56	59	64	70	4,3
4,0	68	69	71	72	73	75	76	78	79	80	82	85	89	95	4,5

Tafel Nr XV

Vierte hypsometrische Tafel: Spannung des Wasserdampfs.

A Achtzigtheiliger Thermometer und Pariser Linien.

Temp.	Spann.	Temp.	Spann.	Temp.	Spann.	Temp.	Spann.	Temp.	Spann.	Temp.	Spann.	Temp.	Spann.
	'''		'''		'''		'''		'''		'''		'''
— 15°	0,453	— 9°	0,846	— 3°	1,518	+ 3°	2,628	+ 9°	4,393	+ 15°	7,134	+ 21°	11,259
— 14	0,504	— 8	0,935	— 2	1,669	+ 4	2,869	+ 10	4,775	+ 16	7,712	+ 22	12,119
— 13	0,560	— 7	1,032	— 1	1,830	+ 5	3,130	+ 11	5,179	+ 17	8,330	+ 23	13,034
— 12	0,622	— 6	1,139	0	2,006	+ 6	3,412	+ 12	5,620	+ 18	8,992	+ 24	14,009
— 11	0,690	— 5	1,255	+ 1	2,197	+ 7	3,715	+ 13	6,089	+ 19	9,699	+ 25	15,048
— 10	0,764	— 4	1,381	+ 2	2,403	+ 8	4,046	+ 14	6,593	+ 20	10,454	+ 26	16,088

B Hunderttheiliger Thermometer und Millimeter.

Temp.	Spann.	Temp.	Spann.	Temp.	Spann.	Temp.	Spann.	Temp.	Spann.	Temp.	Spann.	Temp.	Spann.
	mm		mm		mm		mm		mm		mm		mm
— 15°	1,403	— 8°	2,471	— 1°	4,205	+ 6°	6,939	+ 13°	11,130	+ 20°	17,396	+ 27°	26,547
— 14	1,525	— 7	2,671	0	4,525	+ 7	7,436	+ 14	11,882	+ 21	18,505	+ 28	28,148
— 13	1,655	— 6	2,886	+ 1	4,867	+ 8	7,964	+ 15	12,677	+ 22	19,675	+ 29	29,832
— 12	1,796	— 5	3,115	+ 2	5,231	+ 9	8,525	+ 16	13,519	+ 23	20,909	+ 30	31,602
— 11	1,947	— 4	3,361	+ 3	5,619	+ 10	9,126	+ 17	14,409	+ 24	22,211	+ 31	33,464
— 10	2,109	— 3	3,624	+ 4	6,032	+ 11	9,751	+ 18	15,351	+ 25	23,582	+ 32	35,419
— 9	2,284	— 2	3,905	+ 5	6,471	+ 12	10,421	+ 19	16,345	+ 26	25,026	+ 33	37,473

Tafel Nr XVI

Fünfte hypsometrische Tafel: Werthe von μ (t — t') b

A Achtzigtheiliger Thermometer und Pariser Linien.

b	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
'''	'''	'''	'''	'''	'''	'''	'''	'''	'''	'''
240	0,24	0,48	0,72	0,96	1,20	1,44	1,68	1,92	2,16	2,40
250	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50
260	0,26	0,52	0,78	1,04	1,30	1,56	1,82	2,08	2,34	2,60
270	0,27	0,54	0,81	1,08	1,35	1,62	1,89	2,16	2,43	2,70
280	0,28	0,56	0,84	1,12	1,40	1,68	1,96	2,24	2,52	2,80
290	0,29	0,58	0,87	1,16	1,45	1,74	2,03	2,32	2,61	2,90
300	0,30	0,60	0,90	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3,00
310	0,31	0,62	0,93	1,24	1,55	1,86	2,17	2,48	2,79	3,10
320	0,32	0,64	0,96	1,28	1,60	1,92	2,24	2,56	2,88	3,20
330	0,33	0,66	0,99	1,32	1,65	1,98	2,31	2,64	2,97	3,30
340	0,34	0,68	1,02	1,36	1,70	2,04	2,38	2,72	3,06	3,40

B Hunderttheiliger Thermometer und Millimeter.

b	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
550	0,44	0,88	1,32	1,76	2,20	2,64	3,08	3,52	3,96	4,40
570	0,46	0,91	1,37	1,82	2,28	2,74	3,19	3,65	4,10	4,56
590	0,47	0,94	1,42	1,89	2,36	2,83	3,30	3,78	4,25	4,72
610	0,49	0,98	1,46	1,95	2,44	2,93	3,41	3,90	4,39	4,88

b	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
630	0,50	1,01	1,51	2,01	2,52	3,02	3,53	4,03	4,53	5,04
650	0,52	1,04	1,56	2,08	2,60	3,12	3,64	4,16	4,68	5,20
670	0,53	1,07	1,61	2,14	2,68	3,21	3,75	4,29	4,82	5,36
690	0,55	1,10	1,65	2,21	2,76	3,31	3,86	4,41	4,97	5,52
710	0,57	1,13	1,70	2,27	2,84	3,41	3,97	4,54	5,11	5,68
730	0,58	1,17	1,75	2,33	2,92	3,50	4,09	4,67	5,25	5,84
750	0,60	1,20	1,80	2,40	3,00	3,60	4,20	4,80	5,46	6,00
770	0,62	1,23	1,85	2,46	3,08	3,69	4,31	4,93	5,54	6,16

Tafel Nr XVII

Sechste hypsometrische Tafel: Werthe von $\log\left(1 + \frac{3}{8}\varphi\right)$

A Luft- und Dunstdruck in Pariser Linien.

b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
'''										
240	0,00068	0,00136	0,00203	0,00271	0,00338	0,00405	0,00472	0,00540	0,00606	0,00673
250	65	130	195	260	324	389	453	518	582	646
260	63	125	188	250	312	374	437	498	560	622
270	60	121	181	241	301	362	422	482	543	603
280	58	116	174	233	291	349	407	465	523	582
290	56	112	168	225	281	337	393	449	505	562
300	54	108	163	217	271	326	380	434	486	543
310	52	105	157	210	263	315	368	420	473	525
320	51	102	153	203	254	305	356	407	458	509
330	49	99	148	197	247	296	345	395	444	493
340	48	96	114	191	239	287	335	383	431	479

B Luft- und Dunstdruck in Millimeter.

b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
mm										
550	0,00030	0,00059	0,00089	0,00118	0,00148	0,00177	0,00207	0,00236	0,00266	0,00295
570	29	57	86	115	143	171	200	228	257	285
590	28	55	83	110	138	165	193	220	248	275
610	27	53	80	107	133	160	187	213	240	267
630	26	52	77	103	129	155	181	207	233	258
650	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250
670	24	48	73	97	121	146	170	194	219	243
690	23	47	71	94	118	141	165	189	212	236
710	23	46	69	92	115	138	160	183	206	229
730	22	45	67	89	111	134	156	178	201	223
750	22	43	65	87	108	130	152	174	195	217
770	21	42	63	84	106	127	148	169	190	211

Tafel Nr XVIII

Höhenunterschied in Meter für 1 mm Barometerdifferenz.

(Gültig für die geographischen Verhältnisse von Deutschland)

Mittl. Temp. τ	Mittlerer Barometerstand $\Sigma = \frac{1}{2}(B_0 + b_0)$ in Millimeter										
	760	755	750	745	740	735	730	725	720	715	710
— 5° C	10,36	10,43	10,50	10,57	10,64	10,71	10,78	10,86	10,93	11,01	11,09
— 4	10,40	10,47	10,54	10,61	10,68	10,75	10,82	10,90	10,97	11,05	11,13
— 3	10,43	10,50	10,57	10,64	10,72	10,79	10,86	10,94	11,01	11,09	11,17
— 2	10,47	10,54	10,61	10,68	10,76	10,83	10,90	10,98	11,06	11,13	11,21
— 1	10,51	10,58	10,65	10,72	10,80	10,87	10,94	11,02	11,10	11,17	11,25
0	10,55	10,62	10,69	10,76	10,84	10,91	10,98	11,06	11,14	11,21	11,29
+ 1	10,59	10,66	10,73	10,80	10,88	10,95	11,03	11,10	11,18	11,26	11,34
2	10,63	10,70	10,77	10,84	10,92	10,99	11,07	11,14	11,22	11,30	11,38
3	10,67	10,74	10,81	10,88	10,96	11,03	11,11	11,18	11,26	11,34	11,42
4	10,71	10,78	10,85	10,92	10,99	11,07	11,15	11,22	11,30	11,38	11,46
5	10,74	10,82	10,89	10,96	11,03	11,11	11,19	11,26	11,34	11,42	11,50
6	10,78	10,85	10,93	11,00	11,07	11,15	11,23	11,30	11,38	11,46	11,54
7	10,82	10,89	10,97	11,04	11,11	11,19	11,27	11,34	11,42	11,50	11,58
8	10,86	10,93	11,01	11,08	11,15	11,23	11,31	11,38	11,46	11,54	11,63
9	10,90	10,97	11,04	11,12	11,19	11,27	11,35	11,43	11,50	11,58	11,67
10	10,94	11,01	11,08	11,16	11,23	11,31	11,39	11,47	11,55	11,63	11,71
11	10,98	11,05	11,12	11,20	11,27	11,35	11,43	11,51	11,59	11,67	11,75
12	11,02	11,09	11,16	11,24	11,31	11,39	11,47	11,55	11,63	11,71	11,79
13	11,05	11,13	11,20	11,28	11,35	11,43	11,51	11,59	11,67	11,75	11,83
14	11,09	11,17	11,24	11,31	11,39	11,47	11,55	11,63	11,71	11,79	11,87
15	11,13	11,20	11,28	11,35	11,43	11,51	11,59	11,67	11,75	11,83	11,92
16	11,17	11,24	11,32	11,39	11,47	11,55	11,63	11,71	11,79	11,87	11,96
17	11,21	11,28	11,36	11,43	11,51	11,59	11,67	11,75	11,83	11,91	12,00
18	11,25	11,32	11,40	11,47	11,55	11,63	11,71	11,79	11,87	11,95	12,04
19	11,29	11,36	11,44	11,51	11,59	11,67	11,75	11,83	11,91	12,00	12,08
20	11,33	11,40	11,48	11,55	11,63	11,71	11,79	11,87	11,95	12,04	12,12
21	11,36	11,44	11,52	11,59	11,67	11,75	11,83	11,91	11,99	12,08	12,16
22	11,40	11,48	11,55	11,63	11,71	11,79	11,87	11,95	12,03	12,12	12,20
23	11,44	11,52	11,59	11,67	11,75	11,83	11,91	11,99	12,08	12,16	12,25
24	11,48	11,55	11,63	11,71	11,79	11,87	11,95	12,03	12,12	12,20	12,29
25	11,52	11,59	11,67	11,75	11,83	11,91	11,99	12,08	12,16	12,24	12,33
26	11,56	11,63	11,71	11,79	11,87	11,95	12,03	12,12	12,20	12,28	12,37
27	11,60	11,67	11,75	11,83	11,91	11,99	12,07	12,16	12,24	12,32	12,41
28	11,63	11,71	11,80	11,87	11,95	12,03	12,11	12,20	12,28	12,37	12,45
29	11,67	11,75	11,83	11,91	11,99	12,07	12,15	12,24	12,32	12,41	12,49
30	11,71	11,79	11,87	11,95	12,03	12,11	12,19	12,28	12,36	12,45	12,54
31	11,75	11,83	11,91	11,98	12,07	12,15	12,23	12,32	12,40	12,49	12,58
32	11,79	11,87	11,95	12,02	12,11	12,19	12,27	12,36	12,44	12,53	12,62

Mittl. Temp. τ	Mittlerer Barometerstand $\Sigma = \frac{1}{2}(B_0 + b_0)$ in Millimeter										
	700	690	680	670	660	650	640	630	620	610	600
— 5° C	11,25	11,41	11,58	11,75	11,93	12,11	12,30	12,50	12,70	12,90	13,12
— 4	11,29	11,45	11,62	11,79	11,97	12,16	12,35	12,54	12,74	12,95	13,17
— 3	11,33	11,49	11,66	11,84	12,02	12,20	12,39	12,59	12,79	13,00	13,22
— 2	11,37	11,54	11,71	11,88	12,06	12,25	12,44	12,64	12,84	13,05	13,27
— 1	11,41	11,58	11,75	11,93	12,11	12,29	12,48	12,68	12,89	13,10	13,32
0	11,46	11,62	11,79	11,97	12,15	12,34	12,53	12,73	12,93	13,15	13,36
+ 1	11,50	11,66	11,84	12,01	12,19	12,38	12,58	12,78	12 98	13,19	13,41
2	11,54	11,71	11,88	12,06	12,24	12,43	12,62	12,82	13,03	13,24	13,46
3	11,58	11,75	11,92	12,10	12,28	12,47	12,67	12,87	13,08	13,29	13,51
4	11,62	11,79	11,97	12,14	12,33	12,52	12,71	12,92	13,12	13,34	13,56
5	11,67	11,84	12,01	12,19	12,37	12,56	12,76	12,96	13,17	13,39	13,61
6	11,71	11,88	12,05	12,23	12,42	12,61	12,81	13,01	13,22	13,44	13,66
7	11,75	11,92	12,10	12,28	12,46	12,65	12,85	13,06	13,27	13,49	13,71
8	11,79	11,96	12,14	12,32	12,51	12,70	12,90	13,10	13,31	13.54	13.76
9	11,83	12,01	12,18	12,36	12,55	12,74	12,94	13,15	13,36	13,58	13,81
10	11,88	12,05	12,23	12,41	12,60	12,79	12,99	13,20	13,41	13,63	13,85
11	11,92	12,09	12,27	12,45	12,64	12,83	13,04	13,24	13,46	13,68	13,90
12	11,96	12,13	12,31	12,50	12,68	12,88	13,08	13,29	13,50	13,73	13,95
13	12,00	12,18	12,35	12,54	12,73	12,92	13,13	13,33	13,55	13,78	14,00
14	12,04	12,22	12,40	12,58	12,77	12,97	13,17	13,38	13,60	13,83	14,05
15	12,09	12,26	12,44	12,63	12,82	13,01	13,22	13,43	13,65	13,88	14,10
16	12,13	12,30	12,48	12,67	12,86	13,06	13,27	13,47	13,69	13,93	14,15
17	12,17	12,35	12,53	12,72	12,91	13,11	13,31	13,52	13,74	13,97	14,20
18	12,21	12,39	12,57	12,76	12,95	13,15	13,36	13,57	13,79	14,02	14,25
19	12,25	12,43	12,61	12,80	13,00	13,20	13,40	13,61	13,83	14,07	14,30
20	12,30	12,47	12,66	12,85	13,04	13,24	13,45	13,66	13,88	14,12	14,35
21	12,34	12,52	12,70	12,89	13,08	13,29	13,50	13,71	13,93	14,17	14,39
22	12,38	12,56	12,74	12,93	13,13	13,33	13,54	13,75	13,98	14,22	14,44
23	12,42	12,60	12,79	12,98	13,17	13,38	13,59	13,80	14,02	14,27	14,49
24	12,46	12,64	12,83	13,02	13,22	13,42	13,63	13,85	14,07	14,31	14,54
25	12,51	12,69	12,87	13,07	13,26	13,47	13,68	13,89	14,12	14,36	14,59
26	12,55	12,73	12,92	13,11	13,31	13,51	13,73	13,94	14,17	14,41	14,64
27	12,59	12,77	12,96	13,15	13,35	13,56	13,77	13,99	14,21	14,46	14,69
28	12,63	12,81	13,00	13,20	13,40	13,60	13,82	14,03	14,26	14,51	14,74
29	12,67	12,86	13,05	13,24	13,44	13,65	13,86	14,08	14,31	14,56	14,79
30	12,72	12,90	13,09	13,29	13,49	13,69	13,91	14,13	14,36	14,61	14,84
31	12,76	12,94	13,13	13,33	13,53	13,74	13,96	14,17	14,40	14,66	14,88
32	12,80	12,99	13,18	13,37	13,57	13,78	14,00	14.22	14,45	14,70	14,93

Tafel Nr XIX

Zu Reichenbach's Distanzmesser mit schiefer Latte.

1 Erhebung des Rohrs.

Höhenwinkel	50′	100′	150′	200′	250′	300′	350′	400′	450′	500′	Höhenwinkel
2°	2,5′	1,0′	0,6′	0,3′	0,2′	0,2′	0,2′	0,2′	0,2′	0,2′	2°
4	2,3	0,9	0,5	0,4	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	4
6	2,0	0,8	0,7	0,7	0,9	1,1	1,4	1,6	1,9	2,2	6
8	1,9	1,0	1,0	1,3	1,7	2,1	2,6	3,1	3,6	4,1	8
10	1,9	1,1	1,5	2,1	2,8	3,5	4,3	5,0	5,8	6,6	10
11	1,9	1,3	1,9	2,6	3,4	4,3	5,3	6,2	7,2	8,1	11
12	1,9	1,5	2,2	3,1	4,2	5,2	6,3	7,5	8,6	9,7	12
13	1,9	1,7	2,6	3,7	5,0	6,2	7,5	8,7	10,2	11,5	13
14	2,0	2,0	3,0	4,4	5,8	7,3	8,8	10,4	11,8	13,5	14
15	2,0	2,3	3,6	5,1	6,8	8,5	10,2	12,0	13,8	15,5	15
16	2,1	2,6	4,1	5,9	7,8	9,8	11,8	13,8	15,8	17,8	16
17	2,1	2,9	4,7	6,8	8,9	11,1	13,4	15,6	17,9	20,2	17
18	2,2	3,3	5,4	7,7	10,1	12,6	15,1	17,6	20,1	22,6	18
19	2,3	3,7	6,0	8,7	11,3	14,1	16,9	19,7	22,5	25,3	19
20	2,4	4,1	6,7	9,7	12,6	15,7	18,8	21,9	25,0	28,1	20
21	2,6	4,5	7,5	10,7	14,0	17,4	20,8	24,2	27,6	31,1	21
22	2,7	5,0	8,3	11,9	15,5	19,2	23,0	26,7	30,4	34,2	22
23	2,9	5,5	9,2	13,1	17,0	21,1	25,2	29,2	33,3	37,5	23
24	3,1	6,1	10,1	14,3	18,6	23,1	27,5	31,9	36,4	40,8	24
25	3,3	6,7	11,1	15,6	20,3	25,1	29,9	34,7	39,5	44,3	25

Höhenwinkel	550′	600′	650′	700′	750′	800′	850′	900′	950′	1000′	Höhenwinkel
2°	0,2′	0,2′	0,2′	0,3′	0,3′	0,3′	0,4′	0,4′	0,5′	0,5′	2°
4	1,0	1,1	1,2	1,4	1,5	1,7	1,8	2,0	2,1	2,3	4
6	2,5	2,8	3,0	3,3	3,7	4,0	4,3	4,6	4,9	5,2	6
8	4,6	5,1	5,6	6,2	6,7	7,2	7,8	8,3	8,8	9,4	8
10	7,4	8,2	9,0	9,8	10,6	11,5	12,3	13,1	13,9	14,7	10
11	9,1	10,0	11,0	12,0	13,0	14,0	14,9	15,9	17,7	17,9	11
12	10,9	12,0	13,2	14,4	15,5	16,7	17,8	19,0	20,8	21,3	12
13	12,9	14,2	15,4	16,9	18,2	19,6	21,0	22,3	23,7	25,0	13
14	15,0	16,6	18,1	19,6	21,2	22,8	24,4	25,9	27,5	29,1	14
15	17,2	19,1	20,8	22,6	24,4	26,2	28,1	29,8	31,6	33,4	15
16	19,7	21,8	23,8	25,8	28,0	29,9	32,0	34,0	36,0	38,1	16
17	22,4	24,7	26,9	29,2	31,2	33,8	36,1	38,3	40,6	42,9	17
18	25,3	27,7	30,2	32,8	35,3	37,9	40,5	43,0	45,6	48,1	18
19	28,1	30,9	33,6	36,6	39,4	42,2	45,1	47,9	50,8	53,6	19
20	31,2	34,3	37,4	40,6	43,6	46,8	50,0	53,1	56,5	59,4	20
21	34,5	37,9	41,3	44,7	48,2	51,7	55,1	58,6	62,0	65,5	21
22	37,9	41,7	45,4	49,2	53,0	56,1	60,5	64,4	68,0	71,8	22
23	41,6	45,6	49,6	53,7	57,8	62,0	66,1	70,2	74,3	78,5	23
24	45,2	49,7	54,1	58,6	63,0	67,5	72,0	76,4	80,9	85,2	24
25	49,1	53,9	58,7	63,6	68,4	73,2	78,0	82,8	87,7	92,6	25
26	53,1	58,3	63,5	68,8	74,0	79,1	84,4	89,6	94,8	100,1	26
27	57,3	62,9	68,5	74,1	79,7	85,3	91,0	96,6	102,2	107,8	27

2 Senkung des Rohrs.

Tiefen-winkel	50′	100′	150′	200′	250′	300′	350′	400′	450′	500′	Tiefen-winkel
2⁰	3,1′	1,6′	1,2′	0,9′	0,7′	0,7′	0,7′	0,7′	0,6′	0,6′	2⁰
4	3,5	2,1	1,7	1,6	1,4	1,5	1,6	1,6	1,7	1,8	4
6	4,0	2,7	2,5	2,5	2,4	2,7	2,9	3,1	3,3	3,5	6
8	4,5	3,5	3,4	3,6	3,8	4,4	4,6	5,0	5,4	5,8	8
10	5,1	4,3	4,6	5,0	5,4	6,3	6,8	7,5	8,1	8,8	10
11	5,4	4,8	5,2	5,8	6,3	7,3	8,0	8,9	9,7	10,5	11
12	5,8	5,3	5,8	6,6	7,3	8,4	9,4	10,4	11,3	12,3	12
13	6,1	5,8	6,5	7,5	8,4	9,7	10,9	12,0	13,1	14,3	13
14	6,4	6,4	7,3	8,5	9,5	11,0	12,7	13,7	15,1	16,5	14
15	6,8	7,0	8,1	9,5	10,7	12,5	14,5	15,6	17,2	18,8	15
16	7,2	7,6	8,9	10,5	12,0	14,0	16,3	17,6	19,4	21,2	16
17	7,5	8,2	9,8	11,7	13,4	15,6	18,1	19,7	21,7	23,8	17
18	8,0	8,9	10,8	12,8	14,9	17,4	19,6	21,8	24,2	26,5	18
19	8,4	9,6	11,7	14,2	16,3	19,1	21,6	24,2	26,8	29,4	19
20	8,8	10,3	12,7	15,4	17,9	21,0	23,8	26,7	29,5	32,4	20
21	9,2	11,1	13,8	16,8	19,5	23,0	26,1	29,2	32,4	35,6	21
22	9,7	11,8	14,9	18,2	21,2	25,0	28,4	31,9	35,3	38,8	22
23	10,1	12,6	16,0	19,7	23,0	27,1	30,9	34,7	38,5	42,3	23
24	10,6	13,5	17,2	21,2	24,9	29,3	33,4	37,6	41,7	45,9	24
25	11,1	14,3	18,4	22,8	26,8	31,6	36,1	40,6	45,1	49,6	25

Tiefen-winkel	550′	600′	650′	700′	750′	800′	850′	900′	950′	1000′	Tiefen-winkel
2⁰	0,6′	0,6′	0,6′	0,6′	0,6′	0,7′	0,7′	0,7′	0,7′	0,7′	2⁰
4	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,3	2,4	2,6	2,6	4
6	3,7	3,9	4,1	4,4	4,6	4,8	5,1	5,3	5,6	5,8	6
8	6,3	6,7	7,1	7,4	7,9	8,4	8,8	9,2	9,7	10,1	8
10	9,5	10,1	10,8	11,5	12,2	12,9	13,6	14,3	15,0	15,6	10
11	11,3	12,2	13,0	13,8	14,6	15,5	16,3	17,2	18,0	18,9	11
12	13,3	14,3	15,3	16,3	17,3	18,4	19,4	20,4	21,4	22,4	12
13	15,5	16,7	17,9	19,0	20,2	21,5	22,6	23,8	25,0	26,2	13
14	17,8	19,2	20,6	22,0	23,3	24,8	26,2	27,6	29,0	30,3	14
15	20,4	22,0	23,6	25,1	26,7	28,4	29,9	31,6	33,2	34,7	15
16	23,0	24,9	26,7	28,5	30,3	32,2	34,0	35,8	37,6	39,5	16
17	25,8	27,9	30,0	32,0	34,1	36,2	38,3	40,3	42,4	44,3	17
18	28,8	31,1	33,4	35,7	38,1	40,5	42,8	45,1	47,5	49,9	18
19	32,0	34,6	37,2	39,7	42,3	45,0	47,5	50,1	52,8	55,3	19
20	35,3	38,2	41,0	43,8	46,7	49,6	52,5	55,4	58,3	61,2	20
21	38,7	41,9	45,1	48,2	51,4	54,7	57,8	61,0	64,2	67,4	21
22	42,3	45,9	49,3	52,7	56,3	59,8	63,3	66,8	70,3	73,8	22
23	46,1	49,9	53,8	57,5	61,3	65,3	69,0	72,9	76,7	80,5	23
24	50,0	54,2	58,4	62,4	66,6	70,9	75,0	79,2	83,4	87,5	24
25	54,1	58,6	63,2	67,6	72,1	76,8	81,3	85,8	90,2	94,8	25
26	58,3	63,2	68,2	72,9	77,8	82,8	87,7	92,6	97,5	102,3	26
27	62,7	67,9	73,3	78,5	83,8	89,0	94,3	99,6	104,9	110,2	27

Tafel Nr XX
Zu Ertel's Distanzmesser mit schiefer Latte.

1 Erhebung des Rohrs.

Höhenwinkel	50′	100′	150′	200′	250′	300′	350′	400′	450′	500′	550′	600′	Höhenwinkel
2°	0,3′	0,1′	0,02′	0,08′	0,1′	0,1′	0,2′	0,2′	0,2′	0,3′	0,3′	0,3′	2°
4	0,3	0,2	0,2	0,3	0,5	0,6	0,7	0,9	1,0	1,2	1,3	1,4	4
6	0,3	0,3	0,5	0,8	1,2	1,4	1,8	2,1	2,4	2,7	3,0	3,2	6
8	0,4	0,6	1,1	1,6	2,2	2,6	3,2	3,7	4,3	4,8	5,3	5,8	8
10	0,5	1,0	1,8	2,6	3,5	4,2	5,1	5,9	6,7	7,5	8,3	9,1	10
11	0,6	1,3	2,2	3,2	4,2	5,2	6,1	7,1	8,1	9,1	10,1	11,0	11
12	0,7	1,6	2,7	3,9	5,0	6,2	7,3	8,5	9,7	10,8	12,0	13,1	12
13	0,8	1,9	3,2	4,6	5,9	7,3	8,6	10,0	11,3	12,6	14,0	15,3	13
14	1,0	2,2	3,7	5,3	6,9	8,5	10,0	11,6	13,1	14,7	16,3	17,8	14
15	1,1	2,6	4,4	6,2	8,0	9,7	11,5	13,2	15,1	16,9	18,6	20,4	15
16	1,3	3,0	5,0	7,1	9,1	11,1	13,1	15,2	17,2	19,2	21,3	23,2	16
17	1,5	3,4	5,7	8,0	10,3	12,5	14,8	17,1	19,4	21,7	24,0	26,2	17
18	1,7	3,9	6,5	9,0	11,6	14,1	16,7	19,2	21,8	24,3	26,9	29,3	18
19	1,9	4,4	7,2	10,1	12,9	15,7	18,6	21,4	24,2	27,1	29,9	32,6	19
20	2,1	4,9	8,0	11,2	14,4	17,5	20,6	23,7	26,8	30,0	33,1	36,1	20
21	2,4	5,5	8,9	12,4	15,9	19,3	22,7	26,1	29,6	33,0	36,5	39,8	21
22	2,6	6,0	9,8	13,6	17,4	21,1	24,9	28,7	32,4	36,2	40,0	43,7	22
23	2,9	6,6	10,8	14,9	19,1	23,1	27,2	31,3	35,4	39,5	43,7	47,7	23
24	3,2	7,3	11,8	16,3	20,8	25,1	29,6	34,1	38,5	43,0	47,5	51,8	24

2 Senkung des Rohrs.

Tiefenwinkel	50′	100′	150′	200′	250′	300′	350′	400′	450′	500′	550′	600′	Tiefenwinkel
2°	0,6′	0,4′	0,2′	0,2′	0,2′	0,3′	0,3′	0,3′	0,3′	0,3′	0,4′	0,4′	2°
4	0,8	0,7	0,6	0,7	0,7	0,9	0,9	1,0	1,2	1,2	1,3	1,4	4
6	1,1	1,2	1,1	1,4	1,6	1,9	2,1	2,3	2,5	2,8	2,9	3,0	6
8	1,4	1,7	1,9	2,3	2,7	3,2	3,6	4,1	4,5	4,9	5,2	5,5	8
10	1,9	2,4	2,8	3,5	4,2	4,9	5,6	6,3	7,0	7,7	8,4	9,3	10
11	2,2	2,8	3,3	4,2	5,0	5,9	6,7	7,6	8,4	9,3	10,2	11,1	11
12	2,4	3,2	3,9	5,0	5,9	6,9	8,0	9,0	10,0	11,0	12,1	13,2	12
13	2,7	3,6	4,5	5,7	6,9	8,1	9,3	10,5	11,7	12,9	14,1	15,4	13
14	3,1	4,1	5,2	6,6	7,9	9,4	10,7	12,2	13,5	15,0	16,4	17,9	14
15	3,4	4,6	5,9	7,5	9,1	10,7	12,3	14,0	15,5	17,2	18,8	20,5	15
16	3,7	5,1	6,7	8,5	10,3	12,2	14,0	15,8	17,7	19,5	22,3	23,3	16
17	4,0	5,7	7,5	9,5	11,5	13,7	15,7	17,8	19,9	22,0	24,1	26,3	17
18	4,3	6,3	8,3	10,6	12,9	15,3	17,6	20,0	22,3	24,6	27,0	29,5	18
19	4,7	6,9	9,1	11,8	14,3	17,0	19,6	22,2	24,8	27,4	30,1	32,7	19
20	5,1	7,5	10,0	13,0	15,8	18,8	21,6	24,4	27,4	30,3	33,2	36,2	20
21	5,4	8,2	11,0	14,3	17,4	20,6	23,8	27,0	30,2	33,4	36,6	39,9	21
22	5,8	8,9	12,1	15,6	19,0	22,6	26,0	29,6	33,0	36,6	40,1	43,7	22
23	6,2	9,6	13,1	17,0	20,7	24,6	28,4	32,3	36,1	39,9	43,8	47,8	23
24	6,6	10,4	14,2	18,4	22,5	26,7	30,9	35,1	39,3	43,4	47,6	51,9	24

Tafel Nr XXI

Zu Reichenbach's Distanzmesser mit lothrechter Latte.

Neigungs-Winkel	Abgelesene Entfernungen in Meter												Neigungs-Winkel
	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300	
2°	0,03	0,06	0,09	0,12	0,15	0,2	0,2	0,24	0,3	0,3	0,3	0,4	2°
3	0,07	0,14	0,21	0,27	0,34	0,4	0,5	0,55	0,6	0,7	0,8	0,8	3
4	0,12	0,2	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,97	1,1	1,2	1,3	1,5	4
5	0,19	0,4	0,6	0,8	0,9	1,1	1,3	1,52	1,7	1,9	2,1	2,3	5
6	0,3	0,5	0,8	1,1	1,4	1,6	1,9	2,2	2,4	2,7	3,0	3,3	6
7	0,4	0,7	1,1	1,5	1,8	2,2	2,6	3,0	3,3	3,7	4,1	4,5	7
8	0,5	1,0	1,5	1,9	2,4	2,9	3,4	3,9	4,4	4,8	5,3	5,8	8
9	0,6	1,2	1,8	2,5	3,1	3,7	4,3	4,9	5,5	6,1	6,7	7,3	9
10	0,8	1,5	2,3	3,0	3,8	4,5	5,3	6,0	6,8	7,5	8,3	9,1	10
11	0,9	1,8	2,7	3,6	4,6	5,5	6,4	7,3	8,2	9,1	10,0	10,9	11
12	1,1	2,2	3,2	4,3	5,4	6,5	7,6	8,6	9,7	10,8	11,9	13,0	12
13	1,3	2,5	3,8	5,1	6,3	7,6	8,8	10,1	11,4	12,6	13,9	15,2	13
14	1,5	2,9	4,4	5,8	7,3	8,8	10,2	11,7	13,2	14,6	16,1	17,6	14
15	1,7	3,4	5,0	6,7	8,4	10,1	11,7	13,4	15,1	16,7	18,4	20,1	15
16	1,9	3,8	5,7	7,6	9,5	11,4	13,3	15,2	17,1	19,0	20,9	22,8	16
17	2,1	4,3	6,4	8,6	10,7	12,8	15,0	17,1	19,2	21,4	23,5	25,6	17
18	2,4	4,8	7,2	9,5	11,9	14,3	16,7	19,1	21,5	23,9	26,3	28,7	18
19	2,6	5,3	8,0	10,6	13,3	15,9	18,6	21,2	23,9	26,5	29,2	31,8	19
20°	2,9	5,9	8,8	11,7	14,6	17,6	20,5	23,4	26,3	29,2	32,2	35,1	20°
30′	3,1	6,1	9,2	12,3	15,3	18,4	21,5	24,5	27,6	30,7	33,7	36,8	30′
21	3,2	6,4	9,6	12,8	16,1	19,3	22,5	25,7	28,9	32,1	35,3	38,5	21
30	3,4	6,7	10,1	13,4	16,8	20,2	23,5	26,9	30,2	33,6	36,9	40,3	30
22	3,5	7,0	10,5	14,0	17,6	21,0	24,6	28,1	31,6	35,1	38,6	42,1	22
30	3,7	7,3	10,9	14,6	18,3	21,9	25,6	29,2	32,9	36,6	40,3	43,9	30
23	3,8	7,6	11,5	15,3	19,1	22,9	26,7	30,5	34,4	38,2	42,0	45,8	23
30	4,0	7,9	11,9	15,9	19,9	23,8	27,8	31,8	35,7	39,7	43,7	47,7	30
24	4,1	8,3	12,4	16,6	20,7	24,8	29,0	33,1	37,3	41,4	45,5	49,6	24
30	4,3	8,6	12,9	17,2	21,5	25,8	30,1	34,4	38,7	43,0	47,3	51,6	30
25	4,5	8,9	13,3	17,8	22,3	26,8	31,2	35,7	40,1	44,7	49,1	53,6	25
30	4,6	9,3	13,9	18,5	23,1	27,8	32,4	37,2	41,7	46,3	51,0	55,6	30
26	4,8	9,6	14,4	19,2	24,0	28,8	33,6	38,4	43,2	48,0	52,8	57,6	26
30	5,0	9,9	14,9	19,9	24,9	29,9	34,9	39,8	44,8	49,8	54,8	59,7	30
27	5,2	10,3	15,4	20,6	25,8	30,9	36,1	41,3	46,4	51,5	56,7	61,8	27
30	5,3	10,7	16,0	21,3	26,6	32,0	37,3	42,6	48,0	53,3	58,6	64,0	30
28	5,5	11,0	16,5	22,0	27,5	33,1	38,6	44,1	49,6	55,1	60,6	66,1	28
30	5,7	11,4	17,1	22,7	28,5	34,2	39,8	45,5	51,2	56,9	62,6	68,3	30
29	5,9	11,8	17,6	23,5	29,4	35,3	41,2	47,0	52,9	58,8	64,6	70,5	29
30	6,1	12,1	18,2	24,2	30,3	36,4	42,4	48,5	54,5	60,6	66,7	72,8	30
30	6,3	12,5	18,7	25,0	31,2	37,5	43,7	50,0	56,3	62,5	68,8	75,0	30

Tafel Nr XXII

Erste Tafel zu Stampfer's Distanzmesser: Werthe von $\frac{324}{o - u}$

o — u	Distanz	Prop.-Theile	o — u	Distanz	Prop.-Theile	o — u	Distanz	Prop.-Theile
1,00	324,00		1,40	231,43		1,80	180,00	
1,01	320,79	0,29	1,41	229,79	0,15	1,81	179,01	0,09
1,02	317,65	0,59	1,42	228,17	0,31	1,82	178,02	0,19
1,03	314,56	0,88	1,43	226,57	0,46	1,83	177,05	0,28
1,04	311,54	1,18	1,44	225,00	0,62	1,84	176,09	0,38
1,05	308,57	1,47	1,45	223,45	0,77	1,85	175,14	0,47
1,06	305,66	1,76	1,46	221,92	0,93	1,86	174,19	0,57
1,07	302,80	2,06	1,47	220,41	1,08	1,87	173,26	0,66
1,08	300,00	2,35	1,48	218,92	1,23	1,88	172,34	0,76
1,09	297,95	2,65	1,49	217,45	1,39	1,89	171,43	0,85
1,10	294,54		1,50	216,00		1,90	170,53	
1,11	291,89	0,25	1,51	214,57	0,14	1,91	169,63	0,08
1,12	289,29	0,49	1,52	213,16	0,27	1,92	168,75	0,17
1,13	287,73	0,74	1,53	211,76	0,40	1,93	167,88	0,26
1,14	284,21	0,98	1,54	210,39	0,54	1,94	167,01	0,34
1,15	281,74	1,23	1,55	209,03	0,68	1,95	166,15	0,43
1,16	279,31	1,47	1,56	207,69	0,81	1,96	165,31	0,51
1,17	276,92	1,72	1,57	206,37	0,94	1,97	164,47	0,60
1,18	274,58	1,96	1,58	205,06	1,08	1,98	163,94	0,68
1,19	272,27	2,21	1,59	203,77	1,22	1,99	162,81	0,77
1,20	270,00		1,60	202,50		2,00	162,00	
1,21	267,77	0,21	1,61	201,21	0,12	2,01	161,18	0,08
1,22	265,58	0,42	1,62	200,00	0,24	2,02	160,20	0,15
1,23	263,42	0,62	1,63	198,77	0,36	2,03	159,61	0,23
1,24	261,29	0,83	1,64	197,56	0,48	2,04	158,82	0,31
1,25	259,20	1,04	1,65	196,36	0,60	2,05	158,05	0,39
1,26	257,14	1,25	1,66	195,18	0,71	2,06	157,28	0,46
1,27	255,12	1,45	1,67	194,01	0,83	2,07	156,53	0,54
1,28	253,13	1,66	1,68	192,86	0,95	2,08	155,77	0,62
1,29	251,16	1,87	1,69	191,72	1,07	2,09	155,03	0,69
1,30	249,23		1,70	190,59		2,10	154,28	
1,31	247,33	0,18	1,71	189,47	0,10	2,11	153,56	0,07
1,32	245,46	0,36	1,72	188,37	0,21	2,12	152,83	0,14
1,33	243,61	0,53	1,73	187,28	0,32	2,13	152,12	0,21
1,34	241,79	0,71	1,74	186,21	0,42	2,14	151,40	0,28
1,35	240,00	0,89	1,75	185,14	0,53	2,15	150,70	0,35
1,36	238,24	1,07	1,76	184,09	0,64	2,16	150,00	0,42
1,37	236,50	1,25	1,77	183,05	0,74	2,17	149,31	0,49
1,38	234,78	1,42	1,78	182,02	0,85	2,18	148,62	0,56
1,39	233,09	1,60	1,79	181,01	0,95	2,19	147,95	0,63

o — u	Distanz	Prop.-Theile
2,20	147,27	
2,21	146,61	0,06
2,22	145,95	0,13
2,23	145,29	0,19
2,24	144,64	0,26
2,25	144,00	0,32
2,26	143,36	0,38
2,27	142,73	0,45
2,28	142,10	0,51
2,29	141,49	0,58
2,30	140,87	
2,31	140,26	0,06
2,32	139,66	0,12
2,33	139,06	0,18
2,34	138,46	0,23
2,35	137,88	0,29
2,36	137,29	0,35
2,37	136,71	0,41
2,38	136,13	0,47
2,39	135,57	0,53
2,40	135,00	
2,41	134,44	0,05
2,42	133,88	0,11
2,43	133,34	0,16
2,44	132,79	0,22
2,45	132,25	0,27
2,46	131,71	0,32
2,47	131,18	0,38
2,48	130,64	0,43
2,49	130,12	0,49
2,50	129,60	
2,51	129,09	0,05
2,52	128,57	0,10
2,53	128,07	0,15
2,54	127,56	0,20
2,55	127,06	0,25
2,56	126,56	0,30
2,57	126,07	0,35
2,58	125,58	0,40
2,59	125,10	0,45
2,60	124,62	
2,61	124,14	0,05
2,62	123,66	0,09

o — u	Distanz	Prop.-Theile
2,63	123,20	0,14
2,64	122,73	0,18
2,65	122,27	0,23
2,66	121,80	0,28
2,67	121,35	0,32
2,68	120,90	0,37
2,69	120,45	0,42
2,70	120,00	
2,71	119,56	0,04
2,72	119,12	0,08
2,73	118,68	0,13
2,74	118,25	0,17
2,75	117,82	0,21
2,76	117,39	0,26
2,77	116,97	0,30
2,78	116,55	0,34
2,79	116,13	0,39
2,80	115,71	
2,81	115,33	0,04
2,82	114,89	0,08
2,83	114,49	0,12
2,84	114,08	0,16
2,85	113,69	0,20
2,86	113,29	0,24
2,87	112,89	0,28
2,88	112,50	0,32
2,89	112,11	0,36
2,90	111,72	
2,91	111,34	0,04
2,92	110,96	0,07
2,93	110,58	0,11
2,94	110,20	0,15
2,95	109,83	0,19
2,96	109,46	0,22
2,97	109,09	0,26
2,98	108,72	0,30
2,99	108,36	0,33
3,00	108,00	
3,01	107,64	0,03
3,02	107,28	0,07
3,03	106,93	0,10
3,04	106,58	0,14
3,05	106,23	0,17

o — u	Distanz	Prop.-Theile
3,06	105,88	0,21
3,07	105,54	0,24
3,08	105,20	0,28
3,09	104,86	0,31
3,10	104,52	
3,11	104,18	0,03
3,12	103,85	0,06
3,13	103,52	0,10
3,14	103,18	0,13
3,15	102,86	0,16
3,16	102,53	0,20
3,17	102,21	0,23
3,18	101,89	0,26
3,19	101,57	0,29
3,20	101,25	
3,21	100,94	0,03
3,22	100,62	0,06
3,23	100,31	0,09
3,24	100,00	0,12
3,25	99,69	0,15
3,26	99,39	0,18
3,27	99,08	0,21
3,28	98,78	0,24
3,29	98,48	0,28
3,30	98,18	
3,31	97,89	0,03
3,32	97,59	0,06
3,33	97,30	0,09
3,34	97,01	0,12
3,35	96,72	0,14
3,36	96,43	0,17
3,37	96,14	0,20
3,38	95,86	0,23
3,39	95,58	0,26
3,40	95,29	
3,41	95,02	0,03
3,42	94,74	0,05
3,43	94,46	0,08
3,44	94,19	0,11
3,45	93,91	0,14
3,46	93,64	0,16
3,47	93,37	0,19
3,48	93,10	0,22
3,49	92,84	0,24

o — u	Distanz	Prop.-Theile	o — u	Distanz	Prop.-Theile	o — u	Distanz	Prop.-Theile
3,50	92,57		3,93	82,44	0,06	4,36	74,31	0,10
3,51	92,31	0,02	3,94	82,23	0,08	4,37	74,14	0,12
3,52	92,05	0,05	3,95	82,03	0,10	4,38	73,97	0,14
3,53	91,79	0,08	3,96	81,82	0,12	4,39	73,80	0,15
3,54	91,53	0,10	3,97	81,61	0,14	4,40	73,64	
3,55	91,27	0,13	3,98	81,41	0,17	4,41	73,47	0,02
3,56	91,01	0,15	3,99	81,20	0,19	4,42	73,30	0,03
3,57	90,76	0,18	4,00	81,00		4,43	73,14	0,05
3,58	90,50	0,20	4,01	80,79	0,02	4,44	72,97	0,06
3,59	90,25	0,23	4,02	80,59	0,04	4,45	72,81	0,08
3,60	90,00		4,03	80,39	0,06	4,46	72,65	0,10
3,61	89,75	0,02	4,04	80,20	0,08	4,47	72,49	0,11
3,62	89,50	0,05	4,05	80,00	0,09	4,48	72,32	0,13
3,63	89,26	0,07	4,06	79,80	0,12	4,49	72,16	0,15
3,64	89,01	0,09	4,07	79,61	0,14	4,50	72,00	
3,65	88,77	0,12	4,08	79,41	0,16	4,51	71,84	0,02
3,66	88,52	0,14	4,09	79,22	0,18	4,52	71,68	0,03
3,67	88,28	0,17	4,10	79,03		4,53	71,52	0,05
3,68	88,04	0,19	4,11	78,83	0,02	4,54	71,36	0,06
3,69	87,81	0,22	4,12	78,64	0,04	4,55	71,21	0,08
3,70	87,57		4,13	78,45	0,06	4,56	71,05	0,09
3,71	87,33	0,02	4,14	78,26	0,08	4,57	70,90	0,11
3,72	87,10	0,05	4,15	78,07	0,09	4,58	70,74	0,12
3,73	86,86	0,07	4,16	77,88	0,11	4,59	70,59	0,14
3,74	86,63	0,09	4,17	77,70	0,13	4,60	70,44	
3,75	86,40	0,12	4,18	77,51	0,15	4,61	70,28	0,02
3,76	86,17	0,14	4,19	77,33	0,17	4,62	70,13	0,03
3,77	85,94	0,16	4,20	77,14		4,63	69,98	0,04
3,78	85,71	0,18	4,21	76,96	0,02	4,64	69,83	0,06
3,79	85,94	0,21	4,22	76,78	0,04	4,65	69,68	0,08
3,80	85,26		4,23	76,60	0,05	4,66	69,53	0,09
3,81	85,04	0,02	4,24	76,42	0,07	4,67	69,38	0,10
3,82	84,82	0,04	4,25	76,24	0,09	4,68	69,23	0,12
3,83	84,60	0,06	4,26	76,06	0,10	4,69	69,08	0,14
3,84	84,38	0,09	4,27	75,88	0,12	4,70	68,94	
3,85	84,16	0,11	4,28	75,70	0,14	4,71	68,79	0,01
3,86	83,94	0,13	4,29	75,53	0,16	4,72	68,64	0,03
3,87	83,72	0,15	4,30	75,35		4,73	68,50	0,04
3,88	83,50	0,17	4,31	75,18	0,02	4,74	68,36	0,06
3,89	83,29	0,20	4,32	75,00	0,03	4,75	68,21	0,07
3,90	83,08		4,33	74,83	0,05	4,76	68,07	0,09
3,91	82,86	0,02	4,34	74,66	0,07	4,77	67,93	0,10
3,92	82,65	0,04	4,35	74,48	0,08			

o — u	Distanz	Prop.-Theile	o — u	Distanz	Prop.-Theile	o — u	Distanz	Prop.-Theile
4,78	67,78	0,12	5,20	62,31		5,63	57,55	0,03
4,79	67,64	0,13	5,21	62,19	0,01	5,64	57,45	0,04
4,80	67,50		5,22	62,07	0,02	5,65	57,35	0,05
4,81	67,36	0,01	5,23	61,95	0,04	5,66	57,24	0,06
4,82	67,22	0,03	5,24	61,83	0,05	5,67	57,14	0,07
4,83	67,08	0,04	5,25	61,72	0,06	5,68	57,04	0,08
4,84	66,94	0,06	5,26	61,60	0,07	5,69	56,94	0,09
4,85	66,80	0,07	5,27	61,48	0,08	5,70	56,84	
4,86	66,67	0,08	5,28	61,36	0,09	5,71	56,74	0,01
4,87	66,53	0,10	5,29	61,25	0,11	5,72	56,64	0,02
4,88	66,39	0,11	5,30	61,13		5,73	56,54	0,03
4,89	66,26	0,12	5,31	61,02	0,01	5,74	56,45	0,04
4,90	66,12		5,32	60,90	0,02	5,75	56,35	0,05
4,91	65,99	0,01	5,33	60,79	0,03	5,76	56,25	0,06
4,92	65,85	0,03	5,34	60,68	0,04	5,77	56,15	0,07
4,93	65,72	0,04	5,35	60,56	0,06	5,78	56,06	0,08
4,94	65,59	0,05	5,36	60,45	0,07	5,79	55,96	0,09
4,95	65,46	0,07	5,37	60,34	0,08	5,80	55,86	
4,96	65,32	0,08	5,38	60,22	0,09	5,81	55,76	0,01
4,97	65,19	0,09	5,39	60,11	0,10	5,82	55,67	0,02
4,98	65,06	0,10	5,40	60,00		5,83	55,57	0,03
4,99	64,93	0,12	5,41	59,89	0,01	5,84	55,48	0,04
5,00	64,80		5,42	59,78	0,02	5,85	55,38	0,05
5,01	64,67	0,01	5,43	59,67	0,03	5,86	55,29	0,06
5,02	64,54	0,02	5,44	59,56	0,04	5,87	55,20	0,07
5,03	64,41	0,04	5,45	59,45	0,05	5,88	55,10	0,08
5,04	64,29	0,05	5,46	59,34	0,06	5,89	55,01	0,08
5,05	64,16	0,06	5,47	59,23	0,08	5,90	54,92	
5,06	64,03	0,08	5,48	59,12	0,09	5,91	54,82	0,01
5,07	63,91	0,09	5,49	59,02	0,10	5,92	54,73	0,02
5,08	63,78	0,10	5,50	58,91		5,93	54,64	0,03
5,09	63,66	0,11	5,51	58,80	0,01	5,94	54,55	0,04
5,10	63,53		5,52	58,70	0,02	5,95	54,45	0,05
5,11	63,41	0,01	5,53	58,59	0,03	5,96	54,36	0,06
5,12	63,28	0,02	5,54	58,48	0,04	5,97	54,27	0,06
5,13	63,16	0,04	5,55	58,38	0,05	5,98	54,18	0,07
5,14	63,04	0,05	5,56	58,27	0,06	5,99	54,09	0,08
5,15	62,91	0,06	5,57	58,17	0,07	6,00	54,00	
5,16	62,79	0,07	5,58	58,06	0,08	6,01	53,91	0,01
5,17	62,67	0,08	5,59	57,96	0,09	6,02	53,82	0,02
5,18	62,55	0,10	5,60	57,86		6,03	53,73	0,03
5,19	62,43	0,11	5,61	57,75	0,01	6,04	53,64	0,04
			5,62	57,65	0,02	6,05	53,55	0,04

o — u	Distanz	Prop.-Theile
6,06	53,47	0,05
6,07	53,37	0,06
6,08	53,29	0,07
6,09	53,20	0,08
6,10	53,12	
6,11	53,03	0,01
6,12	52,94	0,02
6,13	52,86	0,02
6,14	52,77	0,03
6,15	52,68	0,04
6,16	52,60	0,05
6,17	52,51	0,06
6,18	52,43	0,07
6,19	52,34	0,08
6,20	52,26	
6,21	52,17	0,01
6,22	52,09	0,02
6,23	52,01	0,02
6,24	51,92	0,03
6,25	51,84	0,04
6,26	51,76	0,05
6,27	51,68	0,06
6,28	51,59	0,07
6,29	51,51	0,07
6,30	51,43	
6,31	51,35	0,01
6,32	51,27	0,02
6,33	51,18	0,02
6,34	51,10	0,03
6,35	51,02	0,04
6,36	50,94	0,05
6,37	50,86	0,06
6,38	50,78	0,06
6,39	50,70	0,07
6,40	50,62	
6,41	50,55	0,01
6,42	50,47	0,02
6,43	50,39	0,02
6,44	50,31	0,03
6,45	50,23	0,04
6,46	50,16	0,05
6,47	50,08	0,05

o — u	Distanz	Prop.-Theile
6,48	50,00	0,06
6,49	49,92	0,07
6,50	49,85	
6,51	49,77	0,01
6,52	49,69	0,02
6,53	49,62	0,02
6,54	49,54	0,03
6,55	49,47	0,04
6,56	49,39	0,04
6,57	49,32	0,05
6,58	49,24	0,06
6,59	49,16	0,07
6,60	49,09	
6,61	49,02	0,01
6,62	48,94	0,01
6,63	48,87	0,02
6,64	48,79	0,03
6,65	48,72	0,04
6,66	48,65	0,04
6,67	48,58	0,05
6,68	48,50	0,06
6,69	48,43	0,06
6,70	48,36	
6,71	48,29	0,01
6,72	48,21	0,01
6,73	48,14	0,02
6,74	48,07	0,03
6,75	48,01	0,04
6,76	47,93	0,04
6,77	47,86	0,05
6,78	47,79	0,06
6,79	47,72	0,06
6,80	47,65	
6,81	47,58	0,01
6,82	47,51	0,01
6,83	47,44	0,02
6,84	47,37	0,03
6,85	47,30	0,03
6,86	47,23	0,04
6,87	47,16	0,05
6,88	47,09	0,06
6,89	47,02	0,06

o — u	Distanz	Prop.-Theile
6,90	46,96	
6,91	46,89	0,01
6,92	46,82	0,01
6,93	46,75	0,02
6,94	46,69	0,03
6,95	46,62	0,03
6,96	46,55	0,04
6,97	46,48	0,05
6,98	46,42	0,05
6,99	46,35	0,06
7,00	46,29	
7,01	46,22	0,01
7,02	46,15	0,01
7,03	46,09	0,02
7,04	46,02	0,03
7,05	45,96	0,03
7,06	45,89	0,04
7,07	45,84	0,05
7,08	45,76	0,05
7,09	45,70	0,06
7,10	45,63	
7,11	45,57	0,01
7,12	45,51	0,01
7,13	45,44	0,02
7,14	45,38	0,02
7,15	45,32	0,03
7,16	45,25	0,04
7,17	45,19	0,04
7,18	45,13	0,05
7,19	45,06	0,06
7,20	45,00	
7,21	44,94	0,01
7,22	44,88	0,01
7,23	44,81	0,02
7,24	44,75	0,02
7,25	44,69	0,03
7,26	44,63	0,04
7,27	44,56	0,04
7,28	44,51	0,05
7,29	44,44	0,06
7,30	44,38	
7,31	44,32	0,01
7,32	44,26	0,01

o — u	Distanz	Prop.-Theile	o — u	Distanz	Prop.-Theile	o — u	Distanz	Prop.-Theile
7,33	44,20	0,02	7,76	41,75	0,03	8,18	39,61	0,04
7,34	44,14	0,02	7,77	41,70	0,04	8,19	39,56	0,04
7,35	44,08	0,03	7,78	41,65	0,04			
7,36	44,02	0,04	7,79	41,59	0,05	8,20	39,51	
7,37	43,96	0,04				8,21	39,46	0,00
7,38	43,90	0,05	7,80	41,54		8,22	39,42	0,01
7,39	43,84	0,05	7,81	41,48	0,00	8,23	39,37	0,01
			7,82	41,43	0,01	8,24	39,32	0,02
7,40	43,78		7,83	41,38	0,02	8,25	39,27	0,02
7,41	43,72	0,01	7,84	41,33	0,02	8,26	39,23	0,03
7,42	43,67	0,01	7,85	41,27	0,03	8,27	39,18	0,03
7,43	43,61	0,02	7,86	41,22	0,03	8,28	39,13	0,04
7,44	43,55	0,02	7,87	41,17	0,04	8,29	39,08	0,04
7,45	43,49	0,03	7,88	41,12	0,04			
7,46	43,43	0,03	7,89	41,06	0,05	8,30	39,04	
7,47	43,37	0,04				8,31	38,99	0,00
7,48	43,32	0,05	7,90	41,01		8,32	38,94	0,01
7,49	43,25	0,05	7,91	40,96	0,00	8,33	38,90	0,01
			7,92	40,91	0,01	8,34	38,85	0,02
7,50	43,20		7,93	40,86	0,01	8,35	38,80	0,02
7,51	43,14	0,00	7,94	40,81	0,02	8,36	38,76	0,03
7,52	43,08	0,01	7,95	40,76	0,02	8,37	38,71	0,03
7,53	43,03	0,02	7,96	40,70	0,03	8,38	38,66	0,04
7,54	42,97	0,02	7,97	40,65	0,03	8,39	38,62	0,04
7,55	42,91	0,03	7,98	40,60	0,04			
7,56	42,86	0,03	7,99	40,55	0,05	8,40	38,57	
7,57	42,80	0,04				8,41	38,53	0,00
7,58	42,74	0,04	8,00	40,50		8,42	38,48	0,01
7,59	42,69	0,05	8,01	40,45	0,00	8,43	38,43	0,01
7,60	42,63		8,02	40,40	0,01	8,44	38,39	0,02
7,61	42,58	0,00	8,03	40,34	0,01	8,45	38,34	0,02
7,62	42,52	0,01	8,04	40,29	0,02	8,46	38,30	0,03
7,63	42,46	0,02	8,05	40,25	0,02	8,47	38,25	0,03
7,64	42,41	0,02	8,06	40,20	0,03	8,48	38,20	0,04
7,65	42,35	0,03	8,07	40,15	0,03	8,49	38,16	0,04
7,66	42,30	0,03	8,08	40,10	0,04			
7,67	42,24	0,04	8,09	40,05	0,04	8,50	38,12	
7,68	42,19	0,04				8,51	38,07	0,00
7,69	42,13	0,05	8,10	40,00		8,52	38,03	0,01
			8,11	39,95	0,00	8,53	37,98	0,01
7,70	42,08		8,12	39,90	0,01	8,54	37,94	0,02
7,71	42,02	0,00	8,13	39,85	0,01	8,55	37,89	0,02
7,72	41,97	0,01	8,14	39,80	0,02	8,56	37,85	0,03
7,73	41,91	0,02	8,15	39,75	0,02	8,57	37,81	0,03
7,74	41,86	0,02	8,16	39,71	0,03	8,58	37,76	0,04
7,75	41,81	0,03	8,17	39,66	0,03	8,59	37,72	0,04

o — u	Distanz	Prop.-Theile	o — u	Distanz	Prop.-Theile	o — u	Distanz	Prop.-Theile
8,60	37,68		9,00	36,00		9,40	34,47	
8,61	37,63	0,00	9,01	35,96	0,00	9,41	34,43	0,00
8,62	37,59	0,01	9,02	35,92	0,01	9,42	34,40	0,01
8,63	37,54	0,01	9,03	35,88	0,01	9,43	34,36	0,01
8,64	37,50	0,02	9,04	35,84	0,02	9,44	34,32	0,01
8,65	37,46	0,02	9,05	35,80	0,02	9,45	34,29	0,02
8,66	37,41	0,03	9,06	35,76	0,02	9,46	34,25	0,02
8,67	37,37	0,03	9,07	35,72	0,03	9,47	34,21	0,02
8,68	37,33	0,04	9,08	35,68	0,03	9,48	34,18	0,03
8,69	37,28	0,04	9,09	35,64	0,03	9,49	34,15	0,03
8,70	37,24		9,10	35,60		9,50	34,11	
8,71	37,20	0,00	9,11	35,56	0,00	9,51	34,07	0,00
8,72	37,16	0,01	9,12	35,53	0,01	9,52	34,03	0,01
8,73	37,11	0,01	9,13	35,49	0,01	9,53	34,00	0,01
8,74	37,07	0,02	9,14	35,45	0,01	9,54	33,96	0,01
8,75	37,03	0,02	9,15	35,41	0,02	9,55	33,93	0,02
8,76	36,99	0,02	9,16	35,37	0,02	9,56	33,89	0,02
8,77	36,94	0,03	9,17	35,33	0,02	9,57	33,86	0,02
8,78	36,90	0,03	9,18	35,29	0,03	9,58	33,82	0,03
8,79	36,86	0,04	9,19	35,26	0,03	9,59	33,79	0,03
8,80	36,82		9,20	35,22		9,60	33,75	
8,81	36,78	0,00	9,21	35,18	0,00	9,61	33,72	0,00
8,82	36,74	0,01	9,22	35,14	0,01	9,62	33,68	0,01
8,83	36,69	0,01	9,23	35,10	0,01	9,63	33,64	0,01
8,84	36,65	0,02	9,24	35,07	0,01	9,64	33,61	0,01
8,85	36,61	0,02	9,25	35,03	0,02	9,65	33,58	0,02
8,86	36,57	0,02	9,26	34,99	0,02	9,66	33,54	0,02
8,87	36,53	0,03	9,27	34,95	0,02	9,67	33,52	0,02
8,88	36,49	0,03	9,28	34,91	0,03	9,68	33,47	0,03
8,89	36,45	0,04	9,29	34,88	0,03	9,69	33,44	0,03
8,90	36,40		9,30	34,84		9,70	33,40	
8,91	36,36	0,00	9,31	34,80	0,00	9,71	33,37	0,00
8,92	36,32	0,01	9,32	34,76	0,01	9,72	33,33	0,01
8,93	36,28	0,01	9,33	34,73	0,01	9,73	33,31	0,01
8,94	36,24	0,02	9,34	34,69	0,01	9,74	33,27	0,01
8,95	36,20	0,02	9,35	34,65	0,02	9,75	33,23	0,02
8,96	36,16	0,02	9,36	34,62	0,02	9,76	33,20	0,02
8,97	36,12	0,03	9,37	34,58	0,02	9,77	33,16	0,02
8,98	36,08	0,03	9,38	34,54	0,03	9,78	33,13	0,03
8,99	36,04	0,04	9,39	34,51	0,03	9,79	33,10	0,03

Tafel Nr XXIII

Zweite Tafel zu Stampfer's Distanzmesser.

Werthe von $\left(\frac{0,0356\,(o+u-2m)}{o-u}\right)$

o — u	o + u — 2m									
	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
1,0	0,14	0,28	0,43	0,57	0,71	0,85	1,00	1,14	1,28	1,42
1,05	0,13	0,26	0,41	0,54	0,68	0,82	0,95	1,09	1,22	1,36
1,1	0,13	0,26	0,39	0,52	0,65	0,78	0,91	1,04	1,17	1,30
1,15	0,12	0,25	0,37	0,50	0,62	0,74	0,87	1,00	1,12	1,24
1,2	0,12	0,24	0,36	0,47	0,59	0,71	0,83	0,95	1,07	1,19
1,25	0,11	0,23	0,34	0,46	0,57	0,68	0,80	0,91	1,03	1,14
1,3	0,11	0,22	0,33	0,44	0,55	0,66	0,77	0,88	0,99	1,10
1,35	0,11	0,21	0,32	0,42	0,53	0,63	0,74	0,84	0,95	1,06
1,4	0,10	0,20	0,31	0,41	0,51	0,61	0,71	0,81	0,92	1,02
1,45	0,10	0,19	0,30	0,39	0,49	0,59	0,69	0,79	0,89	0,98
1,5	0,10	0,19	0,29	0,38	0,47	0,57	0,67	0,76	0,86	0,95
1,6	0,09	0,18	0,27	0,36	0,44	0,53	0,62	0,71	0,80	0,89
1,7	0,08	0,17	0,25	0,34	0,42	0,50	0,59	0,67	0,75	0,84
1,8	0,08	0,16	0,24	0,32	0,40	0,47	0,55	0,63	0,71	0,79
1,9	0,07	0,15	0,22	0,30	0,38	0,45	0,53	0,60	0,67	0,75
2,0	0,07	0,14	0,21	0,28	0,36	0,43	0,50	0,57	0,64	0,71
2,1	0,07	0,13	0,20	0,27	0,34	0,41	0,47	0,55	0,61	0,68
2,2	0,06	0,13	0,19	0,26	0,32	0,39	0,45	0,52	0,58	0,65
2,3	0,06	0,12	0,19	0,25	0,31	0,37	0,43	0,50	0,56	0,62
2,4	0,06	0,12	0,18	0,24	0,30	0,35	0,41	0,47	0,53	0,59
2,6	0,05	0,11	0,16	0,22	0,27	0,33	0,38	0,44	0,49	0,55
2,8	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,36	0,41	0,46	0,51
3,0	0,05	0,09	0,14	0,19	0,24	0,28	0,33	0,38	0,43	0,47
3,5	0,04	0,08	0,12	0,16	0,20	0,24	0,28	0,33	0,37	0,41
4,0	0,04	0,07	0,11	0,14	0,18	0,21	0,25	0,28	0,32	0,36
4,5	0,03	0,06	0,10	0,13	0,16	0,19	0,22	0,25	0,29	0,32
5,0	0,03	0,06	0,09	0,11	0,14	0,17	0,20	0,23	0,26	0,28
6,0	0,02	0,05	0,07	0,09	0,12	0,14	0,17	0,19	0,21	0,24
7,0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20
8,0	0,02	0,04	0,05	0,07	0,09	0,11	0,12	0,14	0,16	0,18
9,0	0,01	0,03	0,05	0,06	0,08	0,09	0,11	0,13	0,14	0,16
10,0	0,01	0,03	0,04	0,06	0,07	0,08	0,10	0,11	0,13	0,14

o — u	o + u — 2m									
	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80
1,0	1,57	1,71	1,85	1,99	2,14	2,28	2,42	2,56	2,70	2,85
1,05	1,50	1,63	1,76	1,90	2,04	2,17	2,31	2,40	2,58	2,72
1,1	1,42	1,55	1,68	1,81	1,94	2,07	2,20	2,33	2,46	2,59
1,15	1,36	1,49	1,60	1,74	1,86	1,98	2,11	2,23	2,36	2,48
1,2	1,31	1,42	1,54	1,66	1,78	1,90	2,02	2,14	2,26	2,37
1,25	1,25	1,37	1,48	1,60	1,71	1,82	1,94	2,05	2,17	2,28
1,3	1,20	1,31	1,42	1,53	1,64	1,75	1,86	1,97	2,08	2,19
1,35	1,16	1,26	1,37	1,48	1,58	1,69	1,79	1,90	2,00	2,11
1,4	1,12	1,22	1,32	1,42	1,52	1,63	1,73	1,83	1,93	2,03
1,45	1,08	1,18	1,28	1,38	1,47	1,57	1,67	1,77	1,87	1,97
1,5	1,04	1,14	1,24	1,33	1,42	1,52	1,61	1,71	1,81	1,90
1,6	0,98	1,07	1,16	1,25	1,33	1,42	1,51	1,60	1,69	1,78
1,7	0,92	1,01	1,09	1,17	1,26	1,34	1,42	1,51	1,59	1,68
1,8	0,87	0,96	1,04	1,11	1,19	1,26	1,34	1,42	1,50	1,58
1,9	0,82	0,90	0,98	1,05	1,12	1,20	1,27	1,35	1,42	1,50
2,0	0,78	0,85	0,92	1,00	1,07	1,14	1,21	1,28	1,35	1,42
2,1	0,75	0,81	0,88	0,95	1,02	1,09	1,15	1,22	1,29	1,35
2,2	0,71	0,78	0,84	0,91	0,97	1,04	1,10	1,17	1,23	1,29
2,3	0,68	0,74	0,80	0,87	0,93	1,00	1,05	1,12	1,18	1,24
2,4	0,65	0,71	0,77	0,83	0,89	0,95	1,01	1,07	1,13	1,19
2,6	0,60	0,66	0,71	0,77	0,82	0,87	0,93	0,99	1,04	1,10
2,8	0,56	0,61	0,66	0,71	0,76	0,81	0,86	0,91	0,97	1,02
3,0	0,52	0,57	0,62	0,66	0,71	0,76	0,81	0,85	0,90	0,95
3,5	0,45	0,49	0,53	0,57	0,61	0,65	0,69	0,73	0,77	0,81
4,0	0,39	0,43	0,46	0,50	0,53	0,57	0,60	0,64	0,68	0,71
4,5	0,35	0,38	0,41	0,44	0,48	0,51	0,54	0,57	0,60	0,63
5,0	0,31	0,34	0,37	0,40	0,43	0,45	0,48	0,51	0,54	0,57
6,0	0,26	0,28	0,31	0,33	0,36	0,38	0,40	0,43	0,45	0,47
7,0	0,22	0,24	0,26	0,28	0,30	0,32	0,34	0,36	0,39	0,41
8,0	0,20	0,21	0,23	0,25	0,27	0,28	0,30	0,32	0,34	0,36
9,0	0,17	0,19	0,21	0,22	0,24	0,25	0,27	0,28	0,30	0,32
10,0	0,16	0,17	0,18	0,20	0,21	0,23	0,24	0,25	0,27	0,28

Tafel Nr XXIV

Dritte Tafel zu Stampfer's Distanzmesser.

Werthe von $\left(\frac{-\,0{,}0031\,(h - u)^2}{o - u}\right)$

o — u	h — u									
	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
1,0	0,05	0,11	0,20	0,31	0,45	0,61	0,80	1,00	1,24	1,50
1,05	0,05	0,10	0,19	0,30	0,43	0,58	0,76	0,96	1,18	1,43
1,1	0,05	0,10	0,18	0,28	0,41	0,55	0,72	0,91	1,13	1,36
1,15	0,04	0,10	0,17	0,27	0,39	0,53	0,69	0,87	1,08	1,31
1,2	0,04	0,09	0,16	0,26	0,37	0,51	0,66	0,84	1,03	1,25
1,25	0,04	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49	0,64	0,80	1,00	1,20
1,3	0,04	0,09	0,15	0,24	0,34	0,47	0,61	0,77	0,95	1,15
1,35	0,04	0,08	0,15	0,23	0,33	0,45	0,59	0,74	0,92	1,11
1,4	0,04	0,08	0,14	0,22	0,32	0,43	0,57	0,72	0,89	1,07
1,45	0,03	0,08	0,14	0,21	0,31	0,42	0,55	0,69	0,86	1,04
1,5	0,03	0,08	0,13	0,20	0,30	0,40	0,53	0,67	0,83	1,00
1,6	0,03	0,07	0,12	0,19	0,28	0,38	0,50	0,63	0,77	0,94
1,7	0,03	0,07	0,12	0,18	0,26	0,36	0,47	0,59	0,73	0,88
1,8	0,03	0,06	0,11	0,17	0,25	0,34	0,44	0,56	0,69	0,83
1,9	0,03	0,06	0,10	0,16	0,24	0,32	0,42	0,53	0,65	0,79
2,0	0,02	0,06	0,10	0,16	0,22	0,30	0,40	0,50	0,64	0,75
2,1	0,02	0,05	0,09	0,15	0,21	0,29	0,38	0,48	0,59	0,72
2,2	0,02	0,05	0,09	0,14	0,20	0,28	0,36	0,46	0,56	0,68
2,3	0,02	0,05	0,09	0,14	0,19	0,26	0,34	0,44	0,54	0,65
2,4	0,02	0,05	0,08	0,13	0,19	0,25	0,33	0,42	0,52	0,62
2,6	0,02	0,04	0,08	0,12	0,17	0,23	0,30	0,39	0,48	0,58
2,8	0,02	0,04	0,07	0,11	0,16	0,22	0,28	0,36	0,44	0,54
3,0	0,02	0,04	0,07	0,10	0,15	0,20	0,26	0,33	0,41	0,50
3,5	0,01	0,03	0,06	0,09	0,13	0,17	0,23	0,29	0,35	0,43
4,0	0,01	0,03	0,05	0,08	0,11	0,15	0,20	0,24	0,31	0,37
4,5	0,01	0,03	0,04	0,07	0,10	0,13	0,18	0,22	0,28	0,33
5,0	0,01	0,02	0,04	0,06	0,09	0,12	0,16	0,20	0,25	0,30
6,0	0,01	0,02	0,03	0,05	0,07	0,10	0,13	0,17	0,21	0,25
7,0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,09	0,11	0,14	0,18	0,21
8,0	0,01	0,01	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,13	0,16	0,19
9,0	0,01	0,01	0,02	0,03	0,05	0,07	0,09	0,11	0,14	0,17
10,0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,05	0,06	0,08	0,10	0,12	0,15

Tafel Nr XXV

Werthe von $\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$ für den Stromquadranten.

α	$\log \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$	$\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$	α	$\log \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$	$\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$	α	$\log \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$	$\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$
1° 0′	9,12096	0,1321	8° 0′	9,57390	0,3749	15° 0′	9,71402	0,5176
10	9,15444	0,1427	10	9,57844	0,3788	10	9,71654	0,5206
20	9,18344	0,1526	20	9,58288	0,3827	20	9,71903	0,5236
30	9,20903	0,1618	30	9,58725	0,3866	30	9,72149	0,5266
40	9,23192	0,1706	40	9,59153	0,3904	40	9,72393	0,5296
50	9,25263	0,1789	50	9,59573	0,3942	50	9,72635	0,5325
2 0	9,27154	0,1869	9 0	9,59985	0,3980	16 0	9,72875	0,5355
10	9,28894	0,1945	10	9,60391	0,4017	10	9,73112	0,5384
20	9,30504	0,2019	20	9,60789	0,4054	20	9,73347	0,5413
30	9,32004	0,2089	30	9,61180	0,4091	30	9,73580	0,5442
40	9,33408	0,2158	40	9,61565	0,4127	40	9,73811	0,5471
50	9,34726	0,2225	50	9,61943	0,4163	50	9,74040	0,5500
3 0	9,35970	0,2289	10 0	9,62316	0,4199	17 0	9,74267	0,5529
10	9,37146	0,2352	10	9,62682	0,4235	10	9,74492	0,5558
20	9,38262	0,2413	20	9,63043	0,4270	20	9,74715	0,5587
30	9,39424	0,2473	30	9,63398	0,4305	30	9,74936	0,5615
40	9,40337	0,2531	40	9,63748	0,4340	40	9,75155	0,5643
50	9,41305	0,2589	50	9,64093	0,4374	50	9,75373	0,5672
4 0	9,42232	0,2644	11 0	9,64432	0,4409	18 0	9,75589	0,5700
10	9,43121	0,2699	10	9,64767	0,4443	10	9,75803	0,5728
20	9,43976	0,2753	20	9,65097	0,4477	20	9,76015	0,5756
30	9,44799	0,2805	30	9,65423	0,4511	30	9,76226	0,5784
40	9,45592	0,2857	40	9,65743	0,4544	40	9,76435	0,5812
50	9,46358	0,2908	50	9,66061	0,4577	50	9,76642	0,5840
5 0	9,47097	0,2958	12 0	9,66373	0,4610	19 0	9,76848	0,5868
10	9,47813	0,3007	10	9,66682	0,4643	10	9,77053	0,5896
20	9,48506	0,3055	20	9,66987	0,4676	20	9,77256	0,5923
30	9,49179	0,3103	30	9,67288	0,4708	30	9,77457	0,5951
40	9,49831	0,3150	40	9,67585	0,4741	40	9,77657	0,5978
50	9,50465	0,3196	50	9,67878	0,4773	50	9,77856	0,6006
6 0	9,51081	0,3242	13 0	9,68168	0,4805	20 0	9,78053	0,6033
10	9,51680	0,3287	10	9,68454	0,4837	10	9,78249	0,6060
20	9,52264	0,3332	20	9,68738	0,4868	20	9,78443	0,6087
30	9,52833	0,3375	30	9,69017	0,4900	30	9,78637	0,6115
40	9,53387	0,3419	40	9,69294	0,4931	40	9,78829	0,6142
50	9,53929	0,3462	50	9,69568	0,4962	50	9,79019	0,6169
7 0	9,54457	0,3504	14 0	9,69838	0,4993	21 0	9,79209	0,6196
10	9,54973	0,3546	10	9,70106	0,5024	10	9,79397	0,6223
20	9,55478	0,3587	20	9,70371	0,5055	20	9,79584	0,6249
30	9,55971	0,3628	30	9,70633	0,5085	30	9,79770	0,6276
40	9,56454	0,3669	40	9,70892	0,5116	40	9,79954	0,6303
50	9,56927	0,3709	50	9,71147	0,5146	50	9,80138	0,6330

α	$\log \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$	$\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$	α	$\log \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$	$\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$	α	$\log \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$	$\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$
22° 0′	9,80320	0,6356	29° 40′	9,87779	0,7547	44° 0′	9,99242	0,9827
10	9,80502	0,6383	50	9,87926	0,7573	30	9,99621	0,9913
20	9,80682	0,6409	30 0	9,88072	0,7598	45 0	0,00000	1,0000
30	9,80861	0,6436	10	9,88217	0,7624	30	0,00379	1,0088
40	9,81039	0,6462	20	9,88362	0,7649	46 0	0,00758	1,0176
50	9,81216	0,6489	30	9,88507	0,7675	30	0,01137	1,0265
23 0	9,81392	0,6515	40	9,88651	0,7700	47 0	0,01517	1,0355
10	9,81567	0,6541	50	9,88795	0,7726	30	0,01897	1,0446
20	9,81742	0,6568	31 0	9,88938	0,7751	48 0	0,02278	1,0539
30	9,81915	0,6594	10	9,89081	0,7777	30	0,02659	1,0631
40	9,82087	0,6620	20	9,89224	0,7803	49 0	0,03042	1,0726
50	9,82258	0,6646	30	9,89366	0,7828	30	0,03425	1,0821
24 0	9,82429	0,6672	40	9,89507	0,7854	50 0	0,03809	1,0917
10	9,82598	0,6698	50	9,89648	0,7879	30	0,04195	1,1014
20	9,82767	0,6725	32 0	9,89789	0,7905	51 0	0,04581	1,1113
30	9,82935	0,6751	10	9,89930	0,7930	30	0,04969	1,1212
40	9,83102	0,6777	20	9,90070	0,7956	52 0	0,05359	1,1313
50	9,83268	0,6803	30	9,90209	0,7982	30	0,05751	1,1415
25 0	9,83433	0,6829	40	9,90348	0,8007	53 0	0,06144	1,1520
10	9,83598	0,6855	50	9,90487	0,8033	30	0,06539	1,1625
20	9,83762	0,6880	33 0	9,90626	0,8059	54 0	0,06937	1,1732
30	9,83925	0,6906	10	9,90764	0,8084	30	0,07336	1,1840
40	9,84087	0,6932	20	9,90901	0,8110	55 0	0,07738	1,1950
50	9,84248	0,6958	30	9,91039	0,8136	30	0,08143	1,2062
26 0	9,84409	0,6984	40	9,91176	0,8161	56 0	0,08550	1,2176
10	9,84569	0,7009	50	9,91313	0,8187	30	0,08961	1,2292
20	9,84728	0,7035	34 0	9,91449	0,8213	57 0	0,09374	1,2409
30	9,84887	0,7061	30	9,91856	0,8290	30	0,09790	1,2529
40	9,85044	0,7087	35 0	9,92261	0,8368	58 0	0,10210	1,2650
50	9,85202	0,7112	30	9,92663	0,8446	30	0,10634	1,2774
27 0	9,85358	0,7138	36 0	9,93063	0,8524	59 0	0,11061	1,2901
10	9,85514	0,7164	30	9,93460	0,8602	30	0,11492	1,3029
20	9,85669	0,7189	37 0	9,93855	0,8681	60 0	0,11928	1,3161
30	9,85824	0,7215	30	9,94249	0,8760	30	0,12368	1,3295
40	9,85977	0,7240	38 0	9,94640	0,8839	61 0	0,12812	1,3431
50	9,86131	0,7266	30	9,95030	0,8919	30	0,13262	1,3571
28 0	9,86283	0,7292	39 0	9,95418	0,8999	62 0	0,13716	1,3714
10	9,86436	0,7317	30	9,95805	0,9079	30	0,14171	1,3858
20	9,86587	0,7343	40 0	9,96190	0,9160	63 0	0,14642	1,4010
30	9,86738	0,7368	30	9,96575	0,9242	30	0,15113	1,4162
40	9,86888	0,7394	41 0	9,96958	0,9323	64 0	0,15591	1,4319
50	9,87038	0,7420	30	9,97340	0,9406	30	0,16075	1,4480
29 0	9,87187	0,7445	42 0	9,97722	0,9489	65 0	0,16566	1,4644
10	9,87336	0,7471	30	9,98102	0,9572	30	0,17065	1,4813
20	9,87484	0,7496	43 0	9,98483	0,9657	66 0	0,17571	1,4987
30	9,87632	0,7522	30	9,98862	0,9741	30	0,18085	1,5165

Tafel Nr XXVI

Werthe von $\sqrt{h'}$ für den Reichenbach'schen Strommesser.

h'	log $\sqrt{h'}$	$\sqrt{h'}$	h'	log $\sqrt{h'}$	$\sqrt{h'}$	h'	log $\sqrt{h'}$	$\sqrt{h'}$
0,005	8,84948	0,0707	0,30	9,73846	0,5476	0,69	9,91939	0,8306
0,010	9,00000	0,1000	0,31	9,74562	0,5567	0,70	9,92252	0,8366
0,015	9,08778	0,1224	0,32	9,75251	0,5656	0,71	9,92562	0,8426
0,020	9,15045	0,1414	0,33	9,75921	0,5744	0,72	9,92865	0,8485
0,025	9,19893	0,1581	0,34	9,76574	0,5831	0,73	9,93166	0,8544
0,030	9,23855	0,1732	0,35	9,77203	0,5916	0,74	9,93460	0,8602
0,035	9,27207	0,1871	0,36	9,77815	0,6000	0,75	9,93752	0,8660
0,040	9,30103	0,2000	0,37	9,78405	0,6082	0,76	9,94037	0,8717
0,045	9,32674	0,2122	0,38	9,78986	0,6164	0,77	9,94325	0,8775
0,050	9,34947	0,2236	0,39	9,79553	0,6245	0,78	9,94606	0,8832
0,055	9,37014	0,2345	0,40	9,80099	0,6324	0,79	9,94880	0,8888
0,060	9,38881	0,2448	0,41	9,80638	0,6403	0,80	9,95153	0,8944
0,065	9,40637	0,2549	0,42	9,81164	0,6481	0,82	9,95689	0,9055
0,070	9,42259	0,2646	0,43	9,81670	0,6557	0,84	9,96213	0,9165
0,075	9,43743	0,2738	0,44	9,82171	0,6633	0,86	9,96727	0,9274
0,080	9,45148	0,2828	0,45	9,82659	0,6708	0,88	9,97225	0,9381
0,085	9,46464	0,2915	0,46	9,83136	0,6782	0,90	9,97713	0,9487
0,090	9,47712	0,3000	0,47	9,83601	0,6855	0,92	9,98191	0,9592
0,095	9,48883	0,3082	0,48	9,84061	0,6928	0,94	9,98655	0,9695
0,10	9,49996	0,3162	0,49	9,84510	0,7000	0,96	9,99114	0,9798
0,11	9,52283	0,3333	0,50	9,84948	0,7071	0,98	9,99559	0,9899
0,12	9,53958	0,3464	0,51	9,85382	0,7142	1,00	10,00000	1,0000
0,13	9,55690	0,3605	0,52	9,85799	0,7211	1,02	10,00430	1,0100
0,14	9,57299	0,3741	0,53	9,86213	0,7280	1,04	10,00851	1,0198
0,15	9,58805	0,3873	0,54	9,86617	0,7348	1.06	10,01265	1,0295
0,16	9,60206	0,4000	0,55	9,87017	0,7416	1,08	10,01671	1,0392
0,17	9,61521	0,4123	0,56	9,87407	0,7483	1,10	10,02070	1,0488
0,18	9,62757	0,4242	0,57	9,87789	0,7549	1,12	10,02461	1,0583
0,19	9,63929	0,4358	0,58	9,88167	0,7615	1,14	10,02845	1,0677
0,20	9,65050	0,4472	0,59	9,88542	0,7681	1,16	10,03223	1,0771
0,21	9,66105	0,4582	0,60	9,88908	0,7746	1,18	10,03594	1,0863
0,22	9,67117	0,4690	0,61	9,89265	0,7810	1,20	10,03959	1,0954
0,23	9,68088	0,4796	0,62	9,89619	0,7874	1,22	10,04318	1,1045
0,24	9,69011	0,4899	0,63	9,89933	0,7931	1,24	10,04671	1,1136
0,25	9,69897	0,5000	0,64	9,90309	0,8000	1,26	10,05019	1,1251
0,26	9,70748	0,5099	0,65	9,90644	0,8062	1,28	10,05360	1,1288
0,27	9,71567	0,5196	0,66	9,90977	0,8124	1,30	10,05692	1,1401
0,28	9,72354	0,5291	0,67	9,91302	0,8185	1,32	10,06029	1,1489
0,29	9,73118	0,5385	0,68	9,91624	0,8246	1,34	10,06355	1,1576

Tafel Nr XXVII

Coordinaten für Kreisbögen, bezogen auf die Tangente.

Abscisse x	Ordinate y für einen Halbmesser von									
	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70
5	0,51	0,42	0,36	0,31	0,28	0,25	0,23	0,21	0,19	0,18
10	2,09	1,72	1,46	1,27	1,13	1,01	0,92	0,84	0,77	0,72
15	5,00	4,02	3,38	2,92	2,57	2,30	2,08	1,91	1,75	1,63
20	10,00	7,64	6,28	5,36	4,69	4,17	3,77	3,43	3,15	2,92
25	25,00	13,42	10,51	8,78	7,58	6,70	6,01	5,46	5,00	4,62

Abscisse x	Ordinate y für einen Halbmesser von									
	75	80	85	90	95	100	110	120	125	130
5	0,17	0,16	0,15	0,14	0,13	0,13	0,11	0,10	0,10	0,10
10	0,67	0,63	0,59	0,56	0,53	0,51	0,46	0,42	0,41	0,39
15	1,52	1,42	1,33	1,26	1,19	1,13	1,03	0,94	0,90	0,87
20	2,72	2,54	2,39	2,25	2,13	2,02	1,83	1,68	1,62	1,55
25	4,29	4,01	3,76	3,54	3,35	3,18	2,88	2,63	2,53	2,43
30	6,26	5,84	5,47	5,15	4,86	4,61	4,17	3,81	3,66	3,51
35	8,67	8,06	7,54	7,08	6,68	6,33	5,72	5,22	5,00	4,80
40	11,56	10,72	10,00	9,38	8,83	8,35	7,53	6,86	6,58	6,31
45	15,00	13,86	12,89	12,06	11,33	10,70	9,63	8,76	8,38	8,04
50	19,10	17,55	16,26	15,17	14,22	13,40	12,02	10,91	10,44	10,00

Abscisse x	Ordinate y für einen Halbmesser von									
	140	150	160	170	175	180	190	200	210	220
10	0,36	0,34	0,31	0,29	0,29	0,28	0,26	0,25	0,24	0,23
20	1,44	1,34	1,25	1,18	1,15	1,11	1,06	1,00	0,95	0,91
30	3,25	3,04	2,84	2,67	2,59	2,52	2,38	2,27	2,15	2,06
40	5,84	5,44	5,08	4,77	4,64	4,50	4,26	4,04	3,84	3,67
50	9,23	8,58	8,01	7,52	7,30	7,08	6,70	6,35	6,04	5,76
60	13,51	12,53	11,68	10,94	10,61	10,29	9,72	9,22	8,75	8,34
70	18,76	17,34	16,13	15,08	14,61	14,17	13,36	12,64	12,01	11,43
80	25,11	23,12	21,44	20,00	19,36	18,75	17,66	16,70	15,84	15,06
90	32,76	30,00	27,71	25,78	24,92	24,12	22,67	21,40	20,26	19,25
100	42,02	38,20	35,10	32,52	31,39	30,33	28,45	26,80	25,34	24,04

Abscisse x	Ordinate y für einen Halbmesser von									
	230	240	250	260	270	280	290	300	310	320
10	0,22	0,21	0,21	0,19	0,19	0,18	0,17	0,17	0,16	0,16
20	0,87	0,83	0,81	0,77	0,74	0,72	0,69	0,67	0,65	0,63
30	1,96	1,88	1,83	1,74	1,67	1,61	1,56	1,51	1,46	1,41
40	3,50	3,36	3,23	3,10	2,98	2,87	2,77	2,68	2,59	2,51
50	5,50	5,27	5,06	4,85	4,67	4,50	4,34	4,20	4,06	3,93
60	7,96	7,62	7,31	7,02	6,75	6,50	6,27	6,07	5,86	5,68
70	10,91	10,44	10,00	9,60	9,23	8,89	8,58	8,29	8,01	7,75
80	14,36	13,73	13,15	12,61	12,12	11,67	11,25	10,87	10,50	10,16
90	18,34	17,51	16,77	16,07	15,44	14,86	14,32	13,82	13,35	12,92
100	22,88	21,83	20,87	20,00	19,20	18,47	17,79	17,16	16,57	16,03

Abscisse x	Ordinate y für einen Halbmesser von									
	330	340	360	380	400	420	440	460	480	500
10	0,15	0,15	0,14	0,13	0,14	0,12	0,11	0,11	0,10	0,10
20	0,61	0,59	0,56	0,53	0,51	0,48	0,45	0,43	0,42	0,40
30	1,37	1,33	1,25	1,19	1,12	1,07	1,02	0,98	0,94	0,90
40	2,43	2,36	2,23	2,11	2,01	1,91	1,82	1,74	1,67	1,60
50	3,81	3,70	3,49	3,30	3,14	2,99	2,85	2,73	2,61	2,51
60	5,50	5,34	5,04	4,77	4,53	4,31	4,11	3,93	3,76	3,61
70	7,51	7,28	6,87	6,50	6,18	5,87	5,60	5,36	5,13	4,92
80	9,84	9,55	9,00	8,52	8,09	7,69	7,33	7,01	6,71	6,44
90	12,51	12,13	11,43	10,81	10,27	9,76	9,30	8,89	8,51	8,17
100	15,52	15,04	14,17	13,39	12,71	12,08	11,51	11,00	10,53	10,10

Abscisse x	Ordinate y für einen Halbmesser von									
	550	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
10	0,09	0,08	0,08	0,07	0,07	0,06	0,06	0,06	0,05	0,05
20	0,36	0,33	0,31	0,29	0,27	0,25	0,24	0,22	0,21	0,20
30	0,82	0,75	0,69	0,64	0,60	0,56	0,53	0,50	0,47	0,45
40	1,46	1,33	1,23	1,14	1,07	1,00	0,94	0,89	0,84	0,80
50	2,28	2,09	1,93	1,79	1,67	1,56	1,48	1,39	1,32	1,25
60	3,28	3,01	2,78	2,58	2,40	2,25	2,12	2,00	1,90	1,80
70	4,47	4,10	3,78	3,51	3,27	3,07	2,89	2,73	2,58	2,45
80	5,85	5,36	4,94	4,59	4,28	4,01	3,77	3,56	3,37	3,21
90	7,41	6,79	6,26	5,81	5,42	5,08	4,78	4,51	4,27	4,06
100	9,17	8,39	7,74	7,18	6,70	6,27	5,91	5,57	5,29	5,01
110	11,11	10,17	9,38	8,70	8,11	7,60	7,15	6,75	6,39	6,07
120	13,25	12,12	11,17	10,36	9,66	9,05	8,51	8,04	7,61	7,23
130	15,58	14,25	13,13	12,18	11,35	10,63	10,00	9,44	8,94	8,49
140	18,12	16,56	15,26	14,14	13,18	12,35	11,61	10,96	10,37	9,85
150	20,85	19,05	17,54	16,26	15,15	14,19	13,34	12,59	11,92	11,31

Abscisse x	Ordinate y für einen Halbmesser von									
	1100	1200	1300	1400	1500	2000	2500	3000	4000	5000
20	0,18	0,17	0,15	0,14	0,13	0,10	0,08	0,07	0,05	0,04
40	0,73	0,67	0,62	0,57	0,53	0,40	0,32	0,27	0,20	0,16
60	1,64	1,50	1,39	1,29	1,20	0,90	0,72	0,60	0,45	0,36
80	2,91	2,67	2,46	2,29	2,13	1,60	1,28	1,07	0,80	0,64
100	4,55	4,17	3,85	3,58	3,33	2,50	2,00	1,67	1,25	1,00
120	6,56	6,01	5,55	5,15	4,81	3,60	2,88	2,40	1,80	1,44
140	8,95	8,19	7,56	7,02	6,55	4,91	3,92	3,27	2,45	1,96
160	11,70	10,71	9,88	9,17	8,56	6,41	5,13	4,27	3,20	2,56
180	14,83	13,58	12,52	11,62	10,84	8,12	6,49	5,40	4,05	3,24
200	18,33	16,79	15,48	14,36	13,39	10,03	8,01	6,67	5,00	4,00
220	22,22	20,34	18,75	17,39	16,22	12,14	9,70	8,08	6,05	4,84
240	26,50	24,24	22,35	20,72	19,32	14,45	11,55	9,62	7,21	5,76
260	31,17	28,51	26,27	24,35	22,71	16,97	13,56	11,29	8,46	6,67
280	36,23	33,12	30,51	28,29	26,37	19,70	15,73	13,10	9,81	7,85
300	41,70	38,10	35,09	32,52	30,30	22,63	18,07	15,04	11,27	9,01

Tafel Nr XXVIII

Ordinaten für Kreisbögen, auf die Sehne bezogen.

1 **Bogenlänge = 50 Einheiten.**

Halbmesser	Ordinate zu ½ b	Ordinate zu ¼ b	Halbmesser	Ordinate zu ½ b	Ordinate zu ¼ b	Halbmesser	Ordinate zu ½ b	Ordinate zu ¼ b
1000	0,31	0,24	1700	0,18	0,14	2400	0,13	0,10
20	0,31	0,23	20	0,18	0,14	20	0,13	0,10
40	0,30	0,22	40	0,18	0,14	40	0,13	0,10
60	0,29	0,22	60	0,18	0,13	60	0,13	0,10
80	0,29	0,22	80	0,18	0,13	80	0,13	0,09
1100	0,28	0,21	1800	0,17	0,13	2500	0,13	0,09
20	0,28	0,21	20	0,17	0,13	20	0,12	0,09
40	0,28	0,21	40	0,17	0,13	40	0,12	0,09
60	0,27	0,20	60	0,17	0,13	60	0,12	0,09
80	0,27	0,20	80	0,17	0,13	80	0,12	0,09
1200	0,26	0,19	1900	0,17	0,12	2600	0,12	0,09
20	0,26	0,19	20	0,17	0,12	20	0,12	0,09
40	0,25	0,19	40	0,16	0,12	40	0,12	0,09
60	0,25	0,18	60	0,16	0,12	60	0,12	0,09
80	0,25	0,18	80	0,16	0,12	80	0,12	0,09
1300	0,24	0,18	2000	0,16	0,12	2700	0,12	0,09
20	0,24	0,18	20	0,16	0,12	20	0,12	0,09
40	0,23	0,18	40	0,16	0,12	40	0,11	0,09
60	0,23	0,17	60	0,15	0,12	60	0,11	0,08
80	0,23	0,17	80	0,15	0,11	80	0,11	0,08
1400	0,22	0,17	2100	0,15	0,11	2800	0,11	0,08
20	0,22	0,17	20	0,15	0,11	20	0,11	0,07
40	0,22	0,16	40	0,15	0,11	40	0,11	0,07
60	0,22	0,16	60	0,15	0,11	60	0,11	0,07
80	0,21	0,16	80	0,14	0,11	80	0,11	0,07
1500	0,21	0,16	2200	0,14	0,11	2900	0,11	0,07
20	0,21	0,16	20	0,14	0,11	20	0,11	0,07
40	0,20	0,15	40	0,14	0,11	40	0,11	0,07
60	0,20	0,15	60	0,14	0,11	60	0,11	0,07
80	0,20	0,15	80	0,14	0,10	80	0,10	0,07
1600	0,19	0,15	2300	0,14	0,10	3000	0,10	0,06
20	0,19	0,15	20	0,13	0,10	20	0,10	0,06
40	0,19	0,14	40	0,13	0,10	40	0,10	0,06
60	0,19	0,14	60	0,13	0,10	60	0,10	0,06
80	0,18	0,14	80	0,13	0,10	80	0,10	0,06

2 Bogenlänge = 100 Einheiten.

Halb-messer	Ordinate zu ½ b	Ordinate zu ¼ b	Halb-messer	Ordinate zu ½ b	Ordinate zu ¼ b	Halb-messer	Ordinate zu ½ b	Ordinate zu ¼ b
1000	1,25	0,94	1800	0,69	0,52	2600	0,48	0,36
20	1,22	0,92	20	0,69	0,52	20	0,48	0,36
40	1,20	0,90	40	0,68	0,51	40	0,47	0,36
60	1,18	0,88	60	0,67	0,51	60	0,47	0,35
80	1,16	0,87	80	0,67	0,50	80	0,47	0,35
1100	1,14	0,85	1900	0,66	0,49	2700	0,46	0,35
20	1,12	0,84	20	0,65	0,49	20	0,46	0,35
40	1,10	0,82	40	0,65	0,48	40	0,46	0,34
60	1,08	0,81	60	0,64	0,48	60	0,45	0,34
80	1,06	0,79	80	0,63	0,47	80	0,45	0,34
1200	1,04	0,78	2000	0,63	0,47	2800	0,45	0,34
20	1,02	0,77	20	0,62	0,47	20	0,44	0,33
40	1,01	0,76	40	0,61	0,46	40	0,44	0,33
60	0,99	0,74	60	0,61	0,46	60	0,44	0,33
80	0,98	0,73	80	0,60	0,45	80	0,43	0,33
1300	0,96	0,72	2100	0,60	0,45	2900	0,43	0,32
20	0,95	0,71	20	0,59	0,44	20	0,43	0,32
40	0,93	0,70	40	0,58	0,44	40	0,43	0,32
60	0,92	0,69	60	0,58	0,43	60	0,42	0,32
80	0,91	0,68	80	0,57	0,43	80	0,42	0,31
1400	0,89	0,67	2200	0,57	0,43	3000	0,42	0,31
20	0,88	0,66	20	0,56	0,42	20	0,41	0,31
40	0,87	0,65	40	0,56	0,42	40	0,41	0,31
60	0,86	0,64	60	0,55	0,42	60	0,41	0,31
80	0,85	0,63	80	0,55	0,41	80	0,40	0,30
1500	0,83	0,62	2300	0,54	0,41	3100	0,40	0,30
20	0,82	0,62	20	0,54	0,40	20	0,40	0,30
40	0,81	0,61	40	0,53	0,40	40	0,40	0,30
60	0,80	0,60	60	0,53	0,40	60	0,39	0,30
80	0,79	0,59	80	0,52	0,39	80	0,39	0,29
1600	0,78	0,58	2400	0,52	0,39	3200	0,39	0,29
20	0,77	0,58	20	0,52	0,39	20	0,39	0,29
40	0,76	0,57	40	0,51	0,38	40	0,39	0,29
60	0,75	0,56	60	0,51	0,38	60	0,38	0,29
80	0,74	0,56	80	0,50	0,38	80	0,38	0,29
1700	0,73	0,55	2500	0,50	0,37	3300	0,38	0,28
20	0,73	0,54	20	0,50	0,37	20	0,38	0,28
40	0,72	0,54	40	0,49	0,37	40	0,38	0,28
60	0,71	0,53	60	0,49	0,37	60	0,37	0,28
80	0,70	0,53	80	0,48	0,36	80	0,37	0,28

Tafel Nr XXIX

Peripheriewinkel für Sehnen von 20 Einheiten.

Bogen-Vielfaches	Halbmesser des Kreises in Längeneinheiten der Sehne									
	100	120	140	150	160	180	200	220	240	250
1	5°44′	4°47′	4° 6′	3°49′	3°35′	3°11′	2°52′	2°36′	2°23′	2°18′
2	11 29	9 34	8 12	7 39	7 10	6 22	5 44	5 13	4 47	4 35
3	17 13	14 20	12 17	11 28	10 45	9 33	8 36	7 49	7 10	6 53
4	22 57	19 7	16 23	15 17	14 20	12 44	11 28	10 25	9 33	9 10
5	28 42	23 54	20 29	19 7	17 55	15 55	14 20	13 2	11 56	11 28
6	34 26	28 41	24 35	22 56	21 30	19 7	17 12	15 38	14 20	13 45
7	40 10	33 28	28 40	26 45	25 5	22 18	20 4	18 14	16 43	16 3
8	45 55	38 14	32 46	30 35	28 30	25 29	22 56	20 51	19 6	18 20
9	51 39	43 1	36 52	34 24	32 15	28 40	25 48	23 27	21 30	20 38
10	57 24	47 28	40 58	38 14	35 50	31 51	28 40	26 3	23 53	22 55

Bogen-Vielfaches	Halbmesser des Kreises in Längeneinheiten der Sehne									
	260	280	300	350	400	450	500	550	600	650
1	2°12′	2° 3′	1°55′	1°38′	1°26′	1°16′	1° 9′	1° 3′	0°57′	0°53′
2	4 25	4 6	3 49	3 16	2 52	2 33	2 18	2 5	1 55	1 46
3	6 37	6 8	5 44	4 55	4 18	3 49	3 26	3 8	2 52	2 39
4	8 49	8 11	7 38	6 33	5 44	5 6	4 35	4 10	3 49	3 32
5	11 1	10 14	9 33	8 11	7 10	6 22	5 44	5 13	4 46	4 24
6	13 14	12 17	11 28	9 49	8 36	7 38	6 53	6 15	5 44	5 17
7	15 26	14 20	13 22	11 28	10 2	8 55	8 1	7 18	6 41	6 10
8	17 38	16 22	15 17	13 6	11 28	10 11	9 10	8 20	7 38	7 3
9	19 50	18 25	17 12	14 44	12 54	11 28	10 19	9 23	8 36	7 56
10	22 3	20 28	19 6	16 22	14 20	12 44	11 28	10 25	9 33	8 49

Bogen-Vielfaches	Halbmesser des Kreises in Längeneinheiten der Sehne									
	700	750	800	900	1000	1250	1500	1750	2000	2500
1	0°49′	0°46′	0°43′	0°38′	0°34′	0°27′	0°23′	0°20	0°17′	0°14′
2	1 38	1 32	1 26	1 16	1 9	0 55	0 46	0 39	0 34	0 28
3	2 27	2 18	2 9	1 55	1 43	1 22	1 9	0 59	0 52	0 41
4	3 16	3 3	2 52	2 33	2 18	1 50	1 32	1 18	1 9	0 55
5	4 6	3 49	3 35	3 11	2 52	2 7	1 55	1 38	1 26	1 9
6	4 55	4 35	4 18	3 49	3 26	2 44	2 18	1 58	1 43	1 23
7	5 44	5 21	5 1	4 27	4 1	3 11	2 40	2 18	2 0	1 36
8	6 33	6 7	5 44	5 6	4 35	3 40	3 3	2 36	2 18	1 50
9	7 22	6 53	6 27	5 44	5 9	4 7	3 26	2 57	2 35	2 4
10	8 11	7 38	7 10	6 22	5 44	4 35	3 49	3 17	2 52	2 18
11	9 0	8 24	7 53	7 0	6 18	5 2	4 12	3 36	3 9	2 31
12	9 49	9 10	8 36	7 38	6 53	5 29	4 35	3 56	3 26	2 45
13	10 38	9 56	9 19	8 17	7 27	5 58	4 58	4 16	3 43	2 59
14	11 28	10 42	10 2	8 55	8 1	6 25	5 21	4 36	4 1	3 13
15	12 17	11 28	10 45	9 33	8 36	6 53	5 44	4 55	4 18	3 26

Tafel Nr XXX

Quadrate und Quadratwurzeln der Zahlen von 10 bis 249.

n	n²	$\sqrt{n}$	n	n²	$\sqrt{n}$	n	n²	$\sqrt{n}$
1,0	1,000	1,0000	**5,0**	25,00	2,2361	**9,0**	81,00	3,0000
1,1	1,210	1,0488	5,1	26,01	2,2583	9,1	82,81	3,0166
1,2	1,440	1,0955	5,2	27,04	2,2804	9,2	84,64	3,0332
1,3	1,690	1,1402	5,3	28,09	2,3022	9,3	86,49	3,0496
1,4	1,960	1,1832	5,4	29,16	2,3238	9,4	88,36	3,0659
1,5	2,250	1,2247	**5,5**	30,25	2,3452	**9,5**	90,25	3,0822
1,6	2,560	1,2649	5,6	31,36	2,3664	9,6	92,16	3,0984
1,7	2,890	1,3038	5,7	32,49	2,3875	9,7	94,09	3,1145
1,8	3,240	1,3416	5,8	33,64	2,4083	9,8	96,04	3,1305
1,9	3,610	1,3784	5,9	34,81	2,4290	9,9	98,01	3,1464
2,0	4,000	1,4142	**6,0**	36,00	2,4495	**10,0**	100,00	3,1623
2,1	4,410	1,4491	6,1	37,21	2,4698	10,1	102.01	3,1780
2,2	4,840	1,4832	6,2	38,44	2,4900	10,2	104,04	3,1937
2,3	5,290	1,5166	6,3	39,69	2,5100	10,3	106,09	3,2094
2,4	5,760	1,5492	6,4	40,96	2,5298	10,4	108,16	3,2249
2,5	6,250	1,5811	**6,5**	42,25	2,5495	**10,5**	110,25	3,2404
2,6	6,760	1,6125	6,6	43,56	2,5691	10,6	112,36	3,2558
2,7	7,290	1,6432	6,7	44,89	2,5884	10,7	114,49	3,2711
2,8	7,840	1,6733	6,8	46,24	2,6077	10,8	116,64	3,2863
2,9	8,410	1,7029	6,9	47,61	2,6268	10,9	118,81	3,3015
3,0	9,00	1,7321	**7,0**	49,00	2,6458	**11,0**	121,00	3,3166
3,1	9,61	1,7607	7,1	50,41	2,6646	11,1	123,21	3,3317
3,2	10,24	1,7889	7,2	51,84	2,6833	11,2	125,44	3,3466
3,3	10,89	1,8166	7,3	53,29	2,7019	11,3	127,69	3,3615
3,4	11,56	1 8439	7,4	54,76	2,7203	11,4	129,96	3,3764
3,5	12,25	1,8708	**7,5**	56,25	2,7386	**11,5**	132,25	3,3912
3,6	12,96	1,8974	7,6	57,76	2,7568	11,6	134,56	3,4059
3,7	13,69	1,9235	7,7	59,29	2,7749	11,7	136,89	3,4205
3,8	14,44	1,9494	7,8	60,84	2,7929	11,8	139,24	3,4351
3,9	15,21	1,9748	7,9	62,41	2,8107	11,9	141,61	3,4496
4,0	16.00	2,0000	**8,0**	64,00	2,8284	**12,0**	144,00	3,4641
4,1	16,81	2,0249	8,1	65,61	2,8461	12,1	146,41	3,4785
4,2	17,64	2,0494	8,2	67,24	2,8636	12,2	148,84	3,4928
4,3	18.49	2,0736	8,3	68,89	2,8810	12,3	151.29	3,5071
4,4	19,36	2,0976	8,4	70,56	2,8983	12,4	153,76	3,5214
4,5	20,25	2,1213	**8,5**	72,25	2,9155	**12,5**	156,25	3,5355
4,6	21,16	2,1448	8,6	73,96	2,9326	12,6	158,76	3,5496
4,7	22,09	2,1680	8,7	75,69	2,9496	12,7	161,29	3,5637
4,8	23,04	2,1909	8,8	77,44	2,9665	12,8	163,84	3,5777
4,9	24,01	2,2136	8,9	79,21	2,9833	12,9	166,41	3 ,5917

n	n²	$\sqrt{n}$	n	n²	$\sqrt{n}$	n	n²	$\sqrt{n}$
13,0	169,00	3,6056	17,0	289,00	4,1231	21,0	441,00	4,5826
13,1	171,61	3,6194	17,1	292,41	4,1352	21,1	445,21	4,5935
13,2	174,24	3,6332	17,2	295,84	4,1473	21,2	449,44	4,6043
13,3	176,89	3,6469	17,3	299,29	4,1593	21,3	453,69	4,6152
13,4	179,56	3,6606	17,4	302,76	4,1713	21,4	457,96	4,6260
13,5	182,25	3,6742	17,5	306,25	4,1833	21,5	462,25	4,6368
13,6	184,96	3,6878	17,6	309,76	4,1952	21,6	466,56	4,6476
13,7	187,69	3,7013	17,7	313,29	4,2071	21,7	470,89	4,6583
13,8	190,44	3,7148	17,8	316,84	4,2190	21,8	475,24	4,6690
13,9	193,21	3,7283	17,9	320,41	4,2308	21,9	479,61	4,6797
14,0	196,00	3,7417	18,0	324,00	4,2426	22,0	484,00	4,6904
14,1	198,81	3,7550	18,1	327,61	4,2544	22,1	488,41	4,7011
14,2	201,64	3,7683	18,2	331,24	4,2661	22,2	492,84	4,7117
14,3	204,49	3,7815	18,3	334,89	4,2778	22,3	497,29	4,7223
14,4	207,36	3,7947	18,4	338,56	4,2895	22,4	501,76	4,7329
14,5	210,25	3,8079	18,5	342,25	4,3012	22,5	506,25	4,7434
14,6	213,16	3,8210	18,6	345,96	4,3128	22,6	510,76	4,7539
14,7	216,09	3,8341	18,7	349,69	4,3243	22,7	515,29	4,7644
14,8	219,04	3,8471	18,8	353,44	4,3359	22,8	519,84	4,7749
14,9	222,01	3,8600	18,9	357,21	4,3474	22,9	524,41	4,7854
15,0	225,00	3,8730	19,0	361,00	4,3589	23,0	529,00	4,7958
15,1	228,01	3,8859	19,1	364,81	4,3703	23,1	533,61	4,8062
15,2	231,04	3,8987	19,2	368,64	4,3818	23,2	538,24	4,8166
15,3	234,09	3,9115	19,3	372,49	4,3932	23,3	542,89	4,8270
15,4	237,16	3,9243	19,4	376,36	4,4045	23,4	547,56	4,8373
15,5	240,25	3,9370	19,5	380,25	4,4159	23,5	552,25	4,8477
15,6	243,36	3,9497	19,6	384,16	4,4272	23,6	556,96	4,8580
15,7	246,49	3,9623	19,7	388,09	4,4385	23,7	561,69	4,8683
15,8	249,64	3,9749	19,8	392,04	4,4497	23,8	566,44	4,8785
15,9	252,81	3,9875	19,9	396,01	4,4609	23,9	571,21	4,8888
16,0	256,00	4,0000	20,0	400,00	4,4721	24,0	576,00	4,8990
16,1	259,21	4,0125	20,1	404,01	4,4833	24,1	580,81	4,9092
16,2	262,44	4,0249	20,2	408,04	4,4944	24,2	585,64	4,9193
16,3	265,69	4,0373	20,3	412,09	4,5055	24,3	590,49	4,9295
16,4	268,96	4,0497	20,4	416,16	4,5166	24,4	595,36	4,9396
16,5	272,25	4,0620	20,5	420,25	4,5277	24,5	600,25	4,9497
16,6	275,56	4,0743	20,6	424,36	4,5387	24,6	605,16	4,9598
16,7	278,89	4,0866	20,7	428,49	4,5497	24,7	610,09	4,9699
16,8	282,24	4,0988	20,8	432,64	4,5607	24,8	615,04	4,9799
16,9	285,61	4,1110	20,9	436,81	4,5716	24,9	620,01	4,9899

Alphabetisches Sachregister zum zweiten Bande.

Die Zahlen bedeuten die Seiten.

A.

Abbau einer Lagerstätte 419.

Abgeben eines Punkts etc. 416.

Abpflocken einer Linie 348, einer Flurmarkung 212.

Abscissen der Netzpunkte 269.

Abstecken, Allgemeines 3. Abstecken gerader Linien 31, zwischen zwei Punkten von mässiger und bedeutender Entfernung mit verschiedenen Hilfsmitteln 32, 34, 39; Abstecken einer Tunnelaxe 45. Abstecken senkrechter Linien von einem Punkt in einer Geraden 46, dessgleichen ausserhalb derselben 48. Abstecken paralleler Linien, von einem Punkt aus zu einer gegebenen Geraden 50. Abstecken krummer Linien (Curvenabsteckung) 53. Abstecken einer Horizontalcurve 371. Abstecken einer horizontalen Geraden von bestimmter Höhenlage 387, einer Geraden von gegebener Neigung 388, dessgleichen an einem Bergabhange 389, einer Ebene von bekannter Neigung 390, der Durchschnittslinie zweier Ebenen 390. Abstecken tonnlägiger und seigerer Linien 424.

Abtreibearbeit (Getriebezimmerung) 422.

Abweichung, mittlere vom arithmetischen Mittel 11.

Abweichungskreis (Declinationskreis) 310.

Abwickelbare Projectionen 512.

Abzeichnung von Karten und Plänen 554, Durchzeichnen 554, Abzeichnen mit Quadratnetzen 555, dessgleichen mit dem Pantographen 556.

Additamententafel von Soldner, Entwicklung der Methode zur Berechnung derselben 261.

Aequatorialprojectionen 497, 499, 507.

Anbindepunkte 357.

Anhaltepunkte 422.

Antiparallel 500.

Arbeit eines Flusses, Masseinheit 487, Bestimmung der Arbeit bei gestautem und ungestautem Wasser 488.

Astronomische Begriffe 308.

Atmosphärische Strahlenbrechung 295.

Aufnehmen, Begriff 3, Aufnehmen der Linien, Winkel, Dreiecke und Polygone, der Längen- und Querprofile, der Horizontalcurven, einer Flurmarkung, s. d.

Aufschreibung für Nivellemente 350, 359, für Markscheidezüge 440, 444, 448; für Winkelmessungen 251, 306.

Aufsteigung, gerade (Rectascension) 312.

Auftragen eines Polygons mittels

Coordinaten 153, 157, eines Längen- und Querprofils 352, 354, 543, 546.

Ausbeissen einer Lagerstätte 417, Bestimmung der Ausbeissungslinie 464.

Ausfertigung der Messtischaufnahmen 541.

Ausgleichung, Theorie: Ausgleichung directer Beobachtungen, Allgemeines hierüber 9. Beobachtungen von gleicher Genauigkeit: Arithmetisches Mittel 10, Fehler einer Beobachtung 11, Fehler des arithmetischen Mittels 12, Wahrscheinlicher Fehler 12, Genauigkeit der Messungen 13. Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit: Gewicht einer Beobachtung 15, Aufgabe 16, Mittlerer Fehler 17. Functionen direct beobachteter Grössen: Mittlerer Fehler der Function 18. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen, Allgemeines 10. Beobachtungen gleicher Genauigkeit: Berechnung der Unbekannten 19, Beispiel 21, Constante aus nicht lineären Functionen 22. Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit: Berechnung der Unbekannten 23. Ausgleichung bedingter Beobachtungen, Allgemeines 10. Beobachtungen von gleicher Genauigkeit: Erläuterung der Aufgaben 24, Berechnung der Verbesserungen 24, Beispiel 26. Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit: Verbesserungen und mittlerer Fehler 26, Beispiel 27, Gewichte von Winkelmessungen 28, Auflösung der Normalgleichungen 29. Verschiedene Anwendungen auf geodätische Messungen: Ausgleichung von Längenmessungen 92; Ausgleichen der Winkel eines Dreiecks 129; Ausgleichung von Polygonzügen mit gemeinschaftlichem Knotenpunkt 162; die Pothenot'sche Aufgabe 191, 197, 200; Ausgleichung eines ebenen Dreiecksnetzes 206; Ausgleichen eines grossen Netzes 263; Ausgleichen eines Nivellements 351; Ausgleichung zusammenhängender Präcisionsnivellementsschleifen 362, 367.

Ausgleichungsrechnung (Methode der kleinsten Quadrate) 5, Beobachtungsfehler 5, Princip der Ausgleichung 5, Erläuterungen des Princips 7, Erweiterung des Princips 8, Ausgleichungsaufgaben: Ausgleichung directer, vermittelnder und bedingter Beobachtungen 9.

Ausmessen, Allgemeines 81. Ausmessen einer langen Geraden mit Messstangen und Reduction derselben auf den Horizont 82, Genauigkeit unmittelbarer Längenmessungen 88, Ausgleichung von Längenmessungen 92, mittelbare Messungen gerader Linien 93. Ausmessen krummer Linien 98. Ausmessen tonnlägiger und seigerer Linien 424.

Ausrichten (Aufschliessen) von Lagerstätten 419, von Grubenfeldern 420.

Azimuth (Richtungswinkel) 252, 310, Angenäherte Bestimmung desselben 316, 318.

B.

Barometerformel 391.

Barometermessungen 391,

a) mit Quecksilberbarometern: Ableitung der Barometerformel 392, Umgestaltung der Formel für die Rechnung und Herstellung von Tafeln 397, Beispiel zur Benützung der hypsometrischen Tafeln 398, Feuchtigkeitsfactor der Formel 399, Regeln für die Barometermessungen 400, Genauigkeit der Barometermessungen 402.

b) Messungen mit Federbarometern: Die gebräuchlichsten Methoden dieser Messung 405.

Basis eines Dreiecksnetzes 245.

Basismessung, s. Ausmessen.

Basisnetze 246.

Bausen 554.

Bedingte Beobachtungen 10, 24.

Beobachtungsfehler, zufällige 5, 107, constante 5, 107; Theorie der Be-

obachtungsfehler, s. Ausgleichung; Einfluss der constanten (regelmässigen) Fehler auf Längenmessungen 90, auf die Winkelmessungen 106, Einfluss der zufälligen (unvermeidlichen) Fehler auf Längenmessungen 88, auf Dreiecksberechnungen 132, beim Vorwärtseinschneiden 134, beim Rückwärtseinschneiden 135, beim Seitwärtseinschneiden 137, auf die Coordinaten eines Dreieckspunkts beim Berechnen derselben aus den übrigen Stücken 138.
Bergmännische Ausdrücke 419.
Bergpläne (Grubenpläne) 550.
Bergversatz in Gruben 422.
Bergzeichnung, Theorie 524.
Bilddreieck 120.
Bindelinien 213.
Bodenarten, Bezeichnung derselben auf Karten 527, auf Plänen 533.
Bonität 238.
Breite, geographische (Polhöhe), Bestimmung derselben 321; einer söhligen Linie 416.
Bremsberge 421.
Brouillon (Handriss) 212.
Brücken, Bezeichnung derselben auf Plänen 538.

C.

Catasterblätter (Steuerblätter) 244.
Centralprojection 497, 506.
Centriren eines Winkels 101.
Circumpolarsterne 309.
Conische Projection 512.
Constante (regelmässige) Fehler 5, 90, 106.
Contrenivellement 387.
Coordinatenapparat 213.
Coordinatenberechnung der Punkte eines Dreiecksnetzes 268.
Coordinatenpunkte zum Curvenabstecken 58, bei Aufnahme eines Polygons 153, 157, 160.
Coordinatensysteme in der Astronomie: Azimuth und Höhe 310, Declination und Stundenwinkel 310, Rectascension und Declination 311.
Copirpult 555.
Correlaten der Bedingungsgleichungen 25.
Correlatengleichungen 25, 26.
Cote 352.
Culmination eines Sterns 309.
Curvenabsteckung, Vorarbeiten 53, 55, Absteckung eines Kreisbogens durch Orthogonalcoordinaten: bei gleichen Abscissenunterschieden 58, bei gleichen Bogenstücken 60; Absteckung durch Einrücken von einer Tangente oder Sehne aus 62; Abstecken durch Peripheriewinkel 65; Vergleichung dieser Methoden 70. Abstecken eines Parabelbogens 70. Abstecken der gemeinschaftlichen Tangente an zwei Kreisbögen 74. Zwei Gerade durch zwei Kreisbögen von verschiedenem Radius zu verbinden 80.
Cylindrische Projection 519.

D.

Declination eines Gestirns 310, 311.
Declinationskreis (Abweichungskreis) 310.
Depression des Meereshorizonts (Kimmtiefe) 306.
Detailblätter, trapezförmige 283, quadratische 287.
Detailmessung der Bodenfläche 211 290.
Dreiecke 1., 2., 3. Ordnung 248.
Dreiecksaufnahme mit dem Messtische, s. Messtischaufnahmen; mit dem Theodolithen 126.
Dreiecksberechnung, Einfluss der zufälligen Fehler auf dieselbe 132.
Dreiecksnetz, s. Landesvermessung.
Durchschnittlicher Fehler 12.
Durchzeichnen von Karten und Plänen 554.

E.

Ebensohle 415.
Einschalten eines Punkts zwischen zwei andere, mit Absteckstäben 32, mit Hilfe des Prismenkreuzes 33, mit

Hilfe des Spiegelkreises 34, mit dem Theodolithen 34, 37, durch Trianguliren 39, 41, 42, 44. Abstecken einer Tunnelaxe 45.
Einschneiden mit dem Messtische, vorwärts — 121, rückwärts — 123, seitwärts — 125.
Einschneidezirkel von Bauernfeind, Beschreibung, Gebrauch und Prüfung 179; Lösung der Pothenot'schen Aufgabe mit demselben 183; Lösung der Hansen'schen Aufgabe 187.
Einstriche bei Schächten 422.
Ekliptik, Schiefe derselben 311.
Erde, Dimensionen derselben, Tafel Nr. I des Anhangs.
Erdkrümmung, Einfluss derselben auf die Resultate des Nivellirens 341.
Excess, sphärischer eines Dreiecks 127, Bestimmung desselben 127, Beispiel hierzu 129, Lehrsatz 259.

F.

Fahrraum eines Stollens 420.
Fall-ebene, -linie, -winkel, -sinus, -cosinus 416.
Fallrichtung, rechtsinnig, widersinnig 417.
Farbige Pläne 541.
Fehler, s. Beobachtungsfehler.
Fehlerdreieck (fehlerzeigendes Dreieck) 172.
Fehlerfortpflanzung, Gesetz derselben 15.
Felddreieck 120.
Felder, Bezeichnung derselben auf Karten 528, auf Plänen 534.
Feldort eines Grubenpunkts 467, eines Stollens 420.
First eines Stollens 420.
Fixpunkte für Nivellemente 387, für Präcisionsnivellemente 356.
Flache (tonnlägige) Linien und Ebenen 415.
Flächenbestimmung, aus dem Naturmasse 220, mit Zirkel und Massstab 221, mit Planimeter 222.
Flächennivellement 370.
Flötze 417, 419.
Flügelort 420.
Flurmarkung, Aufnahme derselben 211.
Fluss, Messungen an einem solchen, s. Wassermessungen.
Frühlingspunkt 311.
Füllort 421

G.

Gänge im Bergbau 417, 418.
Gärten, Bezeichnung derselben auf Karten 528, auf Plänen 534.
Gebäude, Bezeichnung derselben auf Karten 528, auf Plänen 536.
Gegennivellement (Contrenivellement) 387.
Genauigkeit, des arithmetischen Mittels 11, der Messungen überhaupt 13, unmittelbarer Längenmessungen 88, der Polygonzugmessungen 164, des Einschneidezirkels 184, des Linearplanimeters 229, des Polarplanimeters 237, der Winkelmessung 254, eines Nivellements 351, 361, der barometrischen Höhenmessungen 402.
Generalhorizont eines Nivellements 348.
Geodätische Dreiecke 127, Lehrsatz 259.
Geognostische Ausdrücke der Markscheider 416.
Geographische Breite, siehe Polhöhe.
Geographische Karten 523.
Geographische Länge eines Orts der Erde, Bestimmung derselben mittels Zeitübertragung 327, mittels Beobachtung momentaner Erscheinungen 327, mittels der Monddistanzen 328.
Geographische Ortsbestimmungen: Astronomische Begriffe 308, Coordinatensysteme 309, die verschiedenen Zeitarten 312, Parallaxe der Gestirne 315. Angenäherte Bestimmung der Mittagslinie eines Orts und des Azimuths einer Geraden 316. Die Polhöhe oder geographische Breite

eines Orts der Erde zu bestimmen 321. Bestimmung der geographischen Länge aus der Länge eines andern Orts 327.
Geometrische Ausdrücke der Markscheider 415.
Geschwindigkeitsmessungen 478, Eytelwein'sche Formel 480, Aufnahme der Querprofile 482, Aufnahme der Längenprofile 485.
Gesichtspunkt (Augpunkt) bei Kartenprojectionen 496.
Getriebezimmerung (Abtreibearbeit) 422.
Gewässer, Bezeichnung derselben auf Karten 526, auf Plänen 536.
Gewicht einer Beobachtung 15, von Winkelmessungen 28.
Gewichtseinheit in der Wahrscheinlichkeitsrechnung 15.
Gradnetz (Kartennetz) 496.
Graphisches Netz einer Landesvermessung 282.
Grenzen, Bezeichnung derselben auf Karten 528, auf Plänen 541.
Grenzregulirung 238.
Grubenbau, -betrieb, -gebäude 419, Grubenausbau 421.
Grubenfeld 414, 419.
Grubenmessungen, Technische Ausdrücke (geometrische, geognostische, bergmännische) 414, Grundoperationen in der Grube 422, Markscheidezüge 436, Markscheideaufgaben 459.
Grubenpläne (Bergpläne) 550. Besondere Zeichen der Markscheider 551.
Grubenzug 436.
Grundoperationen in der Grube 422.
Grundriss einer Grube 416.
Gyrus 250.

H.

Hängebank eines Schachtes 421.
Handriss einer Flurmarkung (Brouillon) 212.
Hangendes einer Lagerstätte 417.
Hansen'sche Aufgabe, Lösung mit dem Messtische 189, mit dem Theodolithen 203, mechanische Lösung mit Hilfe des Einschneidezirkels 187.
Hauptfallen, -streichen 418.
Herbstpunkt 311.
Himmels-Aequator, -Pol 308.
Höhe eines lothrechten Gegenstands, Bestimmung derselben, s. Höhenmessung.
Höhe im astronomischen Coordinatensystem 310.
Höhenmessungen, trigonometrische 329, mittels einseitiger Zenithwinkel 330, mittels gegenseitiger und gleichzeitiger Zenithwinkel 331. Bestimmung der Höhe eines lothrechten Gegenstands, von einem Punkt aus 331, von einer Standlinie aus 332, 333. Höhe eines Punkts über dem Meeresspiegel, Bestimmung nach dem Zenithwinkel des Meeresspiegels 334, mit Hilfe eines Pegels 336. Bestimmung des Höhenunterschieds zweier Punkte mit Rücksicht auf die Bauernfeind'sche Theorie der Strahlenbrechung 336.
Höhenparallaxe eines Sterns 316.
Horizont eines Orts 309.
Horizontalabschluss 256.
Horizontalcurven (Niveaucurven, Schichtenlinien) 370, Abstecken derselben 371; Aufnehmen derselben 373; Darstellen eines Hügels durch Horizontalcurven 374, desgl. eines Bergrückens 376, desgl. einer flachen Gegend 378, desgl. einer durchschnittenen Terrainfläche 381, 382; Zeichnen der Horizontalcurven 375, 377, 380, 547.
Horizontalmessungen, Messung der Linien 31: Abstecken gerader Linien 31, Abstecken senkrechter und paralleler Linien 46, Absteckung krummer Linien (Curvenabsteckung) 53, Ausmessen gerader und krummer Linien 81. Messung der Winkel und Dreiecke 99: Mittelbare Winkelmessungen 99, Einfluss der regelmässigen Beobachtungsfehler auf die Winkelmessungen 106, Aufnahme der Dreiecke mit dem Messtische 120, Aufnahme der

Dreiecke mit dem Theodolithen 126, Einfluss der unvermeidlichen Beobachtungsfehler auf Dreiecksberechnungen 132. Messung von Vielecken 140. Messung kleiner Dreiecksnetze 165. Aufnahme eines Verbands von Grundstücken 211. Flächenbestimmung der Grundstücke 220. Geometrische Flächentheilung und Grenzberichtigung 238. Messung eines ganzen Landes 244: Basis des Dreiecksnetzes 245, Wahl und Bezeichnung der Netzpunkte 248, Messung und Ausgleichung der Winkel 250, Berechnung der Dreiecksseiten 258, Ausgleichung des Dreiecksnetzes 263, Coordinatenberechnung der Netzpunkte 268, Geographische Lage der Netzpunkte und Seiten 278, Verbindung der Messtischblätter mit dem Dreiecksnetze 282, Stückmessung des Landes 290.

Horizontalparallaxe eines Gestirns 316.

Horizontalpläne (Situationspl.) 532.

Horizontalprojection 497, 502, 509.

Hypsometrische Tafeln, s. Anhang.

K.

Karte, Begriff 495, geographische 523, topographische 523.

Kartennetz (Gradnetz) 496.

Kartenprojectionen 495, Perspectivische Projectionen 497: Stereographische Polar-, Aequatorial-, Horizontalprojection 497, 499, 502; Centralprojection 506; Orthographische Polar-, Aequatorial-, Horizontalprojection 507, 509. Abwickelbare Projectionen 512: Conische Projection von Bonne (modificirte Flamsteed'sche Proj.) 513, von Flamsteed 517, von De l'Isle 518; Cylindrische Projectionen 519, Plattkarten 520, Reducirte Karten (Projection von Mercator) 521, Projection von Cassini 522.

Kartenschrift 496, Gegenstände der Benennung 529, Schriftzeichen 530, Stellung der Schrift 531.

Kartenzeichen 496, Bezeichnung der Berge 523, der Gewässer 526, des Bodens 527, von Wohnorten, Gebäuden etc. 528, von Wegen und Grenzen 528.

Kartenzeichnung 495, Perspectivische Projectionen 497, Abwickelbare Projectionen 512, Geographische und topographische Karten 523.

Kaue bei einem Schacht 421.

Kettenmass (Naturmass) 220.

Kimmtiefe (Depression des Meereshorizonts), Bestimmung derselben 306.

Kreisbögen abzustecken, s. Curvenabsteckung.

Kreuzriss (Querriss) 416.

Kreuzstreichen 416.

Künstliche Gebilde, Bezeichnung derselben auf Karten 528, auf Plänen 536.

L.

Länge einer söhligen Linie 416.

Längenprofil des Terrains 346, Aufnahme eines solchen 348, Berechnung desselben 351, Ausgleichung von Differenzen 351, Auftragen des Längenprofils 352. Längenprofil eines Flusses 485. Zeichnen von Längenprofilen 543.

Lagerstätten 417, Aufschliessen derselben 419.

Landesvermessung 244, Basis des Dreiecksnetzes 245. Wahl und Bezeichnung der Netzpunkte 248. Messung und Ausgleichung der Winkel 250: Genauigkeit der Winkelmessung 254, Horizontalabschluss 256. Berechnung der Dreiecksseiten 258: Lehrsatz 259, Methode der Berechnung von Soldner 261, Controle der Messung und Berechnung 262. Ausgleichung des Dreiecksnetzes: Allgemeines 263, Eintheilung der Bedingungsgleichungen 264, Zahl der Bedingungsgleichungen 264, Ansatz der Bedingungsgleichungen 266. Coordinatenberechnung der Netzpunkte 268: in einem ebenen Netz 269, in einem grossen Dreiecksnetze 272, 276.

Geographische Lage der Netzpunkte und Seiten 278. Verbindung der Messtischblätter mit dem Dreiecksnetze 282: Trapezförmige Detailblätter 283, quadratische Detailblätter 287. Stückmessung des Landes 290.
Landkarte 495, 523.
Lichtlöcher 421.
Liegendes einer Lagerstätte 417.
Linearplanimeter 223.
Linie, gerade, krumme, Abstecken derselben, s. d.
Lochsteine 419.

M.

Mächtigkeit einer Lagerstätte 417.
Markscheide, Uebertragen einer solchen in die Grube 469.
Markscheideaufgaben 459, über Streichen und Fallen von Lagerstätten 459, 460, 462, 463; Bestimmung des Ausbeissens einer Lagerstätte 464. Den Feldort eines Grubenpunkts anzugeben 466. Einen Feldpunkt in die Grube zu übertragen 468, desgl. eine auf dem Felde gegebene Markscheide 469. Einen Stollen mit Lichtlöchern und Gegenortspunkten abzustecken 470. Bestimmung der Kreuzlinie zweier sich durchsetzenden Lagerstätten 472. Aufsuchung einer verworfenen Lagerstätte 474.
Markscheidekunde, Markscheiden, Markscheider, Begriffe 414.
Markscheideoperationen (Grundoperationen in der Grube) 422. Bezeichnung der Fixpunkte 422, Abstecken und Ausmessen tonnlägiger Linien 424, desgl. seigerer Linien 425, Bestimmung des Tonnlagewinkels einer geneigten Linie 427, desgl. des Streichwinkels einer söhligen oder tonnlägigen Linie 430, des Neigungswinkels zweier Geraden 432, Streichen und Fallen von Lagerstätten 433.
Markscheidestufen 419.
Markscheidezug, Allgemeines 436, einen Markscheidezug mit Schnur und Compass zu verrichten, einzutragen und zu berechnen 436, desgl. mit dem Theodolith 443, Ausführung eines Nivellements in der Grube 450, Anschluss- und Orientirungsmessungen durch einen seigeren Schacht 452, Markscheidezug in Gruben wo die Magnetnadel abgelenkt wird 456.
Meridiane am Himmel 309.
Messtischaufnahmen 120, Aufnahme eines Dreiecks durch Vorwärtseinschneiden 121, desgl. durch Rückwärtseinschneiden 123, desgl. durch Seitwärtseinschneiden 125. Aufnahme eines Polygons nach der Polarmethode 141, von einer Standlinie aus 143, nach der Umfangsmethode 145, 150. Pothenot'sche Aufgabe 166. Orientirung des Messtisches mit Hilfe einer unzugänglichen Geraden 185. Hansen'sche Aufgabe 186. Fluraufnahmen 213. Ausfertigung der Messtischaufnahmen 541.
Messung, Theorie 3, Horizontalmessungen 31, Verticalmessungen 295, Grubenmessungen 414, Wassermessungen 478.
Methode der kleinsten Quadrate 5.
Mittagslinie eines Orts, angenäherte Bestimmung derselben 316, 318.
Mittelbare Winkelmessungen 99.
Mittlerer Fehler 11, 17, 18, 27.
Mundloch eines Stollens 420.

N.

Nadir eines Orts 309.
Natürliche Gebilde, Bezeichnung derselben auf Karten 523, auf Plänen 533.
Naturmass (Kettenmass) 220.
Netz, trigonometrisches 244, graphisches 282.
Netzanschlüsse 262.
Netzbedingungsgleichungen 264.
Netzeinschaltung bei Kleintriangulirungen 293.
Netzpunkte einer Landesvermessung, s. d.
Niveaucurven (Horizontalcurven) 370.

Nivellement, einfaches und zusammengesetztes 343.
Nivellementspläne (Verticalpläne) 543.
Nivelliren 340, Einfluss der Erdkrümmung und Strahlenbrechung 341. Methoden des Nivellirens 343: Nivelliren aus einem Endpunkte 343, aus einem Zwischenpunkte 344. Nivelliren der Linien 345. Nivelliren der Flächen 370, s. Horizontalcurven. Bemerkungen und Aufgaben über das Nivelliren 385.
Normalgleichungen 20, 27, 29.
Normalpunkt einer Landesvermessung 269.

O.

Ordinaten der Netzpunkte 269.
Orientirung des Messtisches 291.
Orthographische Projection 507.

P.

Pantograph (Storchschnabel), Zweck und Theorie 556. Ertel'scher Storchschnabel 559, der Storchschnabel von Ott & Coradi 561.
Parabelbögen abzustecken, s. Curvenabsteckung.
Parallaxe der Gestirne 315.
Parallelgrade, Länge derselben, s. Anhang.
Parallelkreise am Himmel 309.
Parallellinien abzustecken 50.
Parzelle 211.
Perpendikel eines Normalpunkts 269.
Perspectivische Projection 496, 497.
Pferdewerk, Pferdekraft 487.
Pikiren eines Plans, Pikirnadel 554, 555.
Plan einer Gegend 495.
Planimeter 222; Linearplanimeter 223, Beschreibung 224, Gebrauch 225, Theorie 226, Prüfung 228, Genauigkeit 229; Polarplanimeter, Beschreibung 230, Gebrauch 231, Theorie 232, Genauigkeit 237.
Planzeichnung 532.
Plattkarten 520.
Polarmethode bei Aufnahme eines Polygons 141.
Polarplanimeter 230.
Polarprojection 497, 507.
Polhöhe (geographische Breite), Begriff 309, scheinbare oder elliptische 323, wahre oder geocentrische 324. Bestimmung derselben mit Theodolith oder Spiegelkreis allein 322, mit Theodolith und Secundenuhr 325.
Polygone aufzunehmen 141, nach der Polarmethode 141, von einer Standlinie aus 143, nach der Umfangsmethode 145, 151. Ein mit dem Theodolithen aufgenommenes Polygon mittels Coordinaten aufzutragen 153, 157. Ein Polygon nach der Coordinatenmethode aufzunehmen 160. Ausgleichung von Polygonzügen mit gemeinschaftlichem Knotenpunkt 162. Genauigkeit und Fehlergrenzen der Zugmessungen 164.
Pothenot'sche Aufgabe (Rückwärtseinschneiden auf drei Punkte) 166; Directe Lösung mit dem Messtische 167, 168, 170; Indirecte Lösung mit dem Messtische: 171, 174, 175, 176, 178; Mechanische Lösung mit dem Einschneidezirkel 178, 183; Lösung der Aufgabe mit Hilfe des Theodolithen 190, 192, 194, 197, 200.
Präcisionsnivellement, Herstellung desselben 356; Ausgleichung zusammenhängender Schleifen: Strenge Methode 363, Näherungsverfahren von Bauernfeind 367.
Probemessung, Probeschnitt, 215.
Profil 346.
Prüfung einer Messtischaufnahme 215, einer Theodolithaufnahme 219.
Punkteinschaltung bei Kleintriangulirungen 293.

Q.

Quadratnetze, Benützung derselben zum Abzeichnen 555.

Querprofil, des Terrains 346, Aufnahme eines solchen 353, Berechnung und Auftragen desselben 354. Querprofil eines Flusses, Aufnahme desselben 482. Zeichnen von Querprofilen 546.
Querriss (Kreuzriss) 416.
Querschlag 421.

R.

Rainsteine (Lochsteine) 419.
Rectascension (gerade Aufsteigung) 311.
Reducirte Karten 521.
Reduction einer Linie auf den Horizont 82; dessgleichen eines Winkels auf seinen Scheitel 101, dessgleichen eines Winkels auf den Horizont 105, dessgleichen eines Verticalwinkels auf den wahren Scheitelpunkt 305. Reduction auf den wahren Horizont 342.
Refraction (Strahlenbrechung) 295.
Refractionsconstante, — Coefficient 297.
Regelmässige (constante) Fehler 5, 90, 106.
Regeln für Messtischaufnahmen 211, für das Nivelliren 385, für Barometermessungen 400.
Revisionslinie 216.
Richtungsbeobachtungen 250.
Richtungswinkel 251.
Rösche eines Stollens 420.
Rollen im Bergbau 421.
Rückblick 347.
Rückwärtseinschneiden mit dem Messtische 121, 123.
Rückwärtseinschneiden auf drei Punkte (Pothenot'sche Aufgabe) 166.

S.

Salbänder einer Lagerstätte 417.
Satzbeobachtungen 251.
Schacht, Förder-, Treibe-, Zieh-, Göpel-, Kunst-, Pumpen-, Wetter-, Fahr-, Seil-, Stangen-, Hänge-, Haupt-, Tiefbau-, Durchschnitts-, Gesenk-, Richtschacht 420, 421.
Schachtscheider 422.
Schichten eines graphischen Netzes 287, der Erdrinde 416.
Schichtenlinien (Horizontalcurven) 370.
Schluss eines Polygons 145, empirische Regeln den Schluss zu bewirken 147, Aufsuchen eines groben Fehlers in einer Polygon-Aufnahme 151. Schluss eines Nivellementspolygons 363.
Schriftzeichen für Karten 530.
Schrotzimmerung 422.
Schwarze Pläne 541.
Seitwärtseinschneiden mit dem Messtische 121, 125.
Seigere Linien und Ebenen 415, Abstecken seigerer Linien 424.
Seigerpunkt, -riss, -teufe 415, 416, 475.
Senkrechte Linien abzustecken, s. Abstecken.
Signa in Gruben 422.
Signale, Bezeichnung derselben auf Plänen 540.
Situationspläne (Horizontalpläne) 532.
Söhlige Linien und Ebenen 415.
Sohle einer Linie 415, eines Stollens oder Schachtes 420.
Sonnenwendepunkte 312.
Sonnenzeit, wahre, mittlere 313.
Specialfallen, -streichen 418.
Sphärischer Excess 127, 129, 259.
Städte, Bezeichnung derselben auf Karten 528.
Standlinie zu Polygonaufnahmen 143, zu Höhenbestimmungen 332.
Stereographische Projection 497.
Sterntag, Sternzeit 312.
Steuerblätter (Catasterblätter) 244.
Stöcke, Stockwerke im Bergbau 417.
Stollen, Erb-, Revierstollen 420.
Storchschnabel (Pantograph) 556.
Strahlenbrechung, Allgemeines 295, Grösse der terrestrischen Strahlenbrechung, älterer Ausdruck 297, neuerer Ausdruck 299.

Strassen, Bezeichnung derselben auf Karten 528, auf Plänen 536.
Strecke, Feldort-, Gezeugstrecke 421.
Streichlinie 415, -sinus, -cosinus 416.
Streichwinkel (Streichen) einer Linie oder Ebene 415, Bestimmung desselben 430.
Stückmessung eines Flurbezirks 211, des Landes 290.
Stundenwinkel eines Sterns 310.

T.

Tafeln über verschiedene Gegenstände der Vermessungskunde, s. Anhang.
Tagebau 419.
Tagemessung 414.
Tagezug 436.
Tangenten an Kreisbögen abzustecken 74.
Terrainprofil 346.
Teufe = Tiefe.
Theilung der Grundstücke, im Allgemeinen 238, bei verschiedener Bonität 240, ein viereckiges Grundstück in bestimmter Weise zu theilen 241; eine gebrochene Grenze in eine gerade zu verwandeln 243.
Theodolithaufnahmen, Aufnahme der Dreiecke 126, der Vielecke 140. Pothenot'sche Aufgabe 190, Hansen'sche Aufgabe 203. Aufnahme eines Flurbezirks 216, 290, 292. Verrichten eines Markscheidezugs mittels des Theodolithen 443.
Thürstockzimmerung in Gruben 422.
Tonnlägige (flache) Linien und Ebenen 415, Absteckung tonnlägiger Linien 424.
Tonnlagewinkel einer Linie zu bestimmen 427.
Topographische Karten 523.
Tragewerk eines Stollens 420.
Treibehaus 421.
Triangulation, s. Landesvermessung.
Trigonometrische Höhenmessung 329.
Trigonometrisches Netz 244.
Trümer im Bergbau 418, 421.

U.

Uebersprung (Ueberschieben verworfener Lagerstätten) 474.
Ulmen eines Stollens 420.
Umfangsmethode bei Polygonaufnahmen 145, 151.
Unvermeidliche (zufällige) Fehler 5, 88, 107, 132, 134, 135, 137, 138.

V.

Verbessern, eine Beobachtung 6.
Verificationsbasis 262.
Verlorner Punkt 423.
Verrichten eines Markscheidezugs 436.
Verticalmessungen, Messung der Verticalwinkel 295, Geographische Ortsbestimmungen 308, Trigonometrische Höhenmessungen 329, Höhenmessen durch Nivelliren 340, Barometrisches Höhenmessen 391.
Vertheilung der Grundstücke 238.
Verticalpläne (Nivellementspläne) 543.
Verwerfung 418, Ausrichten derselben 419, Seigerteufe der Verwerfung 475, Sohle derselben 476.
Verziehen bei Grubenmessungen 416.
Vieleck, s. Polygon.
Vorblick 347.
Vorwärtseinschneiden mit dem Messtische 121.

W.

Wälder, Bezeichnung derselben auf Karten 528, auf Plänen 534.
Wahrscheinlicher Fehler 12.
Wasser, Bezeichnung desselben auf Karten 526, auf Plänen 536.
Wasserbauten, Bezeichnung derselben auf Plänen 539.
Wasserführung eines Flusses 486.
Wasserkraft (Arbeit) eines Flusses 487.
Wassermenge eines Flusses, Bestimmung derselben 486.

Wassermessungen 478, Geschwindigkeitsmessungen 478, Messung der Wassermenge eines Flusses 486, Messung der Arbeit oder Wasserkraft eines Flusses 487.

Wasserseige eines Stollens 420.

Wege, Bezeichnung derselben auf Karten 528, auf Plänen 536.

Weltaxe 308.

Wiesen, Bezeichnung derselben auf Karten 528, auf Plänen 535.

Winkelbuch 436, Muster eines solchen 448.

Winkelmessungen 99. Mittelbare Winkelmessungen: Halbirung eines Winkels mittels eines excentrischen Theodolithen 99, Centriren eines Winkels 101, Reduction eines Winkels auf den Horizont 105. Einfluss der regelmässigen Beobachtungsfehler auf die Winkelmessungen: Excentrische Aufstellung des Theodolithen oder Messtisches 107, Excentricität der Alhidade 110, Excentricität des Fernrohrs 113, Schiefe Lage der Limbus- oder Messtischebene 114, Schiefe Lage der Visirebene 117, Unrichtige Lage der Zielpunkte 118, Gesammtwirkung der Fehler 120. Messung und Ausgleichung der Winkel bei Triangulationen, s. Landesvermessung. Messung der Verticalwinkel 295: Einfluss der Strahlenbrechung, s. d., Reduction der Verticalwinkel auf den wahren Scheitelpunkt 305, Kimmtiefe des Meereshorizonts 306. Geographische Ortsbestimmungen 308: Mittagslinie eines Orts und Azimuth einer Geraden 316, Polhöhe eines Orts 321, Geographische Länge eines Orts aus der Länge eines andern Orts 327. Tonnlagewinkel einer geneigten Linie 427, Streichwinkel einer söhligen oder tonnlägigen Linie 430, Neigungswinkel zweier Geraden in der Grube 432, Streich- und Fallwinkel von Lagerstätten 433.

Winkelprobe eines mit dem Theodolithen gemessenen n-Ecks 153.

Wohnorte, Bezeichnung derselben auf Karten 528.

Z.

Zeit-Arten der Astronomie 312.

Zeit-Gleichung 313.

Zeit-Verwandlungen: Sternzeit und mittlere Zeit, wahre und mittlere Zeit, Sternzeit und wahre Zeit 314.

Zenith eines Orts 309, geocentrisches Zenith 315, scheinbares Zenith 316.

Zenithdistanz 310.

Zimmerung im Bergbau 422.

Zufällige (unvermeidliche) Fehler 5, 88, 107, 132, 134, 135, 137, 138.

Zugbuch 436, Muster eines solchen 440, 444.

Zulegen bei Grubenmessungen 416, 436.

Verbesserungen und Druckfehler.

Zum I Bande.

Ausser den auf Seite 558 des 1 Bands bereits angezeigten Verbesserungen und Druckfehlern sind noch folgende zu nennen:

S. 282 Z. 25 v. o. lese man Schema I statt Schema;
S. 392 Z. 9 v. u. „ „ Zach statt Zech;
S. 396 Z. 15 v. o. „ „ §. 43 statt §. 41;
S. 424 Gl. (179) und Gl. (181) lese man $\frac{f f_0 h}{b (f + f_0 - c)}$ statt $\frac{f f_0 h}{f + f_0 - c}$;
S. 472 Z. 5 v. o. lese man D statt C;
Statt der NNr II, V, VII, VIII, IX, X für die Tafeln des Anhangs ist im Texte des ersten Bands zu setzen beziehungsweise Nr XIX, XXII, XXIV, IX, X, XI.

Zum II Bande.

S. 30 Z. 12 v. u. lese man zweimal [cc. 2] statt [dd. 2];
S. 69 Z. 12 v. u. „ „ D B statt A B;
S. 159 Z. 20 v. o. ist die halbe Klammer (überflüssig;
S. 209 Z. 1 v. o. soll es heissen: Ausgleichung ebener Dreiecksnetze;
S. 251 Z. 24 v. o. lese man D statt C;
S. 277 Z. 12 v. o. „ „ d' statt d^1;
S. 306 Z. 17 v. o. „ „ Schema II statt Schema E.

Originalliteratur,

welche der Verfasser dieses Werkes ausser seinen eigenen Schriften benützt hat.

A. Bücher.

Amsler, über einen neuen Planimeter. Schaffhausen, 1856.
Baeyer, Nivellement zwischen Swinemünde und Berlin. Berlin, 1840.
Bessel und **Baeyer**, Gradmessung in Ostpreussen. Berlin, 1838.
Bohnenberger, Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung. Göttingen, 1795.
Breithaupt, Magazin mathematischer Instrumente. Cassel, 1835.
Gauss, Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie. Göttingen, 1844.
Gerling, Ausgleichungsrechnungen der practischen Geometrie. Hamburg, 1843.
Grunert, Beiträge zur reinen und angewandten Mathematik. Brandenburg, 1838.
Hansen, Instruction für die Triangulation von Thüringen. Weimar, 1848.
Hanstadt, Anleitung zur Markscheidekunst. Pesth, 1835.
Helmert, Die Ausgleichungsrechnung etc. Leipzig, 1872.
Jordan, Taschenbuch der practischen Geometrie. Stuttgart, 1873.
Ohm, Grundzüge der Physik als Compendium zu seinen Vorlesungen. Nürnberg, 1854.
Salneuve, Cours de topographie et de géodésie. Paris, 1841.
Schwerd, Die kleine Speyerer Basis. Speyer, 1822.
Stampfer, Anleitung zum Nivelliren. Wien, 1852.
Woltman, Theorie und Gebrauch des hydrometrischen Flügels. Hamburg, 1790.

B. Zeitschriften.

Carl, Repertorium für physicalische Technik und Instrumentenkunde. München.
Crelle, Journal der reinen und angewandten Mathematik. Berlin.
Dingler, polytechnisches Journal. Augsburg.
Encke, Berliner astronomisches Jahrbuch. Berlin.
Grunert, Archiv für Mathematik und Physik. Greifswald.
Jordan, Zeitschrift für Vermessungswesen. Carlsruhe.
Poggendorff, Annalen der Physik und Chemie. Berlin.
Schlömilch und **Witschel**, Zeitschrift für Mathematik und Physik. Leipzig.
Schumacher und **Peters**, Astronomische Nachrichten. Altona.
Sitzungsberichte der k. bayer. Akademie der Wissenschaften. München.
Zeuner und **Bornemann**, der Civilingenieur. Freiberg.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Bauernfeind, Carl Maximilian <<von>>,

Elemente der Vermessungskunde ein Lehrbuch der praktischen Geometrie

Bd.: 2

1879

Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.198-a(2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11841098-3